



บทที่ 2

ทฤษฎี และการวิเคราะห์กังหันน้ำ

2.100 ประวัติความเป็นมาของทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์หน่วยแรง

ในสมัยก่อนทราบกันว่ากังหันน้ำที่ให้เส้นรอบรูปน้อยที่สุด และประหยัดที่สุด คือ กังหันน้ำรูปทรงกระบอก G E O R G E S. S A L T E R ได้คิดวิธีวิเคราะห์กังหันน้ำทรงกระบอก ในปี 1852 ซึ่งใช้ออกแบบได้สะดวก และไม่ยุ่งยาก แต่มีข้อจำกัด คือ ใช้ได้กับกังหันน้ำขนาดเล็กเท่านั้น ต่อมาปี 1933 L A V E R N E L E E P E R ได้ใช้วิธีเดียวกันนี้มาแก้ไขดัดแปลง เพื่อใช้กับไม้บรรทัดคำนวณ (Slide Rule) ได้สะดวกแต่มีข้อผิดพลาดมาก และในปัจจุบันก็เลิกใช้กันแล้ว

ในปี 1927 H. V. C A R P E N T E R ได้รวบรวมวิธีวิเคราะห์หน่วยแรงภายในของ กังหันน้ำทรงกระบอก ของ Dr. Reissner แต่ก็ยังมีข้อจำกัด คือ ผนังกังหันน้ำถือว่า ถูกยึดรั้งแบบตรึงแน่นกับพื้น ได้แสดงไว้เพื่อให้ผู้สนใจสะดวกในการศึกษา

ปัจจุบันได้มีผู้เสนอวิธีวิเคราะห์กังหันน้ำทรงกระบอกที่สะดวก รวดเร็ว และใช้ได้กับกังหันน้ำทุกกรณีไม่ว่าผนังจะถูกยึดรั้งแบบใด คือ A. G H A L I ซึ่งจะใช้อ้างอิงในการวิเคราะห์ของวิทยานิพนธ์นี้

2.200 วิธีวิเคราะห์กังหันน้ำทรงกระบอก โดย A. G H A L I

ผนังทรงกระบอกของกังหันน้ำ จะรับความดันจากสารที่บรรจุอยู่ หรือจากความดันดินที่อยู่ภายนอก เป็นแรงกระทำในแนวรัศมี แรงดันนี้จะถือว่าคงที่ในระดับหนึ่ง ๆ แต่จะแปรตามความสูง แรงอื่น ๆ ที่เป็นแบบสมมาตรรอบแกนตั้ง (Axisymmetrical) - แรงแบบนี้จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีซึ่งสมมาตรรอบแกนตั้ง

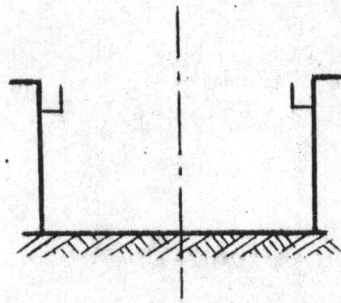
ปลายผนังด้านบน หรือด้านล่างอาจจะเป็นแบบหมุนได้อิสระ หรือเคลื่อนที่ได้ หรือ อาจจะถูกยึดโดยฐาน หรือฝาที่ปิด และปลายนี้จะเป็นตัวรับแรงเฉือน และแรงดัดในแนวรัศมี

(Axisymmetrical radial) ซึ่งจะเกิดได้จากกรณีของ อุณหภูมิ, การหดตัว หรือ Creep ก็ได้

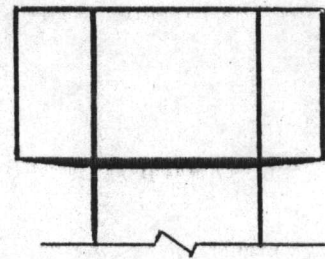
ในการวิเคราะห์ผนังแบบนี้ ความสำคัญอยู่ที่การพิจารณา แรงที่กระทำ และการเปลี่ยนแปลงของชิ้นส่วนในแถบที่ขนานกับแถบทรงกระบอก การเคลื่อนที่ในแนวรัศมีเกิดจากแรงวงแหวน (hoop force) ซึ่งจะได้อธิบายตอนหลังต่อไปว่า ชิ้นส่วนจะมีพฤติกรรมคล้ายคานบน elastic foundation ซึ่งมีแรงกระทำเป็นสัดส่วนกับการโก่งตัวของคาน การวิเคราะห์โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการโก่งตัว กับ น้ำหนัก ในรูปสมการ differentiation

สมการที่ใช้ในการหาแรงปฏิกิริยาที่ขอบผนัง และแรงภายในของผนังทรงกระบอก มีหลักการดังนี้

สมมุติฐานแรกคือ ให้อุณหภูมิคุณสมบัติเป็นอีลาสติก และให้ผนังกลมเป็นโครงสร้างเปลือกบาง ซึ่งมีความหนาแน่นมากเมื่อเทียบกับรัศมี ขณะที่เกิดการโก่งงอ ระนาบกลาง - ผนังยังคงเป็นระนาบ และตั้งฉากกับรัศมี สมการที่ตั้งขึ้นตามสมมุติฐานข้างต้นจะใช้ได้กับผนังที่มีความหนาคงที่เมื่อความหนาไม่คงที่ หรือเป็นแบบอื่น ต้องใช้วิธีวิเคราะห์โดยประมาณ



(ก) ถังวางบนพื้น



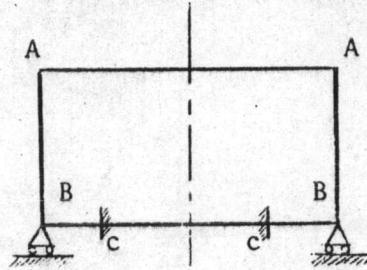
(ข) ถังเก็บน้ำยกระดับ

รูปที่ 2.1 หน้าตัดของถังเก็บน้ำที่เป็นแบบโครงสร้างเปลือกบาง

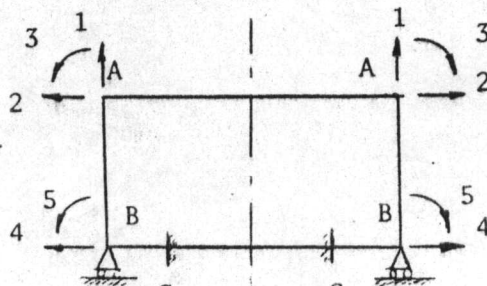
รูป 2.1(ก) และ (ข) แสดงรูปตัดของดั่งทรงกระบอก เมื่อถึงนี้รับน้ำหนักแบบสมมาตรรอบแกนตั้งก็จะสามารถวิเคราะห์โดยใช้ force method หรือ displacement method - ได้เช่นเดียวกับโครงสร้างที่เป็นแบบ โครงข้อแข็ง โดยที่จะพิจารณาเป็นแถบที่ตัดในแนวตั้ง  
 อธิบายวิธี force Method หรือ displacement Method  
 เพื่อใช้วิเคราะห์หาสัมประสิทธิ์

2.201 วิธีวิเคราะห์โดย Displacement Method

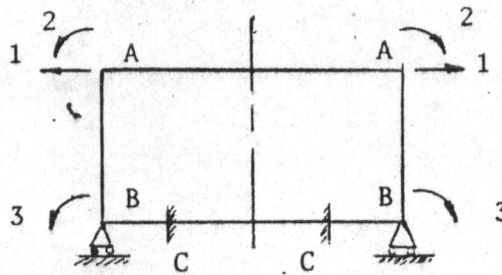
รูปที่ 2.2 (ก) เมื่อผนังรับแรงแบบสมมาตร สมมติให้ปลายบนของผนังที่จุด A เป็นอิสระแต่ต่อเนื่องกันด้วยแผ่นวงแหวน BC ที่ฐานโครงสร้างรองรับด้วยลูกกลิ้งที่จุด B และยึดแน่นที่จุด C การวิเคราะห์ มี 5 ขั้นตอน ดังนี้:-



(ก) ผนังทรงกระบอก ยึดด้วยพื้น วงแหวน รับแรงในแนวแกนสมมาตร (ไม่ได้แสดง)



(ข) พิกัดของแรง F หรือระยะทางเคลื่อนที่ C D



(ค) ลดเป็นโครงสร้างเทียบจากรูป (ก) โดยสมมติความยาว AB และ BC ไม่เปลี่ยนแปลง  
 รูปที่ 2.2 การวิเคราะห์ผนังเปลือกบางที่รับแรงในแนวแกนสมมาตร

