บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

จากการวิจัยนี้สามารถที่จะแบ่งแยกทฤษฎีที่เกี่ยวข้องตามขั้นตอน และจุดประสงค์ของการวิจัยได้ 3 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

1. <u>การหาคำตอบที่ดีที่สุดของจำนวนเครื่องบินลำเลียง</u>

1.1 <u>การพยากรณ์ความต้องการในอนาคต</u>

โดยการที่ใช้การเกลาการกระเพื่อมของอนุกรมเวลา (Smoothing of Time Series) เพราะข้อมูลของการลำเลียงทางอากาศที่ได้มานั้นเป็นข้อมูลที่ได้จัดให้เรียงกันตามลำดับของเวลาที่เกิดขึ้น เรียกว่าอนุกรมเวลา ดังนั้นข้อมูลดังกล่าวย่อมมีการกระเพื่อมขึ้นลง ซึ่งเกิดจากเหตุการณ์ต่าง ๆ กัน "จึงควรที่จะนำมาเกลาการกระเพื่อมเสียก่อน แล้วจึงจะทำการพยากรณ์จะทำให้การพยากรณ์ได้ผลคาดคะเนใกล้เคียงกว่าจะพยากรณ์จากข้อมูลดิบ วิธีเกลาการกระเพื่อมที่นิยมใช้กันเสมอ คือ วิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่"[1]

<u>วิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่</u> (Moving Average) วิธีนี้พยายามเกลาการกระเพื่อมขึ้นลง ซึ่งเกิดจากเหตุการณ์ไม่ปกติ โดยค่อย ๆ เฉลี่ยข้อมูลทีละหมู่ โดยมักใช้มัชฌิมเลขคณิต หมู่หนึ่ง ๆ จะมีกี่ข้อมูลก็ได้ ในการเฉลี่ยจะค่อย ๆ ทิ้งข้อมูลต้นทีละข้อมูลแล้วใช้ข้อมูลถัดไปแทนที่

---

[1] ปัญญา เสียงเจริญ, การใช้ระเบียบวิธีสถิติ แก้ปัญหาการลำเลียงทางอากาศของกองทัพอากาศไทย (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนกสถิติ จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2517) หน้า 6.

กำหนดให้ N เป็นจำนวนของข้อมูลในกลุ่มที่จะพิจารณา หรืออัตราการตอบสนองที่ใช้

Y_i เป็นค่าถัวเฉลี่ยของข้อมูลที่ใหม่ที่สุด N ค่า ซึ่งคำนวณเมื่อถึงข้อมูลที่ $i + N - 1$

Y'_i เป็นข้อมูลลำดับที่ i

ดังนั้นเมื่อ Y'_i มี i ข้อมูล, Y_i จะมีเพียง $i-N+1$ ข้อมูล

เช่นข้อมูลเดิม คือ Y'_i มี 36 ข้อมูล เมื่อเกลาการกระเพื่อมด้วย $N=5$ แล้วจะได้ข้อมูลที่เป็นค่าเฉลี่ย คือ Y_i เท่ากับ $36-N+1 = 36-5+1 = 32$ ข้อมูล

หรือเขียนค่า Y_i อยู่ในรูปของ

$$Y_i = \frac{Y'_i + Y'_{i+1} + Y'_{i+2} + \dots + Y'_{i+N-1}}{N}$$

เช่นมีข้อมูลชุดหนึ่ง $Y'_1 = 4,\ Y'_2 = 6,\ Y'_3 = 4,\ Y'_4 = 3,\ Y'_5 = 7,\ Y'_6 = 5,\ Y'_7 = 8$

กำหนดถัวเฉลี่ยกลุ่มละ ๕ ข้อมูล คือ $N = 5$

$$Y_1 = \frac{Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 + Y'_4 + Y'_5}{5}$$

004445

$$= \frac{4+6+4+3+7}{5} = 4.8$$

$$Y_2 = \frac{Y'_2 + Y'_3 + Y'_4 + Y'_5 + Y'_6}{5}$$

$$= \frac{6+4+3+7+5}{5} = 5$$

$$Y_3 = \frac{Y'_3 + Y'_4 + Y'_5 + Y'_6 + Y'_7}{5}$$

$$= \frac{4+3+7+5+8}{5} = 5.4$$

จะเห็นได้ว่าข้อมูลเดิม 7 ข้อมูล เมื่อเกลาการกระเพื่อมด้วย $N = 5$ แล้วจะได้ข้อมูลที่ผ่านการเกลากระเพื่อมเฉลี่ยของข้อมูลเดิม $= 7-5+1 = 3$ ข้อมูล

<u>วิธีพยากรณ์</u> ข้อมูลซึ่งเป็นชนิดอนุกรมเวลานั้น มีวิธีพยากรณ์ที่น่าสนใจอยู่ 2 วิธี คือ วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล (Exponentially

Weighted Moving Averages) กับวิธีลิเนียร์ รีเกรสชั่น (Linear Regression)

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกโพเนนเชียล มีวิธีคล้ายคลึงกับวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่ได้กล่าวมาแล้ว อัตราการตอบสนอง (Rate of Response) (การเลือกค่า N มาเฉลี่ย , $\frac{1}{N}$) ของวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ก็เหมือนกับตัวถ่วงน้ำหนัก (Smoothing Constant, A)ของวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกโพเนนเชียล แต่ไม่เท่ากันทีเดียวกัน เพราะตัวถ่วงน้ำหนัก (A) นี้เมื่อเวลาผ่านไปน้ำหนักที่ให้ต่อข้อมูลก่อน ๆ จะลดลงอย่างเรขาคณิต สมมุติว่าถ้าตัวถ่วงน้ำหนัก (A) = 0.2 ข้อมูลใหม่จะมีน้ำหนัก 0.2 ข้อมูลก่อน ๆ จะมีน้ำหนักเป็น $(1-0.2)$, $(1-0.2)^2$, $(1-0.2)^3$,.... เรื่อย ๆ ไปตามลำดับ [2]

