บทที่ ๓

ภูมิหลังของทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

๓.๑ บทนำ

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุ เมื่อถูกแรงกระทำภายนอกตามทฤษฎีของกลศาสตร์นั้น สมการพื้นฐานซึ่งบรรยายพฤติกรรมของวัตถุ อยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล แบบพาร์เชียล ภายใต้เงื่อนไขบนพื้นผิวของวัตถุ เรียกกันโดยทั่วไปว่า Boundary Value Problems in Mechanics การวิเคราะห์หาคำตอบแน่นอนของสมการชุดดังกล่าวจะเป็นไปได้ในกรณีที่เรขาคณิต และคุณสมบัติของวัตถุที่พิจารณา ประกอบกับเงื่อนไขบนพื้นผิวอยู่ในรูปแบบง่าย ๆ เท่านั้น

ดังนั้นเราจึงนิยมหาคำตอบโดยประมาณของปัญหาดังกล่าว เมื่อเงื่อนไขที่กำหนดให้มีความซับซ้อน วิธีการหาคำตอบโดยประมาณมีด้วยกันหลายวิธีการต่างมุ่งหวังที่จะเปลี่ยนรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลไปเป็นชุดของสมการเชิงเส้น ซึ่งสะดวกในการหาคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณคอมพิวเตอร์ วิธีการหนึ่งที่เรียกกันว่า วิธีการไฟไนท์เอลเม้นท์ The Finite Element Method (F.E.M.) กำลังเป็นที่นิยมอย่างกว้างขวางในวงการของนักวิจัยระดับสูงและงานในทางปฏิบัติทั่วไป การวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุในการวิจัยนี้จึงจะใช้วิธีการของไฟไนท์เอลเม้นท์เป็นรากฐาน

๓.๒ การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์โดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ชั้นสูง

ย่อมเป็นที่ทราบกันดีว่าในการวิเคราะห์ปัญหาพฤติกรรมทางโครงสร้างซึ่งเป็นชนิดไร้เชิงเส้นนั้น กระทำได้โดยการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น (Incremental Formulation) เท่านั้น จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องทราบถึงหลักการของการวิเคราะห์แบบดังกล่าว

๓.๒.๑ การวิเคราะห์แบบลำดับขั้นสำหรับพฤติกรรมทางโครงสร้างชนิดไร้เชิงเส้น

ในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นนี้ ลำดับของพฤติกรรมของวัตถุจะถูกแบ่งออกเป็นหลายสภาพสมดุลย์ ได้แก่ ${}^{0}\Omega, {}^{1}\Omega, \ldots\ldots, {}^{n}\Omega, {}^{n+1}\Omega, \ldots\ldots, {}^{f}\Omega$ โดยที่

$^{o}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้นการเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุ

$^{f}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดสุดท้ายของลำดับพฤติกรรม

$^{n}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบันในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น

สมมติว่าตัวแปรทั้งหมดที่เกี่ยวข้องเช่น สเตร็ซ, สเตรน และระยะเคลื่อน รวมทั้งประวัติการกระทำของแรง เป็นตัวทราบค่าจากการวิเคราะห์จนถึงสภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบัน และค่าของตัวแปรเหล่านี้ในสภาพสมดุลย์ ณ จุดต่อไปในการวิเคราะห์เป็นที่ต้องการ ดังนั้นเราจะเขียนสมการของพลังงานส่วนเพิ่มสมมุติ (Equations of Incremental Virtual Work) เพื่อแสดงความสมดุลย์ของวัตถุ ณ จุด $^{n+1}\Omega$ อย่างไรก็ดีสภาพของวัตถุที่จุด $^{n+1}\Omega$ ยังเป็นสิ่งไม่ทราบค่า ดังนั้นค่าของตัวแปรทั้งหมดจะต้องอ้างอิงถึงสภาพใดสภาพหนึ่งที่ทราบมาก่อนในลำดับการวิเคราะห์ โดยทั่วไปมักจะเลือกเอาสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้น หรือสภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบัน ซึ่งเราเรียกว่าเป็นวิธีการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นชนิดลากรางจ์ และ ออยเลอร์ (Lagrangian and Eulerian) ตามลำดับ

เราอาจใช้วิธีการแบบฉบับเช่นที่กล่าวมาสำหรับการวิเคราะห์ในลำดับต่อ ๆ ไปจนกระทั่งได้สภาพสมดุลย์ ณ จุดสุดท้าย $^{f}\Omega$ ตามที่ต้องการได้

๓.๒.๒ พื้นฐานความรู้ทางกลศาสตร์ชั้นสูงที่จำเป็น

ตัวแปรซึ่งจำเป็นสำหรับการบรรยายพฤติกรรมของวัตถุภายใต้แรงกระทำมีอยู่ด้วยกัน ๓ ชุดคือ สเตร็ซ (S_{IJ}), สเตรน (E_{IJ}) และระยะเคลื่อน (u_I) เราอาจกล่าวได้ว่าชุดตัวแปรเหล่านี้เกี่ยวข้องกันโดยสมการความสัมพันธ์ซึ่งบรรยายกฎแห่งธรรมชาติดังต่อไปนี้[6]

