สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบไฮเปอร์ยีออเดสิก

นางสาว รุ่งศิริ มาศรัตน

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๐

ON HYPERGEODESIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

MISS ROONGSIRI MASARAT

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

Thesis Title On Hypergeodesic Differential Equations

By Miss Roongsiri Masarat

Department Mathematics

Thesis Advisor Dr. Sidney S. Mitchell

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

.... Dean of the Greduate School

(Professor Visid Prachuabmoh Ph.D.)

Thesis Committee

.... Chairman

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

.... Member

(Somporn Sengsee M.Sc.)

.... Member

(Sidney S.Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบไฮเปอร์ยีออเดลิก

ชื่อนิสิต นางสาวรุ่งศิริ มาศรัตน

อาจารย์ที่ปรึกษา Dr. Sidney S.Mitchell

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๐

บทคัดย่อ

สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดลิกคือสมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับที่สอง ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{d^2\psi^i}{dt^2} = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} G^i_{j_1 j_2}(\vec{\psi})\,\frac{d\psi^{j_1}}{dt}\,\frac{d\psi^{j_2}}{dt}$$

โดยที่ $G^i_{j_1 j_2}$ เป็นฟังชันชนิด C^1 บนเซทเปิด D และ D เป็นซับเซทของ R^n สำหรับทุกค่า $i = 1,2,\ldots,n$ คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดลิกจะสอดคล้องสมการฟังชันนัล $\vec{\psi}(\vec{p},\vec{v},\alpha t) = \vec{\psi}(\vec{p},\alpha\vec{v},t)$ โดยที่ $(\vec{p},\vec{v},t) \in R^{2n+1}$, $\alpha \in R$ และมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $\vec{\psi}(\vec{p},\vec{v},0) = \vec{p}$, $\frac{d\vec{\psi}}{dt}(\vec{p},\vec{v},0) = \vec{v}$

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาถึงสมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับที่สามที่เป็นแอนนาไลติก $\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = H^i(\vec{\psi},\dot{\vec{\psi}},\ddot{\vec{\psi}},t)$ มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = p^i$, $\frac{d}{dt}\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = u^i$, $\frac{d^2}{dt^2}\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = v^i$

สำหรับทุกค่า $i = 1,\ldots,n$ และจะหาสมการซึ่งมีคุณสมบัติคล้ายกับสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดลิก

นิยาม $\alpha\vec{u} = (\alpha u^1,\ldots,\alpha u^n)$, $\alpha\vec{v} = (\alpha^2 v^1,\ldots,\alpha^2 v^n)$ โดยที่ $\alpha \in R$ จากทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวกับสมการดิฟเฟอเรนเชียล จะมีคำตอบ $\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t)$ ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = H^i(\vec{\psi},\dot{\vec{\psi}},\ddot{\vec{\psi}},t)$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังข้างบน เพียงคำตอบเดียว

เท่านั้น เราจะตั้งสมมติฐานว่า $\psi^{i}(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t)$ สอดคล้องสมการฟังชันนัล $\psi^{i}(\vec{p},\alpha\vec{u},\alpha\vec{v},t) = \psi^{i}(\vec{p},\vec{u},\vec{v},f(\alpha,t))$ โดยที่ $(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t) \in W$ และ W เป็นอาณาบริเวณรอบ $(\vec{0},\vec{0},\vec{0},0)$, $f(\alpha,t)$ เป็นฟังชันจำนวนจริง ที่เป็นแอนนาไลติกฟังชันสำหรับทุก ๆ $(\alpha,t) \in U$ โดย U เป็นอาณาบริเวณรอบ $(0,0)$ ยิ่งไปกว่านั้นเราสมมติว่า $f(\alpha,0) = f(0,t) = 0$ จากข้อสมมติฐานเหล่านี้ เราสามารถสรุปได้ว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับที่สามชนิดนี้จะต้องอยู่ในรูป

$$\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} G^i_{j_1j_2j_3}(\vec{\psi})\frac{d\psi^{j_1}}{dt}\frac{d\psi^{j_2}}{dt}\frac{d\psi^{j_3}}{dt} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n} K^i_{j_1k_1}(\vec{\psi})\frac{d^2\psi^{k_1}}{dt^2}\frac{d\psi^{j_1}}{dt}$$

สำหรับทุก ๆ ค่า $i = 1,\ldots,n$ และ $f(\alpha,t) = \alpha t$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลชนิดนี้เรียกว่า " สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบไฮเปอร์ยีออเดสิก " เนื่องจากว่าคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบนี้คล้องตามสมการฟังชั่นนัล ซึ่งมีรูปแบบคล้ายกับสมการฟังชันนัลที่คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดสิกสอดคล้อง

ในทางกลับกัน สำหรับแต่ละค่า $i = 1,\ldots,n$ ψ^i สอดคล้องสมการ

$$\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} G^i_{j_1j_2j_3}(\vec{\psi})\frac{d\psi^{j_1}}{dt}\frac{d\psi^{j_2}}{dt}\frac{d\psi^{j_3}}{dt} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n} K^i_{k_1j_1}(\vec{\psi})\frac{d^2\psi^{k_1}}{dt^2}\frac{d\psi^{j_1}}{dt}$$

