สมการฟังก์ชั่นนัล

$g(xoy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

นางสาวสมพร แมลงภู่

วิทยานิพนธ์นี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2519

ON THE FUNCTIONAL EQUATION

$g(x o y^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

Miss Somporn Malangpoo

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1976

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....

(ศาสตราจารย์ ดร.วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ)

คณบดี

คณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ .... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุภา สุจริตพงศ์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ หวี ศรีแสงทอง)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ)

อาจารย์ผู้ควบคุมวิจัย รองศาสตราจารย์ ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ

วิทยานิพนธ์เรื่อง สมการฟังก์ชันนัล : $g(xoy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

โดย นางสาวสมพร แมลงภู่

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการฟังก์ชั่นนัล : $g(xoy^{-1}) = g(x)g(y)+f(x)f(y)$

ชื่อ นางสาวสมพร แมลงภู่ แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๑๙

บทคัดย่อ

ให้ G เป็นอบีเลียนกรุ๊ป F เป็นฟิลด์ซึ่งมีแคแรคเตอริสติคต่างจาก 2 คำตอบของสมการ

$$(A) \qquad g(xoy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

บน G ไปสู่ F คือคู่ลำดับ (f,g) โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชั่นจาก G ไปสู่ F ซึ่งทำให้สมการ (A) เป็นจริงทุก ๆ x,y ใน G ในกรณีที่ G เป็นโทโปโลจิคัลกรุ๊ป และ F เป็นโทโปโลจิคัลฟิลด์ เราจะกล่าวถึงคำตอบแบบต่อเนื่องซึ่งหมายถึงคำตอบใด ๆ ที่ f และ g เป็นฟังก์ชั่นแบบต่อเนื่อง สำหรับแต่ละฟิลด์ F เรากำหนดมัลติปลิเคติฟกรุ๊ป $M(F)$ ขึ้นกรุ๊ปหนึ่งดังนี้ ถ้า F มีสมาชิก i ที่ $i^2 = -1$ เราให้ $M(F) = F - \{0\}$, มิเช่นนั้นเราให้ $M(F) = \{(a,b) : a,b \in F$ และ $a^2 + b^2 = 1\}$ ในที่นี้เราถือว่า $M(F)$ เป็นมัลติปลิเคติฟสับกรุ๊ปของฟิลด์ $(C(F), +, .)$ โดยที่ $C(F) = F \times F$ และ +,. บน $C(F)$ เป็นไปตามสมการ $(a,b) + (c,d) = (a + c , b + d)$ และ $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

อาจสรุปผลลัพธ์ที่สำคัญของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไว้ได้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท A</u> ให้ G เป็นอบีเลียนกรุ๊ป F เป็นฟิลด์ซึ่งมีแคแรคเตอริสติคต่างจาก 2 คำตอบของสมการ (A) บน G ไปสู่ F คือคู่ลำดับ (f,g) ทั้งหลายที่อยู่ในแบบต่อไปนี้เท่านั้น

(i) $f(x) = b$, $g(x) = a$ สำหรับทุก x ใน G โดยที่ a และ b เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $a \neq 1$ และ $a - a^2 = b^2$; หรือ

(ii) $f(x) = \begin{cases} b, & x \in H \\ -b, & x \notin H \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} a, & x \in H \\ -a, & x \notin H \end{cases}$

โดยที่ H เป็นสับกรุปที่มีดัชนี 2 ใน G และ a, b เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $a \neq 1$ และ $a - a^2 = b^2$; หรือ

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \\ d, & x \notin H \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ c, & x \notin H \end{cases}$

โดยที่ H เป็นสับกรุปที่มีดัชนี 2 ใน G และ c, d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $c \neq 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$; หรือ

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \text{ หรือ } x_1H \\ d, & x \in x_2H \\ -d, & x \in x_3H \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ -1, & x \in x_1H \\ c, & x \in x_2H \\ -c, & x \in x_3H \end{cases}$

โดยที่ H เป็นสับกรุปที่มีดัชนี 4 ใน G ซึ่งทำให้ $G/_H$ **เป็นไคลน์โฟกรุป**และ c,d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $c \neq \pm 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$; หรือ

(v) $f(x) = \dfrac{h(x) - h(x^{-1})}{2i}$, $g(x) = \dfrac{h(x) + h(x^{-1})}{2}$

โดยที่ h เป็นโฮโมมอร์ฟิซึ่มจาก G ไปสู่ M(F)

<u>ทฤษฎีบท B</u> ให้ G เป็นโทโปโลจิคัลกรุปที่เป็นอบีเลียน F เป็น T_1- โทโปโลจิคัลฟิลด์ ซึ่งมีแคแรคเตอริสติคต่างจาก 2 คำตอบแบบต่อเนื่องของสมการ (A) บน G ไปสู่ F คือคู่ลำดับ (f,g) ทั้งหลายที่อยู่ในแบบต่อไปนี้เท่านั้น

(i) $f(x) = b, g(x) = a$ สำหรับทุก x ใน G โดยที่ a และ b เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $a \neq 1$ และ $a - a^2 = b^2$; หรือ

(ii) $$f(x) = \begin{cases} b, & x \in H \\ -b, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} a, & x \in H \\ -a, & x \notin H \end{cases}$$