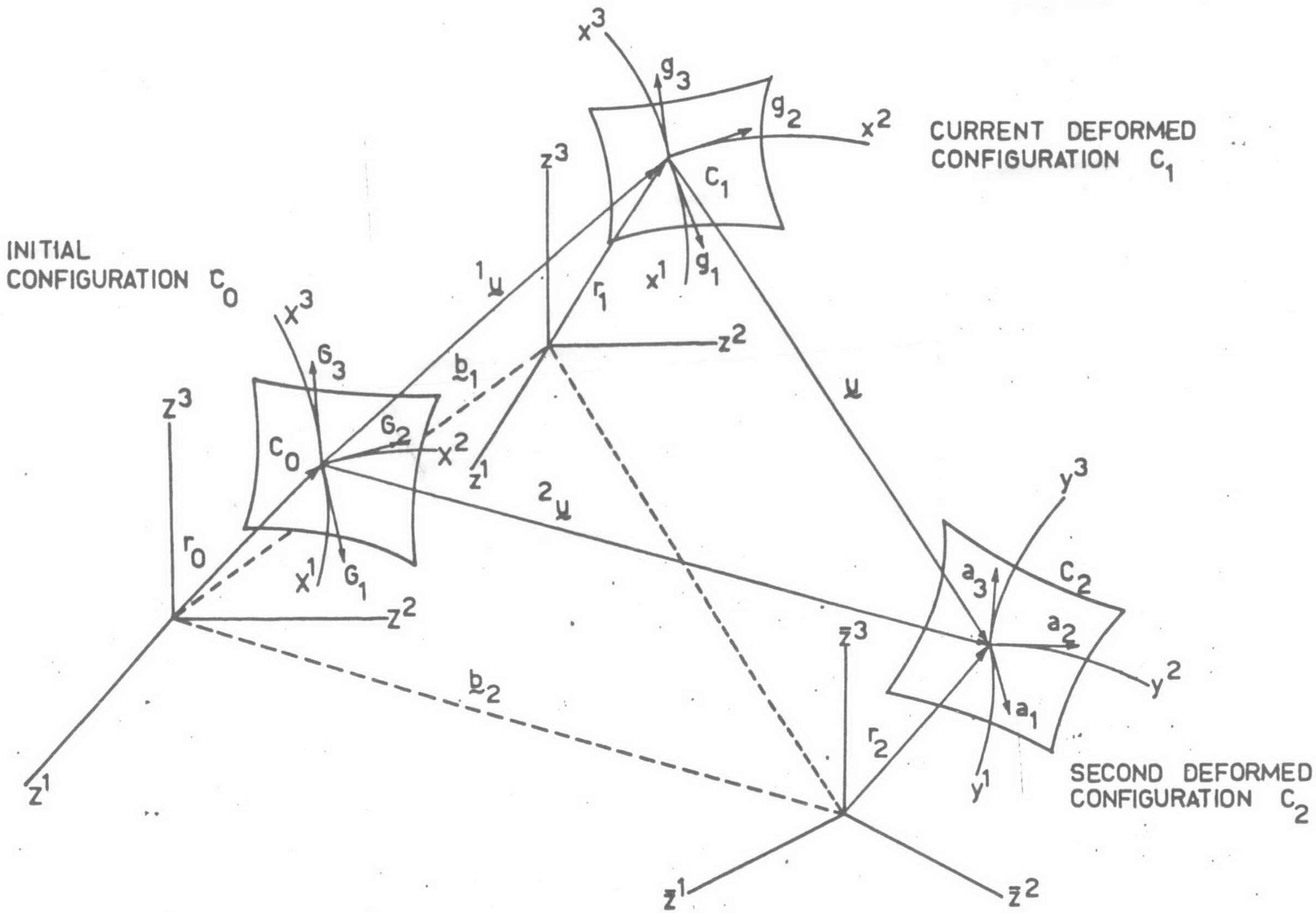
พิจารณารูปที่ ๓.๑ ซึ่งแสดงลำดับการเคลื่อนที่และเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุ เราจะพิจารณาสภาพสมดุลย์ของวัตถุที่ ๓ จุดด้วยกันคือ

ก. สภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้นและเป็นสภาพที่ตัวแปรทุกตัวอ้างอิงถึง, C_o

ข. สภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบันซึ่งวัตถุได้เปลี่ยนรูปทรง, C_1

ค. สภาพสมดุลย์ ณ จุดใกล้เคียงต่อจากจุดปัจจุบัน, C_2

ค่าของตัวแปร ณ สภาพสมดุลย์ C_1 และ C_2 เขียนได้เป็น



รูปที่ ๓.๑ ลำดับการเคลื่อนที่และเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุ

$$C_1 : {}^1S_{IJ}, {}^1E_{IJ}, {}^1u_I$$
$$C_2 : {}^2S_{IJ}, {}^2E_{IJ}, {}^2u_I$$

เมื่อตัวเลขมุมบนซ้ายมือของสัญลักษณ์ตัวแปรให้ความหมายว่าค่าตัวแปรในสภาพสมดุลย์ตามหมายเลข

ด้วยหลักการของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นเราอาจเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} {}^2S_{IJ} &= {}^1S_{IJ} + S_{IJ} \\ {}^2E_{IJ} &= {}^1E_{IJ} + E_{IJ} \\ {}^2u_I &= {}^1u_I + u_I \end{aligned} \qquad (๓.๑)$$

เมื่อ S_{IJ}, E_{IJ} และ u_I คือค่าตัวแปรสเตร็ซ, สเตรน และระยะเคลื่อนส่วนที่เพิ่มขึ้น เมื่อวัตถุเปลี่ยนสภาพสมดุลย์จาก C_1 ไปเป็น C_2 ตามลำดับ

๓.๒.๒.๑ Kinematic Relations คือชุดสมการซึ่งแสดงค่าของสเตรนในรูปของระยะเคลื่อนเรียกกันโดยทั่วไปว่า Strain-displacement Relationships ได้แก่

$$E_{IJ} = e_{IJ} + \eta_{IJ} \qquad (๓.๒ก)$$

เมื่อ $$2e_{IJ} = u_{I|J} + u_{J|I} + u_{K|I}\,{}^1u_{K|J} + {}^1u_{K|I}\,u_{K|J} \qquad (๓.๒ข)$$

และ $$2\eta_{IJ} = u_{K|I}\,u_{K|J} \qquad (๓.๒ค)$$

โดยที่เส้นตั้งระหว่างสัญลักษณ์ของดรรชนี หมายถึงการดิฟเฟอเรนชิเอตเทียบกับแกนโคออร์ดิเนทอ้างอิงที่ C_o

๓.๒.๒.๒ Equilibrium Relations โดย Principle of Virtual Work คือชุดสมการแสดงความสมดุลย์ของทุกจุดภายในวัตถุ ชุดสมการนี้เป็นความสัมพันธ์ในระหว่างตัวแปรสเตร็ซ เราอาจสร้างสมการแสดงพฤติกรรมความสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นได้เป็น

$$\int_{{}^oV} \left[S_{IJ}(\delta e_{IJ} + \delta\eta_{IJ}) + {}^1S_{IJ}\,\delta\eta_{IJ} \right] dV$$
$$= \int_{{}^2A} \delta u_I \cdot {}^2t_I \, d\bar{a} + \int_{{}^2V} \delta u_I \cdot {}^2f_I \, d\bar{v} - \left[\int_{{}^1A} \delta u_I \cdot {}^1t_I \, d\bar{a} + \int_{{}^1V} \delta u_I \cdot {}^1f_I \, d\bar{v} \right] \qquad (๓.๓)$$

เมื่อ t_I และ f_I คือเวคเตอร์ของหน่วยแรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงมวลตามลำดับ

A และ V คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้น C_o

a และ v คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ปัจจุบัน ณ จุด C_1

$\bar{a}$ และ $\bar{\mathrm{v}}$ คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ ณ จุด C_2 และถ้าสัญญลักษณ์ตัวแปรใดมีตัวเลขมุมซ้ายบนแสดงถึงค่าของตัวแปรในสภาพสมดุลย์ ณ จุดตามหมายเลขนั้น นอกจากนั้นสัญญลักษณ์ δ หมายถึง การแปรผัน (Variation) ของตัวแปรนั้น

