เซมิแลตติสของเซมิกรุปผกผัน

นางสาวศิริกุล ศิริขวัญชัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2520

ON SEMILATTICES OF INVERSE SEMIGROUPS

MISS SIRIKUN SIRIKWANCHAI

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ

....

(ศาสตราจารย์ ดร. วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ)

คณบดี

คณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ ....มารค ตามไท.... ประธานกรรมการ

(อาจารย์ ดร. มารค ตามไท)

ทวี ศรีแสงทอง

.... กรรมการ

(อาจารย์ ทวี ศรีแสงทอง)

....ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ)

อาจารย์ผู้ควบคุมการวิจัย อาจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ

วิทยานิพนธ์เรื่อง เซมิแลตติสของเซมิกรุปผกผัน

โดย นางสาว ศิริกุล ศิริขวัญชัย

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิแลตติสของเซมิกรุปผกผัน

ชื่อ นางสาวศิริกุล ศิริขวัญชัย

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๑๙

บทคัดย่อ

ได้มีการพิสูจน์แล้วว่าทุก ๆ เซมิกรุปผกผัน S มีคอนกรูเอนซ์กรุปที่เล็กที่สุดให้สัญญลักษณ์เป็น σ หรือ $\sigma(S)$ ซึ่งทำให้ S/σ เป็นกรุปโฮโมมอร์ฟิคอิมเมชที่ใหญ่ที่สุดของ S ถ้าให้เซมิแลตติส Y ของกรุป G_α โดยที่ Y มี 0 แล้ว จะแสดงได้ว่า G_0 เป็นกรุปโฮโมมอร์ฟิคอิมเมชที่ใหญ่ที่สุดของ S ถ้าให้ $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ เป็นเซมิแลตติส Y ของกรุป G_α และ $\psi_{\alpha,\beta}(\alpha \geq \beta)$ เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมซึ่งสอดคล้องกับเซมิกรุป S นี้ แล้ว S จะเป็นเซมิกรุปผกผันแท้เมื่อและต่อเมื่อทุก ๆ โฮโมมอร์ฟิซึม $\psi_{\alpha,\beta}$ เป็น 1 - 1 ทุก ๆ เซมิกรุปผกผันเอฟจะเป็นเซมิกรุปผกผันแท้และมีเอกลักษณ์ แต่บทกลับนี้ไม่จำเป็นจะต้องจริง เซมิกรุป $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ มีเอกลักษณ์เมื่อและต่อเมื่อ Y มีเอกลักษณ์ 1 ดังนั้นถ้า S เป็นเซมิกรุปผกผันเอฟ แล้วจะได้ว่า S เป็นเซมิ-กรุปผกผันแท้และ Y มีเอกลักษณ์ 1 บทกลับนี้จะเป็นจริงถ้าพิสัยของโฮโมมอร์ฟิซึม $\psi_{1,\alpha}$ เป็น G_α สำหรับทุก ๆ α ใน Y ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า S เป็นเซมิกรุปผกผันแท้ Y มีเอกลักษณ์ 1 และทุก σ-คลาสของ S มีสมาชิกบางตัวที่ร่วมกับ G_1 แล้ว S จะเป็นเซมิกรุปผกผันเอฟ

เราให้ทฤษฎีของการอิมเบด (An Embedding Theorem) ของเซมิแลตติสของกรุป ถ้าให้ $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ เป็นเซมิแลตติส Y ของกรุป G_α แล้ว S จะสามารถอิมเบดในเซมิ-แลตติส Z ของกรุปโดยที่ Z มีสมาชิก 0 และสองเซมิแลตติสของกรุปนี้มีกรุปโฮโมมอร์ฟิคอิมเมชที่ใหญ่ที่สุดอันเดียวกัน ยิ่งไปกว่านั้น คุณสมบัติของการมีเอกลักษณ์ การเป็นเซมิกรุปผกผันแท้และการเป็นเซมิกรุปผกผันเอฟ ซึ่งถ้า S มีคุณสมบัติใดคุณสมบัติหนึ่งในคุณสมบัติเหล่านี้ แล้ว S' จะมีคุณสมบัตินั้นด้วย

