บทที่ 2

การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

รูปที่ 1 แสดงระบบแกน (co-ordinates) และมิติ (dimensions) ของชิ้นส่วนที่เหมือนกันทุกชิ้น (typical segment) ของแผ่นพื้นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า (polygonal plate) ที่มีด้านเท่ากัน k ด้าน โดยมีฐานรองรับเป็นเสา (supporting column) ที่มุม มุมกางที่จุดศูนย์กลาง 0 มีค่าเท่ากับ $\frac{2\pi}{k}$ ให้ a เป็นระยะวัดจากจุดศูนย์กลางถึงมุมของแผ่นพื้น ใช้ระบบแกนแบบ polar co-ordinates (r, θ) โดยมีจุดกำเนิด (origin) อยู่ที่จุด 0 และแกนที่ $\theta = 0$ ลากผ่านมุมของแผ่นพื้นดังในรูป ส่วนระบบแกนแบบ cartesian co-ordinates (ξ,η) นั้นถูกจัดไว้ในลักษณะที่แกนของ ξ ตั้งฉากกับขอบของแผ่นพื้น และแกนของ η ขนานกับขอบของแผ่นพื้น จะเห็นได้ว่าระยะโก่งของแผ่นพื้นจะเกิดขึ้นสมมาตร (symmetry) กับแกน $\theta = 0$ และแกน $\theta = \pm \frac{\pi}{k}$ ในที่นี้จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชั่นของระยะโก่ง (deflection function) ของแผ่นพื้นในระบบแกนแบบ polar co-ordinates ซึ่งในที่นี้จะให้ ρ เท่ากับ r/a โดยที่ r คือ รัศมีใด ๆ วัดจากจุดศูนย์กลาง o และ $\bar{\theta} = \frac{k\theta}{\pi}$ นั้นจะต้องเป็นฟังก์ชั่นคู่ของ $\bar{\theta}$ เสมอ

<u>สมการควบคุมพฤติกรรม</u> (Governing equation)

ในกรณีของแผ่นพื้น ซึ่งเป็นวัสดุอีลาสติคที่มีคุณสมบัติทางกายภาพและทางกลศาสตร์เหมือนกันทุกทิศทาง และโดยที่แผ่นพื้นนั้นเป็นพื้นบางและเมื่อรับแรงกระทำเกิดระยะโก่งน้อย ๆ (small deflection) สมการควบคุมพฤติกรรมอาจเขียนในโพลาร์โคออร์ดิเนท

$$\nabla^4 w(\rho,\bar{\theta}) = 0 \qquad (1)$$

โดยที่ $$\nabla^4 = \nabla^2.\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{k^2}{\pi^2\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{k^2}{\pi^2\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}\right) \qquad (2)$$

ที่ซึ่ง ρ และ $\bar{\theta}$ คือ polar co-ordinates $w(\rho,\bar{\theta})$ คือ ฟังก์ชั่นของระยะโก่ง (deflection function)

<u>สภาพของขอบ</u> (Boundary condition)

สภาพของขอบสำหรับปัญหานี้อาจพิจารณาได้ดังนี้ สำหรับขอบอิสระ (free edge) นั้น แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนที่มุมของแผ่นพื้นซึ่งมีที่รองรับจะมีค่าระยะโก่งเป็นศูนย์ นอกจากนั้นแล้วตามแกนสมมาตร (axis of symmetry) ที่ซึ่ง $\bar{\theta} = 0$ และ $\bar{\theta} = \pm 1$ ค่าของความลาดเอียง (slope) ของระยะโก่งเมื่อเทียบกับ $\bar{\theta}$ และแรงเฉือนบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแนวของ $\bar{\theta}$ ก็จะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย

ดังนั้น จากสภาพของขอบ (boundary conditions) ดังได้บรรยายมาแล้ว ถ้าให้ฟังก์ชั่นของระยะโก่งเป็นฟังก์ชั่นคู่ของ $\bar{\theta}$ แล้ว ก็อาจเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\left.\frac{k}{\P\rho}\frac{\partial w}{\partial\bar{\theta}}\right]_{\bar{\theta}=1} = 0, \quad 0<\rho<\cos\left(\frac{\P}{k}\right) \tag{3}$$

$$\left.V_{\bar{\theta}}\right]_{\bar{\theta}=1} = 0, \quad 0<\rho<\cos\left(\frac{\P}{k}\right) \tag{4}$$

$$\left.w\right]_{\substack{\rho=1\\ \bar{\theta}=0}} = 0 \tag{5}$$

$$\left.V_{\xi}\right]_{\rho=\frac{\cos(\P/k)}{\cos\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta})\right]}} = 0, \quad 0<\bar{\theta}<1 \tag{6}$$

$$\left.M_{\xi}\right]_{\rho=\frac{\cos(\P/k)}{\cos\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta})\right]}} = 0, \quad 0<\bar{\theta}<1 \tag{7}$$

โดยที่ $V_{\bar{\theta}}$ และ V_{ξ} คือแรงเฉือนเคียร์คอฟ (Kirchhoff shear force) ต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับแนวของ $\bar{\theta}$ และแนวของ ξ ตามลำดับ M_{ξ} แทนโมเมนต์ดัดต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับ ξ

$\frac{k}{\P\rho}\frac{\partial w}{\partial\bar{\theta}}$ คือความลาดเอียง (slope) ของระยะโก่งเมื่อเทียบกับ $\bar{\theta}$

สำหรับ $V_{\bar{\theta}}$ และ V_{ξ} อาจหาได้จากความสัมพันธ์กับ w ดังนี้[8]

$$V_{\bar{\theta}} = Q_{\bar{\theta}} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial M_{\bar{\theta}\rho}}{\partial \rho} \qquad (8\text{ก})$$

$$Q_{\bar{\theta}} = -\frac{D}{a^3}\left[\frac{k}{\pi\rho}\,\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\,(\nabla^2 w)\right] \qquad (8\text{ข})$$

$$M_{\bar{\theta}\rho} = -(1-\nu)\,\frac{D}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{k}{\pi\rho}\,\frac{\partial w}{\partial\bar{\theta}}\right)\right] \qquad (8\text{ค})$$

$$M_{\xi} = \frac{1}{2}(M_{\rho}+M_{\bar{\theta}}) + \frac{1}{2}(M_{\rho}-M_{\bar{\theta}})\cos\left[\frac{2\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right] + M_{\bar{\theta}\rho}\sin\left[2\,\frac{\pi}{K}\,(1-\bar{\theta})\right] \qquad (8\text{ง})$$

$$M_{\rho} = -\frac{D}{a^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{k^2}{\pi^2\rho^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\bar{\theta}^2}\right)\right] \qquad (8\text{จ})$$

$$M_{\bar{\theta}} = -\frac{D}{a^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{K^2}{\pi^2\rho^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\bar{\theta}^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right] \qquad (8\text{ฉ})$$

$$V_{\xi} = Q_{\rho}\cos\left[\frac{\pi}{K}(1-\bar{\theta})\right] + Q_{\bar{\theta}}\sin\left[\frac{\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right] + \frac{\sin\left[\frac{\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right]}{a}\,\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial\rho} - \frac{k}{\pi a\rho}\cos\left[\frac{\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right]\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial\bar{\theta}} \qquad (8\text{ช})$$

$$Q_{\rho} = -\frac{D}{a^3}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\nabla^2 w)\right] \qquad (8\text{ซ})$$

$$M_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(M_{\rho}-M_{\bar{\theta}})\sin\left[\frac{2\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right] - M_{\bar{\theta}\rho}\cos\left[\frac{2\pi}{k}(1-\bar{\theta})\right] \qquad (8\text{ฌ})$$

$$V_{\rho} = Q_{\rho} + \frac{k}{a\pi\rho}\,\frac{\partial M_{\bar{\theta}\rho}}{\partial\bar{\theta}} \qquad (8\text{ญ})$$