๓.๒.๒.๓ <u>Constitutive Relations</u> เนื่องจากทั้งสองชุดของสมการดังกล่าวข้างต้นมิได้เกี่ยวข้องกับชนิดของวัสดุที่ประกอบขึ้นเป็นวัตถุที่พิจารณา ดังนั้นชุดสมการที่เรียกว่า Constitutive relations นี้จึงใช้แสดงอิทธิพลของชนิดวัสดุออกมาในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างสเตร็ซและสเตรน โดยมีข้อกำหนดต่าง ๆ ตามหลักเกณฑ์ของ Thermodynamics ถ้าวัสดุเป็นอิลัสติค เราอาจเขียนชุดสมการนี้ได้เป็น

$$S_{IJ} = C_{IJMN} E_{MN} \qquad (๓.๔)$$

ในเมื่อ C_{IJMN} เป็นสัมประสิทธิ์อิลัสติคแสดงคุณสมบัติวัสดุ

ความสัมพันธ์ในระหว่างตัวแปรทั้งสามชุดดังกล่าวมาแล้วอาจเขียนเป็นแผนภูมิได้ตามรูปที่ ๓.๒

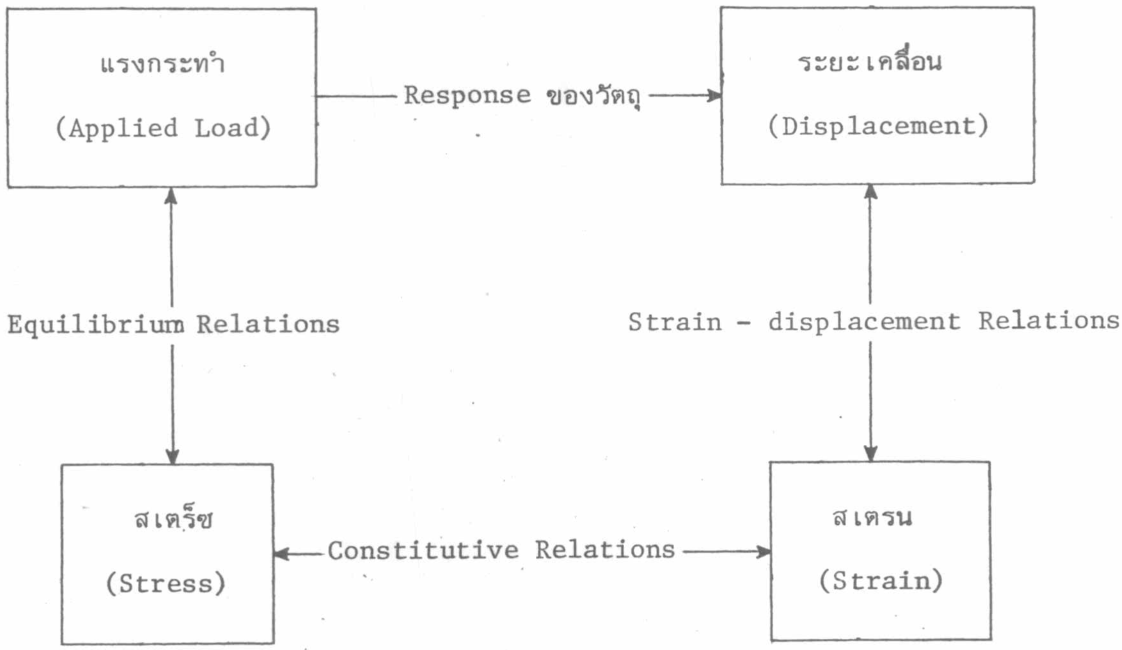
๓.๓ <u>การวิเคราะห์พฤติกรรมโดยใช้ตัวแปรระยะเคลื่อนเป็นหลัก</u>

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุใดจำเป็นต้องอาศัยชุดสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรดังกล่าวแล้วในหัวข้อที่ ๓.๒ หากแต่ว่าในการปฏิบัติเรานิยมลดรูปของชุดสมการทั้งสามให้อยู่ในรูปของตัวแปรเพียงชุดเดียว ซึ่งมักจะนิยมใช้ชุดตัวแปรระยะเคลื่อน ในกรณีนี้เราจะลดรูปชุดสมการความสัมพันธ์ทั้งสามลงเหลือเพียงชุดสมการ Equilibrium ในเทอมของตัวแปรระยะเคลื่อนได้ซึ่งจะให้ความสะดวกในการวิเคราะห์หาคำตอบโดยวิธีของไฟไนท์เอลเม้นท์ วิธีการลดรูปชุดสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวกระทำได้ดังนี้

เมื่อแทนสมการที่ (๓.๔) ลงในสมการที่ (๓.๓) ก็จะได้ชุดสมการไร้เชิงเส้นในตัวแปรไม่ทราบค่าของระยะเคลื่อน u_I ดังนี้

$$\int_{{}^{0}V}\left[C_{IJMN}e_{MN}\delta e_{IJ} + C_{IJMN}(e_{MN}\delta\eta_{IJ} + \eta_{MN}\delta e_{IJ}) + C_{IJMN}\eta_{MN}\delta\eta_{IJ} + {}^{1}S_{IJ}\delta\eta_{IJ}\right] dv$$

$$= \int_{{}^{2}A}\delta u_I \cdot {}^{2}t_I\, d\bar{a} + \int_{{}^{2}V}\delta u_I \cdot {}^{2}f_I\, d\bar{v} - \left[\int_{{}^{1}A}\delta u_I \cdot {}^{1}t_I\, da + \int_{{}^{1}V}\delta u_I \cdot {}^{1}f_I\, dv\right] \qquad (๓.๕)$$



รูปที่ ๓.๒ แผนภูมิแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสเตร็ซ, สเตรน และระยะเคลื่อน

การหาคำตอบของสมการที่ (๓.๕) นั้นไม่อาจกระทำได้โดยตรง เพราะเป็นสมการไร้เชิงเส้น จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปให้อยู่ในชุดของสมการเชิงเส้นโดยการตั้งสมมุติฐานเพื่อการประมาณดังนี้

ก. เป็นการเพียงพอที่จะสมมุติว่าคุณสมบัติวัสดุเป็นไปตามกฎเกณฑ์ของสมการเชิงเส้นที่ (๓.๔)

ข. ในสมการที่ (๓.๕) เทอมซึ่งให้ความสัมพันธ์ไร้เชิงเส้นเป็นต้นว่า

$$C_{IJMN}(e_{MN}\,\delta\eta_{IJ} + \eta_{MN}\,\delta e_{IJ})$$

$$C_{IJMN}\,\eta_{MN}\,\delta\eta_{IJ}$$

สามารถละทิ้งได้ในขบวนการเปลี่ยนรูปเป็นสมการเชิงเส้น

ค. ถ้าการเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุมีผลต่อแรงกระทำภายนอก เราอาจจะหาพลังงานเนื่องจากแรงกระทำภายนอกที่สภาพสมดุลย์ของวัตถุ ณ จุด C_2 ได้โดยการประมาณเท่านั้น