โดยวิธี Displacement Method

ขั้นที่ 1 เลือกระบบโคออร์ดิเนต เพื่อแสดงตำแหน่ง และทิศทางของการเคลื่อนที่ของจุด-  
เชื่อมต่อโครงสร้างต่าง ๆ การเคลื่อนที่ของจุดต่อเชื่อมโครงสร้างอันหนึ่งมีจำนวนเท่ากับ-  
ตึกริของความเป็นอิสระในการเคลื่อนที่ของจุดต่อนั้นนั่นเอง (degrees of freedom)  
ซึ่งในกรณี ได้แก่ การเคลื่อนตัวในแนวแกน 2 ค่า และการหมุนของจุดต่ออีก 1 ค่าอย่างไร  
ก็ตั้งจำนวนการเคลื่อนที่ของจุดต่อของทั้งโครงสร้างซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าอาจจะลดลงถ้าสมมติ  
ว่าไม่มีการยึดหดตัวในแนวแกนของชิ้นส่วนโครงสร้าง ดังนั้นจำนวนรวมทั้งสิ้นจะมีอยู่ดังแสดง  
ตามรูปที่ 2.2(ค) กำหนดให้เขียนเป็นเวกเตอร์  $\{D_j\}$   $j = 1, 2, \dots, n$

ขั้นที่ 2 คำนวณหาแรงปฏิกิริยารวมที่จุดต่อซึ่งเกิดขึ้นจากแรงกระทำภายนอกโดยการสมมติ  
ว่าแต่ละชิ้นส่วนโครงสร้างมีการยึดที่ปลายเป็นชนิดตรึงแน่น กำหนดให้เป็นเวกเตอร์  $\{F\}_{n \times 1}$   
เมื่อ  $n$  เท่ากับจำนวนการเคลื่อนที่ของจุดต่อตามขั้นตอนที่ 1

ขั้นที่ 3 ต่อไปสมมติว่า เมื่อให้จุดต่อหนึ่งของโครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ในทิศทางซึ่งได้เลือก  
ไว้ในขั้นตอนที่ 1 มีค่าเป็น 1 หน่วยโดยที่การเคลื่อนที่ในทิศทางอื่น และของจุดต่ออื่น ๆ ไม่  
เกิดขึ้นคำนวณหาแรงที่เกิดขึ้นตามจุดต่อต่าง ๆ ซึ่งจะต้องใช้ในการยึดรั้งให้จุดต่อที่มีการ -  
เคลื่อนที่ 1 หน่วยดังกล่าว กำหนดให้เป็นเวกเตอร์ของ  $S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{nj}$  ถ้าทำ -  
ขั้นตอนที่ 3 ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบจำนวนการเคลื่อนที่ที่กำหนดไว้ในขั้นตอนที่ 1 ก็จะได้ -  
เวกเตอร์ของแรงเช่นเดียวกันอีก เวกเตอร์ ซึ่งเขียนเป็นรูปของแมททริก ได้เป็น  $[S]_{n \times n}$   
ค่า  $S_{ij}$  ใด ๆ หมายถึง แรงที่เกิดที่จุดต่อในทิศทาง  $i$  เนื่องจากเกิดการเคลื่อนที่  
หนึ่งหน่วยของจุดต่อในทิศทาง  $j$  นั่นเอง

ขั้นที่ 4 โดยที่การเคลื่อนที่ของจุดต่อของโครงสร้าง  $\{D\}_{n \times 1}$  ที่จะต้องเกิดขึ้นจริงเมื่อ  
มีแรงกระทำ  $\{F\}_{n \times 1}$  จะต้องทำให้เกิดแรงยึดรั้งที่จุดต่อมีค่าที่จะทำให้เกิดสภาพสมดุล  
ของแรงที่ทุก ๆ จุดต่อของทั้งโครงสร้าง จึงจะทำให้โครงสร้างอยู่ในสมดุล ดังนั้นจึงเขียน  
ได้ว่า

$$[S] \{D\} = - \{F\} \dots\dots\dots(1)$$

หรือในรูปของสมการ

$$F_1 + S_{11} D_1 + S_{12} D_2 + \dots\dots\dots + S_{1n} D_n = 0$$

$$F_2 + S_{21} D_1 + S_{22} D_2 + \dots\dots\dots + S_{2n} D_n = 0$$

$$F_3 + S_{31} D_1 + S_{32} D_2 + \dots\dots\dots + S_{3n} D_n = 0$$

ซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณหาการเคลื่อนที่ของจุดต่าง ๆ  $\{D\}$  ซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าได้

ขั้นที่ 5 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา และแรงภายในของชิ้นส่วนโครงสร้างทำได้โดยรวมผลของแรงที่ได้ตามขั้นที่ 2 กับแรงที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของจุดต่อ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

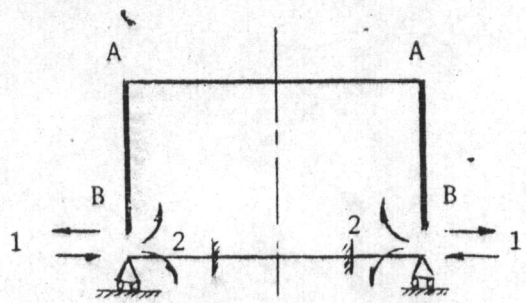
$$A_i = A_{ui} + [A_{ui1} \ A_{ui2} \ \dots\dots\dots] \{D\} \dots\dots\dots(2)$$

เมื่อ  $A_i$  คือค่าแรงปฏิกิริยา หรือแรงภายในที่เกิดขึ้น  $A_{ui}$  คือค่าแรงปฏิกิริยา หรือแรงภายในชิ้นส่วนโครงสร้างในเมื่อโครงสร้างถูกสมมุติว่ายึดแน่นที่จุดต่อต่าง ๆ ตามขั้นตอนที่ 2 และ  $A_{ui1}$  คือแรงปฏิกิริยา หรือแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดต่อในทิศทาง  $D_j = 1$  ดังนั้นถ้ามีจำนวนแรงปฏิกิริยา หรือแรงภายในคำนวณค่าที่ต้องการจะได้ว่า

$$\{A\} \text{ mx1} = \{Ar\} \text{ m x 1} + [Au] \text{ m x n} \{D\} \text{ n x 1} \dots\dots(3)$$

### 2.202 วิธีวิเคราะห์โดย Force Method

การวิเคราะห์โดย Force Method มี 5 ขั้นตอนเช่นกัน



รูปที่ 10

รูปที่ 2.3 โครงสร้างเทียม และพิภคที่ใช้ในการวิเคราะห์โดยวิธี Force Method

ขั้นที่ 1 : เลือกจำนวนแรงภายนอก หรือแรงภายใน (Redundant's) ออกแรง Redundant  $\{F\}$  ควรเลือกให้โครงสร้างที่เหลือสมดุล และง่ายต่อการวิเคราะห์ - ตัวอย่างโครงสร้างที่ถูกทดลองของรูปที่ 2.2 (ก) แสดงในรูปที่ 2.3 ระบบพิกัดที่แสดง จะชี้ให้เห็นว่าเลือกทิศทางของแรง และ displacement ได้หลายแบบ

ขั้นที่ 2 : ให้แรงภายนอกที่กำหนดให้กระทำต่อโครงสร้างในขั้นที่ 1 คำนวณระยะเคลื่อนที่  $\{D\}$  ที่พิกัด  $n$  แรงปฏิกิริยา และแรงภายในสามารถหาได้ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ

ขั้นที่ 3 : โครงสร้างเทียบจากขั้นที่ 1 (Release Struct) รับแรงภายนอก 1 หน่วย  $F_1 = 1$  เกิดจากการเคลื่อนที่  $f_{11}, f_{21}, \dots, f_{n1}$  ที่พิกัด  $n$  ใด ๆ ซึ่งสามารถหาได้ โดยใช้วิธีเดียวกัน คือให้แรงหน่วยกระทำที่พิกัดต่าง ๆ จะทำให้ได้กลุ่มของสัมประสิทธิ์ flexibility จำนวน  $n \times n$  และตั้งเป็นรูปเมทริกซ์  $[f]$   $n \times n$  โดยที่  $f_{ij}$  เป็นระยะเคลื่อนที่ของโครงสร้างเทียบที่พิกัด  $i$ , เมื่อรับแรง  $F_j = 1$  หน่วย

ขั้นที่ 4 : ค่าของ  $\{F\}$  เป็นจำนวนในการแก้สมการค่าการเคลื่อนที่หาได้โดยการแก้สมการ

$$[f] \{F\} = - \{D\} \dots \dots \dots (4)$$

ขั้นที่ 5 : ค่าของแรงปฏิกิริยา และแรงภายใน หาได้โดยการรวมค่าที่คำนวณได้ในขั้นที่ 2 ซึ่งจะติดในรูป  $\{F\}$  อธิบายได้ด้วยสมการ

$$\{A\} m \times 1 = \{A_s\} m \times 1 + [A_u] m \times n \{F\} n \times 1, \dots \dots (5)$$

เมื่อ  $\{A\}$  เป็น เวกเตอร์ ของแรง  $m$  ที่จะหา,  $\{A_s\}$  เป็นแรงในโครงสร้างเทียบ  $j$  เป็นค่าใน แนวตั้ง ของ เมทริกซ์  $[A_u]$  มีค่า  $m$  เมื่อ  $F_j = 1$  โดยแยกกระทำ

#### 2.203 ผนังทรงกลมความหนาคงที่ (Circular Wall of Const. Thickness)

ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า ผนังทรงกระบอกซึ่งรับแรงแบบสมมาตรรอบแกนที่สำคัญ คือ ให้พิจารณาเป็นชิ้นส่วนแถบเล็ก ๆ ที่ขนานกับแกนทรงกระบอก ในบทนี้จะชี้ให้เห็นถึงชิ้นส่วนนี้ว่า โกงงอไปแบบเดียวกับคานที่อยู่บน Elastic Foundation และหาสมการ

ซึ่งเกี่ยวกับแรงที่กระทำ และการโก่งตัวที่เกิดกับดั่งที่ผนังมีความหนาคงที่ ส่วนผนังที่ความหนาไม่คงที่จะได้อธิบายต่อไป

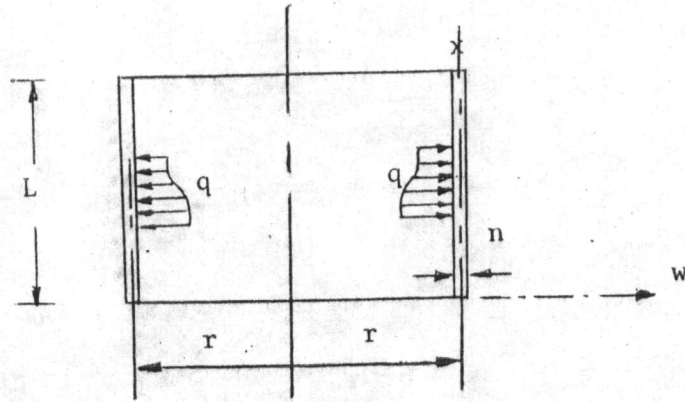
แรงที่พุ่งออกจากแกนในแนวรัศมี ซึ่งมีความเข้ม  $q$  ต่อพื้นที่ บนผนังทรงกระบอกบาง (รูปที่ 2.4 ก.) และทำให้เกิดการโก่งออก  $w$ , ซึ่งจะแทนด้วยรัศมี  $r$  ที่เพิ่มขึ้นขนาดของการยึดตัวในแนววงแหวน  $w/r$  ซึ่งเกิดจาก แรงดึงในวงแหวน ต่อ หนึ่งหน่วยความยาว

$$N = \frac{Eh}{r} w \dots \dots \dots (6)$$

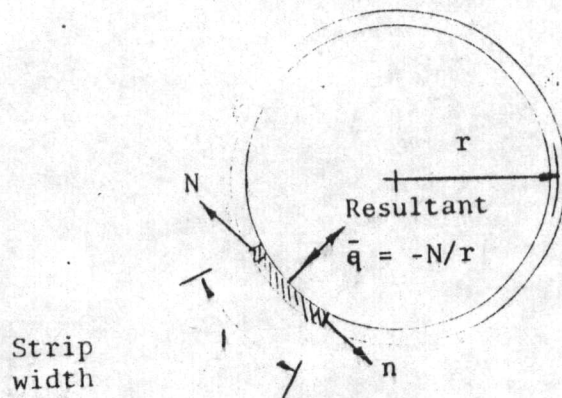
- เมื่อ
- $r$  = รัศมีถึงกึ่งกลางผิวทรงกระบอก
  - $h$  = ความหนาผนัง
  - $E$  = อีลาสติกโมดูลัส (Elastic Modulus)
  - $q$  = แรงดึงในแนววงแหวนตามทิศทางเป็นบวก
  - $w$  = ระยะโก่งให้ถือว่าเป็นบวก เมื่อโก่งออก

พิจารณาแถบที่กว้าง 1 หน่วยของทรงกระบอก แรงดึง ตามแนวรัศมีมีขนาด (รูปที่ 2.4 ข.)

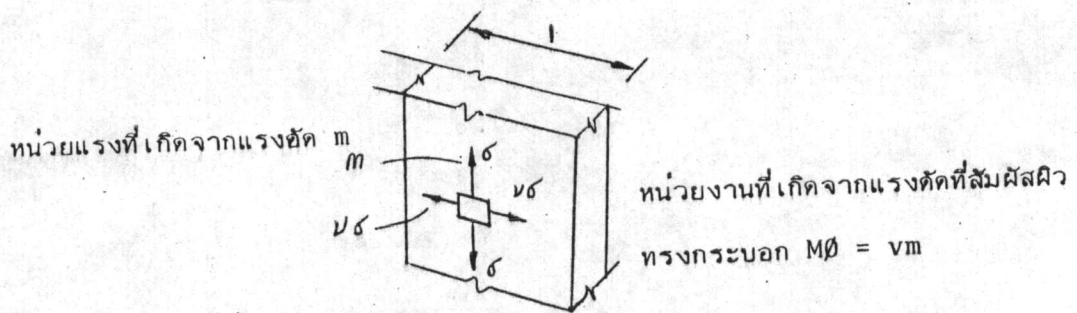
$$q^- = - \frac{N}{r} = \frac{Ehw}{r^2} \dots \dots \dots (7)$$



(ก) หน้าตัดผ่านแกนกลางผนังทรงกระบอก แสดงทิศทางแรง และการโก่งตัว



(ข) หน้าตัดตั้งฉากกับแกนทรงกระบอก



(ค) หน่วยแรงบนแถบใด ๆ ที่อยู่ในแนวตั้ง

รูปที่ 2.4 ผนังทรงกระบอกกลมรับแรงสมมาตรในแนวแกน



เครื่องหมายลบจะแสดงเมื่อพุ่งเข้า แถบนี้จะมีพฤติกรรมเหมือนคานบน Elastic Foundation ถูกกระทำด้วยแรงที่มีความเข้ม  $q$  และมีแรงปฏิกิริยาตอบกลับในทิศทางตรงข้ามที่จุดที่มีการโก่งโดยมีความเข้ม  $q^- = -k w$  เมื่อ  $k$  เป็นโมดูลัสของ foundation

$$k = \frac{Eh}{r^2} \dots\dots\dots(8)$$

เมื่อแถบนี้รับโมเมนต์ บวก  $M$ , หน่วยแรงดึง และหน่วยแรงอัด จะเกิดขึ้นกับผิวนอก และผิวใน จาก Poisson's effect ปลายทั้งสองของแถบคล้ายกับหมุนออกจากตำแหน่งเดิมแต่เพราะความสมมาตรดังนั้นการหมุนจึงไม่เกิดขึ้น ด้านของ strip ยังคงอยู่ในระนาบรัศมีไม่มีการโก่งต่อต้านข้าง และทำให้เกิดแรงดัด  $M \phi$  ในแนวรัศมี

$$M \phi = \nu M \dots\dots\dots(9)$$

เมื่อ  $\nu$  คือค่าหน่วยแรงของอัตราส่วน Poisson's ใด ๆ บนผิวนอกได้แสดงในรูปที่ 2.4ค. ส่วนหน่วยการยึดตัวที่ขนานกับผิวจะเป็น  $(\nu/E) - \nu(\nu/E) = 6(1 - \nu^2)/E$  ดังนั้นผลของ  $M \phi$  จะเท่ากับการเพิ่มในอีลาสติก modulus เป็นอัตราส่วน  $1/(1 - \nu^2)$  ผลก็คือ แถบที่กว้าง 1 หน่วยตามเส้นรอบวงรับแรงในแนวแกนสมมาตรจะมีการโก่งตัวเช่นเดียวกับคานที่อยู่บน elastic foundation ซึ่งให้สมการ flexural rigidity เป็นดังนี้

$$EI = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \dots\dots\dots(10)$$

ตามสมมุติฐานที่ใช้ในคานเมื่อมีแรงดัด ระนาบหน้าตัดยังคงเป็นระนาบอย่างเดิม โมเมนต์  $M$  และการโก่งตัว  $w$  ที่ระยะ  $X$  ใด ๆ (รูปที่ 2.4 ก.) เป็นดังนี้ :

