อันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟ

นางสาว ศิริไล ตุษยะเดช

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๒

DEGREE SEQUENCES OF HYPERGRAPHS

MISS SIVILAI TUSAYADEJ

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1979

Thesis Title | Degree Sequences of Hypergraphs

By | Miss Sivilai Tusayadej

Department | Mathematics

Thesis Advisor | Associate Prof. Dr. Virool Boonyasombat

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

S. Bunnag
.... Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Surawit Kongsasna
.... Chairman

(Professor Surawit Kongsasna M.A.)

Virool Boonyasombat
.... Member

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

Sidney S. Mitchell
.... Member

(Sidney S. Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ อันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟ

ชื่อนิสิต น.ส.ศิริไล ตุษยะเดช

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๑

บทคัดย่อ

ไฮเปอร์กราฟ หมายถึงคู่ลำดับ $(X,\mathcal{E})$ ซึ่ง X เป็นเซ็ทจำกัดและ $\mathcal{E}$ เป็นเซ็ทของสับเซ็ทของ X ที่ไม่ว่างเปล่า เราเรียกสมาชิกใน X และใน $\mathcal{E}$ ว่าจุดและเอดจ์ตามลำดับ เราเรียกไฮเปอร์กราฟที่ทุก เอดจ์มีขนาด r ว่า ไฮเปอร์กราฟเอกรูปอันดับ r หรือ r-กราฟ ทางเดินในไฮเปอร์กราฟคืออันดับสลับของจุดและเอดจ์ $x_1,E_1,x_2,E_2,\ldots$ $\ldots, E_q,x_{q+1}$ ซึ่ง x_k, x_{k+1} เป็นสมาชิกของ E_k สำหรับ $k = 1,2,\ldots, q$ ถ้า $x_i \neq x_{i+1}$ และจุดทุกจุด และเอดจ์ทุกเอดจ์ต่างกัน ยกเว้น $x_1 = x_{q+1}$ เราเรียกทางเดินว่าไซเคิล เราเรียกไฮเปอร์กราฟ H ว่า เป็นไฮเปอร์กราฟที่ต่อติดถึงกัน ถ้าทุก ๆ คู่ u, v ที่ต่างกัน มีทางเดินจาก u ไป v r-ทรี คือ r-กราฟที่ต่อติดถึงกันและไม่มีไซเคิล

ดีกรีของจุด v ใด ๆ หมายถึง จำนวนสมาชิกในเซ็ท $\{E \in \mathcal{E} / v \in E\}$ เรากล่าวว่าอันดับจำกัด $\pi = (d_1,d_2,\ldots,d_p)$ เป็นอันดับดีกรีของ r-กราฟถ้ามี r-กราฟซึ่งมี $v_1,v_2,\ldots, v_p$ เป็นจุด โดยที่ ดีกรีของ v_i คือ d_i สำหรับ $i = 1,2,\ldots,P$ ในที่นี้เราศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง สำหรับใช้ในการพิจารณาว่าอันดับ $\pi = (d_1,d_2,\ldots,d_p)$ เป็นอันดับดีกรีของ r-ทรี หรือของ r-กราฟ ที่ต่อติดถึงกันหรือไม่ สรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑</u> ให้ $r \geqslant 2$ และ $P_1 > r$ ให้ $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_{P_1})$ โดยที่ $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_{P_1}$ จะได้ว่า π จะเป็นอันดับดีกรีของ r-ทรี เมื่อ และก็ต่อเมื่อ

๑. $\dfrac{\Sigma d_i}{r}$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

๒. $d_i \geqslant 1$ ทุก i

๓. $\dfrac{\Sigma d_i}{r} = \dfrac{P_1 - 1}{r-1}$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๒</u> ให้ $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_{P_1})$ เป็นอันดับของเลขจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_{P_1}$ จะได้ว่า มี r-กราฟ ที่ต่อติดถึงกัน ซึ่งมี π เป็นอันดับดีกรี เมื่อและก็ต่อเมื่อ

๑. π เป็นอันดับ ดีกรีของ r-กราฟ

๒. $d_i \geqslant 1$ ทุก i

๓. $\Sigma d_i \geqslant \dfrac{r(P_1 - 1)}{r-1}$

Thesis Title Degree Sequences of Hypergraphs

Name Miss Sivilai Tusayadej

Thesis Advisor Associate Prof. Dr. Virool Boonyasombat

Department Mathematics

Academic Year 1978

ABSTRACT

A hypergraph is a couple $(X,\mathcal{E})$, where X is a finite set and $\mathcal{E}$ is a collection of non-empty subsets of X. The elements of X and $\mathcal{E}$ are called vertices and edges respectively. A hypergraph in which every edge has cardinality r is called a uniform hypergraph of rank r or an r-graph. A walk in a hypergraph is an alternating sequence of vertices and edges $x_1,E_1,x_2,E_2,\ldots, E_q,x_{q+1}$ in which $x_k, x_{k+1} \in E_k$ for $k = 1,2,\ldots,q$. If $x_i \neq x_{i+1}$ and all the edges and all the vertices are distinct except $x_1 = x_{q+1}$, the walk is called a cycle. A hypergraph H is said to be connected if for any pair of distinct vertices u, v there exists a walk from u to v. An r-tree is a connected r-graph that contains no cycle.

By degree of a vertex v we mean the cardinality of the set $\{E \in \mathcal{E} / v \in E\}$. A finite sequence $\pi = (d_1,d_2,\ldots,d_p)$ is a degree sequence of an r-graph if there exists an r-graph with vertices $v_1,\ldots, v_p$ such that d_i is the degree of v_i, $i = 1,2,\ldots,P$. In this study we look for necessary and sufficient conditions for a given

sequence $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$ to be a degree sequence for an r-tree or a connected r-graph. The results of our investigation can be summaized in the following theorems.

Theorem 1 Let $r \geq 2$, $P_1 > r$. Let $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_{P_1})$ where $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_{P_1}$. Then π is a degree sequence of a non-trivial r-tree iff

1. $\frac{\Sigma d_i}{r}$ is a positive integer,
2. $d_i \geq 1$ for all i,
3. $\frac{\Sigma d_i}{r} = \frac{P_1 - 1}{r-1}$.

Theorem 2 Let $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_{P_1})$ be a sequence of non-negative integer with $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{P_1}$. Then there exist a connected r-graph with degree sequence π iff

1. π is a degree sequence of an r-graph,
2. $d_i \geq 1$ for all i,
3. $\Sigma d_i \geq \frac{r(P_1 - 1)}{r-1}$.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indepted to Dr.Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to express my gratitude to all of my lecturers of the graduate school for their valuable knowledge while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father and mother for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS