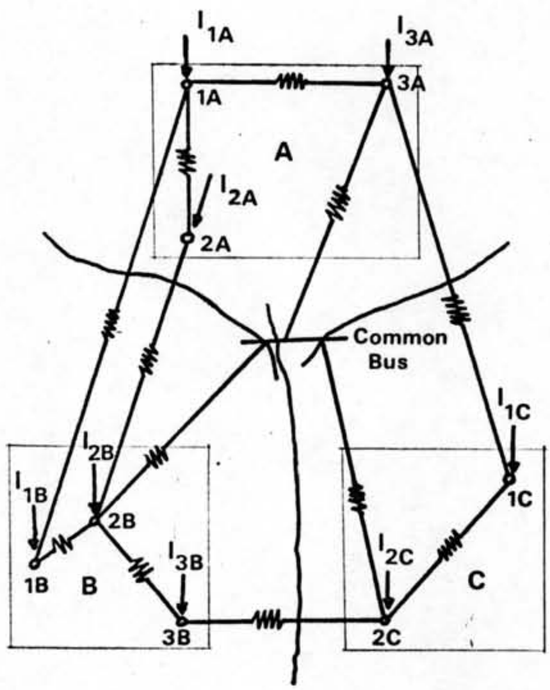
บทที่ 3

วิธีหาผลลัพธ์แบบแยกส่วนโดยใช้หลักการของไดคอปติก

3.1 การหาผลลัพธ์แบบแยกส่วน

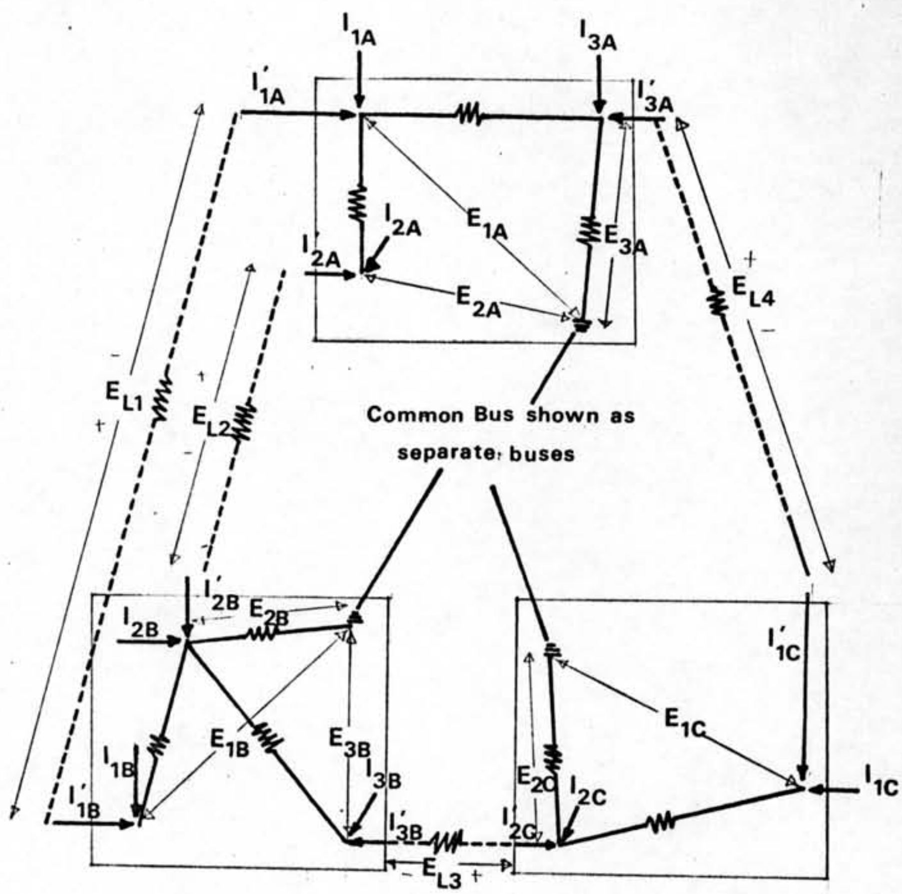
แนวทางก็คือแบ่งข่ายวงจรออกเป็นส่วนย่อย แล้วหาผลลัพธ์ของส่วนย่อย นำผลลัพธ์ของส่วนย่อยมารวมกับผลอันเนื่องมาจากการแบ่ง ก็จะได้ผลลัพธ์รวมของข่ายวงจรทั้งหมด ซึ่งจะแสดงวิธีการหาดังนี้

ข่ายวงจร ในรูปที่ 3.1 มีกระแสซึ่งเสมือนเป็นแหล่งกำเนิดกระแสไหลเข้าที่บัส การหาผลลัพธ์ของแรงดันอาจหาได้จากวิธีธรรมดา แต่ในที่นี้จะแสดงการหาผลลัพธ์แบบแยกส่วน โดยการแบ่งข่ายวงจรออกเป็น 3 ส่วนเรียกว่าเป็นโซน A,B และ C ตามรูปที่ 3.1 เส้นที่แบ่งโซนจะผ่านบัสอยู่บัสหนึ่งเรียกว่า บัสร่วม (Common Bus)



รูปที่ 3.1 แสดงข่ายวงจรซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 3 โซน

สายที่เชื่อมระหว่างโซนจะถูกเส้นแบ่งโซนตัด เรียกว่า คัทลายน์ (Cut Line) เมื่อเอาคัทลายน์ออกวงจรย่อยในแต่ละโซนยังคงต่อถึงกันที่ บัสร่วม และบัสที่เดิมมีคัทลายน์ต่ออยู่ เมื่อเอาคัทลายน์ออกจะต้องแทนด้วยกระแสสมมูลย์ไหลเข้าบัสนั้น จึงจะทำให้ผลลัพธ์ของข่ายวงจรรวมทั้งหมดมีค่าเท่าเดิม กระแสสมมูลย์นี้ก็คือกระแสที่ไหลในคัทลายน์นั้นเอง ดูรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงข่ายวงจรเมื่อเอาคัทลายน์ออก

ข่ายวงจรที่นำมาหาผลลัพธ์โดยวิธีแบ่งเป็นโซนนี้ จะต้องไม่มีมิวช่วลคัปปลิ้ง (Mutual Coupling) ระหว่างสายที่อยู่ต่างโซนกัน แต่มีมิวช่วลคัปปลิ้งระหว่างสายที่อยู่

ในโซนเดียวกันได้ สมการพริมิทีฟ (Primitive) ของข่ายวงจรทั้งหมดเขียนได้ดังนี้[2]

$$J = YV \tag{3.1}$$

เขียนแยกเป็นโซนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ L \end{array} \begin{bmatrix} J_A \\ J_B \\ J_C \\ J_L \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{AA} & & & \\ & Y_{BB} & & \\ & & Y_{CC} & \\ & & & Y_{LL} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ L \end{array} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_L \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

จากแรงดันพริมิทีฟในแต่ละโซน เปลี่ยนรูป (Transform) ให้เป็นแรงดันโหนด-แพร์ (Node-pair Voltage) ได้โดยใช้โหนด-แพร์ทรานฟอร์เมชั่นเมตริก (Node-pair Transformation Matrix)

ความสัมพันธ์ของแรงดันพริมิทีฟและแรงดันโหนดแพร์เป็นดังนี้[6]

$$V = A_{NP}^{t}V' \tag{3.3}$$

โดยที่ A_{NP} เป็นโหนด-แพร์ทรานฟอร์เมชั่นเมตริก

ในแต่ละโซนการจับคู่ของโหนด-แพร์จะจับคู่กันระหว่างบัสกับบัสร่วม และการจับคู่กันของโหนด-แพร์ที่ต่างโซนกัน จะจับคู่กันระหว่างบัสที่ศักย์ต่ออยู่

กระแสโหนด-แพร์หาได้จากเพาว์เวอร์อินวาเหรียน (Power Invariance) ดังนี้

$$J' = A_{NP}J \tag{3.4}$$

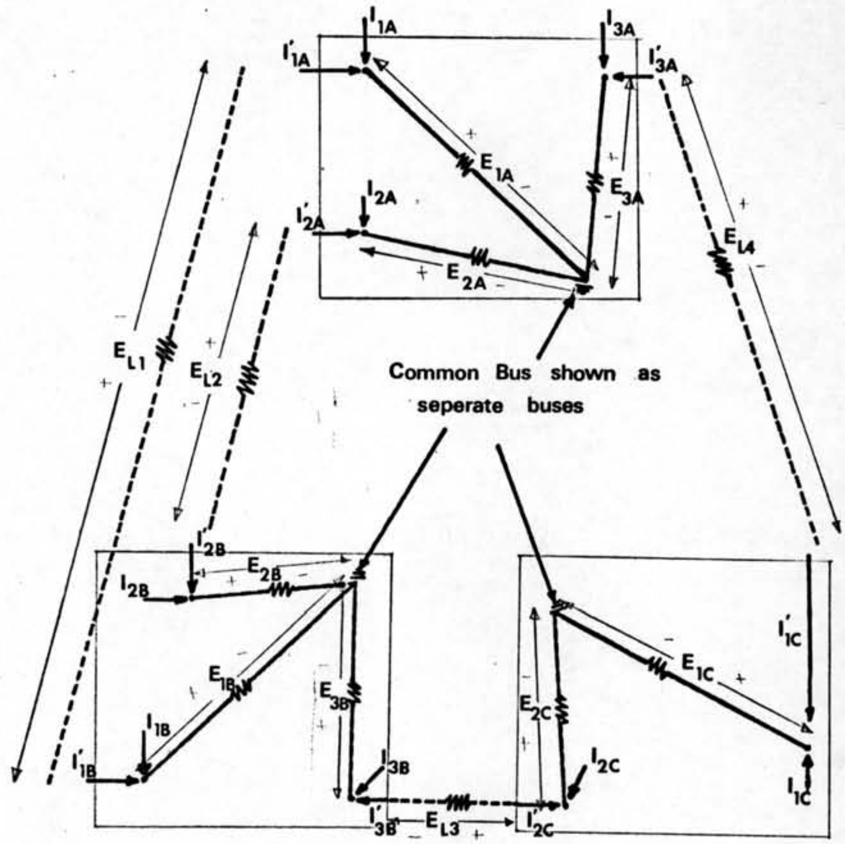
และโหนด-แพร์แอทมิตแทนซ์เมตริกจะได้ดังนี้

$$Y' = A_{NP}^{t}YA_{NP} \tag{3.5}$$

ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันโหนด-แพร์ คือ

$$J' = Y'V' \tag{3.6}$$

หลังจากเปลี่ยนรูปเป็นโหนด-แพร์แล้ว ข่ายวงจรใหม่ซึ่งสมมูลย์กับข่ายวงจรเดิม จะได้ตามรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงข่ายวงจรโหนด-แพร์ ซึ่งสมมูลย์กับข่ายวงจรพริมิทีฟ

ตามรูปที่ 3.3 จะเห็นว่า สายในแต่ละโซนจะต่อกันเป็นทรี (Tree) และคัทลายน์จะเป็นลิ้ง (Link) ของกราฟของข่ายวงจร(1)

สมการที่ (3.6) จะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$
\begin{matrix} T\left\{\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right. \\ L\end{matrix}
\left[\begin{array}{c} I_A = I_{TA}+I'_{TA} \\ I_B = I_{TB}+I'_{TB} \\ I_C = I_{TC}+I'_{TC} \\ \hline J_L \end{array}\right]
=
\begin{matrix} T\left\{\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right. \\ L\end{matrix}
\begin{array}{c} \overbrace{A \qquad B \qquad C}^{T} \qquad L \\ \left[\begin{array}{ccc|c} Y_{AA} & & & \\ & Y_{BB} & & \\ & & Y_{CC} & \\ \hline & & & Y_{LL}\end{array}\right]\end{array}
\begin{matrix} T\left\{\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right. \\ L\end{matrix}
\left[\begin{array}{c} E_A \\ E_B \\ E_C \\ \hline V_L \end{array}\right]
\qquad (3.7)
$$

เวคเตอร์ E_A,E_B,E_C เป็นแรงดันโหนด-แพร์ ของโซน A,B,C ตามลำดับ ตามรูปที่ 3.3 ค่าเหล่านี้ก็คือ ค่าแรงดันของบัสเทียบกับบัสร่วม

$$
E_A = \begin{bmatrix} E_{1A} \\ E_{2A} \\ E_{3A} \end{bmatrix}, \quad E_B = \begin{bmatrix} E_{1B} \\ E_{2B} \\ E_{3B} \end{bmatrix}, \quad E_C = \begin{bmatrix} E_{1C} \\ E_{2C} \\ \; \end{bmatrix} \qquad (3.8)
$$

เวคเตอร์ V_L ก็คือ แรงดันระหว่างบัสที่ศัทลายน์ต่ออยู่

$$
V_L = E_L + e_L \qquad (3.9)
$$

โดยที่

e_L เป็นแหล่งกำเนิดแรงดันที่ต่ออนุกรมกับศัทลายน์ในตัวอย่าง ไม่มีจึงมีค่าเท่ากับศูนย์

E_L เป็นเวคเตอร์ของแรงดันคร่อมศัทลายน์

$$
E_L = \begin{bmatrix} E_{L1} \\ E_{L2} \\ E_{L3} \\ E_{L4} \end{bmatrix} \qquad (3.10)
$$

เวคเตอร์ I_A, I_B, I_C คือ กระแสโหนด-แพร์ในที่นี้จะเป็นกระแสที่ไหลผ่านทรี ประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนที่เกิดจากแหล่งกำเนิดกระแส I_T และส่วนที่เกิดจากคัทลายน์ I'_T จากรูปที่ 3.3

$$I_{TA} = \begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \\ I_{3A} \end{bmatrix} , \quad I'_{TA} = \begin{bmatrix} I'_{1A} \\ I'_{2A} \\ I'_{3A} \end{bmatrix}$$

$$I_{TB} = \begin{bmatrix} I_{1B} \\ I_{2B} \\ I_{3B} \end{bmatrix} , \quad I'_{TB} = \begin{bmatrix} I'_{1B} \\ I'_{2B} \\ I'_{3B} \end{bmatrix}$$

$$I_{TC} = \begin{bmatrix} I_{1C} \\ I_{2C} \end{bmatrix} , \quad I'_{TC} = \begin{bmatrix} I'_{1C} \\ I'_{2C} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

เวคเตอร์ J_L คือ กระแสที่ไหลผ่านคัทลายน์

Y_{AA}, Y_{BB}, Y_{CC} เป็นโหนด-แพร์แอทมิตแทนซ์เมตริกของโซน A,B,C ตามลำดับ จากการจับคู่ของโหนด-แพร์ในแต่ละโซนระหว่างบัสกับบัสร่วม จะเห็นได้ว่าโหนด-แพร์แอทมิตแทนซ์เมตริกของทั้ง 3 โซนก็คือ บัสแอทมิตแทนซ์เมตริกของแต่ละโซนนั่นเอง

Y_{LL} เป็นแอทมิตแทนซ์เมตริกของคัทลายน์ เมื่อไม่มีมิวช่วลคัปปลิ้งระหว่างคัทลายน์ Y_{LL} จะเป็นเมตริกแนวทะแยง (Diagonal Matrix) สมาชิก (Element) บนแนวทะแยงก็คือ ค่าแอทมิตแทนซ์ของคัทลายน์นั้น ๆ

สมการที่ (3.6) เขียนความสัมพันธ์ในรูปของอิมพิแดนซ์ได้ดังนี้

$$V' = Z'J' \tag{3.12}$$

และเขียนขยายความได้ดังนี้

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overbrace{A \quad B \quad C}^{T} & & & L \end{array} \\ T\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right. \\ L \end{array} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \\ \hdashline E_L + e_L \end{bmatrix} = \begin{array}{c} T\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right. \\ L \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} Z_{AA} & & & \\ & Z_{BB} & & \\ & & Z_{CC} & \\ \hdashline & & & Z_{LL} \end{array}\right] \begin{array}{c} T\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right. \\ L \end{array} \begin{bmatrix} I_{TA} + I'_{TA} \\ I_{TB} + I'_{TB} \\ I_{TC} + I'_{TC} \\ \hdashline J_L \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Z_{AA}, Z_{BB}, Z_{CC} คือ บัสอิมพิแดนซ์เมตริกของโซน A,B,C

Z_{LL} คือ อิมพิแดนซ์เมตริกของคัทลายน์

สมการที่ (3.13) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} E_T \\ \hdashline E_L + e_L \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} Z_{TT} & \\ \hdashline & Z_{LL} \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_T + I'_T \\ \hdashline J_L \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

โดยที่

$$E_T = \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{bmatrix}, \quad I_T = \begin{bmatrix} I_{TA} \\ I_{TB} \\ I_{TC} \end{bmatrix}, \quad I'_T = \begin{bmatrix} I'_{TA} \\ I'_{TB} \\ I'_{TC} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