โดยที่ H เป็นสับกรุปชนิดเปิดที่มีดัชนี 2 ใน G และ a,b เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $a \neq 1$ และ $a - a^2 = b^2$; หรือ

(iii) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \\ d, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ c, & x \notin H \end{cases}$$

โดยที่ H เป็นสับกรุปชนิดเปิดที่มีดัชนี 2 ใน G และ c , d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $c \neq 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$; หรือ

(iv) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \text{ หรือ } x_1H \\ d, & x \in x_2H \\ -d, & x \in x_3H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ -1, & x \in x_1H \\ c, & x \in x_2H \\ -c, & x \in x_3H \end{cases}$$

โดยที่ H เป็นสับกรุปชนิดเปิดที่มีดัชนี 4 ใน G ซึ่งทำให้ $G/_H$ เป็นไคลน์โฟกรุปและ c, d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง $c \neq \pm 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$; หรือ

(v) $$f(x) = \frac{h(x) - h(x^{-1})}{2i}, \quad g(x) = \frac{h(x) + h(x^{-1})}{2}$$

โดยที่ h เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมแบบต่อเนื่องจาก G ไปสู่ M(F)

Thesis Title ON THE FUNCTIONAL EQUATION :

$g(xoy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

Name Miss Somporn Malangpoo Department Mathematics

Academic Year 1976

ABSTRACT

Let G be an abelian group, F be a field of characteristic different from 2. By a solution of the functional equation

$$\text{(A)} \qquad g(xoy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

on G to F we mean an ordered pair (f,g) where f and g are functions from G into F such that (A) holds for all x,y in G. In the case where G is a topological group and F is a topological field, we may speak of a continuous solution. By this we mean any solution (f,g) for which f and g are continuous. To each field F we associate a multiplicative group M(F) as follows : If F contains an element i such that $i^2 = -1$, we let $M(F) = F - \{0\}$, otherwise we let $M(F) = \{(a,b) : a,b \in F \text{ and } a^2 + b^2 = 1\}$. Here M(F) is considered as a multiplicative subgroup of the field $(C(F),+,\cdot)$, where $C(F) = F \times F$ and $+ , \cdot$ are given by $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, and $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

The main results obtained in this study can be summarized in the following Theorems :

<u>Theorem A.</u> Let G be an abelian group, F be a field of characteristic different from 2. Then the solutions of (A) on G to F are those and only those (f,g) of the forms :

(i) $f(x) = b$, $g(x) = a$ for all x in G, where a,b are elements of F such that $a \neq 1$, $a - a^2 = b^2$; or

(ii) $$f(x) = \begin{cases} b, & x \in H \\ -b, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} a, & x \in H \\ -a, & x \notin H \end{cases}$$

where H is a subgroup of index 2 in G and a,b are elements of F such that $a \neq 1$, $a - a^2 = b^2$; or

(iii) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \\ d, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ c, & x \notin H \end{cases}$$

where H is a subgroup of index 2 in G and c,d are elements of F such that $c \neq 1$, $c^2 + d^2 = 1$; or

(iv) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \text{ or } x_1H \\ d, & x \in x_2H \\ -d, & x \in x_3H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ -1, & x \in x_1H \\ c, & x \in x_2H \\ -c, & x \in x_3H \end{cases}$$

where H is a subgroup of index 4 in G such that $G/_H$ is the Klein four group and c,d are elements of F such that $c \neq \pm 1$, $c^2+d^2 = 1$; or

(v) $$f(x) = \frac{h(x) - h(x^{-1})}{2i}, \quad g(x) = \frac{h(x) + h(x^{-1})}{2}$$

where h is a homomorphism from G into $M(F)$.

<u>Theorem B</u> Let G be an abelian topological group, F be a T_1- topological field of characteristic different from 2. Then the continuous solutions of (A) on G to F are those and only those (f,g) of the forms :

(i) $f(x) = b$, $g(x) = a$ for all x in G, where a,b are elements of F such that $a \neq 1$, $a - a^2 = b^2$; or

(ii) $$f(x) = \begin{cases} b, & x \in H \\ -b, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} a, & x \in H \\ -a, & x \notin H \end{cases}$$

where H is an open subgroup of index 2 in G and a,b are elements of F such that $a \neq 1$, $a - a^2 = b^2$; or

(iii) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \\ d, & x \notin H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ c, & x \notin H \end{cases}$$

where H is an open subgroup of index 2 in G and c,d are elements of F such that $c \neq 1$, $c^2 + d^2 = 1$; or

(iv) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \text{ or } x_1H \\ d, & x \in x_2H \\ -d, & x \in x_3H \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in H \\ -1, & x \in x_1H \\ c, & x \in x_2H \\ -c, & x \in x_3H \end{cases}$$

where H is an open subgroup of index 4 in G such that $G/_H$ is the Klein four group and c,d are elements of F such that $c \neq \pm 1$, $c^2 + d^2 = 1$; or

(v) $$f(x) = \frac{h(x) - h(x^{-1})}{2i}, \quad g(x) = \frac{h(x) + h(x^{-1})}{2}$$

where h is a continuous homomorphism from G into $M(F)$.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my thanks and sincere appreciation to Dr. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for introducing this thesis title to me and for his valuable guidance and significant language assistance in the entire preparation of my thesis for which it has been a success. I would like to thank all lectures for their previous lectures in the graduate courses.

TABLE OF CONTENTS