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \dots\dots\dots(11)$$

ความเข้มของแรงลัพธ์ต้านข้าง  $q^*$  ที่จุดใดจะเท่ากับผลรวมทางพีชคณิตของแรงภายนอกที่กระทำ และแรงปฏิกิริยาของ Elastic Foundation

$$q^* = q + \bar{q} = q - kw \dots \dots \dots (12)$$

แรงเฉือน V, แรงคัต และแรงที่กระทำ  $q^*$  สัมพันธ์กันดังนี้

$$V = \frac{dm}{dx} = - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \dots \dots \dots (13)$$

$$q^* = - \frac{dv}{dx} = - \frac{d^2 m}{dx^2} \dots \dots \dots (14)$$

แทนค่าสมการ (11) และ (12) ลงในสมการ (14) จะได้สมการของการโก่งตัว และแรงที่กระทำ

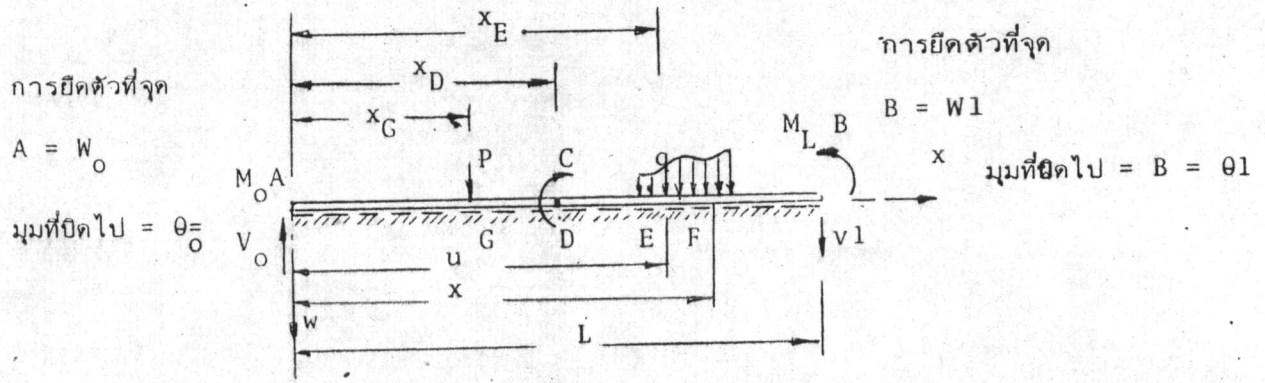
$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + kw = q \dots \dots \dots (15)$$

เมื่อคานามีค่า flexural Rigidity คงที่สมการก็จะกลายเป็น

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q \dots \dots \dots (16)$$

2.204 สมการการโก่งตัวของคานาที่มีความหนาคงที่

พิจารณาคานบน Elastic Foundation ที่มีค่า EI และค่า K คงที่ รับแรงกระทำ P, แรงคู้ควบ C และน้ำหนักแผ่ q ดังแสดงในรูปที่ 2.5,



รูปที่ 2.5 การหาสมการที่ (21) สำหรับการยึดตัวที่จุดใด ๆ ในเทอมของน้ำหนักที่กระทำจากด้านซ้ายของคานบน Elastic Foundation,  $M_0, V_0, M_e$  และ  $V_e$  เป็นแรงคัตและแรงเฉือนที่ปลายทั้งสอง

เราสามารถแก้ได้ว่าการโก่งตัวใด ๆ ในช่วง AG (ระหว่างปลายซ้ายกับแรงภายนอกอันแรก)

เป็น

$$W = W_0 Y_1 + \frac{\theta_0}{\beta} Y_2 - \frac{M_0}{\beta^2 EI} Y_3 - \frac{V_0}{\beta^3 EI} Y_4 \dots \dots \dots (17)$$

สมการนี้เป็นไปตามสมการที่ (16) โดยให้ W อยู่ในเทอม  $W_0, \theta_0, M_0, V_0$  ซึ่งแทนการโก่งตัว, มุมที่บิดไป ( $dw/dx$ ), โมเมนต์และแรงเฉือนที่ปลายซ้ายมือ คำนค่า  $Y_s$  จะเป็นฟังก์ชัน ตัวแปรที่ไม่มีหน่วย ( $\beta x$ ), เมื่อ  $\beta$  เรียกว่า Characteristic factor ของคาน

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \dots \dots \dots (18)$$

ค่า  $\beta$  มีหน่วยเป็นส่วนกลับของความยาว เทอม  $1/\beta$  เรียกว่าเป็น characteristic length ค่าฟังก์ชันของ Y แทนค่าได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= Y_1(\beta x) = \cosh \beta x \cos \beta x \\ Y_2 &= Y_2(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x \sin \beta x + \sinh \beta x \cos \beta x) \\ Y_3 &= Y_3(\beta x) = \frac{1}{2} \sinh \beta x \sin \beta x \\ Y_4 &= Y_4(\beta x) = \frac{1}{4} (\cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x) \end{aligned} \right\} (19)$$

ค่าฟังก์ชัน Y diff ครั้งแรก เป็นดังนี้

$$Y_1' = -4 \beta Y_4, Y_2' = \beta Y_1, Y_3' = \beta Y_2, Y_4' = \beta Y_3 \quad (20)$$

สำหรับผลการ diff. ขึ้นต่อไป ก็ทำนองเดียวกัน เทอมที่ 3 และ 4 ในสมการที่ (17) จะแทนแรงคู่ควบ  $M_0$  และแรงที่พุ่งขึ้น  $V_0$  บนช่วงมีโก่งที่จุดใด ๆ จากทางขวาของจุด A แรงคู่ควบ C และแรง P จะให้ผลทำนองเดียวกับหน้าตัดทางขวาของจุดที่แรงกระทำ เช่น เมื่อแพคเตอร์ ของ  $M_0$  ในสมการที่ (17) เป็น  $(-1/\beta^2 EI) Y_3(\beta x)$ , ค่าแรงคู่ควบ C ที่ปลาย D จะได้เป็น  $(-1/\beta^2 EI) Y_3[\beta(x - x_D)]$  ของการโก่งตัวที่จุดใด ๆ เมื่อ  $x \gg x_D$

น้ำหนักแผ่  $q$  สามารถเปลี่ยนให้เป็นเสมือนน้ำหนักที่กระทำเป็นจุดได้ ผลของแรง  $P, C$  และ  $q$  ที่กระทำ และระยะเคลื่อนที่ปลาย  $A$  สามารถหาได้โดยวิธีแทนที่ที่จุด  $F$  เมื่อ  $KE \leq X \leq 1$ . ( $l$  = ความยาวของคาน) ค่าการโก่งตัวจะเป็น

$$w = w_0 Y_1(\beta x) + \frac{\theta_0}{\beta} Y_2(\beta x) - \frac{M_0}{\beta^2 EI} Y_3(\beta x) - \frac{V_0}{\beta^3 EI} Y_4(\beta x) - \frac{c}{\beta^2 EI} Y_3[\beta(x - x_D)] + \frac{P}{\beta^3 EI} Y_4[\beta(x - x_G)] + \frac{1}{\beta^3 EI} \int_{x_E}^x q Y_4[P(x - u)] du \dots \dots \dots (21)$$

เมื่อค่า  $u$  เป็นระยะทางใด ๆ จากปลายด้านซ้าย และอยู่ระหว่างจุด  $E$  และ  $F$  (รูปที่ 2.5) จากการ diff. สมการ (20) ค่ามุมที่บิดไป, โมเมนต์ และแรงเฉือนที่หน้าตัดใด ๆ ก็จะสามารถหาออกมาได้ ดูสมการ (11) และ (13) ในการใช้สมการ (21) ค่าของ  $w_0, \theta_0, M_0, V_0$  ต้องเป็นค่าที่รู้ หรืออาจจะทราบเพียง 2 ค่า แต่ต้องทราบอีก 2 ค่าของ  $w_t, \theta_t, M_t, V_t$  ของปลายขวาของจุด  $B$  แทนค่า  $x = 1$  ในสมการ แทนค่าที่ทราบ 2 ค่า จากปลายจุด  $B$  จะได้อีก 2 สมการ ของปลายจุด  $A$  ก็สามารถหาค่าตอบได้

2.205 เทอมประกอบ (Characteristic parameter)

เมื่อสมการต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นใช้กับผนังทรงกระบอกกลมซึ่งมีความหนาคงที่ ตัวเทอมประกอบ  $\beta$  หาได้โดยการแทนสมการ (8) และ (10) ลงใน (18)

$$\beta = \frac{4 \sqrt{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{rh}} \dots \dots \dots (22)$$