โดยที่ M_{ρ}, $M_{\bar{\theta}}$ หมายถึงโมเมนต์ดัดต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดซึ่งตั้งฉากกับ ρ และ $\bar{\theta}$ ตามลำดับ ในขณะที่ $M_{\bar{\theta}\rho}$ คือโมเมนต์บิด (twisting moment) ต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับ $\bar{\theta}$ Q_{ρ} และ $Q_{\bar{\theta}}$ คือแรงเฉือนต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับ ρ และ $\bar{\theta}$ ตามลำดับ $M_{\xi\eta}$ คือโมเมนต์บิดต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับ ξ V_{ρ} คือแรงเฉือนเคียร์คอฟต่อหน่วยยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับ ρ D เป็นค่าความเกร็งเชิงดัด (flexural rigidity) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$D = Eh^3/\left[12(1-\nu^2)\right] \tag{9}$$

โดยที่ E คือโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) h เป็นความหนาของแผ่นพื้นและ ν เป็นอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)

ในการศึกษาครั้งนี้จะใช้ฟังก์ชั่นของระยะโก่งในรูป

$$w(\rho,\bar{\theta}) = \frac{Pa^2\rho^2\ln(\rho)}{8\P D} + \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} A_n u_n + B\rho^2 + C \tag{10}$$

ที่ซึ่ง

$$u_1 = \phi_1 \tag{11}$$

$$u_n = \phi_n - \sum_{i=1,2,3\ldots}^{n-1} c_{ni} u_i \tag{12}$$

$$\phi_n = \frac{(-1)^n \rho^{nk} \cos(n\P\bar{\theta})}{\left[\cos^{nk-3}(\frac{\P}{k})\right](nk)(nk-1)(nk-2)} \tag{13}$$

โดยที่ P เป็นแรงที่กระทำที่จุดศูนย์กลางของแผ่นพื้น A_n, B, C และ c_{ni} คือตัวคงที่ซึ่งไม่ทราบค่า (arbitrary constants of integration)

จะสังเกตเห็นได้ว่า เทอม $\rho^2\ln(\rho)$, ρ^2 และ 1 ต่างสอดคล้อง (satisfy) กับสมการควบคุมพฤติกรรมสมการ (1) ส่วนเทอม u_n เป็น linear combination ของ $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \cdots \phi_n$ และโดยที่ ϕ_n สอดคล้องกับสมการ (1) ดังนั้น u_n ก็ย่อมจะสอดคล้องกับสมการ (1) ด้วย

ในที่นี้จะเห็นว่าฟังก์ชั่นของระยะโก่งดังสมการ (10) นอกจากจะสอดคล้องกับสมการควบคุมพฤติกรรม สมการ (1) แล้ว มันยังจะสอดคล้องกับสภาพของขอบตามสมการ (3) และ (4) ด้วย ดังนั้น ตัวคงที่ที่ไม่ทราบค่า A_n, B, C และ c_{ni} จึงอาจหาได้จากสมการของสภาพของขอบที่เหลือ นั่นคือ สมการ (5), (6) และ (7)

เมื่อแทนสมการ (10) โดยใช้สูตรจากสมการ (8) ลงในสมการ (6) จะได้ว่า

$$\sum_{n=1,2,3...}^{\infty} A_n v_n = \frac{Pa^2 f(\alpha)}{2\P(1-\nu)D \cos(\frac{\P}{k})} \qquad (14)$$

ที่ซึ่ง

$$\alpha = 1-\bar{\theta} \qquad (15)$$

$$f(\alpha) = \cos^2(\frac{\P\alpha}{k}) \left[1+(\frac{1-\nu}{2}) \cos(\frac{2\P\alpha}{k})\right] \qquad (16)$$