ถ้าให้เซมิแลตติส Y ของเซมิกรุปผกผัน S_α แล้วจะมีเซมิแลตติส Y ของกรุป G_α ซึ่งสอดคล้องกันอย่างเหมาะสม และเซมิกรุปทั้งสองนี้มีกรุปโฮโมมอร์ฟิคอิมเมชที่ใหญ่ที่สุดอันเดียวกัน ให้ $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ เป็นเซมิแลตติส Y ของเซมิกรุปผกผัน S_α และ $\bar{S} = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ เป็นเซมิแลตติส Y ของกรุป G_α ซึ่งได้มาจากเซมิแลตติส Y ของเซมิกรุปผกผัน S_α ดังที่กล่าวข้างต้น จะแสดงได้ว่า S เป็นเซมิกรุปผกผันแท้เมื่อและต่อเมื่อ $\bar{S}$ เป็นเซมิกรุปผกผันแท้และแต่ละ S_α เป็นเซมิกรุปผกผันแท้ สำหรับแต่ละ α ใน Y ให้ $A_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} S_\beta$ เราได้ว่า A_α จะเป็นไอเดียลของ S ทุก ๆ α ใน Y เราพิสูจน์ว่าถ้า $\bar{S}$ เป็นเซมิกรุปผกผันเอฟและแต่ละ A_α เป็นเซมิกรุปผกผันเอฟ แล้ว S จะเป็นเซมิกรุปผกผันเอฟ บทกลับนี้จะเป็นจริงถ้าแต่ละ A_α มีเอกลักษณ์ด้วย

Thesis Title On Semilattices of Inverse Semigroups

Name Miss Sirikun Sirikwanchai

Department Mathematics

Academic Year 1976

ABSTRACT

It has been proved that every inverse semigroup S has the minimum group congruence σ, so that S/σ becomes the maximum group homomorphic image of S. Given a semilattice Y of groups G_α with Y having zero 0, it is shown that G_0 is the maximum group homomorphic image of S. Let $S = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ be a semilattice Y of groups G_α with corresponding homomorphisms $\psi_{\alpha,\beta}$ $(\alpha\geq\beta)$. Then S is proper if and only if all the corresponding homomorphisms are one-to-one. Any F-inverse semigroup is proper and has an identity, but the converse is not necessarily true. The semigroup $S = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ has an identity if and only if Y has an identity 1. Then, if S is F-inverse, it then follows that S is proper and Y has an identity 1. The converse is true if $\psi_{1,\alpha}$ is onto for every $\alpha\in Y$. Moreover, it is shown that if S is proper, Y has an identity 1 and every σ-class of S intersects G_1, then S is F-inverse.

An embedding theorem is obtained for any semilattice of groups. Let $S = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ be a semilattice Y of groups G_α. Then S can be embedded in a semilattice Z of groups with Z having a zero

element, and the two semilattices of groups have the same maximum group homomorphic image. Moreover, the properties of possessing an identity, of being proper and of being F-inverse of S are preserved in the extension.

Given a semilattice Y of inverse semigroups S_α, there corresponds a semilattice Y of groups G_α in a natural way, and the two semigroups have isomorphic maximum group homomorphic images. Let $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ be a given semilattice Y of inverse semigroups S_α and $\bar{S} = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ be its corresponding semilattice Y of groups G_α as mentioned above. It is shown that S is proper if and only if $\bar{S}$ is proper and each S_α is proper. For each $\alpha\in Y$, let $A_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} S_\beta$. Every $\alpha\in Y$, A_α is an ideal of S. We prove that if $\bar{S}$ is F-inverse and each A_α is F-inverse, then S is F-inverse. The converse is ture if each A_α also has an identity.

ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to Dr. Yupaporn Tirasupa, my thesis supervisor, who not only introduced me into this subject, but for all the helpful comments on all aspects of this thesis.

TABLE OF CONTENTS

INTRODUCTION

Let S be a semigroup. An element a of S is an *idempotent* of S if $a^2 = a$. Throughout this thesis, let E(S) denote the set of all idempotents of the semigroup S, that is,

$$E(S) = \{a \in S / a^2 = a\}.$$

S is called a *semilattice* if for all a, $b \in S$, $a^2 = a$ and $ab = ba$. An element a of S is *regular* if $a = axa$ for some $x \in S$, and S is called a *regular semigroup* if every element of S is regular. For $a \in S$, if $x \in S$ such that $a = axa$, $x = xax$, then x is called an *inverse* of a.

In any semigroup S if a, $x \in S$ such that $a = axa$, then ax and xa are idempotents of S. Hence if S is regular semigroup, $E(S) \neq \phi$.

A semigroup S is called an *inverse semigroup* if every element of S has a unique inverse, and the unique inverse of the element a in S is denoted by a^{-1}. Then for any element a of the inverse semigroup S, we have

$$a = aa^{-1}a, \qquad a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$$

and aa^{-1}, $a^{-1}a \in E(S)$. Hence if S is an inverse semigroup, then $E(S) \neq \phi$. An inverse semigroup is clearly regular, but the converse is not true in general. An equivalent definition of inverse semigroups can be given as follows : A semigroup S is an inverse semigroup if and only if S is regular and any two idempotents of S commute [1, Theorem 1.17]. Hence, if S is an inverse semigroup, then E(S) is a semilattice. Every semilattice is clearly inverse. If S is an inverse semigroup, then for any $a, b \in S$, $e \in E(S)$, we have $(a^{-1})^{-1} = a$ $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ and $e^{-1} = e$ [1, Lemma 1.18].