ดังได้กล่าวมาแล้วว่า  $w, \theta, M, V$ , จะเป็นการโก่งตัว, มุมที่บิดไป, โมเมนต์ และแรงเฉือนของแถบซึ่งกว้าง 1 หน่วย ตามแนวแกนของทรงกระบอก ค่าแรงดึงในวงแหวน  $N$  สามารถหาได้จากการโก่งตัว  $w$  ในสมการ (6)

สำหรับปลายใด ๆ ที่มีการยึดรั้งแบบอื่น ๆ และแรงแบบอื่นกระทำค่า  $w, \theta, M, v$  สามารถหาได้โดยใช้สมการเดิมเพียงแต่เพิ่มพารามิเตอร์ ที่ไม่มีหน่วยอีกตัว คือ

$$\alpha = \beta l \dots \dots \dots (23)$$

หรือ 
$$\alpha = \frac{1^4 \sqrt{3(1-v^2)}}{\sqrt{(rh)}} \dots \dots \dots (24)$$

เมื่อ  $l$  เป็นความยาวของทรงกระบอก สำหรับโครงสร้างที่เป็นคอนกรีต ค่าอัตราส่วน Poisson's อยู่ระหว่าง  $1/6$  และ  $1/5$  เมื่อใช้ค่าแรกจะได้

$$\alpha = 1.3068 \frac{1}{\sqrt{(rh)}} \dots \dots \dots (25)$$

หรือ 
$$= 1.8481 \sqrt{\eta} \dots \dots \dots (26)$$

เมื่อ 
$$\eta = l^2 / (dh) \dots \dots \dots (27)$$

และ  $d = 2r$  เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางทรงกระบอกคิดถึงกึ่งกลางผนังทรงกระบอก

คานบน Elastic Foundation หรือถังทรงกระบอกที่มีค่า และน้ำหนักที่กระทำเหมือนกัน จะมีค่า  $w, \theta, M$  และ  $v$  เป็นตัวแปรเช่นกันแต่เราสามารถเปลี่ยนเป็นตัวสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับค่า ได้ และให้อยู่ในรูปตัวคูณร่วม โดยแสดงตารางการออกแบบซึ่งจะแสดงต่อไป โดยใช้  $\eta$  แทน  $\alpha$  ค่า Parameter ทั้งสองสัมพันธ์กันตามสมการ (27) ซึ่งใช้ทำตาราง ที่ใช้สำหรับออกแบบถังทรงกระบอก ค่าอัตราส่วน Poisson's =  $1/6$  ตัวแปรจนถึง  $1/5$  ไม่มีผลอะไร แต่ถ้ามากกว่านี้จะเปลี่ยนแปลงไป

2.200 สมการ Finite - difference

ผลการวิเคราะห์ผนังทรงกลมซึ่งมีความหนาไม่คงที่ ซึ่งเปลี่ยน flexural rigidity และ Foundation Modulus สมการ (15) ทำให้อยู่ในรูป finite-diff. และเมื่อกระทำที่จุด (node) จะสัมพันธ์กับการโก่งตัว  $w$  ที่จุด นั้นหับจุด ที่อยู่ใกล้เคียงกับแรงที่กระทำ เราจะใช้วิธีนี้กับจุด ทุกอัน เมื่อการโก่งตัวไม่ทราบค่า หาสมการ -



สำหรับผนังกลม E<sub>Ib</sub> เลือกจากขอบล่างสุด โดยใช้สมการ (10)

$$E_{Ib} = Ehb^3 / [12 (1 - \nu^2)] \dots\dots\dots (32)$$

$$J_i = h_i^3 / hb^3 \dots\dots\dots (33)$$

เมื่อ hb คือความหนาที่ขอบล่าง

Q<sub>i</sub> เป็นแรงกระทำที่จุด i ถ้าให้ง่ายโดยให้เท่ากับ q<sub>ir</sub> เมื่อ q<sub>i</sub> เป็นหน่วยแรงภายนอกที่จุด i หรือถ้าให้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น Q<sub>i</sub> จะเท่ากับผลรวมของแรงปฏิกิริยาที่จุด i ของคานาธรรมดา 2 อัน ซึ่งมีความยาว และถูกแรงภายนอก q กระทำอยู่

สมการ (28) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกที่กระทำ Q<sub>i</sub> กับการโก่งตัวที่จุด i และจุด ที่ใกล้เคียงกันอีก 2 จุด ของแต่ละข้าง ถ้า i อยู่บนขอบหรือใกล้ขอบ ค่าสัมประสิทธิ์ของ w ในสมการ finite-difference จะเป็นไปตาม boundary condition ซึ่งจะได้อธิบายต่อไป การใช้ finite-diff. กับ จุดเมื่อค่าการโก่งตัวไม่ทราบค่า กลุ่มของสมการแมททริก จะออกมาในรูป

$$[k]\{w\} \simeq \{Q\} \dots\dots\dots (34)$$

เมื่อคำตอบของ n จุดให้ค่าการโก่งตัว w ค่าแมททริก k จะได้จากค่าสัมประสิทธิ์ของ w ซึ่งเป็นแมททริก แบบสมมาตรในแนวทแยงมุม จำนวน n x n ถ้าปลายทั้งสองเป็นแบบอิสระจะได้สมการดังนี้  $[K] = \frac{E_{Ib}}{\lambda^3} \times$

SYMMETRICAL		
$\frac{J_2+C_1}{2}$	$4J_2+J_3+C_2$	...
$-2J_2$	...	...
	$J$	$-2J$
	$C-1$	$C-1$
		$1$
		$J_4^{-3}+4J_1+J_1+3$
		$+C_4$
		...
		...
		$J_{a-2}$
		$-2J_{a-2}$
		$-2J_{a-2}$
		$J_{a-2}+4J_{a-1}$
		$+C_{a-1}$
		$-1$
		$1$
		$J_{a-1}$
		$-2J_{a-1}$
		$J_{a-1}+$
		$J_{a-1}+$

Elements not shown are Zero

35

$\frac{C_0}{2}$

ตัวประกอบในแถวของ  $[k]$  ในสมการ (35) จะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ  $w$  ในสมการที่ (28) ซึ่งกระทำที่จุด  $i$  จากขอบ ตัวประกอบในส่วนแรกและสองแถวหลังสุด เป็นสัมประสิทธิ์ของ  $w$  ที่ปรับตาม boundary condition ตามที่จะได้อธิบายต่อไป

เมื่อกำหนดค่า  $w$  ได้ ค่าแรงดึงในวงแหวนที่จุด  $i$  ใด ๆ ก็หาได้จากสมการ (6)

$$N_i = (Eh/r) w_i \dots \dots \dots (36)$$

ส่วนค่าแรงดัด โดยใช้ finite-diff. จากสมการ (11)

$$M_i = (EIb/r^2) J_i (-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}) \dots (37)$$

ส่วนค่าแรงเฉือนหาได้จากจุดกึ่งกลางระหว่างจุด โดยการใช้สมการ finite ที่ (13) โดยใช้ที่จุด  $i + \frac{1}{2}$  กึ่งกลางระหว่าง  $i$  และ  $i + 1$  จะได้

$$V_{i+1/2} \cong (EIb/r^3) [J_i w_{i-1} - (2J_i + J_{i+1}) w_i + (J_{i+2} + J_{i+1}) w_{i+1} - J_{i+1} w_{i+2}] \dots (38)$$

ค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ จะคำนวณหาได้จากค่าการโก่งตัว

## 2.206 แรงปฏิกิริยา และ Boundary conditions.

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นว่า การใช้สมการ (28) ที่จุด  $i$  จะให้ผลต่อค่าจุด 2 จุด ที่อยู่ใกล้เคียงกันสองข้างด้วย (ดูรูปที่ 2.6 ข.) และเมื่อ  $i$  อยู่บนขอบหรืออยู่ใกล้ขอบ เราก็จะสมมุติจุดปลอมขึ้นมา ดังนั้นจึงต้องใช้ Boundary Condition มากกว่าจุดค่าการโก่งตัวที่สมมุติขึ้นโดยทำให้อยู่ในเทอมของการโก่งตัวที่จุดอื่น จึงต้องสังเกตปลายทั้งสามดังนี้

ปลายแบบ Simple Support ค่าการโก่งตัว และโมเมนต์จะเป็น 0 กรณีทั้งสองนี้จะเป็นไปได้ ถ้าคานที่พิจารณาอยู่เป็นแบบต่อเนื่องกับคานแบบเดียวกัน รับน้ำหนักภายนอกเหมือนกันแต่ในทิศทางตรงกันข้ามเท่านั้น ดูจากรูปที่ 2.6 ข. ค่าการโก่งตัวที่จุดสมมุติ  $i - 2$  (ไม่ได้แสดงในรูป) ว่าการโก่งตัว  $w_{i-2} = -w_i$  ดังนั้นสมการ (28) เมื่อใช้ที่จุด  $i$  จะให้สมการ (39) ตามรูปที่ 2.7 ข.