และ

$$v_1 = \psi_1 \qquad (17)$$

$$v_n = \psi_n - \sum_{i=1,2,3..}^{n-1} c_{ni} v_i \qquad (18)$$

$$\psi_n = \frac{\cos\left[(nk-3)\frac{\P\alpha}{k}\right]}{\cos^{nk-3}(\frac{\P\alpha}{k})} \qquad (19)$$

อนุกรมของฟังก์ชั่น v_n, $n = 1,2,3...$ ดังสมการ (14) อาจจะทำให้เป็นอนุกรมออร์ธอโกนอล (orthogonal series) ในช่วง (interval) $0<\alpha<1$ ได้โดยวิธี Gram-Schmidt orthogonalization process[9] นั่นคือ เมื่อ

$$c_{ni} = \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} \qquad (20$$

โดยที่สัญญลักษณ์ (ψ_n, v_i) และ (v_i, v_i) หมายถึง inner product ของ ψ_n กับ v_i และ v_i กับ v_i ในช่วง $0<\alpha<1$ โดยในที่นี้จะใช้ weight function เป็น $(a\pi/k)\cos(\pi/k)/\cos^2(\pi\alpha/k)$ ซึ่ง weight function นี้แท้ที่จริงก็คือความสัมพันธ์ระหว่างมุมเล็ก ๆ ที่แปรไป $d\alpha$ กับระยะตามแนวขอบของแผ่นพื้น $d\eta$ ดังได้แสดงไว้ในรูปที่ 2

ดังนั้น

$$(\psi_n, v_i) = \frac{a\pi}{k}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\int_0^1 \frac{\psi_n v_i \, d\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{k}\right)} \tag{21}$$

และ

$$(v_i, v_i) = \frac{a\pi}{k}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\int_0^1 \frac{v_i \, v_i \, d\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{k}\right)} \tag{22}$$

เมื่ออนุกรม v_n, $n = 1,2,3......$ เป็นอนุกรมออร์ธอโกนอลดังกล่าวข้างต้น จึงมีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$\left.\begin{aligned} (v_i, v_j) &= 0, \quad i \neq j \\ &\neq 0, \quad i = j \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

ดังนั้น จากสมการ (14) เราจึงสามารถที่จะหาค่าของ A_n ได้ดังนี้

$$A_n = \frac{Pa^2}{2\pi(1-\nu)D\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)} \frac{(f, v_n)}{(v_n, v_n)} \tag{24}$$

ลำดับต่อมา เมื่อแทนสมการของฟังก์ชั่นของระยะโก่งสมการ (10) โดยใช้ค่า A_n จากสมการ (24) ลงไปในสมการของสภาพของขอบสมการ (7) โดยใช้สูตรจากสมการ (8) ด้วยก็จะได้

$$\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} m_n + \left(\frac{1-\nu}{4}\right) \cos\left(\frac{2\P\alpha}{k}\right)$$

$$+ \left(\frac{1+\nu}{2}\right)\left\{\ln\left[\frac{\cos(\P/k)}{\cos(\P\alpha/k)}\right] + 1\right\} + \left[\frac{4\P(1+\nu)D}{Pa^2}\right] B = 0 \qquad (25)$$

โดยที่

$$m_1 = \mu_1 \qquad (26)$$

$$m_n = \mu_n - \sum_{i=1,2,3\ldots}^{n-1} \frac{(\psi_n,v_i)}{(v_i,v_i)} m_i \qquad (27)$$

$$\mu_n = \frac{\cos\left[(nk-2)\ \P\alpha/k\right]}{(nk-2)\cos^{nk-2}(\P\alpha/k)} \qquad (28)$$