จะเห็นได้ว่าการพยากรณ์วิธีนี้ ให้ความสำคัญกับข้อมูลล่าสุดที่จะนำมาพยากรณ์ ถ้าข้อมูลล่าสุดมีความผิดปกติมาก การพยากรณ์ก็ผิดพลาดมาก ดังนั้นในการพยากรณ์เหตุการณ์ล่วงหน้าในระยะยาว กับกรณีซึ่งมีข้อมูลน้อย การพยากรณ์ด้วยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกโพเนนเชียลนี้จึงไม่ได้ผลดีเท่าที่ควร จึงควรหันมาสนใจวิธีพยากรณ์แบบลิเนียร์ รีเกรสชั่น ดีกว่า เพราะเป็นวิธีที่ง่าย ให้ความสำคัญต่อข้อมูลทุกข้อมูลเหมือนกันหมด โดยเฉพาะเมื่อข้อมูลเดิมนั้นได้ผ่านการเกลาการกระเพื่อมเพื่อปรับข้อมูลที่ผิดปกติโดยวิธีถัวเฉลี่ยมาขั้นหนึ่งก่อนแล้ว และนำมาพยากรณ์ด้วยวิธีนี้จะให้ความถูกต้องดีพอสมควร [3]

<u>ลิเนียร์ รีเกรสชั่น</u> (Linear Regression) จากการวิเคราะห์ข้อมูลขั้นมูลฐาน ถ้านำข้อมูลมาเขียนลงบนแผนภูมิ (Graph) โดยให้แกนทางระดับ

---

[2] สมชาย วยาจุต, การพยากรณ์เงินฝากธนาคาร โดยวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนกสถิติ จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2515) หน้า 8.

[3] ปัญญา เสียงเจริญ เรื่องเดิม, หน้า 8.

(X-axis) แทนการเปลี่ยนแปลงของเวลา และแกนทางดิ่ง (Y-axis) แทนปริมาณที่เกิดขึ้นตามเวลา

วิธีจะทำนายความสัมพันธ์ของ Y ที่เกี่ยวข้องกับ X นั้น เราใช้วิธีการของลิเนียร์ รีเกรสชั่น โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ดังนี้

$$Y = A + BX + \epsilon \qquad \text{------(1)}$$

โดยที่ A เป็นค่าคงที่ (Constant) ที่จะหาค่าได้จากข้อมูล

B เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y เทียบต่อ X

ϵ เป็นค่าผิดพลาด (Error)

ถ้ากำหนดให้แบบจำลองดังกล่าว เป็นแบบจำลองที่แน่นอน Determiniatic Mathematical Model) กล่าวคือ ถ้าเรากำหนดค่า X ให้ 1 ค่า แทนค่าในสมการ (1) จะได้ค่า Y ที่แน่นอน 1 ค่า (ไม่มี Error $\epsilon = 0$)

ในการที่จะหาว่าเส้นตรงในสมการ (1) เป็นเส้นตรงที่เหมาะสมดี (Good Fitting Line) กับข้อมูลชุดที่นำมาศึกษาหรือไม่นั้น ในทางปฏิบัติก็จะต้องเลื่อนเส้นตรงนี้ขึ้นลงเพื่อทำตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุด จนกระทั่งได้เส้นรีเกรส (Regression Line)

$$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}X \qquad \text{------(2)}$$

โดยใช้ความรู้เรื่อง Partial Differentiation ในวิธีที่เรียกว่า Method of Least Squares จะหาค่าของ A และ B ได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{n \Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i}{n \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} \\ \hat{A} &= \frac{\Sigma Y_i}{n} - \hat{B}\frac{\Sigma X_i}{n} \end{aligned}\right\} \qquad \text{------(3)}$$

ซึ่ง Σ หมายถึง $\sum_{i=1}^{n}$

ในทางทฤษฎีถือว่า เส้นตรงในสมการ (2) มีพฤติภาพสมจริงตามสมการ(3) ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ดีที่สุดที่จะใช้แทนการเคลื่อนไหว และชี้ให้แนวโน้มของกลุ่มของจุดที่ได้

มาจากข้อมูล หรือกล่าวได้ว่า $\hat{Y}$ นี้ก็คือค่าเฉลี่ยของ Y_i นั่นเอง ดังนั้นจึงสามารถนำสมการ (2) มาใช้พยากรณ์เหตุการณ์ในอนาคตได้ดังกล่าว

1.2 การแก้ปัญหา

จุดประสงค์ของการวิจัยในเรื่องนี้มุ่งที่จะหาคำตอบที่ดีที่สุด ในการที่จะใช้เครื่องบินลำเลียงหลัก ที่นำมาพิจารณาคือ C-47, C-123B และ C-123K ให้สามารถใช้ได้ตามขีดจำกัดของความต้องการในภารกิจจากการพยากรณ์ในอนาคต เช่น ให้ได้ชั่วโมงบินครบตามต้องการ น้ำหนักพัสดุบรรทุกหรือผู้โดยสารตามกำหนดโดยที่พิจารณาหาค่าพฤติภาพเป้าหมายของค่าใช้จ่ายต่ำสุดของเครื่องบินทั้งหมดที่นำมาศึกษา ให้สมจริงกับพฤติภาพบังคับดังกล่าว จากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ฉับข้อมูลที่ใช้ศึกษานี้ จะเห็นได้ว่าลักษณะของปัญหาเป็นแบบการจัดโครงการเชิงเส้น (Linear Programming) กล่าวคือ เราต้องการพฤติภาพที่จะทำให้เกิดค่าต่ำสุด (Minimum) ขึ้นกับตัวแปรในสัมพันธภาพที่เราพิจารณา

การแก้ปัญหาแบบการจัดโครงการทางเส้นนั้น มีวิธีการที่น่าสนใจอยู่ 2 วิธี

วิธีกราฟ (Graphical Method) หมายถึง การแปลสัมพันธภาพของปัญหาการจัดโครงการเชิงเส้น ออกเป็นความหมายทางเรขาคณิต เป็นวิธีง่าย ๆ ใช้แก้ปัญหาที่มีเพียง 2 หรือ 3 ตัวเปลี่ยน และมีสัมพันธภาพที่ไม่ยุ่งยาก โดยปกติแล้วไม่ค่อยเป็นที่นิยมใช้นัก

วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method) เป็นเทคนิคของการหาคำตอบที่ดีที่สุด (Optimal Solution) ของสัมพันธภาพที่มีหลายตัวเปลี่ยน เทคนิคนี้ที่นิยมใช้กันมากเป็นทฤษฎีของ Dantzig เรียกว่า Simplex Algorithm ซึ่งประยุกต์มาจาก Gauss-Jordan Elimination Method