ด้วยข้อสมมุติฐานดังกล่าวจึงอาจจะสรุปได้ว่า ในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นนั้น เราอาจจะได้คำตอบสภาพวัตถุ ณ ตำแหน่ง C_1 ไม่อยู่ในสภาพสมดุลย์อย่างแท้จริง เพราะการเปลี่ยนสมการไร้เชิงเส้น (๓.๕) ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นนั้นเป็นการประมาณ ซึ่งจะทำให้เกิดพลังงานเหลืออยู่ $\delta^1 W_{res}$ (Residual Work) นั่นคือ

$$\delta^1 W_{res} = \int_{^1A} \delta u_I \cdot {}^1t_I\, da + \int_{^1V} \delta u_I \cdot {}^1f_I\, dv - \int_{^0V} {}^1S_{IJ}\, \delta e_{IJ}\, dV \qquad (๓.๖)$$

เพื่อที่จะป้องกันความผิดพลาดของคำตอบจากความเป็นจริง ดังนั้นเราจึงควรจะบวกพลังงานที่เหลือตามสมการที่ (๓.๖) เข้ากับสมการพลังงาน (๓.๕) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์แบบ Iterative

นอกจากนี้ถ้าเราสมมุติว่าส่วนประกอบของแรงกระทำภายนอกสามารถกำหนดให้โดยอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์เริ่มต้น C_o ได้เสมอ เราจะได้จากการประมาณว่า

$$\int_{^2A} \delta u_I \cdot {}^2t_I\, d\bar{a} + \int_{^2V} \delta u_I \cdot {}^2f_I\, d\bar{v} \approx \int_{^0A} \delta u_I \cdot {}^2t_I\, dA + \int_{^0V} \delta u_I \cdot {}^2f_I\, dV \qquad (๓.๗)$$

ดังนั้นสมการแสดงพฤติกรรมความสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นอาจเขียนได้เป็น

$$\int_{^0V} \left[C_{IJMN} e_{MN}\, \delta e_{IJ} + C_{IJMN}(e_{MN}\,\delta\eta_{IJ} + \eta_{MN}\,\delta e_{IJ}) + C_{IJMN}\,\eta_{MN}\,\delta\eta_{IJ} + {}^1S_{IJ}\,\delta\eta_{IJ} \right] dV$$

$$= \int_{^0A} \delta u_I \cdot {}^2t_I\, dA + \int_{^0V} \delta u_I \cdot {}^2f_I\, dV - \int_{^0V} {}^1S_{IJ}\, \delta e_{IJ}\, dV \qquad (๓.๘)$$

สมการที่ (๓.๘) เป็นชุดของสมการเชิงเส้นในตัวแปรไม่ทราบค่าระยะเคลื่อน u_I และเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์

๓.๔ การประยุกต์วิธีการของไฟไนท์เอลเม้นท์สำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรมซึ่งใช้ตัวแปรระยะเคลื่อนเป็นหลัก

การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ต้องประกอบด้วยหลักการใหญ่ ๓ ข้อคือ

๓.๔.๑ การแยกออกเป็นส่วนย่อย (Discretization) ซึ่งได้แก่การแบ่งอาณาบริเวณของวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นส่วนย่อย ๆ เรียกว่า ไฟไนท์เอลเม้นท์ โดยที่ส่วนย่อยเหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดเรียกว่า Nodal points ดังแสดงในรูปที่ ๓.๓ แต่ละไฟไนท์เอลเม้นท์มีคุณสมบัติว่า

$$^{\alpha}u_K(x) = \phi^m(x)\, {}^{\alpha}\hat{q}_{mK} \qquad (๓.๙)$$

เมื่อ $^{\alpha}u_K(x)$ คือส่วนประกอบของเวคเตอร์ระยะเคลื่อนที่จุดใด ๆ ภายในไฟไนท์เอลเม้นท์เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลย์ที่ C_α

$\phi^m(x)$ คือฟังก์ชั่นแห่งการประมาณ (Interpolation Functions) ที่จุด m ของ nodal point ในแต่ละไฟไนท์เอลเม้นท์

$^{\alpha}\hat{q}_{mK}$ คือส่วนประกอบของเวคเตอร์ระยะเคลื่อนที่จุด m ของ nodal point ของแต่ละไฟไนท์เอลเม้นท์

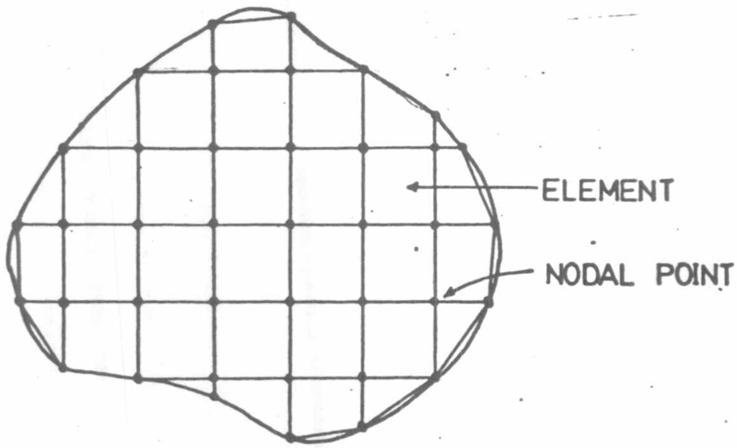
สมการนี้ให้ความหมายว่า ค่าระยะเคลื่อนของจุดใด ๆ ภายในไฟไนท์เอลเม้นท์อาจหาได้โดยการประมาณจากค่าของระยะเคลื่อนที่เกิดขึ้นที่ nodal point ของไฟไนท์เอลเม้นท์นั้น

สำหรับการวิจัยนี้ใช้ไฟไนท์เอลเม้นท์ชนิด Isoparametric ดังนั้นระยะเคลื่อนส่วนเพิ่มระหว่างสภาพสมดุลย์ของวัตถุที่จุด C_1 และ C_2 ในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น และโคออร์ดิเนทของจุดใด ๆ ภายในไฟไนท์เอลเม้นท์จะเขียนได้ตามสมการที่ (๓.๙) เป็น

$$u_K(x) = \phi^m(x)\, \hat{q}_{mK} \qquad (๓.๑๐ก)$$

$$x_K = \phi^m(x)\, \hat{x}_{mK} \qquad (๓.๑๐ข)$$

$$^{\alpha}x_K = \phi^m(x)\, {}^{\alpha}\hat{x}_{mK} \quad , \alpha = 1,2 \qquad (๓.๑๐ค)$$



รูปที่ ๓.๓ การแบ่งอาณาบริเวณของวัตถุเป็นไฟไนท์เอลเม้นท์

เมื่อ $\hat{q}_{mK}$ คือส่วนประกอบของเวคเตอร์ระยะเคลื่อนที่จุด m ของ nodal point ของแต่ละไฟไนท์เอลเม้นท์

$\hat{X}_{mK}$ และ ${}^{\alpha}\hat{x}_{mK}$ คือโคออร์ดิเนทของจุด nodal point ในสภาพสมดุลย์ของวัตถุที่จุด C_o และ C_α ตามลำดับ

เมื่อแทนคุณสมบัติของไฟไนท์เอลเม้นท์ตามสมการที่ (๓.๑๐ก) ลงในสมการแสดงพฤติกรรมความสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น (๓.๙) โดยอาศัยสมการที่ (๓.๒) จะได้

$$\delta\hat{q}\cdot\left[\left\{K_L({}^1\hat{q}) + K_G({}^1s)\right\}\cdot\hat{q}\right] = \delta\hat{q}\cdot\left[{}^2P - {}^1R\right] \qquad (๓.๑๑)$$

โดยที่

$$\delta\hat{q}\cdot K_L\cdot\hat{q} = \int_{{}^oV} C_{IJMN}\, e_{MN}\, \delta e_{IJ}\, dv \qquad (๓.๑๒ก)$$

$$\delta\hat{q}\cdot K_G\cdot\hat{q} = \int_{{}^oV} {}^1S_{IJ}\, \delta\eta_{IJ}\, dv \qquad (๓.๑๒ข)$$

$$\delta\hat{q}\cdot {}^1R = \int_{{}^oV} {}^1S_{IJ}\, \delta e_{IJ}\, dv \qquad (๓.๑๒ค)$$

$$\delta\hat{q}\cdot {}^2P = \int_{{}^oA} \delta u_I\, {}^2t_I\, dA + \int_{{}^oV} \delta u_I\, {}^2f_I\, dv \qquad (๓.๑๒ง)$$

สมการที่ (๓.๑๑) แสดงพฤติกรรมของไฟไนท์เอลเม้นท์ในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นจากสภาพสมดุลย์ที่จุด C_1 ไปสู่ C_2 สำหรับแมททริซที่ได้ในสมการดังกล่าวมีชื่อเรียกดังนี้

K_L เรียกว่า Linear Stiffness Matrix

K_G เรียกว่า Geometric Stiffness Matrix ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของสเตร็ซที่ลำดับขั้น C_1

${}^2P$ เรียกว่า Generalized Nodal Load คือเวคเตอร์รวมของหน่วยแรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงมวล

${}^1R$ เรียกว่า Load Correction Vector คือเวคเตอร์ของหน่วยแรงที่ทำให้เกิดสภาพสมดุลย์อย่างแท้จริง ณ จุด C_1

๓.๔.๒ <u>การรวมส่วนย่อยโดยตรง</u> (Direct Stiffness Assembling Process)

สมการที่ (๓.๑๑) แสดงพฤติกรรมของแต่ละไฟไนท์เอลเม้นท์ เมื่อรวมสมการเหล่านี้เข้าด้วยกันทั้งหมดตามวิธีการของ Direct Stiffness Process[7] ก็จะประกอบกันเป็นชุด

สมการแสดงพฤติกรรมของวัตถุ ในตัวแปรไม่ทราบค่าระยะเคลื่อนที่จุด nodal point ทั้งหมดของวัตถุ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\delta q \cdot \left[\left\{ \bar{K}_L + \bar{K}_G \right\} \cdot q \right] = \delta q \cdot \left[{}^2\bar{P} - {}^1\bar{R} \right] \qquad (๓.๑๓)$$

โดยที่
$$\bar{K}_L = \sum_{e=1}^{M} K_L^{(e)}$$
$$\bar{K}_G = \sum_{e=1}^{M} K_G^{(e)}$$
$${}^2\bar{P} = \sum_{e=1}^{M} {}^2P^{(e)}$$
$${}^1\bar{R} = \sum_{e=1}^{M} {}^1R^{(e)}$$

เมื่อ $\sum_{e=1}^{M}$ แสดงถึงการรวมส่วนย่อยโดยตรงตามวิธีของ Direct Stiffness Assembling Process และ M หมายถึงจำนวนไฟไนท์เอลเม้นท์ทั้งหมดที่ประกอบกันขึ้นเป็นวัตถุ

๓.๔.๓ การหาสภาพสมดุลย์ของวัตถุโดย Minimization Process

สมการที่ (๓.๑๓) แสดงถึงพฤติกรรมความสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการแปรผันค่าระยะเคลื่อนที่จุด nodal point ทั้งหมดของวัตถุ ซึ่งการแปรผันนี้จะให้สภาพสมดุลย์ของวัตถุที่แท้จริงสำหรับค่าระยะเคลื่อนใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

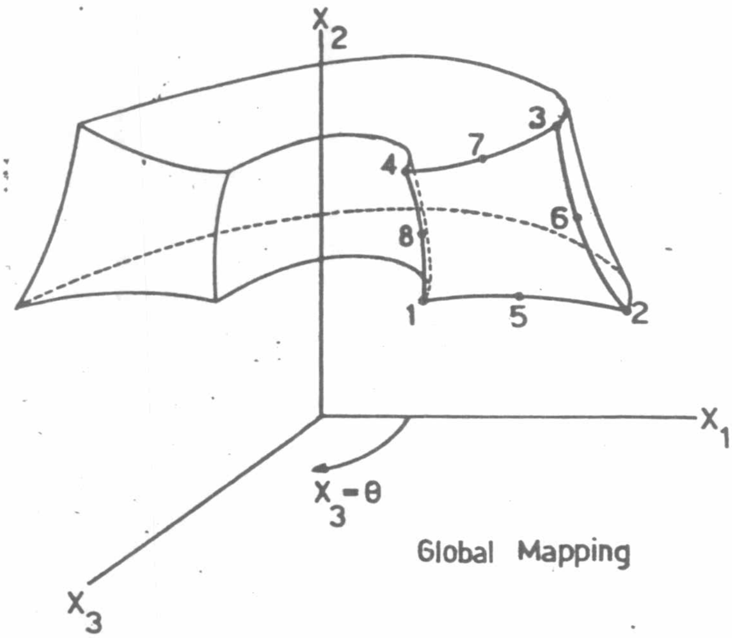
$$\left\{ \bar{K}_L + \bar{K}_G \right\} \cdot q = {}^2\bar{P} - {}^1\bar{R} \qquad (๓.๑๔)$$