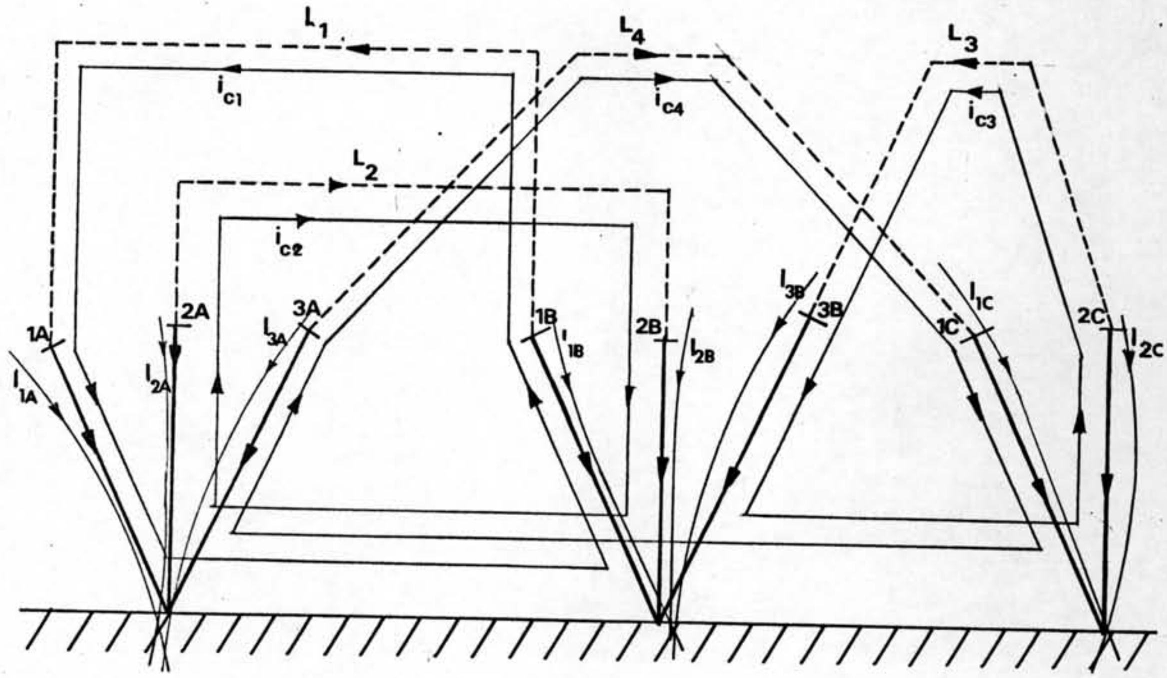
จากสมการที่ (3.14) ได้ว่า

$$E_T = Z_{TT} I_T + Z_{TT} I'_T \tag{3.16}$$

ในข่ายวงจร ถ้ากำหนดค่า I_T ให้ จะคำนวณหา E_T ได้จะต้องหา I'_T ให้ได้ก่อน วิธีหา I'_T มี 2 วิธี คือ วิธีแรกหาโดยใช้วิธีอิเทอเรทีฟ เรียกว่า วิธี Boundary Iteration วิธีหลังหาโดยไม่ต้องใช้อิเทอเรทีฟ วิธีนี้เรียกว่า Diakoptic Method [6]

3.2 หลักการของไดคอปติก

จากรูปที่ 3.3 เขียนกราฟของข่ายวงจรโหนด-แพร์ได้ตามรูปที่ 3.4 แสดง ทรี, บรานส์, ลิ้งค์ ของกราฟ และแสดงวงรอบเปิด (Open Loop) และวงรอบปิด (Close Loop)



รูปที่ 3.4 กราฟของข่ายวงจรโหนด-แพร์ แสดงวงรอบเปิดและวงรอบปิด

ตามรูปที่ 3.4 กระแสทั้งหมดที่ไหลผ่านบรานส์ของทรี ประกอบด้วยกระแสสอง ส่วนคือ I_T และ i_T

$$J_T = I_T + i_T \tag{3.17}$$

I_T คือกระแสภายนอกที่เกิดจากแหล่งกำเนิดกระแส มีความสัมพันธ์กับกระแสวงรอบเปิด (Open Loop Current) I_o ดังนี้

$$I_T = C_{To}\, I_o \tag{3.18}$$

โดยที่

C_{To} คืออินซิเดนซ์เมตริกของทรี-วงรอบเปิด (Tree-Open Loop Incidence Matrix) ตามตัวอย่างรูปที่ 3.4 ค่า C_{To} จะเป็นยูนิตเมตริก (Unit Matrix)

i_T เป็นกระแสส่วนที่เกิดจากกระแสวงรอบปิด (Close Loop Current) i_c

$$i_T = C_{Tc}\, i_c \tag{3.19}$$

โดยที่

C_{Tc} คืออินซิเดนซ์เมตริกของทรี-วงรอบปิด (Tree-Close Loop Incidence Matrix)

จากสมการ (3.17), (3.18), (3.19)

$$J_T = C_{To}\, I_o + C_{Tc}\, i_c \tag{3.20}$$

กระแสที่ไหลผ่านลิ้งค์ เกิดจากส่วนของกระแสวงรอบปิดเท่านั้น

$$J_L = i_L = C_{Lc}\, i_c \tag{3.21}$$

โดยที่

C_{Lc} คืออินซิเดนซ์เมตริกของลิ้งค์-วงรอบปิด (Link-Close Loop Incidence Matrix) โดยทั่วไป C_{Lc} จะเป็นยูนิตเมตริก

จากสมการที่ (3.20) และ (3.21) เขียนความสัมพันธ์ของกระแสในรูปของเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} J_T = I_T + i_T \\ J_L = i_L \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} o & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{To} & C_{Tc} \\ 0 & C_{Lc} \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} I_o \\ i_c \end{bmatrix}\end{array} \tag{3.22}$$

จากเพาเวอร์อินวาเหรียน ความสัมพันธ์ของแรงดันในรูปเมตริกจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} E_o \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} C^t_{To} & 0 \\ C^t_{Tc} & C^t_{Lc} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array}\begin{bmatrix} E_T \\ E_L + e_L \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

จากสมการที่ (3.23) เขียนกระจายได้ดังนี้

$$E_o = C^t_{To} \; E_T \qquad (3.24)$$

$$e_c = C^t_{Tc} \; E_T + C^t_{Lc} \; E_L + C^t_{Lc} \; e_L \qquad (3.25)$$

ค่าแรงดันวงรอบปิด e_c จะเท่ากับ แหล่งกำเนิดแรงดัน ซึ่งต่ออนุกรมอยู่ในลิ้งค์ e_L นั่นคือ

$$e_c = e_L \qquad (3.26)$$

จากสมการที่ (3.25), (3.26) และแทนค่า C_{Lc} เป็นยูนิตเมตริกจะได้ว่า

$$E_L = -C^t_{Tc} \; E_T \qquad (3.27)$$

กระแส I'_T ซึ่งเกิดจากศักลายน์ตามสมการที่ (3.11) กับกระแส i_T ซึ่งเป็นกระแสส่วนที่เกิดจากกระแสวงรอบปิด คือค่าเดียวกันดังนั้นได้ว่า

$$I'_T = i_T \qquad (3.28)$$

แทนค่า i_T จากสมการ (3.19) ในสมการ (3.28) ได้ว่า

$$I'_T = C_{Tc} \; i_c \qquad (3.29)$$

แทนค่าสมการ (3.22) และ (3.23) ในสมการ (3.14) จะได้ว่า

$$\begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} E_o \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} C^t_{To} & 0 \\ C^t_{Tc} & C^t_{Lc} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} Z_{TT} & \\ & Z_{LL} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} o & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{To} & C_{Tc} \\ 0 & C_{Lc} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} I_o \\ i_c \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

สมการที่ (3.30) เขียนความสัมพันธ์ของแรงดันวงรอบ (Loop Voltage) และกระแสวงรอบ (Loop Current) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} E_o \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} o & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} Z_{oo} & Z_{oc} \\ Z_{co} & Z_{cc} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} I_o \\ i_c \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

โดยที่

$$Z_{oo} = C^t_{To} Z_{TT} C_{To} \tag{3.32}$$

$$Z_{oc} = C^t_{To} Z_{TT} C_{Tc} \tag{3.33}$$

$$Z_{co} = C^t_{Tc} Z_{TT} C_{To} \tag{3.34}$$

$$Z_{cc} = C^t_{Tc} Z_{TT} C_{Tc} + C^t_{Lc} Z_{LL} C_{Lc} \tag{3.35}$$

จากสมการ (3.31)

$$E_o = Z_{oo} I_o + Z_{oc} i_c \tag{3.36}$$

$$e_c = Z_{co} I_o + Z_{cc} i_c \tag{3.37}$$

แทนค่าจากสมการ (3.24),(3.32),(3.18),(3.33),(3.29) ในสมการ (3.36) ได้ว่า

$$C^t_{To} E_T = C^t_{To} Z_{TT} I_T + C^t_{To} Z_{TT} I'_T \tag{3.38}$$

คูณสมการ (3.38) ด้วยส่วนกลับของ C^t_{To} จะได้

$$E_T = Z_{TT} I_T + Z_{TT} I'_T \tag{3.39}$$

กำหนดให้

$$E^{(o)}_T = Z_{TT} I_T \tag{3.40}$$

$$E^{(1)}_T = Z_{TT} I'_T \tag{3.41}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.39) เขียนได้เป็น

$$E_T = E_T^{(o)} + E_T^{(1)} \tag{3.42}$$

จากสมการ (3.37)

$$i_c = Z_{cc}^{-1} (e_c - Z_{co} I_o) \tag{3.43}$$

แทนค่าสมการ (3.34) และ (3.18) ในสมการ (3.43)