โดยที่ $G^i_{j_1j_2j_3}$, $K^i_{k_1j_1}$ เป็นแอนนาไลติกฟังชันบนซับเซท D ของ R^n จะได้ว่า ψ^i ต้องสอดคล้องสมการฟังชันนัล $\psi^{i}(\vec{p},\alpha\vec{u},\alpha\vec{v},t) = \psi^{i}(\vec{p},\vec{u},\vec{v},\alpha t)$

ยิ่งไปกว่านี้ เราจะแสดงว่าจากการที่คำตอบ ψ^i คล้องตามสมการฟังชันนัลดังกล่าวแล้ว คำตอบนี้จะต้องมีคุณสมบัติทางเรขาคณิตคล้ายกับคุณสมบัติของคำตอบของสมการแบบยีออเดสิก

Thesis Title	On Hypergeodesic Differential Equations
Name	Miss Roongsiri Masarat
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell
Department	Mathematics
Academic Year	1977

ABSTRACT

The geodesic differential equation is a second order ordinary differential equation of the form

$$\frac{d^2\psi^i}{dt^2} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} G^i_{j_1 j_2}(\vec{\psi}) \frac{d\psi^{j_1}}{dt} \frac{d\psi^{j_2}}{dt}$$

where $G^i_{j_1 j_2}$ is c^1 function on an open subset D of R^n for all $i = 1,\ldots,n$. Solutions of the geodesic differential equation satisfy the functional equation $\vec{\psi}(\vec{p},\vec{v},\alpha t) = \vec{\psi}(\vec{p},\alpha\vec{v},t)$ where $(\vec{p},\vec{v},t) \in R^{2n+1}$, $\alpha \in R$ and $\vec{\psi}(\vec{p},\vec{v},0) = \vec{p}$, $\frac{d\vec{\psi}}{dt}(\vec{p},\vec{v},0) = \vec{v}$ are the initial conditions.

This thesis deals with analytic third order ordinary differential equations $\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = H^i(\vec{\psi},\dot{\vec{\psi}},\ddot{\vec{\psi}},t)$ with initial conditions $\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = p^i$, $\frac{d\psi^i}{dt}(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = u^i$, $\frac{d^2\psi^i}{dt^2}(\vec{p},\vec{u},\vec{v},0) = v^i$ for all $i = 1,\ldots,n$ and finds an equation with properties similar to the geodesic differential equation. Define $\alpha u = (\alpha u^1,\ldots,\alpha u^n)$, $\alpha\vec{v} = (\alpha^2 v^1,\ldots,\alpha^2 v^n)$, $\alpha \in R$. By the Fundamental Theorem of

Ordinary Differential Equations, there exists a unique solution $\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t)$ to the above differential equation with given initial conditions. We assume that $\psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t)$ satisfies the functional equation $\psi^i(\vec{p},\alpha\vec{u},\alpha\vec{v},t) = \psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},f(\alpha,t))$ where $(\vec{p},\vec{u},\vec{v},t) \in W$, W is some neighbourhood of $(\vec{0},\vec{0},\vec{0},0)$, and $f(\alpha,t)$ is a real valued function which is analytic for all $(\alpha,t) \in U$, where U is a neighbourhood of $(0,0)$. We also assume that $f(\alpha,0) = f(0,t) = 0$ where defined. From this assumption we can conclude that the third order ordinary differential equation must be of the form

$$\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} G^i_{j_1j_2j_3}(\vec{\psi})\,\frac{d\psi^{j_1}}{dt}\frac{d\psi^{j_2}}{dt}\frac{d\psi^{j_3}}{dt} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n} K^i_{j_1k_1}(\vec{\psi})\,\frac{d^2\psi^{k_1}}{dt^2}\frac{d\psi^{j_1}}{dt}$$

for all $i = 1,\dots,n$ and that $f(\alpha,t)$ must equal αt.

Differential equations of this type we call "Hypergeodesic Differential Equation" because the functional equation they satisfy is similar to the one that the solutions to the geodesic equations satisfy.

Conversely, if for each $i = 1,2,\dots,n$, ψ^i satisfies

$$\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} G^i_{j_1j_2j_3}(\vec{\psi})\frac{d\psi^{j_1}}{dt}\frac{d\psi^{j_2}}{dt}\frac{d\psi^{j_3}}{dt} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n} K^i_{k_1j_1}(\vec{\psi})\frac{d^2\psi^{k_1}}{dt^2}\frac{d\psi^{j_1}}{dt}$$

where $G^i_{j_1j_2j_3}$, $K^i_{k_1j_1}$ are analytic on open subset D of R^n, then ψ^i must be satisfy the functional equation $\psi^i(\vec{p},\alpha\vec{u},\alpha\vec{v},t) = \psi^i(\vec{p},\vec{u},\vec{v},\alpha t)$.

Furthermore, we show that as a result of satisfying this functional equation the solutions of the hypergeodesic differential equation have geometric properties similar to geodesics.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to express my sincere and deep gratitude to my supervisor, Dr. Sidney S. Mitchell whose advice and patience help me greatly in solving many problems about the preparation of this thesis. He is always kind and sympathetic in trying to listen to my problems and give invaluable advice both in the mathematical field and in the writing of this thesis in proper language form. Without his patient help, this thesis would, without doubt, not be completed at all.

TABLE OF CONTENTS