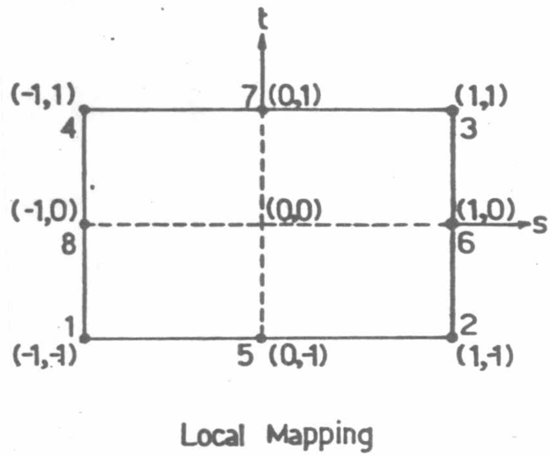
ซึ่งเป็นชุดสมการเชิงเส้นในตัวแปรไม่ทราบค่าระยะเคลื่อนที่จุด nodal point ทั้งหมด การวิเคราะห์แบบลำดับขั้นสำหรับพฤติกรรมของวัตถุชนิดไร้เชิงเส้น อาจกระทำได้โดยอาศัยสมการที่ (๓.๑๔) นี้พร้อมด้วยวิธีการแบบ Iterative(6) ชนิดของ Newton-Raphson

๓.๕ การสร้างแมททริซสำหรับคุณสมบัติของไฟไนท์เอลเม้นท์

๓.๕.๑ ไฟไนท์เอลเม้นท์ชนิดสมมาตรรอบแกนและหน้าตัดสี่เหลี่ยม (Axisymmetric Quadrilateral Ring Element)

ไฟไนท์เอลเม้นท์ที่จะพิจารณานี้ประกอบด้วย 8 nodal points บนหน้าตัดสี่เหลี่ยมและมีความสมมาตรรอบแกนหมุน ทำให้เกิดเป็นรูปวงแหวนขึ้น ดังแสดงในรูปที่ ๓.๔ กรณีของสเตรน





รูปที่ ๓.๔ ไฟไนท์เอลเม้นท์วงแหวนใน Global System และ Local System

และสเตร็ซบนระนาบก็อาจประยุกต์นำไปใช้ได้โดยตรง

ก. ส่วนประกอบของสเตร็ซและสเตรนประกอบด้วย

$$E_{IJ} = \langle E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12} \quad E_{33} \rangle \tag{๓.๑๕ก}$$

$$S_{IJ} = \langle S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12} \quad S_{33} \rangle \tag{๓.๑๕ข}$$

ข. ฟังก์ชั่นแห่งการประมาณสำหรับไฟไนท์เอลเม้นท์ชนิดนี้ประกอบด้วย

$$\phi^m(s,t) = \frac{1}{4}(1+s.s_m)(1+t.t_m) - \frac{1}{4}(1+s.s_m)(1-t^2) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t.t_m) \tag{๓.๑๖ก}$$

เมื่อ $m = 1,\ldots,4$ และ $(s_m, t_m) = \pm 1$

และสำหรับจุด nodal point ที่กึ่งกลางด้าน

$$\phi^m(s,t) = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t.t_m) \quad , s_m = 0 \tag{๓.๑๖ข}$$

$$\phi^m(s,t) = \frac{1}{2}(1+s.s_m)(1-t^2) \quad , t_m = 0 \tag{๓.๑๖ค}$$

เมื่อ $m = 5,\ldots,8$ ซึ่งในรูปของแมททริซเขียนได้เป็น

$$\phi = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(1-s)(1-t) - \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t) \\ \frac{1}{4}(1+s)(1-t) - \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t) \\ \frac{1}{4}(1+s)(1+t) - \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t) \\ \frac{1}{4}(1-s)(1+t) - \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t) \\ \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t) \\ \frac{1}{2}(1+s)(1-t^2) \\ \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t) \\ \frac{1}{2}(1-s)(1-t^2) \end{Bmatrix} \tag{๓.๑๖ง}$$

ค. ความสัมพันธ์ระหว่างสเตรนและระยะเคลื่อน สเตรนอาจแยกออกได้เป็นส่วนเชิงเส้นและส่วนไร้เชิงเส้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ E_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ e_{33} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{22} \\ 2\eta_{12} \\ \eta_{33} \end{Bmatrix} \tag{๓.๑๗}$$

สำหรับส่วนไร้เชิงเส้นนั้นจะพบว่าสามารถสร้างความสัมพันธ์กับระยะเคลื่อนได้โดยตรง ส่วนสเตรนเชิงเส้นนั้นเขียนในรูปของระยะเคลื่อนได้ดังนี้

$$e = {}^1F . u_\partial$$

เมื่อ

$${}^1F = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\partial^1 u_1}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{\partial^1 u_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^1 u_1}{\partial x_2} & 0 & \left(1+\frac{\partial^1 u_2}{\partial x_2}\right) & 0 \\ \frac{\partial^1 u_1}{\partial x_2} & \left(1+\frac{\partial^1 u_1}{\partial x_1}\right) & \left(1+\frac{\partial^1 u_2}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial^1 u_2}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(1+\frac{{}^1u_1}{x_1}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{๓.๑๘ก})$$

และ $$u_\partial^T = \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \frac{u_1}{x_1} \right\rangle \quad (\text{๓.๑๘ข})$$

เนื่องจากอนุพันธ์ของระยะเคลื่อน $u_{I|J}$ และ ${}^1u_{I|J}$ สัมพันธ์กับระยะเคลื่อนที่ nodal point โดยสมการที่ (๓.๙) ดังนั้นจึงเขียนได้ว่า

$$u_\partial = N . q \quad (\text{๓.๑๙ก})$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{u_1}{x_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^T_{,x_1} & 0 \\ \phi^T_{,x_2} & 0 \\ 0 & \phi^T_{,x_1} \\ 0 & \phi^T_{,x_2} \\ \frac{\phi^T}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{๓.๑๙ข})$$

เมื่อ , หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับ

และ $${}^1u_\partial = N . {}^1q \quad (\text{๓.๒๐ก})$$

เมื่อ $${}^1u_\partial^T = \left\langle \frac{\partial^1 u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial^1 u_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial^1 u_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial^1 u_2}{\partial x_2} \quad \frac{{}^1u_1}{x_1} \right\rangle \quad (\text{๓.๒๐ข})$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนส่วนสเตรนเชิงเส้นในรูปของตัวแปรระยะเคลื่อนที่ nodal point ได้เป็น

$$e = {}^1F . N . q = B . q \quad (\text{๓.๒๑})$$

ง. Jacobian Transformation ในแมททริซ N ซึ่งได้มาตามสมการที่ (๓.๑๙) นั้น จะต้องอาศัยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นแห่งการประมาณ $\phi^m(s,t)$ เทียบกับโคออร์ดิเนท X_1 และ X_2 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้ Jacobian Transformation ในการหาอนุพันธ์ดังกล่าวดังนี้

เมื่อพิจารณากฎลูกโซ่แห่งการหาอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,s} & X_{2,s} \\ X_{1,t} & X_{2,t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \end{Bmatrix} \qquad (๓.๒๒)$$

หรือในส่วนกลับ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} X_{2,t} & -X_{2,s} \\ -X_{1,t} & X_{1,s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} \qquad (๓.๒๓)$$