โดยทั่วไปเรามักใช้กรรมวิธีแบบซิมเพล็กซ์หาคำตอบของชุดสมการที่อยู่ในรูป $[A]\cdot[X] = [b]$ ซึ่งกรรมวิธีแบบกราฟไม่สามารถที่จะใช้แก้ปัญหาได้ และจะใช้ได้ในกรณีที่ $[b]$ ไม่เป็นจำนวนลบ (Non-negative) ใด ๆ

ชุดแบบจำลองของปัญหาการจัดโครงการเชิงเส้น เราสามารถเขียนเป็นรูปทั่วไปได้ดังนี้

	ปัญหาค่าต่ำสุด	ปัญหาค่าสูงสุด
พฤติภาพตัวแปร	$[X] \geq 0$	$[X] \geq 0$
พฤติภาพบังคับ	$[A]\ [X] \geq [b]$	$[A]\ [X] \leq [b]$
พฤติภาพเป้าหมาย	$[C]\ [X] = \min.$	$[C]\ [X] = \max.$

โดยที่ $[A]$ คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในชุดสมการข้อกำหนดเป็น $m \times n$

$[X]$ คือ เมตริกซ์แถวตั้ง (Column Matrix) ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรต่าง ๆ ของชุดสมการข้อกำหนด (Restriction) มีอันดับเป็น $n \times 1$

$[b]$ คือ เมตริกซ์แถวตั้ง ที่มีสมาชิกเป็นขีดจำกัด (Constraints) ของชุดสมการข้อกำหนด มีอันดับเป็น $n \times 1$

$[c]$ คือ เมตริกซ์แถวนอน (Row Matrix) ที่มีสมาชิกเป็นค่า (Costs) ของตัวแปร มีขนาดเป็น $1 \times n$

ในการแก้ปัญหาโครงการเชิงเส้นด้วยกรรมวิธีซิมเพล็กซ์ เราต้องนำชุดสมการข้อกำหนดของปัญหามาสร้างตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex Tableau) เสียก่อน โดยมีหลักการดังนี้

ปัญหาค่าต่ำสุด สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก (Initial Simplex Tableau) ได้ว่า

$A'_{m \times n}$	$I_{n \times n}$	$C'_{n \times 1}$
$-b'_{1 \times m}$	$O_{1 \times n}$	$O_{1 \times 1}$

(ตัวเลขชี้ฐาน (Subscript) เป็นตัวเลขบอกขนาดของเมตริกซ์)

ส่วนรายละเอียดมีดังนี้

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad j \\
i &
\begin{array}{|cccc|ccc|c|}
\hline
A_{11} & A_{21} & \cdots\cdots & A_{m1} & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 & C_1 \\
A_{12} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{m2} & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 & C_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{1n} & A_{2n} & \cdots\cdots & A_{mn} & 0 & 0 \cdots\cdots & 1 & C_n \\
\hline
-b_1 & -b_2 & \cdots\cdots & -b_m & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Indicators

ในที่นี้ I คือ Unit หรือ Identity Matrix

O คือ Zero Matrix

จากนั้นก็ทำการคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีกรรมของซิมเพล็กซ์ ซึ่งมีขั้นตอนต่อไปนี้

1. แปลความหมายของปัญหาให้อยู่ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เพื่อกำหนด [A] , [C] และ [b] เข้าไปในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก

2. เลือก Indicator ที่เป็นลบ สมมุติว่าอยู่ใน คอลัมน์ที่J เรียกคอลัมน์ที่ J นี้ว่า Pivotal Column

3. เลือกแถว I ในคอลัมน์ J นั้น ซึ่ง $C_I/A_{IJ} < C_i/A_{iJ}$ สำหรับทุก ๆ ค่า i ซึ่ง $A_{iJ} > 0$ เรียกแถว I นี้ว่า Pivotal Row และ A_{IJ} เรียกว่า Pivot

4. หารแถวที่ I ของตารางเก่า (ตารางเริ่มแรก) ด้วย Pivot A_{IJ} และใส่ผลลัพธ์ลงไปในแถวที่ I ของตารางใหม่

5. เอาค่า A_{iJ} ของตารางเก่าคูณกับแถวที่ I ของตารางใหม่ แล้วนำไปลบแถวที่ i ของตารางเก่า แล้วใส่ผลลัพธ์ที่ได้ในแถวที่ i ของตารางใหม่

6. เมื่อได้ตารางใหม่ครบแล้วก็สังเกตดูอีกว่า มี Indicator ตัวใดยังเป็นลบอยู่อีก ถ้ามีก็กระทำการตามข้อ 2. ต่อไปเรื่อย ๆ

7. ถ้าไม่มี Indicator ตัวใดเป็นลบเหลืออยู่ แสดงว่าได้ Optimum Solution แล้ว สามารถจะอ่านคำตอบออกมาได้

ค่าของ X_i อ่านจากค่าของเมตริกซ์ O_{1xn} ที่เกิดขึ้นใหม่ของตารางสุดท้าย

ค่าของพฤติภาพเป้าหมายต่ำสุด (Minimum Objective Function) ดูได้จากเมตริกซ์ $O_{1\times 1}$ ที่เกิดขึ้นใหม่ของตารางสุดท้าย

ปัญหาค่าสูงสุด มีตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกเป็น

$A_{m\times n}$	$I_{m\times m}$	$b_{m\times 1}$
$-C_{1\times n}$	$O_{1\times m}$	$O_{1\times 1}$

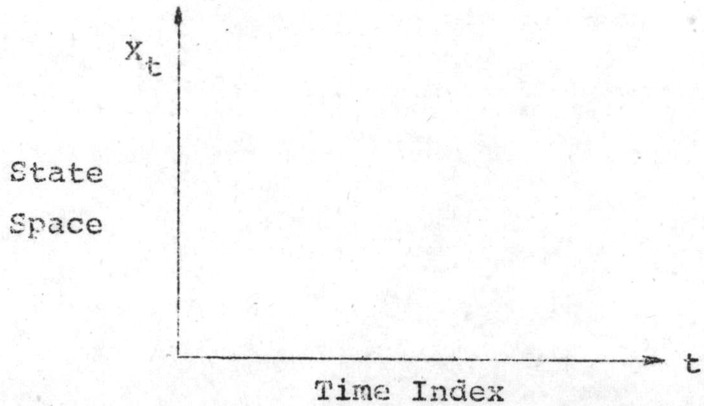
สำหรับวิธีการในการคำนวณหาคำตอบ กระทำตามลำดับขั้น เช่นเดียวกับปัญหาค่าต่ำสุด แต่ค่าของ X_i อ่านจากค่าของ b_i และค่าพฤติภาพเป้าหมายสูงสุด (Maximum Objective Function) ดูได้จากตำแหน่งของเมตริกซ์ $O_{1\times 1}$ ของตารางสุดท้าย

2. การคาดคะเนส่วนแบ่งชั่วโมงบินสำหรับอนาคต

2.1 Markov Process

ขบวนการมาร์คอฟเป็นส่วนหนึ่งของ Probabilistic หรือ Stochastic Model เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน (Decision under Uncertainty) ค่าของตัวแปร (Variable) ต้องมีความน่าจะเป็น (Probability) เข้ามาเกี่ยวข้องด้วยเสมอ

ส่วนสำคัญของขบวนการมาร์คอฟประกอบด้วยฟังค์ชั่นของ State Space (X_t) และ Time Index (t)



ค่าของ Time Index เป็นได้ทั้ง Discrete และ Continuous

เมื่อเป็น Discrete Parameter $\{X(t), t = 1,2,3 \ldots\}$[4]

และ Continuous Parameter $\{X(t), t \geq 0\}$

ในเมื่อชุด (Set) ของเวลา n เป็น $t_1 < t_2 < t_3 \ldots . < t_n$

State Space เป็นค่าที่ได้ออกมา (Outcome) หรือค่าที่จะเป็นไปได้ (Possible Value) ในแต่ละครั้งที่เกิด ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลาจาก Time Index

State Space จะเป็น Discrete ในกรณีที่เกิดจากภาวะที่มีการสิ้นสุด (Finite States) หรือภาวะที่ไม่สิ้นสุด (Infinite States) ที่สามารถจะนับจำนวนของภาวะนั้นได้ ถ้านอกจากกฎเกณฑ์นี้ถือว่าเป็น Continuous

ขบวนการมาร์คอฟสามารถแบ่งออกได้ตามข้อกำหนดของ

1. ลักษณะ (Nature) ของชุด Time Index ของขบวนการที่เกิดขึ้น
2. ลักษณะ (Nature) ของ State Space ของขบวนการที่เกิดขึ้น

---

[4] Emanuel Parzen, Stochastic Process (San Francisco : Holden-Day, Inc. 1962), p. 188.

		State Space	
		Discrete	Continuous
Nature of Time Index	Discrete	Discrete Parameter Markov Chain	Discrete Parameter Markov Process
	Continuous	Continuous Parameter Markov Chain	Continuous Parameter Markov Process

นอกจากนั้นยังมีนิยาม (Definition) ของขบวนการมาร์คอฟที่ควรสนใจ คือ

<u>นิยาม</u> State Space ของขบวนการมาร์คอฟเป็นกลุ่มของภาวะทั้งหมดของระบบ

<u>นิยาม</u> คุณสมบัติของมาร์คอฟ : ในการที่กำหนดภาวะปัจจุบัน (Present State) ของระบบให้ ภาวะอนาคต (Future State) จะขึ้นอยู่กับภาวะปัจจุบันเพียงอย่างเดียว ไม่ขึ้นอยู่กับภาวะอดีต (Past State) ก่อนหน้านี้แต่อย่างใด

<u>นิยาม</u> ความน่าจะเป็นที่ไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Probability) เป็นความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจากการทดลอง n ครั้ง (Trial n) ของระบบ สมมุติว่าที่ภาวะ j ได้ E_j

$$P_j^{(n)} = Pr.\{X_n = E_j\}$$ [5]

Initial Uncondition Probability = $P_j^{(0)}$

ถ้าการทดลอง (Trial) ครั้งก่อนของระบบเป็นภาวะ i

---

5 วิจิตร ตัณฑสุทธิ์, <u>Markov Process</u> คำบรรยายวิชา Advanced Operations Research แผนกวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519 (จดบันทึก)

การทดลองในปัจจุบันของระบบเป็นภาวะ j

นั่นคือ

$$X_{n-1} = i$$

$$X_n = j$$

เราจะได้ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข (Condition Probability) ของระบบจากการทดลอง n ครั้ง จากภาวะ i ไป j คือ

$$P_{ij}^{(n)} = Pr. \left(X_n = E_j \mid X_{n-1} = E_i \right)$$

จากนั้นสามารถเปลี่ยนความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้น ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ซึ่งเรียกกันว่าเมตริกซ์ของความเปลี่ยนแปลง (Transition Matrix)ของขบวนการมาร์คอฟ

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{11}^n & P_{12}^n & \cdots\cdots & P_{1m}^n \\ P_{21}^n & P_{22}^n & \cdots\cdots & P_{2m}^n \\ \vdots & & & \\ P_{m1}^n & P_{m2}^n & \cdots\cdots & P_{mm}^n \end{pmatrix}$$

ในขบวนการมาร์คอฟมักจะนิยมให้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลง ไม่ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งของการทดลอง ซึ่งเรียกว่า "Homogeneous Markov Process" จะทดลองกี่ครั้งก็คงใช้เมตริกซ์เดิม

จะได้

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2m} \\ \vdots & & & \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots\cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

2.2 n-Steps Transition Probability Matrix

จากการกำหนดฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงจากภาวะ i ไปภาวะ j เมื่อมีการเคลื่อนที่ไป n steps

$$P_{ij}^{n} = Pr.\{X_n = E_j \mid X_o = E_i\}$$ [6]

(เมตริกซ์ที่เกิดตามฟังก์ชั่นนี้เป็น Homogeneous Markov Process)

ในการที่มีการเคลื่อนที่ไป n steps นี้ ระบบอาจมีการเปลี่ยนแปลง E_i ไป E_j ได้หลายวิธี (paths) จากตัวอย่างของการเคลื่อนที่ 2 steps ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงจาก E_i ไป E_j โดยที่

$$E_i \longrightarrow E_k \longrightarrow E_j \text{ , for } k = 1,2,3....r$$

โดยถือว่าเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น จาก E_i ไป E_k ไม่ขึ้นอยู่กับ (Independent) เหตุการณ์จาก E_k ไป E_j

$$\therefore Pr.\{E_i \to E_k \to E_j\} = Pr.\{E_i \to E_k \text{ and } E_k \to E_j\}$$
$$= Pr.\{E_i \to E_k\} \cdot Pr.\{E_k \to E_j\}$$