$$i_c = Z_{cc}^{-1} (e_c - C_{Tc}^t Z_{TT} I_T) \tag{3.44}$$

แทนค่าสมการ (3.40) ในสมการ (3.44)

$$i_c = Z_{cc}^{-1} (e_c - C_{Tc}^t E_T^{(o)}) \tag{3.45}$$

กำหนดให้

$$e'_c = -C_{Tc}^t E_T^{(o)} \tag{3.46}$$

ดังนั้นได้ว่า

$$i_c = Z_{cc}^{-1} (e_c + e'_c) \tag{3.47}$$

จากสมการที่ (3.27) และ (3.42)

$$E_L = -C_{Tc}^t (E_T^{(o)} + E_T^{(1)}) \tag{3.48}$$

แบ่ง E_L เป็น 2 ส่วนทำนองเดียวกับ E_T ได้ว่า

$$E_L = E_L^{(o)} + E_L^{(1)} \tag{3.49}$$

โดยที่

$$E_L^{(o)} = -C_{Tc}^t E_T^{(o)} \tag{3.50}$$

$$E_L^{(1)} = -C_{Tc}^t E_T^{(1)} \tag{3.51}$$

จากสมการที่ (3.46) และ (3.50) จะได้ว่า

$$e'_c = E_L^{(o)} \tag{3.52}$$

แทนค่าสมการ (3.52) ในสมการ (3.47)

$$i_c = Z_{cc}^{-1} (e_c + E_L^{(o)}) \tag{3.53}$$

<u>สรุป</u> โดยวิธีไดคอปติก สามารถหาผลลัพธ์ของข่ายวงจรด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$I_T = C_{To} I_o \tag{3.54}$$

$$E_T^{(o)} = Z_{TT} I_T \tag{3.55}$$

$$e'_c = -C^t_{Tc} E_T^{(o)} \tag{3.56}$$

$$e_c = e_L \tag{3.57}$$

$$e''_c = e_c + e'_c \tag{3.58}$$

$$i_c = Z^{-1}_{cc} e''_c \tag{3.59}$$

$$I'_T = C_{Tc} i_c \tag{3.60}$$

$$E_T^{(1)} = Z_{TT} I'_T \tag{3.61}$$

$$E_T = E_T^{(o)} + E_T^{(1)} \tag{3.62}$$

$$E_o = C^t_{To} E_T \tag{3.63}$$

3.3 <u>การนำไดคอปติกไปใช้งาน</u>

ข่ายวงจรตามตัวอย่าง กำหนดค่า I_T ให้จะต้องคำนวณหา E_T ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของข่ายวงจร โดยใช้วิธีไดคอปติกสามารถหาผลลัพธ์ได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. หาผลลัพธ์ของข่ายวงจรย่อยโดยไม่คิดผลของกระแสจากคัทลายน์ (I'_T) โดยใช้สมการที่ (3.55)

$$E_T^{(o)} = Z_{TT} I_T \tag{3.64}$$

2. หาแรงดันคร่อม คัทลายน์ ($E_L^{(o)}$) ในตัวอย่างนี้ไม่มีแหล่งกำเนิดแรงดัน (e_L) ต่ออนุกรมในคัทลายน์ นั่นคือ $e_L = o$

จากสมการที่ (3.52),(3.57) และ (3.58) ได้ว่า

$$e''_c = E_L^{(o)} \tag{3.65}$$

ค่า $E_L^{(o)}$ หาได้โดยตรงจากแผนภูมิของข่ายวงจรโดยไม่ต้องใช้ C_{Tc}

$$E_L^{(o)} = \begin{bmatrix} E_{L1}^{(o)} \\ E_{L2}^{(o)} \\ E_{L3}^{(o)} \\ E_{L4}^{(o)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1B}^{(o)} - E_{1A}^{(o)} \\ E_{2A}^{(o)} - E_{2B}^{(o)} \\ E_{2C}^{(o)} - E_{3B}^{(o)} \\ E_{3A}^{(o)} - E_{1C}^{(o)} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

3. คำนวณหากระแสวงรอบปิด (i_c) จากสมการที่ (3.59)

$$i_c = Z_{cc}^{-1} e_c'' \tag{3.67}$$

4. หาค่า I_T' จาก i_c โดยการกำหนดเครื่องหมายตามทิศการไหลของ i_c โดยไม่ต้องใช้ C_{Tc}

สมมติ หา I_T' โดยใช้ทรานฟอร์มเมชั่นเมตริก C_{Tc}

จากสมการ (3.60)

$$I_T' = C_{Tc}\, i_c \tag{3.68}$$

เขียนกระจายได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array} \begin{bmatrix} I_{1A}' \\ I_{2A}' \\ I_{3A}' \\ I_{1B}' \\ I_{2B}' \\ I_{3B}' \\ I_{1C}' \\ 1_{2C}' \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ i_{c3} \\ i_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{c1} \\ -i_{c2} \\ -i_{c4} \\ -i_{c1} \\ i_{c2} \\ i_{c3} \\ i_{c4} \\ -i_{c3} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

จะเห็นว่าค่า I'_T ได้จากการกำหนดเครื่องหมายของ i_c ในกรณีที่มีคัทลายน์หลายเส้นต่ออยู่ที่บัส ค่า I'_T คือผลรวมของกระแสที่ไหลในคัทลายน์ซึ่งต่ออยู่ที่บัสนั้น

5. หาแรงดันที่เกิดจาก I'_T จากสมการที่ (3.61)

$$E_T^{(1)} = Z_{TT} I'_T \tag{3.70}$$

6. หาผลลัพธ์ของข่ายวงจรทั้งหมดโดยใช้สมการที่ (3.62)

$$E_T = E_T^{(o)} + E_T^{(1)} \tag{3.71}$$

<u>สรุป</u> ผลลัพธ์ของข่ายวงจร หาได้ตาม 6 ขั้นตอนดังนี้

1. $E_T^{(o)} = Z_{TT} I_T$
2. $e''_c = E_L^{(o)}$, $E_L^{(o)}$ คือแรงดันคร่อมคัทลายน์
3. $i_c = Z_{cc}^{-1} e''_c$
4. I'_T หาได้จากการกำหนดเครื่องหมาย i_c
5. $E_T^{(1)} = Z_{TT} I'_T$
6. $E_T = E_T^{(o)} + E_T^{(1)}$

3.4 การจัดรูปข่ายวงจรและการสร้างเมตริก

การเปลี่ยนรูปจากข่ายวงจรพริมิทีฟให้เป็นข่ายวงจรโหนด-แพร์ นั้น จะมีการจับคู่กันเป็นโหนด-แพร์เฉพาะบัส (ทุก ๆ บัส) กับบัสร่วม และจับคู่กันระหว่างบัสที่มีคัทลายน์เชื่อมอยู่เท่านั้น ดังนั้น เมื่อเขียนแผนภูมิของข่ายวงจรโหนด-แพร์ ตามรูปที่ 3.3 จะเห็นว่า สายที่เชื่อมระหว่างบัสที่อยู่ในโซนเดียวกันจะหายไป จะมีสายใหม่ที่ต่อจากบัสไปหาบัสร่วม ซึ่งเขียนกราฟแล้วจะเป็นยูนิตทรี (Unit Tree) จะเห็นได้ว่า เมื่อพิจารณาแต่ละโซนโหนด-แพร์อิมพิแดนซ์เมตริกก็คือ บัสอิมพิแดนซ์เมตริกของแต่ละโซนนั่นเอง เมื่อพิจารณารูปที่ 3.3 จะเห็นว่า ค่าสมาชิกในแนวทะแยง (Diagonal element) ของบัสอิมพิแดนซ์เมตริกเปรียบเสมือนเป็นค่าอิมพิแดนซ์ของบร้านส์

ของทรี ส่วนค่าสมาชิกนอกแนวทะแยง (Off-diagonal element) เปรียบเสมือนเป็นมิวช่วลคัปปลิ้งระหว่างบร้านส์ ดังนั้น ข่ายวงจรโหนด-แพร์ ตามรูปที่ 3.3 จะเป็นเสมือนข่ายวงจรพริมิทีฟใหม่ ซึ่งนำมาหาผลลัพธ์โดยใช้เฟรมอ้างอิงวงรอบ (Loop Reference Frame)

จากสมการ (3.31) สมการวงรอบ (Loop Equation) เขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} E_o \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} o & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} Z_{oo} & Z_{oc} \\ Z_{co} & Z_{cc} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} o \\ c \end{array}\begin{bmatrix} I_o \\ i_c \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

การเปลี่ยนรูปจากข่ายวงจรพริมิทีฟเป็นข่ายวงจรโหนด-แพร์ จะได้กราฟของข่ายวงจรโหนด-แพร์เป็นยูนิตทรีเสมอ ดังนั้น อินซิเดนซ์เมตริกของทรี-วงรอบเปิด (C_{To}) จะเป็นยูนิตเมตริกเสมอ