เมื่อ $$\det J = X_{1,s} X_{2,t} - X_{1,t} X_{2,s} \qquad (๓.๒๔)$$

ตามสมการที่ (๓.๑๐) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} X_{1,s} &= \phi^T_{,s} \hat{X}_1 \quad , \quad X_{1,t} = \phi^T_{,t} \hat{X}_1 \\ X_{2,s} &= \phi^T_{,s} \hat{X}_2 \quad , \quad X_{2,t} = \phi^T_{,t} \hat{X}_2 \end{aligned} \qquad (๓.๒๕)$$

เมื่อแทนสมการที่ (๓.๒๕) ลงในสมการที่ (๓.๒๔) จะได้

$$\begin{aligned} \det J &= \hat{X}_1^T \phi_{,s} \phi^T_{,t} \hat{X}_2 - \hat{X}_1^T \phi_{,t} \phi^T_{,s} \hat{X}_2 \\ &= \hat{X}_1^T \left[\phi_{,s} \phi^T_{,t} - \phi_{,t} \phi^T_{,s} \right] \hat{X}_2 \\ &= \hat{X}_1^T \cdot P \cdot \hat{X}_2 \qquad = -\hat{X}_2^T \cdot P \cdot \hat{X}_1 \end{aligned} \qquad (๓.๒๖)$$

เมื่อ $$P = \phi_{,s} \phi^T_{,t} - \phi_{,t} \phi^T_{,s} = -P^T \qquad (๓.๒๗)$$

เพราะฉะนั้น $\phi^T_{,X_1}$, $\phi^T_{,X_2}$ จึงสามารถคำนวณได้ตามสมการ (๓.๒๓) ดังนี้

$$\phi_{,X_1} = \frac{1}{\det J} \left[X_{2,t} \phi^T_{,s} - X_{2,s} \phi^T_{,t} \right] \qquad (๓.๒๘)$$

แทนค่าสำหรับ $X_{2,t}$ และ $X_{2,s}$ จากสมการ (๓.๒๕) ก็จะได้

$$\phi,_{x_1} = \frac{1}{\det J}\left[\hat{X}_2^T\phi,_t\phi,_s^T - \hat{X}_2^T\phi,_s\phi,_t^T\right]$$

$$= \frac{1}{\det J}\hat{X}_2^T\left[\phi,_t\phi,_s^T - \phi,_s\phi,_t^T\right]$$

$$= -\frac{1}{\det J}\hat{X}_2^T \cdot P \qquad (๓.๒๙)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\phi,_{x_2} = \frac{1}{\det J}\hat{X}_1^T \cdot P \qquad (๓.๓๐)$$

นอกจากนี้ยังได้ว่า ดิฟเฟอเรนเชียลของปริมาตร dv มีค่าเป็น

$$dv = (\det J)\, x_1\, dx_3\, ds\, dt \qquad (๓.๓๑)$$

๓.๕.๒ <u>รูปสำเร็จของแมททริซสำหรับคุณสมบัติของไฟไนท์เอลเม้นท์</u>

การสร้างแมททริซแสดงคุณสมบัติของไฟไนท์เอลเม้นท์สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ตามสมการที่ (๓.๑๔) กระทำได้ด้วยการหาค่าของอินทิเกรตต่าง ๆ สามสมการที่ (๓.๑๒) และคุณสมบัติต่าง ๆ ของไฟไนท์เอลเม้นท์ตามหัวข้อที่ ๓.๕.๑ ซึ่งในการอินทิเกรตบนปริมาตรของไฟไนท์เอลเม้นท์จะใช้วิธีการประมาณของ Gaussian Quadrature Formulas[6] ดังนี้

ก. <u>Linear Stiffness Matrix</u> ตามสมการที่ (๓.๑๒ก) ได้ว่า

$$K_L = \int_{^oV} B^T . C . B \, dV \qquad (๓.๓๒)$$

ซึ่งจะเขียนในรูปของการอินทิเกรตในโคออร์ดิเนต s และ t ได้เป็น

$$K_L = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^T . C . B \det J \; x_1 \, ds\, dt \qquad (๓.๓๓)$$

และโดยการประมาณตามสูตรของ Gaussian Quadrature มีค่า

$$K_L = \sum_j \sum_k w_j w_k \left\{ B^T(s_j,t_k) \cdot C(s_j,t_k) \cdot B(s_j,t_k) \right\}$$
$$\det J(s_j,t_k)\; X_1(s_j,t_k) \qquad (๓.๓๔)$$

โดยที่ w_j, w_k คือ Weight Functions

ข. <u>Geometric Stiffness Matrix</u> ตามสมการที่ (๓.๑๒ข) ได้ว่า

$$\delta\hat{q} \cdot K_G \cdot \hat{q} = \int_{^oV} {}^1S_{IJ}\, \delta\eta_{IJ}\, dv \qquad (๓.๓๕)$$

โดยที่ส่วนประกอบสเตรนชนิดไร้เชิงเส้น η_{IJ} เขียนได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{22} \\ 2\eta_{12} \\ \eta_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{x_1}\right)^2 \end{Bmatrix} \qquad (๓.๓๖)$$

ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปสมมาตรกับ ${}^1S_{IJ}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 2\,{}^1S_{IJ}\eta_{IJ} = {} & \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\rangle \begin{bmatrix} {}^1S_{11} & {}^1S_{12} \\ {}^1S_{21} & {}^1S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \\ & + \left\langle \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\rangle \begin{bmatrix} {}^1S_{11} & {}^1S_{12} \\ {}^1S_{21} & {}^1S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \\ & + \left\langle \frac{u_1}{x_1} \right\rangle {}^1S_{33} \left\langle \frac{u_1}{x_1} \right\rangle \end{aligned} \qquad (๓.๓๗)$$

หรือ $$2\,{}^1S_{IJ}\eta_{IJ} = u_\partial^T \cdot {}^1\hat{S} \cdot u_\partial \qquad (๓.๓๘)$$

เมื่อ u_∂ หาได้จากสมการที่ (๓.๑๙) และ ${}^1\hat{S}$ คือ

$${}^1\hat{S} = \begin{bmatrix} {}^1S_{11} & {}^1S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^1S_{21} & {}^1S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^1S_{11} & {}^1S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^1S_{21} & {}^1S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1S_{33} \end{bmatrix} \qquad (๓.๓๙)$$

ถ้าแทน u_∂ ตามสมการที่ (๓.๑๙) ลงในสมการที่ (๓.๓๘) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$${}^1S_{IJ}\eta_{IJ} = \frac{1}{2} q^T [N]^T [{}^1\hat{S}] [N] q \qquad (๓.๔๐)$$

เมื่อหาการแปรผันของสมการที่ (๓.๔๐) จะได้ว่า

$$ {}^{1}S_{IJ}\,\delta\eta_{IJ} = \delta q^{T}\left[N\right]^{T}\left[{}^{1}\hat{S}\right]\left[N\right] q \qquad (๓.๔๑) $$