จากข้อกำหนดดังกล่าว

$$\left.\begin{array}{l} E_i \to E_1 \to E_j \\ E_i \to E_2 \to E_j \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ E_i \to E_r \to E_j \end{array}\right\} \text{ r paths}$$

---

6 วิจิตร ตัณฑสุทธิ์ เรื่องเดิม (จดบันทึก)

เมื่อกำหนดเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้ r วิถี(paths) นี้ จะเกิดขึ้นพร้อม ๆ กันไม่ได้ (Mutually Exclusive) เมื่อเกิดเหตุการณ์หนึ่งขึ้นแล้ว เหตุการณ์อื่นจะไม่เกิดขึ้นในขณะเดียวกัน ดังนั้น $P_{ij}^{(2)}$ จะมีค่าเท่ากับผลรวมของความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจากวิถี (paths) ที่แตกต่างกันนี้

$$\therefore \quad P_{ij}^{(2)} = P_{i1} \cdot P_{1j} + P_{i2} \cdot P_{2j} + \ldots + P_{ir} \cdot P_{rj}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P_{ij}^{(3)} = P_{i1} \cdot P_{1j}^{(2)} + P_{i2} \cdot P_{2j}^{(2)} + \ldots + P_{ir} \cdot P_{rj}^{(2)}$$

หรือ $$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ik} \cdot P_{kj}$$ [7]

$$P^{(n)} = P.P.P\ldots P = P.P^{n-1} = P^n$$

The n-steps Transition Probability Matrix can be obtain by computing the nth power of the one step Transition Probability Matrix ... However when n is large, such computations are often tedious, and furthermore, round-off errors may cause inaccuracies

2.3 <u>การวิเคราะห์มาร์คอฟ</u>

การวิเคราะห์มาร์คอฟ เป็นวิธีการอย่างหนึ่งที่ใช้วิเคราะห์ความเคลื่อนไหวของตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่ง เพื่อคาดคะเนล่วงหน้าถึงความเคลื่อนไหวในอนาคต ของตัวแปรผันนั้น

---

[7] F.S. Hiller and G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research (San Francisco : Holden-Day, Inc.1972), P.406.

การวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่ง (First-order Markov Analysis) นั้น ตั้งอยู่บนข้อสมมุติที่ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ถัดไป ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของเหตุการณ์สุดท้าย และไม่ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมซึ่งเกิดขึ้นก่อนหน้านี้แต่อย่างใด

ในการนำการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับหนึ่งมาใช้นั้น มีความประสงค์ในการคาดคะเนล่วงหน้าสำหรับงวดอนาคต โดยมักจะตั้งสมมุติฐานว่า เสถียรภาพของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (Stability of Transition Probability Matrix) ค่อนข้างจะแน่นอน และได้มีการพิสูจน์กันแล้วว่าเป็นวิธีการที่ใช้คาดคะเนล่วงหน้าเกี่ยวกับพฤติกรรม (Behavior) ในอนาคตที่เชื่อถือได้

เพื่อให้เข้าใจได้โดยง่ายจะได้ยกตัวอย่างของการนำการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่งมาใช้ในการคาดคะเนล่วงหน้าของส่วนแบ่งตลาดในอนาคต ประกอบทฤษฎีในการวิเคราะห์ปัญหา ดังนี้

<u>ตัวอย่าง I</u> สมมุติว่าในเมือง ๆ หนึ่ง มีผู้ผลิตแก๊สสำหรับหุงต้มอยู่ 3 ราย คือ X,Y และ Z ผู้ผลิตทั้ง 3 นี้ จัดจำหน่ายแก๊สหุงต้มทั้งหมดที่ใช้ในเมืองนั้น ผู้ผลิตทั้ง 3 ต่างก็รู้ดีว่าลูกค้ามีการสับเปลี่ยนการใช้แก๊สจากผู้ผลิตรายหนึ่งไปยังอีกรายหนึ่งอยู่เสมอ อันเป็นผลมาจากความสะดวกสบายในการใช้บริการ หรือผลจากพฤติกรรมอื่น ๆ สมมุติว่ามีการบันทึกข้อมูลความเคลื่อนไหวของลูกค้าที่มีการสับเปลี่ยนจากผู้ผลิตรายหนึ่งไปยังผู้ผลิตอีกรายหนึ่งอยู่ตลอดเวลา สำหรับงวดระยะเวลาหนึ่ง (6 เดือน) และสามารถที่จะกำหนดการได้มาและการสูญเสียลูกค้าแก่คู่แข่งขันทั้งหมดอยู่ในรูปของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

คือ

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} X & \quad Y & \quad Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array}$$

การสงวนไว้ และ การได้มา →

การสงวนไว้ และ การสูญเสีย ↓

โดยในที่นี้กำหนดให้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้ค่อนข้างจะแน่นอน และจากการบันทึกข้อมูลได้ส่วนแบ่งของตลาดในงวดแรก ดังนี้

ผู้ผลิต	X	55 %	=	0.55
ผู้ผลิต	Y	35 %	=	0.35
ผู้ผลิต	Z	10 %	=	0.10
		100 %		1

จากนั้นเราสามารถจะคาดคะเนส่วนแบ่งตลาดสำหรับงวดอนาคตได้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 (Original Transition Prob.Matrix)×(Period n,Prob.Market Shares)

= (Period n+1, Prob. Market Shares)[8]

∴ เราสามารถที่จะหาส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 2 ได้ ดังนี้

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม × ส่วนแบ่งตลาดในงวดที่ 1 = ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 2

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}\begin{bmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.35 \\ 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.505 \\ 0.396 \\ 0.099 \end{bmatrix}$$

ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 3 หาได้จาก

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม × ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 2 = ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 3

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}\begin{bmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.505 \\ 0.396 \\ 0.099 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.486 \\ 0.416 \\ 0.098 \end{bmatrix}$$

---

[8] Robert J. Thierauf and Robert C. Klekamp Decision Making Through Operation Research (New York : John Wiley and Sons, Inc, 1975) p.287.

และในทำนองเดียวกัน ก็สามารถที่จะนำส่วนแบ่งของตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 4,5,6 และต่อ ๆ ไปได้

วิธีที่ 2 (Original Transition Prob.Matrix)^{n} × (Period 1, Prob. Market Shares)

= (Period n+1, Prob.Market Shares) [9]

จากตัวอย่าง I นี้ ในการหาส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 2

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม		ส่วนแบ่งตลาดในงวดที่ 1		ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 2

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{pmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.35 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.505 \\ 0.396 \\ 0.099 \end{pmatrix}$$

ส่วนแบ่งของตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 3 หาได้จาก

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม		ส่วนแบ่งตลาดในงวดที่ 1		ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดที่ 3

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{pmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{pmatrix}^{2} \times \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.35 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.486 \\ 0.416 \\ 0.098 \end{pmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันก็สามารถที่จะหาส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดต่อ ๆ ไปได้

จะเห็นได้ว่าจากวิธีที่ 2 นี้ ก็สามารถหาส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นในงวดต่างๆ ได้เช่นเดียวกันกับวิธีที่ 1 ที่เป็นเช่นนั้นเพราะการนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการ

---

[9] Thierauf and Klekamp, op.cit., p.291

เปลี่ยนแปลงเดิมมายกกำลัง แท้ที่จริงก็เป็นการคำนวณความน่าจะเป็นของการสงวนไว้ การได้มาและการสูญเสีย ซึ่งเมื่อนำมาคูณกับส่วนแบ่งตลาดเดิมในภาคแรกก็จะได้ส่วนแบ่งที่น่าจะเป็นของงวดถัดจากกำลังที่ใช้ยกนั้น

ในการหาผลลัพธ์ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นทั้ง 2 วิธีนี้ ถ้าทำไปหลาย ๆ งวด การคูณเมตริกซ์จะยุ่งยากและสับสนมาก โดยเฉพาะวิธีที่ 2 เพราะต้องยกกำลังเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้าช่วย ซึ่งสามารถทำได้ในเวลาเล็กน้อยเท่านั้น

2.4 สถานะดุลยภาพ (Equilibrium Condition)

สิ่งที่ควรนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์มาร์คอฟ ก็คือ **สถานะดุลยภาพ** ซึ่งหมายถึงสถานะซึ่งส่วนแบ่งของความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นใหม่ อยู่ในลักษณะที่คงที่ เช่น กรณีของส่วนแบ่งตลาดอยู่ในสถานะดุลยภาพ หมายความว่าการแลกเปลี่ยนลูกค้าอยู่ในลักษณะที่ทำให้ส่วนแบ่งของตลาดอยู่ในสถานะที่คงที่ ไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าส่วนแบ่งของตลาดในงวดแรกจะเป็นเท่าใดก็ตาม เมื่อไม่มีส่วนแบ่งใดเป็นศูนย์แล้วจะต้องมีอยู่งวดหนึ่งในอนาคตที่ส่วนแบ่งที่น่าจะเป็นสุดท้าย อยู่ในลักษณะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงอีก

สมมุติจากตัวอย่าง I ซึ่งมีเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเป็น

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\
\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} &
\begin{bmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.62 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

จากแถวนอนที่ 2 หาส่วนแบ่งของ Y ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ (เราเรียกงวดระยะเวลาอนาคตที่ไม่อาจระบุเจาะจงนี้ว่า เป็นงวดระยะเวลาดุลยภาพ) มีค่าเท่ากับ

0.23 × ส่วนแบ่งที่ X มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ −1

(งวดระยะเวลาก่อนดุลยภาพ)

\+ 0.62 × ส่วนแบ่งที่ Y มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ −1

$+ 0.35 \times$ ส่วนแบ่งที่ z มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ -1

เขียนอยู่ในรูปของสมการได้ คือ

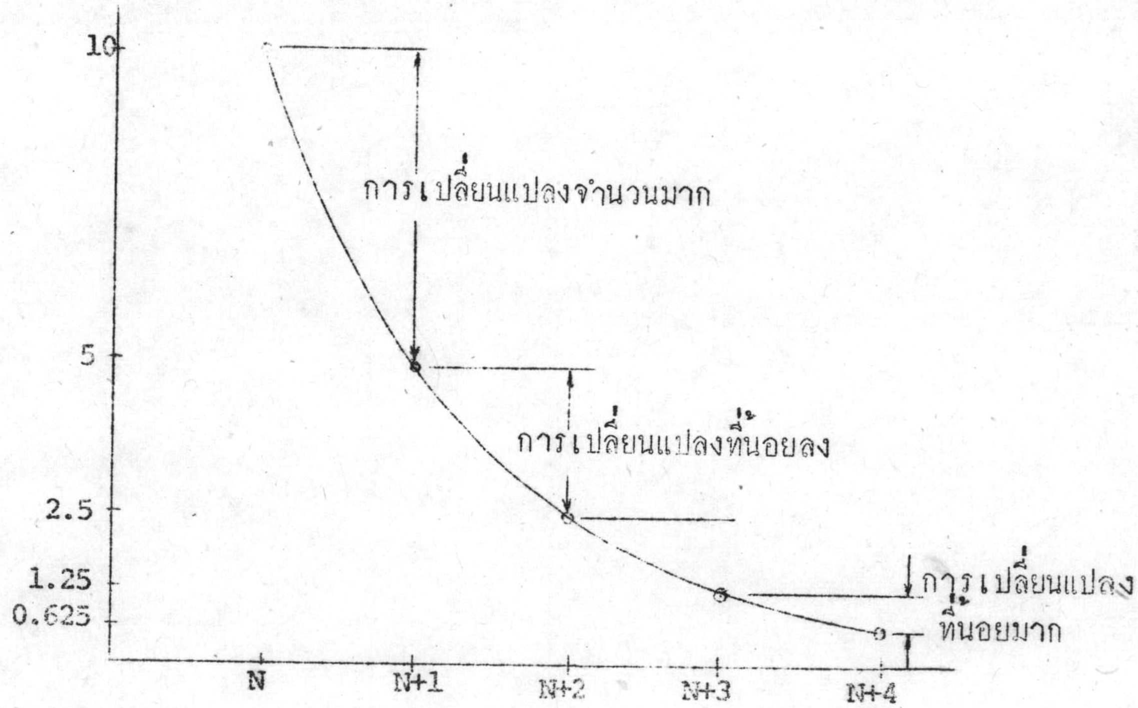
$$Y_{eq} = 0.23\ X_{eq-1} + 0.62\ Y_{eq-1} + 0.35\ Z_{eq-1}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาส่วนแบ่งตลาดของ X และ Z ที่ระยะเวลาดุลยภาพได้ ดังนี้ :

$$X_{eq} = 0.68\ X_{eq-1} + 0.26\ Y_{eq-1} + 0.40\ Z_{eq-1}$$

$$Z_{eq} = 0.09\ X_{eq-1} + 0.07\ Y_{eq-1} + 0.25\ Z_{eq-1}$$

จากแนวความคิดของกราฟ (Graph) ที่แสดงการแบ่งเลขตัวหนึ่ง (เช่น 10) ที่ถูกแบ่งครึ่งในขั้นต่าง ๆ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงการแบ่งครึ่งตัวเลขตัวหนึ่งเป็นขั้น ๆ เมื่อใกล้ดุลยภาพการเปลี่ยนแปลงจะน้อยลงตามลำดับ

จะเห็นได้ว่าแนวความคิดนี้ มีลักษณะเช่นเดียวกับการเปลี่ยนแปลงส่วนแบ่งตลาด เมื่อใกล้สถานะดุลยภาพ กล่าวคือ ในงวดระยะเวลาแรก ๆ ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าของผู้ผู้ผลิตรายหนึ่ง ได้มา หรือ สูญเสียให้แก่ผู้ผลิตอีกระยะหนึ่งจะอยู่ในอัตราสูง แต่เมื่อใกล้จุดดุลยภาพก็จะลดลงเรื่อย ๆ จนถึงงวดระยะเวลาก่อนถึงดุลยภาพ การได้มา หรือ การสูญเสีย มีจำนวนน้อยมาก จนกระทั่งอาจถือได้ว่าเท่ากันในเชิงคณิตศาสตร์ กล่าวคือ eq = eq-1 [10]

ดังนั้นเราอาจเขียนสมการได้ใหม่ คือ

$$X = 0.68\,X + 0.26\,Y + 0.40\,Z \qquad \text{-----}(1)$$

$$Y = 0.23\,X + 0.62\,Y + 0.35\,Z \qquad \text{-----}(2)$$

$$Z = 0.09\,X + 0.07\,Y + 0.25\,Z \qquad \text{-----}(3)$$

และผลรวมของตลาดทั้งหมด เท่ากับ 1

จะได้ $X+Y+Z = 1$ -----(4)

เมื่อมีสมการ 4 สมการ และมีตัวที่ต้องการรู้ค่า 3 ตัว ดังนั้นเราจึงตัดสมการ (3) ออกไป และแก้สมการหาส่วนแบ่งตลาด ณ ระยะเวลาดุลยภาพ

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{pmatrix} 0.472 \\ 0.431 \\ 0.097 \end{pmatrix}$$

อาจพิสูจน์โดยการคูณเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเดิมด้วยส่วนแบ่งตลาดดุลยภาพได้ดังนี้

---

10 Thierauf and Klekamp, op.cit., p.294.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม} \\
\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ 0.23 & 0.62 & 0.35 \\ 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{bmatrix}
\end{array}
\times
\begin{array}{c}
\text{ส่วนแบ่งตลาดดุลยภาพ} \\
\begin{bmatrix} 0.472 \\ 0.431 \\ 0.097 \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{bmatrix} 0.472 \\ 0.431 \\ 0.097 \end{bmatrix}
$$

ก็แสดงว่าหลังจากงวดระยะเวลาดุลยภาพไปแล้ว ส่วนแบ่งที่น่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจะคงที่ ในกรณีที่มีเหตุผลที่พอจะเชื่อถือได้ว่า ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิมที่ใช้อยู่นั้นเกิดการเปลี่ยนแปลงหรือแตกต่างไปจากเดิม เนื่องจากเหตุผลบางประการก็อาจจะมีการสร้างเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงใหม่ และใช้การวิเคราะห์มาร์คอฟตามวิธีการเดิม เพื่อคาดคะเนความน่าจะเป็นของส่วนแบ่งที่ต้องการหาสำหรับงวดอนาคตได้ ซึ่งผลจากวิธีการดังที่กล่าวมาแล้วนี้ใช้เป็นเครื่องมือหรือดัชนีในการชี้นำ เพื่อการคาดคะเนความน่าจะเป็นของส่วนแบ่งที่ต้องการหาสำหรับงวดอนาคตอย่างได้ผลในระยะสั้นหรือปานกลางวิธีหนึ่ง ซึ่งควรนำศึกษา

2.5 <u>ภาวะอยู่ตัว (Steady State) ของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง</u>

<u>นิยาม</u> ขบวนการมาร์คอฟจะเรียกว่าเป็น "Regular" เมื่อนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงมายกกำลังแล้ว สมาชิก (Elements) ทุก ๆ ตัวของเมตริกซ์นั้นต้องมากกว่าศูนย์ และจากภาวะเริ่มต้น (Initial State) เมื่อเวลาผ่านไปไม่ว่ากี่ช่วง (Steps) เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้จะสามารถออกจากภาวะใด ไปอีกภาวะหนึ่งได้โดยอิสระ โดยสามารถติดต่อทุกภาวะได้หมด

<u>ทฤษฎี</u> เมื่อ P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงซึ่งสมจริง (Correspond) กับ Regular Markov Process ถ้านำ P มายกกำลังไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง แถวนอน (Row) แต่ละแถวของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของ

การเปลี่ยนแปลงที่ได้มีสมาชิก (Elements) ทุกตัวเหมือนกัน หรือใกล้เคียงกันหมด เช่น

$$P^n = T$$ [11]

$$T = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{bmatrix}$$

(π เป็น Row Vector ที่มีสมาชิกเป็นบวกหมด)

$$\pi = \pi_1, \pi_2 \; .... \; \pi_n$$

T จะเรียกว่า Steady State Probability Matrix, Steady state of Transition Probability Matrix หรือ Limiting Probability Matrix เช่น จากตัวอย่าง I เราได้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{array}{c|ccc|} & X & Y & Z \\ \hline X & 0.68 & 0.26 & 0.40 \\ Y & 0.23 & 0.67 & 0.35 \\ Z & 0.09 & 0.07 & 0.25 \end{array}$$

