เซมิกรุปซึ่งทุกเซมิกรุปย่อยแยกแฟคเตอร์ได้

นาย วัชรพงษ์ อนันต์ชื่น

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2524

SEMIGROUPS IN WHICH EVERY SUBSEMIGROUP IS FACTORIZABLE

Mr. Watcharaphong Ananchuen

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1981

Thesis Title Semigroups in which Every Subsemigroup is Factorizable

By Mr. Watcharaphong Anonchuen

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillement of the requirements for the Master's degree.

S. Bunnag .... Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Mark Tamthai .... Chairman

(Assistant Professor Mark Tamthai Ph.D.)

Thavee Srisangthong .... Member

(Associate Professor Thavee Srisangthong M.A.)

Yupaporn Kemprasit .... Member

(Associate Professor Yupaporn Kamprasit Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิกรุปซึ่งทุกเซมิกรุปย่อยแยกแฟคเตอร์ได้

ชื่อนิสิต นาย วัชรพงษ์ อนันต์ชื่น

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2524

บทคัดย่อ

เราเรียกเซมิกรุป S ว่าเป็นเซมิกรุปที่แยกแฟคเตอร์ได้ถ้ามีกรุปย่อย G ของ S ซึ่งทำให้ $S = GE(S)$ โดยที่ $E(S)$ เป็นเซตของไอเดมโพเทนต์ทั้งหมดของ S และเรียกเซมิกรุป S ว่าเป็นเซมิกรุปที่แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มถ้าทุกเซมิกรุปย่อยของ S แยกแฟคเตอร์ได้

ทฤษฎี เซมิกรุป S แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มเมื่อและต่อเมื่อ S สอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อต่อไปนี้

(1) S เป็นยูเนียนของกรุปที่เป็นคาบ

(2) ถ้า A เป็นเซตของไอเดมโพเทนต์ของ S และ A ไม่เป็นเซตว่าง แล้วมีสมาชิก e ของ A ซึ่ง $ea = a$ สำหรับทุกสมาชิก a ของ S

(3) ทุก ๆ สมาชิก e และ f ของ $E(S)$ ถ้า $ef = f$ แล้ว (i) $H_e f = H_f$ และ (ii) $fe = e$ ถ้า $|H_f| > 1$

ให้ X เป็นเซตใด ๆ เราจะให้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนเซมิกรุปของการแปลงดังนี้

T_X = เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนบนเซต X

$\mathcal{T}_X$ = เซมิกรุปของการแปลงเต็มบนเซต X

I_X = เซมิกรุปผกผันสมมาตรบนเซต X

G_X = เซมิกรุปของวิธีเรียงสับเปลี่ยนบนเซต X

<u>ทฤษฎี</u> (1) G_X แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มเมื่อและต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

(2) ถ้า S คือ T_X หรือ I_X แล้ว S แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มเมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

(3) $\mathcal{J}_X$ แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มเมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 2$

ให้ X เป็นเซตจำกัด

ถ้า $X = \emptyset$ แล้ว I_X ไม่มีเซมิกรุปย่อยที่แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม

ถ้า $|X| = 1$ แล้ว $\{0\}$ และ $\{1_X\}$ เป็นเซมิกรุปย่อยที่แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มทั้งหมดของ I_X โดยที่ 0 และ 1_X คือการแปลงที่ว่างเปล่าและฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต X ตามลำดับ

ให้ $|X| > 1$ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $Z_o, Z_1, \ldots, Z_n, Y$ เป็นเซตย่อยของ X ซึ่ง $\emptyset = Z_o \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_n \subsetneq Y$, $|Z_{i+1} \smallsetminus Z_i| = 1$ สำหรับทุกสมาชิก i ของ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ และไม่ $Z_n = Y = X$ ก็ $|Y \smallsetminus Z_n| > 1$ เราให้

$$T(Z_o, Z_1, \ldots, Z_n; Y) = \{1_{Z_i} \mid i = 0, 1, \ldots, n\} \cup \{\alpha \in G_Y \mid a\alpha = a \text{ สำหรับทุกสมาชิก } a \text{ ของ } Z_n\}$$