ดังนั้น geometric stiffness matrix จึงเขียนได้ในรูปที่มีความสมมาตรเป็น

$$ K_G = \int_{{}^{\circ}V}\left[N\right]^{T}\left[{}^{1}\hat{S}\right]\left[N\right] dV \qquad (๓.๔๒) $$

หรือ

$$ K_G = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[N\right]^{T}\left[{}^{1}\hat{S}\right]\left[N\right] \det J\; X_1\, ds\, dt \qquad (๓.๔๓) $$

ซึ่งโดยการประมาณมีค่าเป็น

$$ K_G = \sum_{j}\sum_{k} W_j W_k \left[N^{T}(s_j,t_k)\cdot {}^{1}\hat{S}(s_j,t_k)\cdot N(s_j,t_k)\right] $$
$$ \det J(s_j,t_k)\cdot X_1(s_j,t_k) \qquad (๓.๔๔) $$

ค. <u>Equivalent Nodal Load Vector ${}^{1}R$ for Equilibrim Correction</u>

เวคเตอร์ของหน่วยแรงที่ทำให้เกิดสภาพสมดุลย์แท้จริง เขียนได้ตามสมการที่ (๓.๑๒ค) เป็น

$$ \delta q^{T}\cdot{}^{1}R = \int_{{}^{\circ}V} {}^{1}S_{IJ}\,\delta e_{IJ}\, dV \qquad (๓.๔๕) $$

นั่นคือ

$$ {}^{1}R = \int_{{}^{\circ}V} B^{T}\cdot{}^{1}S\; dV \qquad (๓.๔๖) $$

โดยที่

$$ \langle {}^{1}S \rangle = \langle {}^{1}S_{11}\;\; {}^{1}S_{22}\;\; {}^{1}S_{12}\;\; {}^{1}S_{33} \rangle \qquad (๓.๔๗) $$

และในโคออร์ดิเนท s, t เขียนได้เป็น

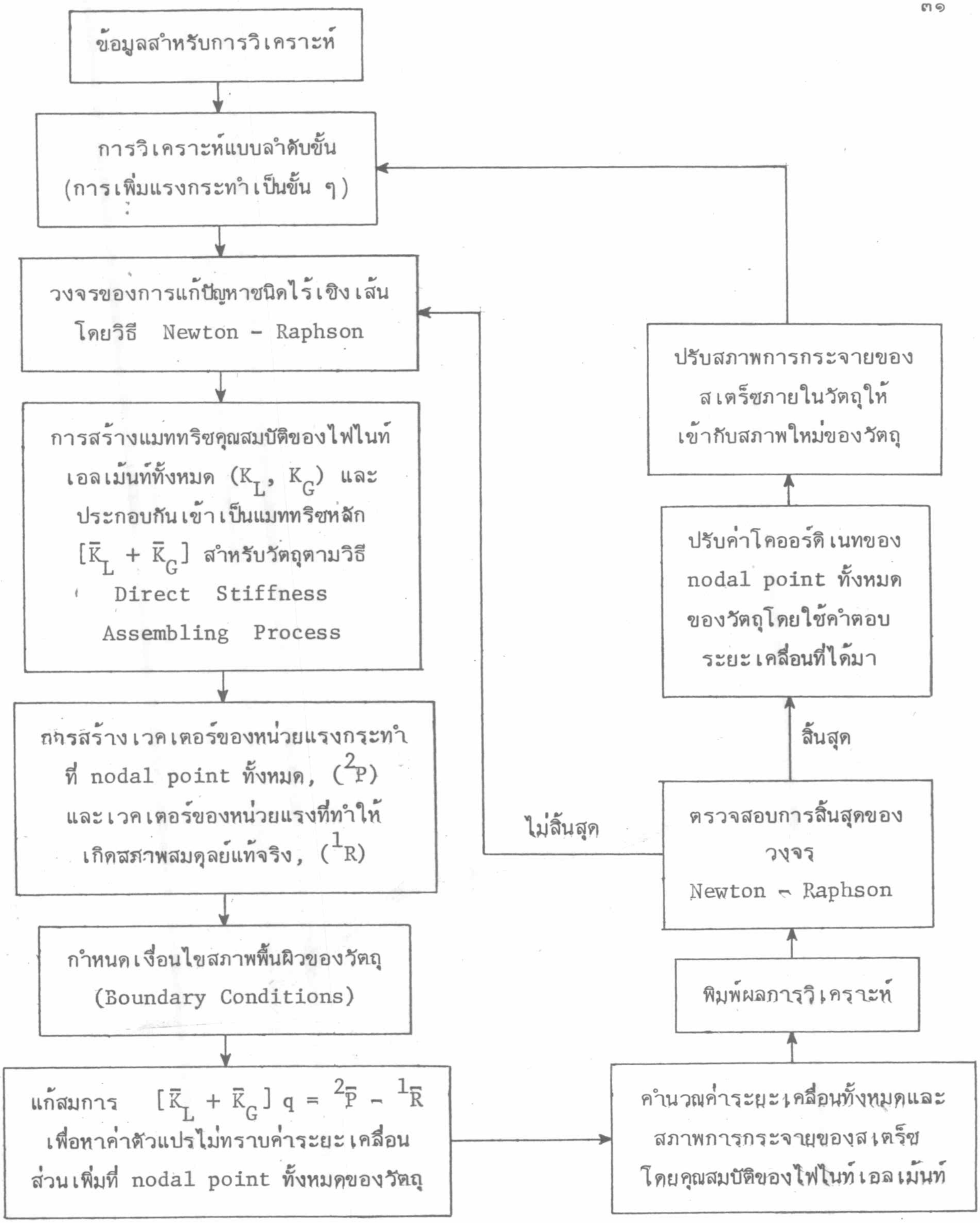
$$ {}^{1}R = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^{T}\cdot{}^{1}S\; \det J\cdot X_1\, ds\, dt \qquad (๓.๔๘) $$

ซึ่งในการอินทิเกรตโดยประมาณมีค่าเท่ากับ

$$ {}^{1}R = \sum_{j}\sum_{k} W_j W_k \left[B^{T}(s_j,t_k)\cdot{}^{1}S(s_j,t_k)\right] $$
$$ \det J(s_j,t_k)\cdot X_1(s_j,t_k) \qquad (๓.๔๙) $$

ง. <u>Consistent Nodal Load Vector</u> เป็นเวคเตอร์ที่ได้จากการหาค่าแรงกระทำภายนอกซึ่งกระทำที่ nodal point ต่าง ๆ ของไฟไนท์เอลเม้นท์ตามวิธีการเบื้องต้นของวิธีการไฟไนท์เอลเม้นท์[6]

การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์แบบลำดับขั้นที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ เราสามารถเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการคำนวณโดยมีขั้นตอนต่าง ๆ แสดงในแผนภูมิรูปที่ ๓.๕



รูปที่ ๓.๕ แผนภูมิของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์แบบลำดับขั้น