เมื่อมาถึงขั้นนี้ เพื่อจะลดความยุ่งยากลงบ้าง จะเปลี่ยนสภาพของขอบสมการ (7) ซึ่งกำหนดว่า โมเมนต์ดัดตามแนวขอบต้องเป็นศูนย์ที่ทุกจุด (Zero-moment condition)มาเป็นเงื่อนไขทดแทนว่า ผลรวมของโมเมนต์ดัดตลอดทั้งขอบเป็นศูนย์ (Zero-total-bending-moment condition) ดังนี้

$$\left(\frac{a\P}{k}\right) \cos\left(\frac{\P}{k}\right) {}_0\int^1 M_\xi \Big]_{\rho = \frac{\cos(\P/k)}{\cos(\P\alpha/k)}} \frac{d\alpha}{\cos^2\left(\frac{\P\alpha}{k}\right)} = 0 \qquad (29)$$

ดังนั้น จากสมการ (25) เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไขทดแทนของสภาพของขอบสมการ (29) แล้ว จึงอาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\left[\frac{4\pi(1+\nu)D\ \tan\ (\pi/k)}{Pa^2}\right] B + \frac{1}{a\ \cos(\frac{\pi}{k})} \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} (m_n,\ 1)$$

$$+ \frac{\pi}{k} - \frac{(1-\nu)}{4} \tan\ (\pi/k) \quad = \quad 0$$

ซึ่งจะได้ค่า B ดังนี้

$$B = - \frac{Pa^2}{4\pi(1+\nu)D\ \tan(\pi/k)} \left[\frac{1}{a\ \cos(\frac{\pi}{k})} \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} (m_n,1) + \frac{\pi}{k} - \frac{(1-\nu)}{4} \tan\ (\pi/k)\right] \qquad (30)$$

ลำดับต่อไปค่าของตัวคงที่ที่ไม่ทราบค่า C อาจหาได้โดยการแทนสมการของฟังก์ชั่นของระยะโก่งสมการ (10) โดยใช้ค่า A_n และ B จากสมการ (24) และสมการ (30) ลงไปในสมการของสภาพของขอบสมการ (5) ซึ่งจะได้ดังนี้

$$C = \frac{Pa^2}{D}\left\{\frac{1}{4\pi(1+\nu)\tan(\pi/k)} \left[\frac{\pi}{k} - \frac{(1-\nu)}{4}\tan\ (\frac{\pi}{k}) + \frac{1}{a\ \cos(\frac{\pi}{k})} \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} (m_n,\ 1)\right] - \frac{1}{2\pi(1-\nu)\cos(\frac{\pi}{k})} \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} u_n^o \right\} \qquad (31)$$

โดยที่ $u_n^o = u_n(o)$ ได้จากการแทนค่า $\bar{\theta} = 0$ ลงในสมการ (11), (12) และ (13)

ในที่สุดเมื่อแทนค่าของ A_n, B และ C จากสมการ (24), (30) และ (31) ลงไปในสมการของฟังก์ชั่นของระยะโก่ง สมการ (10) ตามลำดับ ก็จะได้ค่าตอบของฟังก์ชั่นระยะโก่งซึ่งอยู่ในรูปทั่ว ๆ ไปของแผ่นพื้นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าโดยไม่จำกัดว่าจะเป็นกี่เหลี่ยม ดังนี้

$$w(\rho,\bar{\theta}) = \frac{Pa^2}{\P D}\left\{\frac{\rho^2\ln(\rho)}{8} + \frac{(1-\rho^2)}{4(1+\nu)}\left[\frac{\P}{k}\cot(\frac{\P}{k})\right.\right.$$

$$- (\frac{1-\nu}{4}) + \frac{1}{a\sin(\frac{\P}{k})}\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}(m_n,\ 1)\Big] +$$

$$\left.+ \frac{1}{2(1-\nu)\cos(\frac{\P}{k})}\sum_{n=1,2,3\ldots.}^{\infty}\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}(u_n - u_n^o)\right\} \quad (32)$$

เมื่อมาถึงขั้นนี้ หน่วยแรงลัพธ์ (stress resultants) ต่าง ๆ ซึ่งต้องการทราบค่าก็อาจจะคำนวณหาได้โดยใช้สมการ (8) และในกรณีพิเศษซึ่งต้องการทราบค่าของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนซึ่งเกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแกน η นั้น ก็อาจจะทำได้โดยใช้สูตรดังต่อไปนี้

$$M_\eta = \frac{1}{2}(M_\rho+M_{\bar{\theta}}) - \frac{1}{2}(M_\rho-M_{\bar{\theta}})\cos\left[\frac{2\P}{k}(1-\bar{\theta})\right] - M_{\bar{\theta}\rho}\sin\left[\frac{2\P}{k}(1-\bar{\theta})\right] \quad (33)$$

$$V_\eta = -Q_\rho\sin\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta})\right] + Q_{\bar{\theta}}\cos\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta})\right]$$

$$-\frac{\cos\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta})\right]}{a}\frac{M_{\xi\eta}}{\partial\rho} - \frac{k}{\P a\rho}\sin\left[\frac{\P}{k}(1-\bar{\theta}\right]\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial\bar{\theta}} \quad (34)$$

ที่ซึ่ง M_η และ V_η คือโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนเคียร์คอฟต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแกน η

ดังนั้น สูตรของหน่วยแรงลัพธ์ที่เกี่ยวข้องทั้งหมด อาจเขียนได้ดังนี้

$$\frac{M_\rho(\rho,\bar{\theta})}{P} = -\frac{(1+\nu)}{4\P}\ln(\rho) + \frac{1}{2\P}\left\{\frac{\P}{k}\cot(\P/k) - 1 +\right.$$

$$\left.\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}\left[\frac{(m_n,1)}{a\sin(\frac{\P}{k})} - \frac{m_{\rho n}}{\cos(\P/k)}\right]\right\} \quad (35)$$

$$\frac{M_{\bar{\theta}}(\rho,\bar{\theta})}{P} = -\frac{(1+\nu)}{4\P}\ln(\rho) + \frac{1}{2\P}\left\{\frac{\P}{k}\cot(\P/k) - \frac{(1+\nu)}{2}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1,2,3....}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}\left[\frac{(m_n,1)}{a\sin(\P/k)} + \frac{m_{\bar{\theta}n}}{\cos(\P/k)}\right]\right\} \quad (36)$$

โดยที่

$$m_{\rho n} = m_{\bar{\theta}n} \quad (37)$$

$$m_{\bar{\theta}1} = \mu_{\bar{\theta}1} \quad (38)$$

$$m_{\bar{\theta}n} = \mu_{\bar{\theta}n} - \sum_{i=1,2,3...}^{n-1} \frac{(\psi_n,v_i)}{(v_i,v_i)} m_{\bar{\theta}i} \quad (39)$$

$$\mu_{\bar{\theta}n} = \frac{(-1)^n \rho^{nk-2}\cos(n\P\bar{\theta})}{(nk-2)\cos^{nk-3}(\frac{\P}{k})} \quad (40)$$

$$\frac{M_{\rho\bar{\theta}}(\rho,\bar{\theta})}{P} = -\frac{M_{\bar{\theta}\rho}(\rho,\bar{\theta})}{P}$$

$$= -\frac{1}{2\P}\sum_{n=1,2,3...}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} \frac{m_{\rho\bar{\theta}n}}{\cos(\frac{\P}{k})} \quad (41)$$