สมการที่หาออกมาตามรูป 2.7 จะแทนความเข้มของแรง  $Q_i$  ที่จุด  $i$  (แรง/ความยาวของผนัง) กับการโก่งตัว ที่จุดใกล้เคียงกันในทำนองเดียวกัน ค่าแรง - ปฏิกริยา  $R_i$  ที่จุดรองรับจะสามารถแทนได้ด้วยเทอมของการโก่งตัว สมการทั้ง 3 ได้แสดงในรูปที่ 2.8 มีทั้งแรงปฏิกริยาที่ตรงกลาง, ข้อต่อ และ จุดยึดแน่น เมื่อการโก่งตัวที่จุดรองรับมีค่า  $= 0$ , ให้  $w_i = 0$  ค่าแรงคัดที่จุดยึดแน่นที่จุด  $i$  ในรูปที่ 2.8 ค. สามารถหาโดยใช้สมการ (37) โดยแทน  $w_{i-1} = w_{i+1}$

$$M_i \cong \frac{EIb}{\lambda^2} J_i (2w_i - 4w_{i+1} + 1) \dots \dots \dots (46)$$

รูปที่ 2.7 หมายแมททริซ  $[K]$  ให้ง่ายขึ้นจากสมการ (34) และคำตอบเป็นค่าการโก่งตัวที่จุดคังตัวอย่างเมื่อปลายสองข้างเป็นแบบอิสระ ดูรูปที่ 2.6 และสมการ (35) ค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแรก และสองแถวสุดท้ายของ  $[K]$  เป็นสัมประสิทธิ์ของ  $w$  ในสมการ (41) และ (42) ถ้าขอบของจุด 1 (หรือ  $n$ ) เป็นแบบ Simply Support ตัวแรก (หรือตัวหลังสุด) ของแถวบนและแถวตั้ง ของ แมททริซ ในสมการ (35) จะน้อยมาก ทำนองเดียวกัน ถ้าการโก่งตัวถูกป้องกันไม่ให้เกิดที่จุดรองรับใด ๆ ตรงกลางจุด  $j$  กำลังของ  $[K]$  จะถูกลดโดยตัดแถวบน และแถวตั้งที่ตำแหน่ง  $J$  ออก

ดังได้กล่าวมาแล้วตอนต้น ๆ ว่า ส่วนของ  $\{Q\}$  ในสมการ (30) จะเท่ากับผลรวมของแรงปฏิกริยาที่จุดของคาน Simple ยาว  $\lambda$  ถูกกระทำโดยน้ำหนักภายนอก  $q$  สำหรับกรณีน้ำหนักกระทำแบบแปรสม่ำเสมอจะได้สมการใหม่เป็น

$$\{Q\} = \lambda \left\{ \frac{7q_1 + 6q_2 - q_3}{24}, \dots, \frac{q_{i-1} + 10q_i + q_{i+1}}{12}, - \frac{q_{n-2} + 6q_{n-1} + 7q_n}{24} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

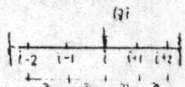
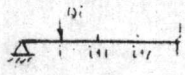
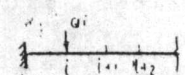
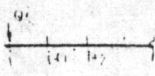
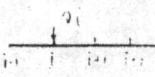
เมื่อให้  $Q_i$  และ  $Q_n$  อยู่ที่ขอบจุด และ  $Q_i$  เป็นแรงที่จุด  $i$  แบบนี้จะรวมเอาสมมติฐานของการแปรแบบพาราโบลาของ  $q$  ของอีก 3 จุดตามกันมา

ผนังทรงกระบอกที่ถูกเปลี่ยน flexural rigidity ทันทีทันใดที่จุด  $i$  ค่า effective  $EI_i$  จะถูกใช้ในสมการ finite-diff. ในรูปที่ 2.7 และ 2.8 ค่า effective flexural rigidity จะเป็นไปตามสูตร

สำหรับข้อกำหนดที่เป็นแบบปลาย fixed ค่าการโก่งตัว และมุมที่ปิดไปจะเป็นศูนย์และเป็นไปไม่ได้เมื่อคานาที่พิจารณาอยู่ ต่อเนื่องกับคานาแบบเดียวกัน และมีน้ำหนักเหมือนกัน กระทำอยู่ดังนั้น  $W_{i-2} = W_1$  และสมการ (28) เมื่อกระทำที่จุด  $i$  ใกล้เคียงปลายที่เป็นแบบ fixed จะได้สมการ (40) ในรูปที่ 2.7 ค.

ค่าแรงดัดที่จุด  $i+1$  ใกล้เคียงอิสระ (รูปที่ 2.7ง.)  $M_{i+1} = -Q_i + K_i W_i$  ( $^2/2$ ) เปลี่ยน  $M_{i+1}$  ให้อยู่ในรูปการโก่ง โดยใช้สมการ (37). จะให้สมการ finite ในรูปสมการ (41) ที่กระทำที่จุด  $i$  ปลายเป็นแบบอิสระ ในรูปที่ 2.7 ค. แรงดัดที่ปลายอิสระจะเท่ากับ 0,  $M_{i-1} = 0$  เมื่อจัดให้อยู่ในรูป finite จะให้ค่าการโก่งตัวที่จุดที่สมมุติ  $W_{i-2} = 2W_{i-1} - W_i$ . ความสัมพันธ์อันนี้ใช้ในการกำจัด  $W_{i-2}$  จากสมการ (28) จะได้เป็นสมการ (42) กระทำที่จุด  $i$  ใกล้เคียงกับด้านปลายอิสระ

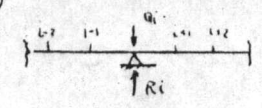
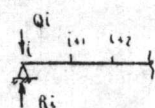
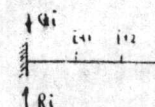
ถ้ามีสปริงเป็นดัวรองรับที่จุด  $i$  และมี Stiffness  $K_i$  (แรง/ความยาว<sup>2</sup> - สำหรับผนังกลม หรือแรง/ความยาว สำหรับคานาบน Elastic foundation) บวกค่า  $K_i$  กับสัมประสิทธิ์ของ  $W_i$  ในสมการใด ๆ ในรูปที่ 2.7

ตำแหน่งจุด $i$	ค่าสัมประสิทธิ์ของการยึดตัวในเทอม $EI_B / r^3$					ด้านขวา	สมการ
	$W_{i-2}$	$W_{i-1}$	$w_i^*$	$W_{i+1}$	$w_{i+2}$		
(ก) 	$J_{i-1}$	$-2(J_{i-1} + J_i)$	$J_{i-1} + 4J_i + J_{i+1} + C_i$	$-2(J_i + J_{i+1})$	$J_{i+1}$	$\cong Q_i$	(28)
(ข) Hinged support 	-	-	$4J_i + J_{i+2} + C_i$	$-2(J_i + J_{i+1})$	$J_{i+1}$	$\cong Q_i$	(39)
(ค) Fixed support 	-	-	$2J_{i-1} + 4J_i + J_{i+1} + C_i$	$-2(J_i + J_{i+1})$	$J_{i+1}$	$\cong Q_i$	(40)
(ง) Free end 	-	-	$J_{i+1} + (C_i/2)$	$-2J_{i+1}$	$J_{i+1}$	$\cong Q_i$	(41)
(จ) Free end 	-	$-2J_i$	$4J_i + J_{i+1} + C_i$	$-2(J_i + J_{i+1})$	$J_{i+1}$	$\cong Q_i$	(42)

\*ถ้ามีสปริงซึ่งมี stiffness  $k_i$  (แรง/ความยาว<sup>2</sup> สำหรับผนังกลมและแรง/ความยาวสำหรับคานา) ให้บวก  $k_i$  ลงในสัมประสิทธิ์ของ  $w_i$  ทุกสมการ รูปที่ 2.7 สมการ Finite ของความสัมพันธ์ระหว่างการยึดตัวกับแรงของผนังทรงกระบอก หรือคานาบน Elastic Foundation.