จากสมการ (3.18) ได้ว่า

$$I_T = I_o \tag{3.73}$$

จากสมการ (3.24) ได้ว่า

$$E_T = E_o \tag{3.74}$$

และจากสมการ (3.32) ได้ว่า

$$Z_{oo} = Z_{TT} \tag{3.75}$$

ลิงค์หรือลิ้ง 1 เส้น จะทำให้เกิดวงรอบปิดขึ้น 1 วงรอบเสมอ ดังนั้น อินซิเดนซ์เมตริกของลิ้งค์-วงรอบปิด (C_{Lc}) จะเป็นยูนิตเมตริกเสมอ

แหล่งกำเนิดแรงดันที่ต่ออนุกรมอยู่ในลิงค์สำหรับข่ายวงจรในระบบไฟฟ้ากำลังส่วนมากไม่มี

ดังนั้นจากสมการ (3.26)

$$e_c = e_L = o \tag{3.76}$$

แทนค่าสมการที่ (3.73),(3.74),(3.75),(3.76)ในสมการ (3.72)

$$\begin{array}{c} o \\ c \end{array} \begin{bmatrix} E_T \\ o \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} o & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} Z_{TT} & Z_{oc} \\ Z_{co} & Z_{cc} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ o \\ c \end{array} \begin{bmatrix} I_T \\ i_c \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

สมการที่ (3.77) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} E_T \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_T \\ i_c \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

โดยที่

$$Z_1 = Z_{TT} \tag{3.79}$$

$$Z_2 = Z_{oc} = Z_{TT} C_{Tc} \tag{3.80}$$

$$Z_3 = Z_{co} = C_{Tc}^t Z_{TT} = Z_2^t \tag{3.81}$$

$$Z_4 = Z_{cc} = C_{Tc}^t Z_{TT} C_{Tc} + Z_{LL} \tag{3.82}$$

จากสมการที่ (3.78)

$$E_T = Z_1 I_T + Z_2 i_c \tag{3.83}$$

$$o = Z_3 I_T + Z_4 i_c \tag{3.84}$$

จากสมการที่ (3.84)

$$i_c = -Z_4^{-1} Z_3 I_T \tag{3.85}$$

แทนค่าสมการ (3.85) ใน (3.83)

$$E_T = (Z_1 - Z_2 Z_4^{-1} Z_3) \; I_T \tag{3.86}$$

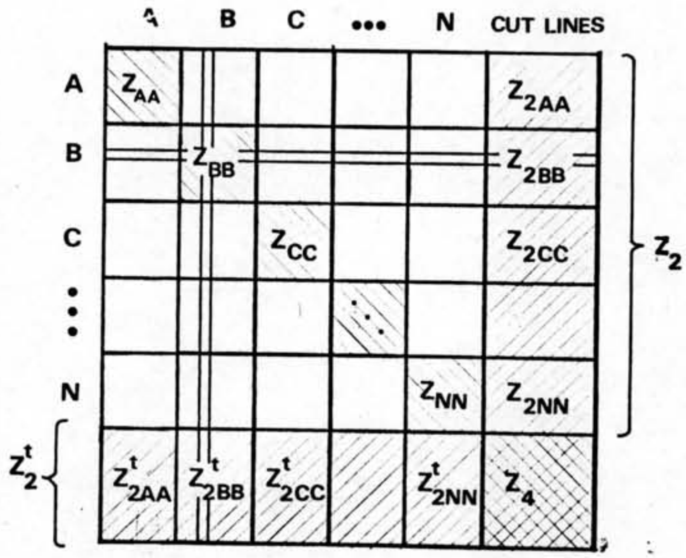
หรือ

$$E_T = Z_1' I_T \tag{3.87}$$

โดยที่

$$Z_1' = Z_1 - Z_2 Z_4^{-1} Z_3 \tag{3.88}$$

สมการที่ (3.87) คือสมการของข่ายวงจรในเฟรมอ้างอิงบัส (Bus Reference Frame) E_T ก็คือ E_{BUS}, I_T ก็คือ I_{BUS} และ Z_1' ก็คือ Z_{BUS} นั่นเอง



รูปที่ 3.5 แสดงการจัดค่าอิมพิแดนซ์ต่าง ๆ

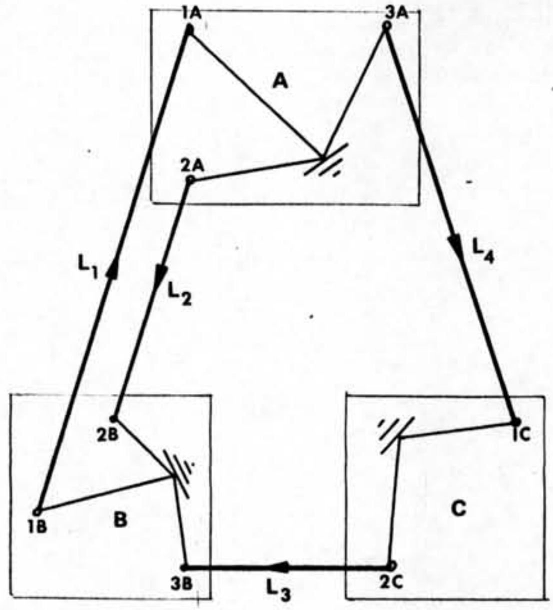
การสร้างอิมพิแดนซ์เมตริก จะดำเนินการตามวิธีดังต่อไปนี้

1. Z_1 หรือ Z_{TT} จะประกอบด้วย เมตริกย่อยของแต่ละโซน คือ Z_{AA}, Z_{BB}, Z_{CC} จัดเรียงกันดังรูป 3.5 Z_{AA}, Z_{BB}, Z_{CC} คือ Z_{BUS} ของโซน A,B,C ตามลำดับ การหา Z_{AA}, Z_{BB}, Z_{CC} ดำเนินการตามอัลกอริทึม (Algorithm) ของ Stagg และ El-Abid[1] ค่า Z_1 จะได้ดังนี้

$$Z_1 = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1A & 2A & 3A & 1B & 2B & 3B & 1C & 2C \\ \hline 1A & Z_{1A1A} & Z_{1A2A} & Z_{1A3A} & & & & & \\ \hline 2A & Z_{2A1A} & Z_{2A2A} & Z_{2A3A} & & & & & \\ \hline 3A & Z_{3A1A} & Z_{3A2A} & Z_{3A3A} & & & & & \\ \hline 1B & & & & Z_{1B1B} & Z_{1B2B} & Z_{1B3B} & & \\ \hline 2B & & & & Z_{2B1B} & Z_{2B2B} & Z_{2B3B} & & \\ \hline 3B & & & & Z_{3B1B} & Z_{3B2B} & Z_{3B3B} & & \\ \hline 1C & & & & & & & Z_{1C1C} & Z_{1C2C} \\ \hline 2C & & & & & & & Z_{2C1C} & Z_{2C2C} \\ \hline \end{array} \qquad (3.89)$$

จะเห็นได้ว่า โดยวิธีแยกเป็นส่วนย่อยการเก็บค่าบัสอิมพิแดนซ์เมตริกของระบบย่อยรวมทั้งหมดใช้ที่เก็บเพียง 22 ตำแหน่ง ในขณะเดียวกัน ถ้าจะเก็บค่าบัสอิมพิแดนซ์เมตริกของระบบรวมจะต้องใช้ที่เก็บถึง 64 ตำแหน่ง และเวลาที่ใช้ในการคำนวณจากระบบย่อยย่อมสั้นกว่าเวลาที่ใช้คำนวณในระบบใหญ่ทั้งหมด

2. Z_2 หรือ Z_{oc} อาจหาได้จากผลคูณของเมตริก Z_1C_{Tc} ก็ได้ แต่ในที่นี้จะหาโดยไม่ใช้ C_{Tc} จะเห็นว่า C_{Tc} เป็นเมตริกที่มีสมาชิกประกอบด้วย 0,1,-1 ดังนั้น Z_2 หรือผลคูณของ Z_1C_{Tc} จะประกอบด้วย สมาชิกใน Z_1 โดยกำหนดเครื่องหมายจากทิศทางของคัทลายน์ สมมติคัทลายน์ L_1 เชื่อมระหว่างโซน A และโซน B มีทิศทางจากบัส 1B ไปบัส1A ค่าสมาชิกในแถวตั้ง C_1 ของ Z_2 ก็คือ สมาชิกในแถวตั้ง 1A ลบด้วยสมาชิกในแถวตั้ง 1B ของ Z_1 สำหรับคัทลายน์เส้นอื่นก็หาได้เช่นเดียวกัน ดังตัวอย่างรูปที่ 3.6 Z_2 จะหาได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 แสดงทิศทางของศักลายน์

$$
Z_2 = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\
 & 1A-1B & 2B-2A & 3B-2C & 1C-3A \\
\hline
1A & Z_{1A1A} - 0 & 0 - Z_{1A2A} & 0 - 0 & 0 - Z_{1A3A} \\
\hline
2A & Z_{2A1A} - 0 & 0 - Z_{2A2A} & 0 - 0 & 0 - Z_{2A3A} \\
\hline
3A & Z_{3A1A} - 0 & 0 - Z_{3A2A} & 0 - 0 & 0 - Z_{3A3A} \\
\hline
1B & 0 - Z_{1B1B} & Z_{1B2B} - 0 & Z_{1B3B} - 0 & 0 - 0 \\
\hline
2B & 0 - Z_{2B1B} & Z_{2B2B} - 0 & Z_{2B3B} - 0 & 0 - 0 \\
\hline
3B & 0 - Z_{3B1B} & Z_{3B2B} - 0 & Z_{3B3B} - 0 & 0 - 0 \\
\hline
1C & 0 - 0 & 0 - 0 & 0 - Z_{1C2C} & Z_{1C1C} - 0 \\
\hline
2C & 0 - 0 & 0 - 0 & 0 - Z_{2C2C} & Z_{2C1C} - 0 \\
\hline
\end{array} \qquad (3.90)
$$

3. Z_4 หาได้จาก Z_2 ด้วยวิธีดังนี้ สมาชิกในแถวนอน C_1 ของ Z_4 จะเท่ากับสมาชิกในแถวนอน 1A ลบด้วย สมาชิกในแถวนอน 1B ของ Z_2, สมาชิกในแถวนอน C_2 ของ Z_4 จะเท่ากับสมาชิกในแถวนอน 2B ลบด้วย สมาชิกในแถวนอน 2A ของ Z_2 สมาชิกในแถวนอน C_3 และ C_4 หาได้เช่นเดียวกัน สำหรับค่าสมาชิกในแนวทะแยงจะบวกเพิ่มด้วยค่าอิมพิแดนซ์ของคัทลายน์ Z_4 ตามตัวอย่างจะได้ดังนี้

Z_4 =

	C_1 1A-1B	C_2 2B-2A	C_3 3B-2C	C_4 1C-3A
C_1 1A-1B	$Z_{1A1A}+Z_{1B1B}+Z_{L1}$	$-Z_{1A2A}-Z_{1B2B}$	$O-Z_{1B3B}$	$-Z_{1A3A}-O$
C_2 2B-2A	$-Z_{2B1B}-Z_{2A1A}$	$Z_{2B2B}+Z_{2A2A}+Z_{L2}$	$Z_{2B3B}-O$	$O-Z_{2A3A}$
C_3 3B-2C	$-Z_{3B1B}-O$	$Z_{3B2B}-O$	$Z_{3B3B}+Z_{2C2C}+Z_{L3}$	$O-Z_{2C1C}$
C_4 1C-3A	$O-Z_{3A1A}$	$O+Z_{3A2A}$	$-Z_{1C2C}-O$	$Z_{1C1C}+Z_{3A3A}+Z_{L4}$

(3.91)

3.5 ส่วนกลับของเมตริก (Matrix Inversion)

ในการหาผลลัพธ์ของข่ายวงจรตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว จะต้องใช้ส่วนกลับของ Z_4 คือค่า Z_4^{-1} หรือ Y_4 ซึ่งจะแสดงวิธีหาดังต่อไปนี้

สมมติมีเมตริก Z_n ซึ่งมีลำดับ (Order) nxn ที่ต้องการหาส่วนกลับ และมีเมตริกย่อย Z_{n-1} ซึ่งมีลำดับ (n-1) x (n-1) ซึ่งรู้ค่าส่วนกลับแล้ว ก็จะหาค่า Z_n^{-1} ได้ตามสมการดังต่อไปนี้

เมตริก Z_n เขียนกระจายได้ดังนี้

$$Z_n = \left[\begin{array}{cccc|c} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1(n-1)} & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2(n-1)} & Z_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ Z_{(n-1)1} & Z_{(n-1)2} & \cdots & Z_{(n-1)(n-1)} & Z_{(n-1)n} \\ \hline Z_{n1} & Z_{n2} & & Z_{n(n-1)} & Z_{nn} \end{array}\right] \qquad (3.92)$$

เมตริก Z_n เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$Z_n = \left[\begin{array}{c|c} Z_{n-1} & a_n \\ \hline b_n & z_{nn} \end{array}\right] \qquad (3.93)$$

ส่วนกลับของ Z_n หาได้ดังนี้

$$Z_n^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Z'_{n-1} & a'_n \\ \hline b'_n & y_{nn} \end{array}\right] \qquad (3.94)$$

โดยที่

$$y_{nn} = (z_{nn} - b_n Z_{n-1}^{-1} a_n)^{-1} \qquad (3.95)$$

$$a'_n = -Z_{n-1}^{-1} a_n y_{nn} \qquad (3.96)$$

$$b'_n = -y_{nn} b_n Z_{n-1}^{-1} \qquad (3.97)$$

$$Z'_{n-1} = Z_{n-1}^{-1} - Z_{n-1}^{-1} a_n b'_n \qquad (3.98)$$

ด้วยวิธีการดังนี้ สามารถหาส่วนกลับของเมตริกใด ๆ ได้ โดยเริ่มต้นจากเมตริกย่อยที่มีลำดับ 1 x 1 และค่อย ๆ เพิ่มขึ้นครั้งละแถวนอนและแถวตั้ง ก็จะสามารถหาส่วนกลับของเมตริกที่มีลำดับ n x n ใด ๆ ได้

3.6 ตัวอย่างการหาผลลัพธ์

สมมติข่ายวงจรในรูป 3.6 มีอิมพิแดนซ์ของสายทุกเส้นเป็น 1 pu. กระแสที่ไหลเข้าบัสทุกบัสมีค่าเป็น 0.5 pu. จะหาผลลัพธ์ของแรงดันได้ดังนี้

ก. หาเมตริก Z_1

Z_1 =

	1A	2A	3A	1B	2B	3B	1C	2C
1A	2	2	1					
2A	2	3	1					
3A	1	1	1					
1B				2	1	1		
2B				1	1	1		
3B				1	1	2		
1C							2	1
2C							1	1

ข. หาเมตริก Z_2

Z_2 =

	C_1 1A-1B	C_2 2B-2A	C_3 3B-2C	C_4 1C-3A
1A	2	-2		-1
2A	2	-3		-1
3A	1	-1		-1
1B	-2	1	1	
2B	-1	1	1	
3B	-1	1	2	
1C			-1	2
2C			-1	1

ค. หาเมตริก Z_4

Z_4 =

	C_1 1A-1B	C_2 2B-2A	C_3 3B-2C	C_4 1C-3A
C_1 1A-1B	5	-3	-1	-1
C_2 2B-2A	-3	5	1	1
C_3 3B-2C	-1	1	4	-1
C_4 1C-3A	-1	1	-1	4

ง. หาเมตริก Y_4

$Y_4 = Z_4^{-1}$ =

	C_1 1A-1B	C_2 2B-2A	C_3 3B-2C	C_4 1C-3A
C_1 1A-1B	0.370370	0.259259	0.037037	0.037037
C_2 2B-2A	0.259259	0.481481	-0.074074	-0.074074
C_3 3B-2C	0.037037	-0.074074	0.303704	0.103704
C_4 1C-3A	0.037037	-0.074074	0.103704	0.303704

จ. หาผลลัพธ์ตามขั้นตอนดังนี้

1. $E_T^{(o)} = Z_1 I_T$

$I_T = 0.5$

$$E_T^{(o)} = \begin{array}{c} 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array} \begin{bmatrix} E_{1A}^{(o)} = 2.5 \\ E_{2A}^{(o)} = 3.0 \\ E_{3A}^{(o)} = 1.5 \\ E_{1B}^{(o)} = 2.0 \\ E_{2B}^{(o)} = 1.5 \\ E_{3B}^{(o)} = 2.0 \\ E_{1C}^{(o)} = 1.5 \\ E_{2C}^{(o)} = 1.0 \end{bmatrix}$$

2. $e_c'' = E_L^{(o)}$

$$e_c'' = E_L^{(o)} = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{bmatrix} E_{1B}^{(o)} - E_{1A}^{(o)} = -0.5 \\ E_{2A}^{(o)} - E_{2B}^{(o)} = 1.5 \\ E_{2C}^{(o)} - E_{3B}^{(o)} = -1.0 \\ E_{3A}^{(o)} - E_{1C}^{(o)} = 0 \end{bmatrix}$$

3. $i_c = Y_4 e_c''$

$$i_c = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{bmatrix} i_{c1} = 0.1666 \\ i_{c2} = 0.6666 \\ i_{c3} = -0.4333 \\ i_{c4} = -0.2333 \end{bmatrix}$$

4. หา I'_T จาก i_c

$$
I'_T = \begin{array}{c} 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array}
\begin{bmatrix}
I'_{1A} & = & i_{c1} & = & 0.1666 \\
I'_{2A} & = & -i_{c2} & = & -0.6666 \\
I'_{3A} & = & -i_{c4} & = & 0.2333 \\
I'_{1B} & = & -i_{c1} & = & -0.1666 \\
I'_{2B} & = & i_{c2} & = & 0.6666 \\
I'_{3B} & = & i_{c3} & = & -0.4333 \\
I'_{1C} & = & i_{c4} & = & -0.2333 \\
I'_{2C} & = & -i_{c3} & = & 0.4333
\end{bmatrix}
$$