Let $\mathfrak{X}$ be a nonempty set, and ρ be a relation on $\mathfrak{X}$. Then ρ is called

(i) <u>reflexive</u> if $a\rho a$ for all $a \in \mathfrak{X}$,

(ii) <u>symmetric</u> if $a, b \in \mathfrak{X}$, $a\rho b$ implies $b\rho a$,

(iii) <u>antisymmetric</u> if $a, b \in \mathfrak{X}$, $a\rho b$ and $b\rho a$ imply $a = b$,

(iv) <u>transitive</u> if $a, b, c \in \mathfrak{X}$, $a\rho b$ and $b\rho c$ imply $a\rho c$.

A reflexive, symmetric and transitive relation on a nonempty set $\mathfrak{X}$ is called an <u>equivalence relation</u> on $\mathfrak{X}$.

A reflexive, antisymmetric and transitive relation $\leq$ on a nonempty set P is called a <u>partial order</u>, and $(P, \leq)$ or P is called a <u>partially ordered set</u>.

Let S be an inverse semigroup, $a, b \in S$. Then the following are equivalent :

(i) $aa^{-1} = ab^{-1}$.

(ii) $aa^{-1} = ba^{-1}$.

(iii) $a^{-1}a = a^{-1}b$.

(iv) $a^{-1}a = b^{-1}a$.

(v) $ab^{-1}a = a$.

(vi) $a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}$.

[2, Lemma 7.1]. On an inverse semigroup S, we define a relation $\leq$ by $a \leq b$ if and only if $aa^{-1} = ab^{-1}$. Then $(S, \leq)$ is a partially ordered set [2, Lemma 7.2] and this partial order is called the natural partial order on the inverse semigroup S. In this thesis, whenever we mention about a partial order on an inverse semigroup, we will mean the natural partial order.

In any inverse semigroup S, we have the following :

(i) $a \leq b$ if and only if $a = be$ for some $e \in E(S)$.

(ii) $a \leq b$ if and only if $a = fb$ for some $f \in E(S)$.

We note that the restriction of the natural partial order $\leq$ on an inverse semigroup S to E(S) is as follows : For $e, f \in E(S)$,

$$e \leq f \text{ if and only if } e = ef \ (= fe).$$

It then follows that if S is a semilattice, $a \leq b$ in S if and only if $a = ab$ $(= ba)$.

An equivalence relation ρ on a semigroup S is a congruence if for all $a, b, c \in S$, $a\rho b$ implies $ac\rho bc$, $ca\rho cb$; equivalently, for all $a, b, c, d \in S$, $a\rho b$ and $c\rho d$ imply $ac\rho bd$.

If ρ is a congruence on a semigroup S, then the set

$$S/\rho \quad = \quad \{a\rho / a \in S\}$$

with the operation defined by $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ is a semigroup, and S/ρ under this operation is called the quotient semigroup relative to the congruence ρ.

Let ρ be a congruence on a semigroup S. Then the mapping $\theta : S \rightarrow S/\rho$ defined by

$$a\theta \quad = \quad a\rho \qquad (a \in S)$$

is an onto homomorphism and θ will be denoted by $\rho^{\natural}$, and call it the *natural homomorphism* of S onto S/ρ. Conversely, if $\theta : S \to T$ is a homomorphism from a semigroup S into a semigroup T, then the relation ρ on S defined by

$$a\rho b \quad \text{if and only if} \quad a\theta = b\theta$$

is a congruence on S and $S/\rho \cong S\theta$.

If ρ is a congruence on an inverse semigroup S, then S/ρ is also an inverse semigroup, and for any $a \in S$,

$$(a\rho)^{-1} = a^{-1}\rho,$$

and hence for $a, b \in S$

$$a\rho b \quad \text{if and only if} \quad a^{-1}\rho b^{-1}.$$

A group G is called the *maximum group homomorphic image* of a semigroup S if there exists a homomorphism ψ from S onto G such that the following hold : For any group H and for any homomorphism θ from S onto H, there exists a unique group homomorphism h from G onto H such that the diagram

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\theta"'] & G \arrow[d, "h"] \\ & H \end{tikzcd}$$

commutes ; that is $\psi h = \theta$.

A congruence ρ on a semigroup S is called a *group congruence* if S/ρ is a group. If σ is a group congruence on a semigroup S such that for any group congruence ρ on S, $\rho \supseteq \sigma$, then σ is called the *minimum group congruence* of S, and hence S/σ is the maximum group homomorphic image of S.