โดยที่

$$m_{\rho\bar{\theta}1} = \mu_{\rho\bar{\theta}1} \quad (42)$$

$$m_{\rho\bar{\theta}n} = \mu_{\rho\bar{\theta}n} - \sum_{i=1,2,3...}^{n-1} \frac{(\psi_n,v_i)}{(v_i,v_i)} m_{\rho\bar{\theta}i} \quad (43)$$

$$\mu_{\rho\bar{\theta}n} = \frac{(-1)^{n}\rho^{nk-2}\sin(n\pi\bar{\theta})}{(nk-2)\cos^{nk-3}(\frac{\pi}{k})} \tag{44}$$

$$\frac{M_{\xi}(\rho,\bar{\theta})}{P} = -\frac{(1+\nu)}{4\pi}\ln(\rho) - \frac{(1-\nu)}{8\pi}\cos\frac{(2\pi\alpha)}{k} +$$

$$+\frac{1}{2k}\cot(\frac{\pi}{k}) - \frac{(3+\nu)}{8\pi} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}\left[\frac{(m_n,1)}{a\sin(\pi/k)} - \frac{m_{\xi n}}{\cos(\pi/k)}\right] \tag{45}$$

$$\frac{M_{\eta}(\rho,\bar{\theta})}{P} = -\frac{(1+\nu)}{4\pi}\ln(\rho) + \frac{(1-\nu)}{8\pi}\cos(\frac{2\pi\alpha}{k}) + \frac{\cot(\pi/k)}{2k}$$

$$-\frac{(3+\nu)}{8\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\left[\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}\ \frac{(m_n,1)}{a\sin(\pi/k)} + \frac{m_{\eta n}}{\cos(\pi/k)}\right] \tag{46}$$

โดยที่

$$m_{\xi n} = m_{\eta n} \tag{47}$$

$$m_{\eta 1} = \mu_{\eta 1} \tag{48}$$

$$m_{\eta n} = \mu_{\eta n} - \sum_{i=1,2,3\ldots}^{n-1}\frac{(\psi_n,v_i)}{(v_i,v_i)}m_{\eta i} \tag{49}$$

$$\mu_{\eta n} = \frac{\rho^{nk-2}\cos\left[(nk-2)\frac{\pi\alpha}{k}\right]}{(nk-2)\ \cos^{nk-3}(\frac{\pi}{k})} \tag{50}$$

$$\frac{M_{\xi\eta}}{P} = -\frac{M_{\eta\xi}}{P}$$

$$= -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\sin(\frac{2\pi\alpha}{k}) + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)}\ \frac{m_{\xi\eta n}}{\cos(\pi/k)} \tag{51}$$

โดยที่

$$m_{\xi\eta 1} = \mu_{\xi\eta 1} \tag{52}$$

$$m_{\xi\eta n} = \mu_{\xi\eta n} - \sum_{i=1,2,3...}^{n-1} \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} m_{\xi\eta i} \tag{53}$$

$$\mu_{\xi\eta n} = \frac{\rho^{nk-2} \sin\left[(nk-2)\frac{\P\alpha}{k}\right]}{(nk-2)\ \cos^{nk-3}(\frac{\P}{k})} \tag{54}$$

$$\frac{V_\rho a}{P} = -\frac{1}{2\P}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\cos(\frac{\P}{k})} \sum_{n=1,2,3...}^{\infty} \frac{(f, v_n)}{(v_n, v_n)} v_{\rho n}\right] \tag{55}$$

โดยที่

$$v_{\rho 1} = \psi_{\rho 1} \tag{56}$$

$$v_{\rho n} = \psi_{\rho n} - \sum_{i=1,2,3...}^{n-1} \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} v_{\rho i} \tag{57}$$

$$\psi_{\rho n} = \frac{(-1)^n (nk)\rho^{nk-3} \cos(n\P\bar{\theta})}{(nk-2)\ \cos^{nk-3}(\frac{\P}{k})} \tag{58}$$

$$\frac{V_{\bar{\theta}} a}{P} = \frac{1}{2\P\cos(\P/k)} \sum_{n=1,2,3...}^{\infty} \frac{(f, v_n)}{(v_n, v_n)} v_{\bar{\theta}\eta} \tag{59}$$