<u>ทฤษฎี</u> $T(Z_o, Z_1, \ldots, Z_n; Y)$ เป็นเซมิกรุปย่อยที่แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ I_X

<u>ทฤษฎี</u> ให้ X เป็นเซตจำกัดซึ่ง $|X| > 1$ และ T เป็นเซมิกรุปย่อยที่แยกแฟคเตอร์ได้อย่างเข้มซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ I_X ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก n และมีเซตย่อย $Z_o, Z_1, \ldots, Z_n, Y$ ของ X ซึ่ง $\emptyset = Z_o \subseteq Z_1 \subsetneq \ldots \subseteq Z_n \subset Y$, $|Z_{i+1} \smallsetminus Z_i| = 1$ สำหรับทุกสมาชิก i ของ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, ไม่ $Z_n = Y = X$ ก็ $|Y \smallsetminus Z_n| > 1$ และ $T = T(Z_o, Z_1, \ldots, Z_n; Y)$

Thesis Title	Semigroups in which Every Subsemigroup is Factorizable
Name	Mr. Watcharaphong Ananchuen
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.
Department	Mathematics
Academic Year	1981

ABSTRACT

A semigroup S is factorizable if S = GE(S) for some subgroup G of S where E(S) is the set of all idempotents of S. A semigroup in which every subsemigroup is factorizable is said to be strongly factorizable.

THEOREM. A semigroup S is strongly factorizable if and only if it satisfies the following three conditions :

(a) S is a union of periodic groups.

(b) For any nonempty set A of idempotents of S, there exists an element $e \in A$ such that $ea = a$ for all $a \in A$.

(c) For any $e, f \in E(S)$, $ef = f$ implies (i) $H_e f = H_f$ and (ii) $fe = f$ if $|H_f| > 1$.

Let X be a set and let

T_X = the partial transformation semigroup on X,

$\mathcal{T}_X$ = the full transformation semigroup on X,

I_X = the symmetric inverse semigroup on X,

G_X = the permutation group on X.

THEOREM. (1) G_X is strongly factorizable if and only if $|X| < \infty$.

(2) If S is T_X or I_X, then S is strongly factorizable if and only if $|X| \leq 1$.

(3) $\mathcal{J}_X$ is strongly factorizable if and only if $|X| \leq 2$.

Let X be a finite set.

If $X = \emptyset$, then I_X has no maximal strongly factorizable subsemigroups.

If $|X| = 1$, then $\{0\}$ and $\{1_X\}$ are all of the maximal strongly factorizable subsemigroups of I_X where 0 and 1_X are the empty transformation and the identity map on X, respectively.

Assume $|X| > 1$. Let n be a nonnegative integer and $Z_o, Z_1, \ldots, Z_n, Y$ subsets of X such that $\emptyset = Z_o \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \subsetneq Y$, $|Z_{i+1} \smallsetminus Z_i| = 1$ for all $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ and either $Z_n = Y = X$ or $|Y \smallsetminus Z_n| > 1$. Let

$$T(Z_o,Z_1,\ldots,Z_n;Y) \doteq \{1_{Z_i} \mid i = 0, 1, \ldots, n\} \cup \{\alpha \in G_Y \mid a\alpha = a \text{ for all } a \in Z_n\}.$$

THEOREM. $T(Z_o, Z_1, \ldots, Z_n;Y)$ is a maximal strongly factorizable subsemigroup of I_X.

THEOREM. Let X be a finite set with $|X| > 1$ and T a maximal strongly factorizable subsemigroup of I_X. Then there are a nonnegative integer n and some sets $Z_o, Z_1, \ldots, Z_n, Y$ such that $\emptyset = Z_o \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \subsetneq Y \subsetneq X$, $|Z_{i+1} \smallsetminus Z_i| = 1$ for all $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, either $Z_n = Y = X$ or $|Y \smallsetminus Z_n| > 1$ and $T = T(Z_o,Z_1,\ldots,Z_n;Y)$.

ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved mother, brother and sister for their encouragement theoughout my graduate study.

CONTENTS