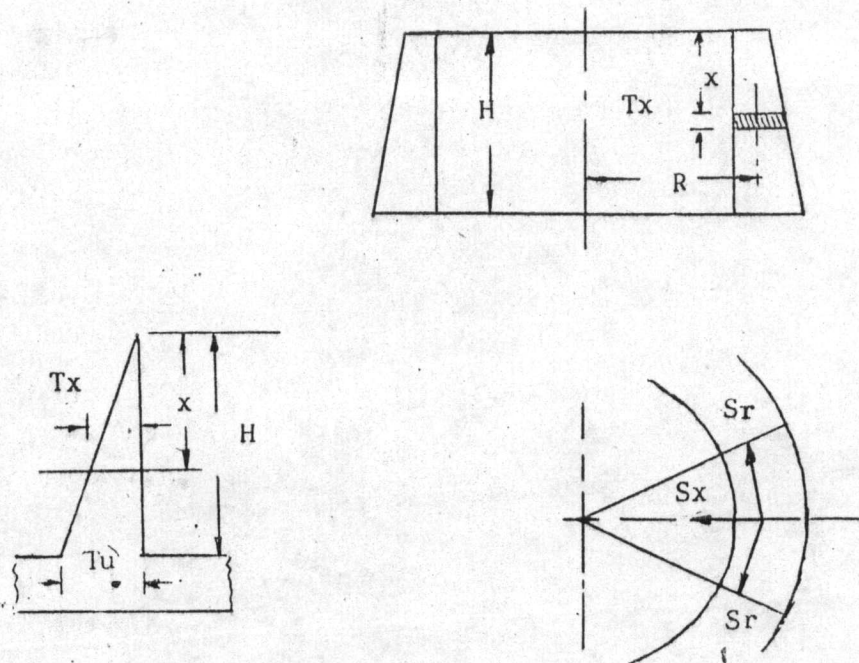
$$EI_i = \frac{2 EI_{i1} E_{ir}}{EI_{i1} + EI_{ir}} \dots \dots \dots (48)$$

Subscripts 1 และ T จะแทนหน้าตัด ข้ายและขวาของจุดที่ความหนา  
เปลี่ยนไปทันทีทันใดของผนัง มีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดกับค่า  $k$  ที่จุด  $i$ ,  
 $k_i$  จึงใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างค่าแรก กับ ค่าหลัง

ชนิดจุดรองรับ	สัมประสิทธิ์ของการยึดตัวในเทอมของ $EI_b/r^3$					ด้านขวามือ	สมการ
	$w_{i-2}$	$w_{i-1}$	$w_i$	$w_{i+1}$	$w_{i+2}$		
(ก) 	$-J_{i-1}$	$2(J_{i-1} + J_i)$	$-(J_{i-1} + 4J_i + J_{i+1} + C)$	$2(J_i + J_{i+1})$	$-J_{i+1}$	$\cong (R_i - Q_i)$	(43)
กึ่งกลางจุดรองรับ			1				
(ข) 	-	-	$-(J_{i+1} + \frac{C}{2})$	$2J_{i+1}$	$-J_{i+1}$	$\cong (R_i - Q_i)$	(44)
Hinged end							
(ค) แรงดัดที่ปลายโดยสมการ (46) 	-	-	$-(2J_i + J_{i+1} + \frac{C}{2})$	$2(J_i + J_{i+1})$	$-J_{i+1}$	$\cong (R_i - Q_i)$	(45)
ป้องกันจุดหมุนที่ i							

รูปที่ 2.8 สมการ finite ของความสัมพันธ์ระหว่างการยึดตัว กับ แรงปฏิกิริยาของผนังทรง-  
กระบอก หรือคานบน Elastic foundation.

2.300 วิธีวิเคราะห์ถึงเก็บน้ำทรงกระบอกโดย Dr. Reissner



รูปที่ 2.9

หน้าตัดของถังทรงกระบอกแสดงในรูปที่ 2.9 ให้  $x$  เป็นความลึกใด ๆ ที่วัดจากขอบบนถึงจุดที่พิจารณา,  $T_x$  เป็นความหนาของผนัง ที่ความลึก  $x$ ,  $T_u$  เป็นความหนาของผนังที่ต่อกับพื้นล่าง,  $v$  การยืดของผนังในแนวสัมผัสกับเส้นรอบวง,  $u$  การยืดตัวของผนังในแนวตั้ง,  $m$  เป็นอัตราส่วน Poisson Ratio,  $w$  เป็นน้ำหนักของของเหลวที่บรรจุต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร,  $R$  เป็นรัศมีวงกลมของผนัง

การยืดตัวในแนวตั้ง และแนวรัศมี เนื่องจากของเหลวที่บรรจุอยู่คือ

$$\epsilon_1 = \frac{T_u}{T_x}, \quad \epsilon_2 = \frac{2\pi(R+v) - 2\pi R}{2R} = \frac{v}{R} \dots \dots \dots (49)$$

หน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการยืดตัว

$$S_x = \frac{ET}{(1-m^2)} (\epsilon_1 + m\epsilon_2) \dots \dots \dots (50)$$

$$S_r = \frac{ET}{(1-m^2)} (\epsilon_2 + m\epsilon_1)$$

ค่าความโค้งเนื่องจากการโก่งตัว  $v$  คือ

$$i = \frac{d^2 v}{d x^2} \quad (\text{โดยประมาณ}) \dots \dots \dots (51)$$

ค่าโมเมนต์ดัดจะเป็น

$$M_x = \frac{EI}{(1-m^2)} \frac{d^2 v}{d x^2} = \frac{EI^3}{12(1-m^2)} \frac{d^2 v}{d x^2} \dots \dots \dots (51)$$

และแรงเฉือน

$$V_x = \frac{dM_x}{dx} \dots \dots \dots (52)$$

จากความสมดุลโดยใช้ทริกตรงกระบอกได้

$$\frac{dS_x}{dx} = 0 \quad \text{สำหรับแรงในทิศทาง } x \dots \dots \dots (53)$$

$$\frac{dV_x}{dx} + \frac{S_r}{R} = wx \quad \text{สำหรับแรงในทิศทาง } R \dots \dots \dots (54)$$

จากสมการ 50  $S_x = 0$ ,

$$\frac{du}{dx} + \frac{mv}{r} = 0 \dots \dots \dots (55)$$

แทนค่า  $M_x$  และ  $V_x$  จากสมการ (51) และ (52) และ  $S_r = ETv/R$

จากสมการ (50) ลงในสมการ (54)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( T^3 \frac{d^2 v}{d x^2} \right) + \frac{12(1-m^2)}{2} T u = \frac{12(1-m^2)}{E} wx \dots \dots \dots (56)$$

สำหรับผนังที่มีความหนาไม่คงที่ ให้  $\theta = x/H$  และ  $T = \theta du$  (ดูรูปที่ 2.9

ดังนั้นสมการ (56) เขียนได้เป็น

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \theta^3 \frac{d^2 v}{d \theta^2} \right) + \theta xv = \pi \theta \dots \dots \dots (57)$$

เมื่อ  $v = \frac{12H^4(1-m^2)}{R^2T^2u} \dots\dots\dots(58)$

และ  $\lambda = \frac{12H^5(1-m^2)w}{ETu^3} \dots\dots\dots(59)$

สมการดิฟเฟอเรนเชียล (57) มีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

สำหรับ  $\theta = 1.0$  ,  $v = 0$  ,  $\frac{dv}{d\theta} = 0$  (ปลายยึดแน่น) }  
 สำหรับ  $\theta = 0$  ,  $m = 0$  ,  $vx = 0$  (ปลายอิสระ) } \dots\dots\dots(60)

หรือ  $\frac{\theta^3 d^2v}{d\theta^2} = 0$  ,  $\frac{d}{d\theta} (\theta^3 \frac{d^2v}{d\theta^2}) = 0$

Dr. Reissner ได้หาคำตอบของสมการชุดนี้ไว้ในรูปของ

$v = \frac{\lambda}{x} + c_1v_1 + c_2v_2 + \dots\dots\dots(61)$

เมื่อ  $v_1 = 1 - \frac{x\theta^2}{213} + \frac{x^2\theta^4}{45} - \frac{x^3\theta^6}{67}$

$v_2 = \theta (1 - \frac{2x\theta^2}{34} + \frac{2x^2\theta^4}{56} - \frac{2x^3\theta^6}{78} + \dots\dots)$

$C_1 = - \frac{\lambda}{x} \frac{v_2'}{v_1 v_2' - v_1' v_2}$  ,

$C_2 = + \frac{\lambda}{x} \frac{v_1'}{v_1 v_2' - v_1' v_2}$

ในสมการนี้  $v_1$  ,  $v_2$  ,  $v_1'$  และ  $v_2'$  คือค่า เมื่อ  $\theta = 1.0$

ค่าการยึดตัวในแนวสัมผัสจะคำนวณจากค่า  $x = 10, 100, 1,000$  และ  $10,000$  ค่าแรง