Munn [6] has shown that any inverse semigroup S has a minimum group congruence σ and

$$\sigma \quad = \quad \{(a, b) \in S\times S / ae = be \text{ for some } e \in E(S)\};$$

equivalently, $\sigma \quad = \quad \{(a, b) \in S\times S / ea = eb \text{ for some } e \in E(S)\}$.

Hence any inverse semigroup S has a maximum group homomorphic image, that is S/σ. Throughout this thesis $\sigma(S)$, or σ if there is no danger of ambiguity, will be denoted for the minimum group congruence of the inverse semigroup S.

Let Y be a semilattice and a semigroup $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ be a disjoint union of semigroups S_α. S is called a *semilattice Y of semigroups* S_α if $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ for all $\alpha, \beta \in Y$; or equivalently, for all $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ imply $ab \in S_{\alpha\beta}$.

A semilattice of inverse semigroups is an inverse semigroup [2, Theorem 7.52]. Then a semilattice of groups is also an inverse semigroup.

Let $S = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ be a semilattice Y of groups G_α. To each $\alpha \in Y$, let e_α denote the identity of the group G_α. Then

$$E(S) \quad = \quad \{e_\alpha / \alpha \in Y\}.$$

Because S is an inverse semigroup, $e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}$ for all $\alpha, \beta \in Y$, and hence $E(S) \cong Y$ by the isomorphism $e_\alpha \longmapsto \alpha$ $(\alpha \in Y)$. Moreover, S has an identity if and only if Y has an identity.

Let $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ be a semilattice Y of groups G_α. Then E(S) is contained in the center of S [1, Lemma 4.8]. For each pair α, $\beta \in Y$ such that $\alpha \geq \beta$, define the mapping $\psi_{\alpha,\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ by

$$a\psi_{\alpha,\beta} = ae_\beta \qquad (a \in G_\alpha).$$

Then the mappings $\psi_{\alpha,\beta}$ $(\alpha \geq \beta)$ are homomorphisms and for every $\alpha \in Y$, $\psi_{\alpha,\alpha}$ is the identity mapping on G_α, furthermore,

$$\psi_{\alpha,\beta}\,\psi_{\beta,\gamma} = \psi_{\alpha,\gamma}$$

if $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, and if α, $\beta \in Y$, $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$, then

$$ab = (a\psi_{\alpha,\alpha\beta})(b\psi_{\beta,\alpha\beta})$$

[1, Theorem 4.11]. For convenience, we will call the homomorphisms $\psi_{\alpha,\beta}$ $(\alpha \geq \beta)$, defined as above, the <u>corresponding homomorphisms</u> of the semilattice Y of groups G_α.

Let S be an inverse semigroup. S is a <u>proper inverse semigroup</u> if for all $a \in S$, $e \in E(S)$, $ae = e$ imply $a \in E(S)$; equivalently, if for all $a \in S$, $e \in E(S)$, $ea = e$ imply $a \in E(S)$.

Let σ be the minimum group congruence on an inverse semigroup S. Then S is proper if and only if $e\sigma = E(S)$ for all $e \in E(S)$.

An inverse semigroup S is called an <u>F-inverse semigroup</u> if every σ-class of S has a maximum element under the natural partial order on S. McFadden [5] has shown that every F-inverse semigroup is proper and has an identity. The converse is not true in general.

Let I be a nonempty subset of a semigroup S. I is called an <u>ideal</u> of S if for all $s \in S$, $x \in I$, sx and $xs \in I$.

In the first chapter, we show that a semilattice Y of groups G_α with Y having a zero element 0 has G_0 as its maximum group homomorphic image. The necessary and sufficient conditions of a semilattice of groups to be proper are given in term of its corresponding homomorphisms. Moreover, we study conditions for a semilattice of groups such that it becomes F-inverse.

An embedding theorem of a semilattice of groups is given in the second chapter. We show how to construct a semilattice of groups with semilattice having a zero element, which is an extension of a given semilattice of groups such that these two semigroups have the same maximum group homomorphic image. Moreover, this extension preserves the properties of having identity, being proper and being F-inverse.

In the last chapter, we show that if a semilattice Y of inverse semigroups S_α is given, we can construct a semilattice Y of groups G_α in a natural way which is a homomorphic image of the given semigroup, and they have the same maximum group homomorphic image. Moreover, if the given semilattice Y of inverse semigroups S_α is proper, then the semilattice Y of groups G_α which we construct is also proper. This is also true for the case of being F-inverse. We also prove in this chapter that if the semilattice Y of groups G_α is proper and each S_α is proper, then the given semilattice Y of inverse semigroups S_α is proper. Finally, we show that this statement is still true if we replace the words "proper" by "F-inverse" and "S_α" by "A_α", where $A_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} S_\beta$ for all $\alpha \in Y$.