การสงวนไว้ และ การได้มา $\longrightarrow$

$\downarrow$ การสงวนไว้ และ การสูญเสีย

เมื่อเราสับที่เมตริกซ์ (Transpose) เพื่อให้ได้ตามข้อกำหนด

$$\sum_{\forall j} P_{ij} = 1 \quad \text{และ} \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & X & Y & Z \\ \hline & 0.68 & 0.23 & 0.09 \\ i & 0.26 & 0.67 & 0.07 \\ & 0.40 & 0.35 & 0.25 \end{array} ,$$

($\longrightarrow j$; $\downarrow i$)

การสงวนไว้ และ การสูญเสีย $\longrightarrow$

$\downarrow$ การสงวนไว้ และ การได้มา

---

[11]วิจิตร ตัณฑสุทธิ์, เรื่องเดิม (จดบันทึก)

ซึ่งเมื่อนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้มายกกำลังไปเรื่อย ๆ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} 0.68 & 0.23 & 0.09 \\ 0.26 & 0.67 & 0.07 \\ 0.40 & 0.35 & 0.25 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 0.472 & 0.431 & 0.097 \\ 0.472 & 0.431 & 0.097 \\ 0.472 & 0.431 & 0.097 \end{bmatrix}$$

(เมื่อคิดทศนิยม 3 ตำแหน่ง เกิน 0.0005 ปัดเป็น 0.001)

และเมื่อยกกำลัง 9,10 และต่อไปเรื่อย ๆ ก็ยังคงได้ผลลัพธ์เช่นเดิม

ก็แสดงว่าที่ภาวะที่ 8 (ยกกำลัง 8) เป็นภาวะอยู่ตัว (Steady State) ของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงชุดนี้

<u>ทฤษฎี</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ซึ่งสมจริงกับ Regular Markov Process และความเกี่ยวพันของ P กับ Unique vector of steady state probability เป็น $\pi(P) = (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_N)$

โดยที่ $\pi_j = \pi_j(P)$ คือ steady state probability ของระบบในภาวะ j เมื่อ $j = 1,2,\ldots N$

ดังนั้นจะได้ $\pi = \pi P$ [12]

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

เช่นจากเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

$$P = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.23 & 0.09 \\ 0.26 & 0.67 & 0.07 \\ 0.40 & 0.35 & 0.25 \end{bmatrix}$$

---

12 J.J.Martin Baysian Decision Problems and Markov Chains (New York : R.E. Krieger Publishing Company, 1975) p.62.

i 17191039

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) \times \begin{vmatrix} 0.68 & 0.23 & 0.09 \\ 0.26 & 0.67 & 0.07 \\ 0.40 & 0.35 & 0.25 \end{vmatrix} = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3)$$

จะได้

$$0.68\ \pi_1 + 0.26\ \pi_2 + 0.4\ \pi_3 = \pi_1 \quad \text{------} (1)$$
$$0.23\ \pi_1 + 0.67\ \pi_2 + 0.35\ \pi_3 = \pi_2 \quad \text{------} (2)$$
$$0.09\ \pi_1 + 0.07\ \pi_2 + 0.25\ \pi_3 = \pi_3 \quad \text{------} (3)$$

และ $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad \text{------} (4)$$

จากการแก้สมการ โดยตัดสมการ (3) ออกไป จะได้ :

$$\pi_1 = 0.472$$
$$\pi_2 = 0.431$$
$$\pi_3 = 0.097$$

หรือเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ณ ภาวะอยู่ตัวจะเป็น

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{vmatrix} 0.472 & 0.431 & 0.097 \\ 0.472 & 0.431 & 0.097 \\ 0.472 & 0.431 & 0.097 \end{vmatrix}$$

ซึ่งก็สามารถหาได้เช่นเดียวกับวิธีใช้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงมายกกำลัง ส่วนรายละเอียดจะได้อธิบายในบทต่อ ๆ ไป

หอสมุดกลาง
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. <u>การพิจารณาหาจำนวนของหน่วยบินลำเลียงผสมที่เหมาะสมที่สุด</u>

ในกรณีที่ต้องการหาขนาดของหน่วยบินลำเลียงผสมที่ดีที่สุด หมายถึงการหาจำนวนของเครื่องบินลำเลียงที่เหมาะสมเท่าที่มีอยู่ ให้สามารถที่จะสนองความต้องการตามภารกิจและสถานการณ์ต่าง ๆ ตามที่กำหนด โดยที่เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุดนั้นใช้หลักการของ War Game, Linear Programming และ Cost Analysis มาประยุกต์เข้ากับความต้องการของการลำเลียงทางอากาศ และสมรรถนะของเครื่องบินแต่ละแบบที่นำมาใช้ โดยมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาตรฐาน
ดังนี้

Input

- C_i = Cost of i^{th} aircraft type [13]
- A_{ij} = Payload of i^{th} aircraft type on j^{th} mission profile
- B_{jk} = Total load to be transported in k^{th} situation using mission profile

Decision Variables

- X_{ik} = Number of aircraft of i^{th} type in situation k
- Y_{ijk} = Number of aircraft type i performing mission j in situation k
- Z_i = Number of aircraft of i^{th} type in fleet

---

[13] Reymond C. Boehne. <u>Design, Conduct, and Evaluation of A Military Systems Analysis Seminar in Thailand</u> Volume II: Appendix A (Standford Research Institute Menlo Park, California, 1972) p.63.

Selected Minimize $C_i . Y_{ijk}$

Subject to these constraints:

$Y_{ijk} \geq 0$ for all i (negative decision variable would not make sense)

$Y_{ijk} . A_{ij} = B_{jk}$ for all j and k

$X_{ik} \geq \sum_j Y_{ijk}$ for all i and k

$Z_i \geq Max . X_{ik}$

จากนั้นก็จะจัดข้อมูลต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเปลี่ยนเป็นผังงาน แล้วเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษา BASIC และหาผลลัพธ์ด้วย Mini-Computer ก็จะได้จำนวนเครื่องบินแบบต่าง ๆ ที่จัดเป็นหน่วยบินลำเลียงผสมที่เหมาะสมที่สุด