5. $E_T^{(1)} = Z_1 I'_T$

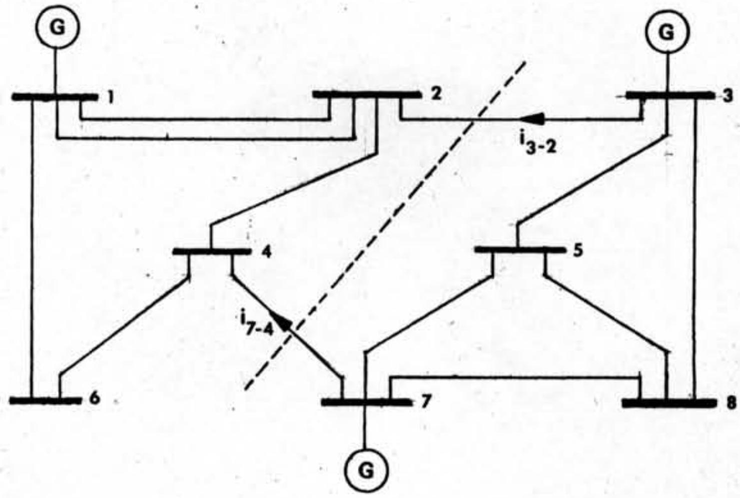
$$
E_T^{(1)} = \begin{array}{c} 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array}
\begin{bmatrix}
E_{1A}^{(1)} & = & -0.7666 \\
E_{2A}^{(1)} & = & 1.4333 \\
E_{3A}^{(1)} & = & -0.2666 \\
E_{1B}^{(1)} & = & -0.1000 \\
E_{2B}^{(1)} & = & 0.0666 \\
E_{3B}^{(1)} & = & -0.3666 \\
E_{1C}^{(1)} & = & -0.0333 \\
E_{2C}^{(1)} & = & 0.2000
\end{bmatrix}
$$

6. $E_T = E_T^{(o)} + E_T^{(1)}$

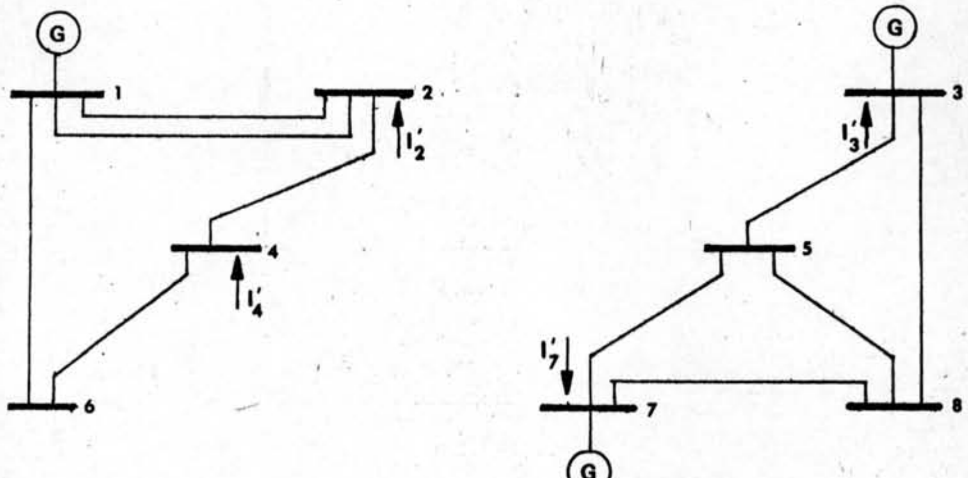
$$E_T = \begin{array}{c} 1A \\ 2A \\ 3A \\ 1B \\ 2B \\ 3B \\ 1C \\ 2C \end{array} \begin{bmatrix} E_{1A} = 1.7333 \\ E_{2A} = 1.5666 \\ E_{3A} = 1.2333 \\ E_{1B} = 1.9000 \\ E_{2B} = 1.5666 \\ E_{3B} = 1.6333 \\ E_{1C} = 1.4666 \\ E_{2C} = 1.2000 \end{bmatrix}$$

3.7 การใช้ไดคอปติกในระบบไฟฟ้ากำลัง

พิจารณาระบบไฟฟ้ากำลังแสดงในรูปที่ 3.7ก ซึ่งประกอบด้วย 8 บัส และสาย 12 เส้น ต่อเชื่อมโยงกันอยู่ เส้นประเป็นเส้นที่แบ่งระบบเป็น 2 ส่วน สายที่ถูกตัดเรียกว่า คัทลายน์



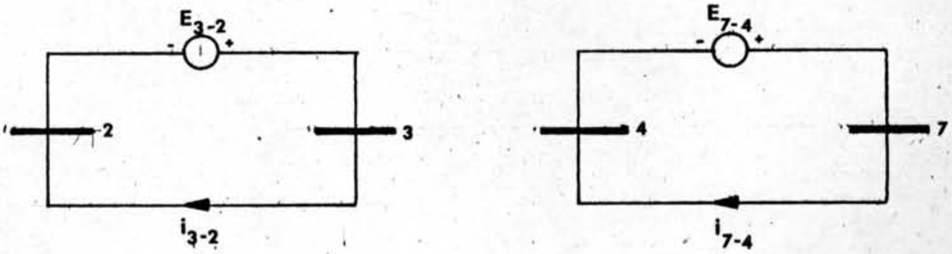
รูปที่ 3.7ก แสดงระบบไฟฟ้ากำลังก่อนแบ่งโซน



ระบบย่อยA

ระบบย่อยB

รูปที่ 3.7ข แสดงระบบย่อยหลังแบ่งโซน



รูปที่ 3.7ค แสดงสมมูลย์ของคัทลายน์

I_T คือ กระแสบัสเนื่องจากแหล่งกำเนิดกระแสประกอบด้วย I_1, I_2 ..... I_8 ซึ่งสมมุติว่ารู้ค่า

E_T คือ แรงดันคร่อมบัสเทียบกับกราวน์ (Ground) ประกอบด้วย E_1, E_2, ... E_8ซึ่งต้องการหาค่า

i_c คือ กระแสในคัทลายน์ ประกอบด้วย i_{3-2}, i_{7-4} ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

โดยวิธีการของไดคอปติก สมมุติทิศทางของกระแสในคัทลายน์ตามรูปที่ 3.7ก ในที่นี้ คัทลายน์คือ สาย 3-2 และสาย 7-4 เมื่อตัดคัทลายน์ออกจากระบบจะแยกระบบเดิมออกเป็นระบบย่อย 2 ระบบ คือระบบย่อย A และระบบย่อย B

เพื่อที่จะให้ระบบย่อยและคัทลายน์ที่แยกออกมามีความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในส่วนต่างๆ มีค่าคงเดิม จึงแทนคัทลายน์ด้วยแหล่งกำเนิดกระแสสมมูลย์ I'_T ซึ่งประกอบด้วย I'_2 และ I'_4 ไหลเข้าบัส 2 และบัส 4 ในระบบย่อย A และ I'_3 และ I'_7 ไหลเข้าบัส 3 และบัส 7 ในระบบย่อย B ตามลำดับ โดยมีขนาดและทิศทางที่จะทำให้แรงดันคร่อมบัสของแต่ละระบบย่อยมีค่าเท่ากับแรงดันคร่อมบัสของระบบเดิมทุกประการดังแสดงในรูปที่ 3.7ข

ในทำนองเดียวกัน ใส่แหล่งกำเนิดแรงดันสมมูลย์ E_L ซึ่งประกอบด้วย E_{3-2} และ E_{7-4} คร่อมคัทลายน์โดยมีขนาดและทิศทางที่จะทำให้กระแสในคัทลายน์มีค่าเท่ากับกระแสในสายของระบบเดิมทุกประการดังแสดงในรูปที่ 3.7ค

ความสัมพันธ์ระหว่างแหล่งกำเนิดกระแสสมมูลย์ I'_T กับกระแส i_c ในศัทลายน์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$I'_2 = i_{3-2}$$

$$I'_3 = -i_{3-2}$$

$$I'_4 = i_{7-4}$$

$$I'_7 = -i_{7-4}$$

สำหรับบัสอื่นๆ ที่ไม่ได้ติดกับศัทลายน์ จึงไม่มีความสัมพันธ์ดังกล่าว จากสมการข้างบนสามารถจัดให้อยู่ในรูปของ เมตริกได้คือ

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_6 \\ I'_2 \\ I'_4 \\ \hdashline I'_3 \\ I'_5 \\ I'_7 \\ I'_8 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{บัส} \backslash \text{ศัทลายน์} & \begin{matrix} 3-2 & \quad 7-4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ & \\ 1 & \\ & 1 \\ \hdashline -1 & \\ & \\ & -1 \\ & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_{3-2} \\ i_{7-4} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

ในรูปทั่วไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$I'_T = C_{Tc} \; i_c \tag{3.100}$$

ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์ระหว่าง แหล่งกำเนิดแรงดันสมมูลย์ E_L ที่ศัทลายน์ต่างๆ กับแรงดันคร่อมบัส E_T สามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_{3-2} = E_3 - E_2$$

$$E_{7-4} = E_7 - E_4$$

จากสมการข้างบนสามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกได้คือ

$$\begin{bmatrix} E_{3-2} \\ E_{7-4} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{ศัทลายน์} \backslash \text{บัส} & \begin{array}{cccc:cccc} 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3-2 \\ 7-4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc:cccc} & & -1 & & 1 & & & \\ & & & -1 & & & 1 & \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_6 \\ E_2 \\ E_4 \\ \hdashline E_3 \\ E_5 \\ E_7 \\ E_8 \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

ในรูปทั่วไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_L = -C^t_{Tc} \, E_T \tag{3.102}$$

โดยที่

$$E_T = \begin{bmatrix} E_A \\ \hdashline E_B \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสบัสในระบบย่อยและแรงดันคร่อมบัสในระบบย่อยสามารถเขียนได้ดังนี้

ระบบย่อย A: $$Y_{AA} E_A = I_{TA} + I'_{TA} \tag{3.104}$$

ระบบย่อย B: $$Y_{BB} E_B = I_{TB} + I'_{TB} \tag{3.105}$$

โดยที่

Y_{AA} และ Y_{BB} คือ บัสแอทมิตแทนซ์เมตริกของระบบย่อย A และ B

E_A และ E_B คือ แรงดันคร่อมบัสของระบบย่อย A และ B

I_{TA} และ I_{TB} คือ กระแสบัสเนื่องจากแหล่งกำเนิดกระแสของระบบย่อย A และ B

I'_{TA} และ I'_{TB} คือ กระแสบัสเนื่องจากแหล่งกำเนิดกระแสสมมูลย์ของระบบย่อย A และ B

สมการที่ (3.104) และ (3.105) สามารถเขียนรวมกันในรูปของเมตริกดังนี้

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{AA} & \\ \hline & Y_{BB} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} E_A \\ \hline E_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_{TA} + I'_{TA} \\ \hline I_{TB} + I'_{TB} \end{array}\right] \qquad (3.106)$$

ในรูปสมการทั่วไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$Y_{TT}E_T = I_T + I'_T \qquad (3.107)$$

โดยที่

Y_{TT} คือ บัสแอทมิตแทนซ์ของระบบย่อยซึ่งเขียนอยู่ในรูปกลุ่มเมตริกแนวทะแยง (Block Diagonal Matrix)

ขอให้สังเกตว่า Y_{TT} มีลำดับ nxn (n คือจำนวนบัสทั้งหมดยกเว้นบัสกราวนด์หรือบัสอ้างอิง) ซึ่งมีลำดับเท่ากันกับ บัสแอทมิตแทนซ์เมตริกของระบบเดิมคือ Y_{BUS} ข้อแตกต่างกันก็คือ Y_{BUS} ไม่อยู่ในรูปกลุ่มเมตริกแนวทะแยงเหมือน Y_{TT} ข้อดีของกลุ่มเมตริกแนวทะแยงคือ ลดการใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำของเครื่องดิจิตอลคอมพิวเตอร์ลง

จากสมการ (3.107) เมื่อแก้สมการเมตริก จะหาค่าแรงดันคร่อมบัสได้ นั่นคือ

$$E_T = Z_{TT}I_T + Z_{TT}I'_T \qquad (3.108)$$

โดยที่

Z_{TT} คือ บัสอิมพิแดนซ์เมตริกของระบบย่อยซึ่งอยู่ในรูปของกลุ่มเมตริกแนวทะแยง

ในการคำนวณหาสมาชิกต่างๆ ของ Z_{TT} จะไม่หาจากส่วนกลับของ Y_{TT} แต่จะใช้วิธีการสร้าง บัสอิมพิแดนซ์เมตริกของแต่ละระบบย่อยโดยตรงตามวิธีของ Stagg และ El-Abiad[1]

ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสในคัทลายน์และแหล่งกำเนิดแรงดันสมมูลย์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} E_{3-2} \\ E_{7-4} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} z_{32} & \\ \hline & z_{74} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{3-2} \\ i_{7-4} \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

ในรูปทั่วไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_L = Z_{LL} i_c \tag{3.110}$$

โดยที่

E_L คือ แหล่งกำเนิดแรงดันสมมูลย์คร่อมคัทลายน์

Z_{LL} คือ อิมพิแดนซ์เมตริกของคัทลายน์

i_c คือ กระแสในคัทลายน์

แทนค่า I'_T จากสมการ (3.100) ลงในสมการ (3.108) จะได้

$$E_T = Z_{TT} I_T + Z_{TT} C_{Tc} i_c \tag{3.111}$$

แทนค่า E_L จากสมการ (3.110) ลงในสมการ (3.102) จะได้

$$Z_{LL} i_c = -C^t_{Tc} E_T \tag{3.112}$$

แทนค่า E_T จากสมการ (3.111) ลงในสมการ (3.112) จะได้

$$Z_{LL} i_c = -C^t_{Tc} (Z_{TT} I_T + Z_{TT} C_{Tc} i_c) \tag{3.113}$$

สมการ (3.113) จัดให้อยู่ในรูปเหมาะสมจะได้

$$0 = C^t_{Tc} Z_{TT} I_T + (C^t_{Tc} Z_{TT} C_{Tc} + Z_{LL})\, i_c \tag{3.114}$$

จากสมการ (3.111) และ (3.114) จะได้

$$\left[\begin{array}{c} E_T \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_{TT} & Z_{TT}\, C_{Tc} \\ \hline C^t_{Tc} Z_{TT} & C^t_{Tc} Z_{TT} C_{Tc} + Z_{LL} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_T \\ \hline i_c \end{array}\right] \qquad (3.115)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (3.115) สอดคล้องกับสมการ (3.78) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c} E_T \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & Z_2 \\ \hline Z_3 & Z_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_T \\ \hline i_c \end{array}\right] \qquad (3.116)$$

โดยทั่วไปถ้าเราแบ่งระบบออกเป็นระบบย่อยทั้งหมด N ระบบ สมการที่ (3.116) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c} E_A \\ \hline E_B \\ \hline E_C \\ \hline \vdots \\ E_N \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \vdots \\ N \\ Z_2^t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & \cdots & N & \text{คัทลายน์} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Z_{AA} & & & & & Z_{2AA} \\ \hline & Z_{BB} & & \mathbf{Z_1} & & Z_{2BB} \\ \hline & & Z_{CC} & & & Z_{2CC} \\ \hline & & & \ddots & Z_{NN} & Z_{2NN} \\ \hline Z^t_{2AA} & Z^t_{2BB} & Z^t_{2CC} & \cdots & Z^t_{2NN} & Z_4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \}Z_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{c} I_{TA} \\ \hline I_{TB} \\ \hline I_{TC} \\ \hline \vdots \\ I_{TN} \\ \hline i_c \end{array}\right] \qquad (3.117)$$

จากสมการที่ (3.116) หาค่า E_T โดยกำจัดตัวแปร i_c ได้เช่นเดียวกับสมการที่ (3.86)

$$E_T = (Z_1 - Z_2 Z_4^{-1} Z_2^t)\, I_T \qquad (3.118)$$

หรือ

$$E_T = Z_1' I_T \qquad (3.119)$$

$$Z_1' = Z_1 - Z_2 Z_4^{-1} Z_2^t \tag{3.120}$$

Z_1' คือ Z_{Bus} ของระบบรวมทั้งหมด

จะเห็นว่าถ้าทราบค่า I_T จะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์ของ E_Tได้ ตามขั้นตอนที่แสดงในหัวข้อ 3.3 แต่ในระบบไฟฟ้ากำลัง การวิเคราะห์โหลดโฟลจะกำหนดค่าพลังไฟฟ้าที่บัสให้ ดังนั้นค่า I_T จะยังไม่ทราบค่าแน่นอน ขึ้นอยู่กับ E_T ซึ่งยังไม่ทราบค่า และจะมีอยู่ 1 บัส เรียกว่า สวิงบัส ซึ่งยังไม่กำหนดพลังไฟฟ้าให้ไว้คอยปรับพลังไฟฟ้าชดเชยกับพลังไฟฟ้าสูญเสียในสายส่งจึงยังไม่ทราบค่า ดังนั้นการคำนวณหาผลลัพธ์ของโหลดโฟลจะต้องใช้วิธี อิเทอเรทีฟ ประกอบกับการหาตามหัวข้อ 3.3 ซึ่งจะแสดงวิธีในบทที่ 4 พร้อมกับการเขียนโปรแกรมคอม-พิวเตอร์