โดยที่

$$v_{\bar{\theta}1} = \psi_{\bar{\theta}1} \tag{60}$$

$$v_{\bar{\theta}n} = \psi_{\bar{\theta}n} - \sum_{i=1,2,3...}^{n-1} \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} v_{\bar{\theta}i} \tag{61}$$

$$\psi_{\theta n} = \frac{(-1)^n \rho^{nk-3} \sin(n\pi\bar{\theta})}{\cos^{nk-3}(\frac{\pi}{k})} \tag{62}$$

$$\frac{V_\eta a}{P} = \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{(1-\nu)}{2}\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi\alpha}{k}\right) - \frac{1}{\cos(\pi/k)} \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} v_{\eta n} \right\} \tag{63}$$

โดยที่

$$v_{\eta 1} = \psi_{\eta 1} \tag{64}$$

$$v_{\eta n} = \psi_{\eta n} - \sum_{i=1,2,3\ldots}^{n-1} \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} v_{\eta i} \tag{65}$$

$$\psi_{\eta n} = \frac{\rho^{nk-3}\sin\left[(nk-3)\frac{\pi\alpha}{k}\right]}{\cos^{nk-3}(\frac{\pi}{k})} \tag{66}$$

$$\frac{V_\xi a}{P} = \frac{1}{2\pi\cos(\pi/k)} \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(f,v_n)}{(v_n,v_n)} v_{\xi n} - \frac{1}{2\pi\rho}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{k}\right)\left[1 + \frac{1-\nu}{2}\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)\right] \tag{67}$$

โดยที่

$$v_{\xi 1} = \psi_{\xi 1} \tag{68}$$

$$v_{\xi n} = \psi_{\xi n} - \sum_{i=1,2,3\ldots}^{n-1} \frac{(\psi_n, v_i)}{(v_i, v_i)} v_{\xi i} \tag{69}$$

$$\psi_{\xi n} = \frac{\rho^{nk-3}\cos\left[(nk-3)\frac{\pi\alpha}{k}\right]}{\cos^{nk-3}(\pi/k)} \tag{70}$$

ในการคำนวณ inner products (f, v_n), (v_n, v_n) และ $(m_n, 1)$ นั้นจะต้องใช้สูตร integrate ดังต่อไปนี้

$$\int \cos^{-p}(x)\cos[(2n+1)x]dx = (-1)^n(2n+1)\Big\{ \int \cos^{-p+1}(x)dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k [(2n+1)^2 - 1^2][(2n+1)^2 - 3^2]\cdots[(2n+1)^2-(2k-1)^2] \int \cos^{2k-p+1}(x)dx}{(2k+1)!}\Big\} \quad (71)$$

$$\int \cos^{-p}(x)\cos(2nx)dx = (-1)^n \Big\{ \int \cos^{-p}(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4n^2[4n^2-2^2][4n^2-4^2]\cdots[4n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!} \int \cos^{2k-p}(x)dx \Big\} \quad (72)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2\ell}(x)} = \frac{\sin(x)}{2\ell-1}\Big[\sec^{2\ell-1}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{2^k(\ell-1)(\ell-2)\cdots(\ell-k)}{(2\ell-3)(2\ell-5)\cdots(2\ell-2k-1)} \sec^{2\ell-2k-1}(x)\Big] \quad (73)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2\ell+1}(x)} = \frac{\sin(x)}{2\ell}\Big[\sec^{2\ell}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots(2\ell-2k+1)}{2^k(\ell-1)(\ell-2)\cdots(\ell-k)} \sec^{2\ell-2k}(x)\Big]$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2\ell-1)!}{2^{\ell}\,\ell} \ln\Big[\tan\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\Big)\Big] \quad (74)$$

ทั้งนี้ โดยที่ p, n และ ℓ เป็นตัวเลขจำนวนเต็มบวก (positive integer)

ผลที่ได้จากการคำนวณ (numerical results) ตามสูตรข้างบน จะได้แสดงให้เห็นในบทต่อไป