ตัดหาได้จาก  $\frac{d^2vx}{d\theta^2r} = c_2 v_1'' + c_2 v_2''$  เมื่อ

$v_1'' = - \frac{x}{3!} + \frac{x^2\theta^2}{2!5!} - \frac{x^3\theta^5}{4!7!} \dots\dots\dots$

$$v''_2 = 2\theta \left( -\frac{x}{1!4!} + \frac{x^2\theta^2}{3!6!} - \frac{x^3\theta^4}{5!8!} + \dots \right) \quad (62)$$

ผนังที่มีความหนาคงที่ ในกรณี  $T = T_u$  และสมการ (57) จะเป็น

$$\frac{d^4 v}{d\theta^4} + xv = \lambda \theta \quad \dots \dots \dots (63)$$

จาก boundary condition เมื่อ  $v = v' = 0$  สำหรับ  $\theta = 1$

และ  $v'' = v''' = 0$  เมื่อ  $\theta = 0$  ผลของสมการ (63) คือ

$$v = \frac{\lambda\theta + A}{x} \cos n\theta \cosh n\xi + B(\sin n\theta \cosh n\theta + \cos n\theta \sinh n\theta) \dots (64)$$

เมื่อ  $n = \sqrt[4]{\frac{x}{4}}$  ,

$$\frac{x}{\lambda} A' = \frac{-2n \cos n \cosh n - (\sin n \cosh n + \cos n \sinh n)}{n [2\cos^2 n \cosh^2 n - (\cos^2 n \sinh^2 n - \sin^2 n \cosh^2 n)]}$$

$$\text{และ } \frac{x}{\lambda} B = \frac{+n(\cosh \sinh - \sin \cosh n) - \cos n \cosh n}{n [2\cos^2 n \cosh^2 n - (\cos^2 n \sinh^2 n - \sin^2 n \cosh^2 n)]}$$

เมื่อ  $x$  และ  $n$  มีค่ามาก ๆ สมการ  $\sinh n = \frac{1}{2}(e^n - e^{-n}) = \sqrt{\cosh^2 n - 1}$

จะมีค่าประมาณเท่ากับ  $\sinh n \simeq \cosh n \approx \frac{1}{2} e^n \dots \dots \dots (65)$

ถ้าให้  $\theta_1 = 1 - \theta$  จากสมการ Muller - Breslau

$$v \frac{x}{\lambda} = \theta - \frac{\cos n \theta_1 + \frac{n-1}{n} \sin n \theta_1}{\cosh n \theta_1 + \sinh n \theta_1} \dots \dots \dots (66)$$

$$\text{และ } \frac{d^2 v}{d\theta^2} \frac{x}{\lambda} = 2n^2 \left( \frac{\frac{n-1}{n} \cos n \theta_1 - \sin n \theta_1}{\cosh n \theta_1 + \sinh n \theta_1} \right) \dots \dots (67)$$

ในสมการนี้ค่า  $\cosh n \theta_1 - \sinh n \theta_1$  สามารถแทนค่าได้โดยฟังก์ชัน  $e^{-n \theta_1}$

หรือจากสมการ (65) เช่น  $\ln e^n = n \ln e = n$

และ  $\ln \frac{1}{2} e^n = n - \ln 2$  ค่า  $e^n$  หาได้จากตาราง Natural Logarithm  
 ทั่วไปค่าแรงในวงแหวนหาได้จากสมการ (49) และ (50) ดังนี้

$$S_r = \left( \frac{ET}{1 - m^2} \right) \frac{v}{R} = \frac{\lambda}{x} \frac{ET_2}{(1 - m^2)R} \left( \frac{vx}{\lambda} \right)$$

แทนค่าที่หาได้ในสมการ (58) ลงในสมการนี้จะได้

$$S_r = HRW \left( \frac{vx}{\lambda} \cdot \frac{T}{Tu} \right) \dots \dots \dots (68)$$

จากสมการ (52) ค่าโมเมนต์จะเป็น

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{ET^3}{12(1 - m^2)} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{ET^3}{12(1 - m^2)H^2} \cdot \frac{d^2 v}{d \phi^2} \\ &= \frac{\lambda}{x} \frac{E Tu^3}{12(1 - m^2)H^2} \left( \frac{x}{\lambda} \frac{d^2 v}{d \phi^2} \frac{T^3}{Tu^3} \right) \end{aligned}$$

ตัดค่า  $m^2$  และจากสมการ (58)

$$M_x = \frac{R^2 w}{H} \frac{I}{A} \left( \frac{x}{\lambda} \frac{d^2 v}{d \phi^2} \frac{d^3}{du^3} \right) \dots \dots \dots (69)$$

เทอมในวงเล็บสมการ (68) และ (69) มีค่าเป็นตัวเลขล้วน ๆ สามารถคำนวณได้  
 จากสมการ (61) และ (62) สำหรับผนังรูปสามเหลี่ยม สำหรับผนังหนาคงที่ใช้สมการ  
 (66) และ (67) ค่าโมเมนต์ที่ฐานของผนังซึ่งมีความหนาคงที่ หาได้โดยให้  $\phi_1 = 0$   
 หรือ  $\phi = 1$  ในสมการ (67) เมื่อ  $\frac{d^2 v}{d \phi^2} \cdot \frac{x}{\lambda} = 2n(n-1)$  ค่านี้แทนใน  
 สมการ (69) จะได้

$$M_x = \frac{R^2 w}{H} \frac{I}{A} 2n(n-1) \dots \dots \dots (70)$$

โดยใช้  $I/A = \frac{1}{12} du^2$

ผนังที่หนาคงที่ค่าแรงในวงแหวน  $S_r = 0$  ที่ฐาน ( $\phi = 1$ ) และที่บนสำหรับค่า  
 $n$  ที่มาก ๆ สมการ (66) ผลการดิฟจะเป็น



$\cos h n \theta 1 + \sin h n \theta 1 - \cos n \theta 1 - (2n-1)\sin n \theta 1 = 0$  และค่า  
Max ของ Sr จะเป็น

$$\frac{\cos h n \theta 1 + \sin h \theta 1 - \cos n \theta 1}{\sin n \theta 1} = 2n-1 \dots \dots \dots (71)$$

ค่าสูงสุดของโมเมนต์หาได้โดยดิฟสมการ (67)

$$- \frac{(n-1)}{n} \sin n \theta 1 - \cos n \theta 1 - \frac{n-1}{n} \cos n \theta 1 + \sin n \theta 1 = 0$$

หรือ  $\tan n \theta 1 = 2n-1$

สำหรับค่า n ที่มากจะถูกตัดถ้าให้  $n \theta 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n-1}$  ดังนั้น

$$\cos n \theta 1 = \frac{1}{2n-1} \quad \text{และ} \quad \sin n \theta 1 = 1 - \frac{1}{2(2n-1)^2}$$

$$\sin h n \theta 1 + \cos h n \theta 1 = e^{n\theta 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}\pi}}{e^{\frac{1}{2n-1}}} = e^{\frac{1}{2}\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)^2} \right]$$

$$\text{เมื่อ } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \dots \dots \text{เมื่อ } e^{\frac{1}{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2(2n-1)^2}$$

และเทอมในสมการ (67) จะเป็น

$$\frac{\frac{n-1}{n} \cos n \theta 1 - \sin n \theta 1}{\cos h n \theta 1 + \sin h n \theta 1} = \frac{\frac{n-1}{n(2n-1)} - 1 + \frac{1}{2(2n-1)^2}}{e^{\frac{1}{2}\pi} \left( 1 - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)^2} \right)}$$

ค่าที่อยู่ในวงเล็บจะหาได้ประมาณดังนี้

$$\frac{\frac{n-1}{n} \cos n \theta 1 - \sin n \theta 1}{\cos h n \theta 1 + \sin h n \theta 1} = e^{\frac{1}{2}\pi} \left( 1 - \frac{n-1}{n(2n-1)} \right) \left( 1 + \frac{1}{2n-1} \right) = e^{-\frac{1}{2}\pi} \left( 1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right)$$

ดังนั้นค่า  $M_{max}$  จะเป็น

$$M_x = - \frac{R^2 w}{H} \frac{I}{A} \left( 0.414 \bar{n} \right) \left( n + \frac{1}{2n - 1} \right) \dots \dots \dots (73)$$

โดยทั่วไปในด้านบนผนังจะมีห้ล้งค่า แต่ไม่มีผลต่อหน่วยแรงภายในผนัง เพราะว่าค่าการยึดของผนังด้านบนจะเข้าใกล้ศูนย์ สำหรับผนังซึ่งมีความหนาคงที่

สำหรับผนังที่มีหน้าตัดแปร และมีค่า  $x$  น้อย ๆ จะเกิดแรงในวงแหวนเป็นแรงอัดถ้าด้านบนถูกยึดรั้ง

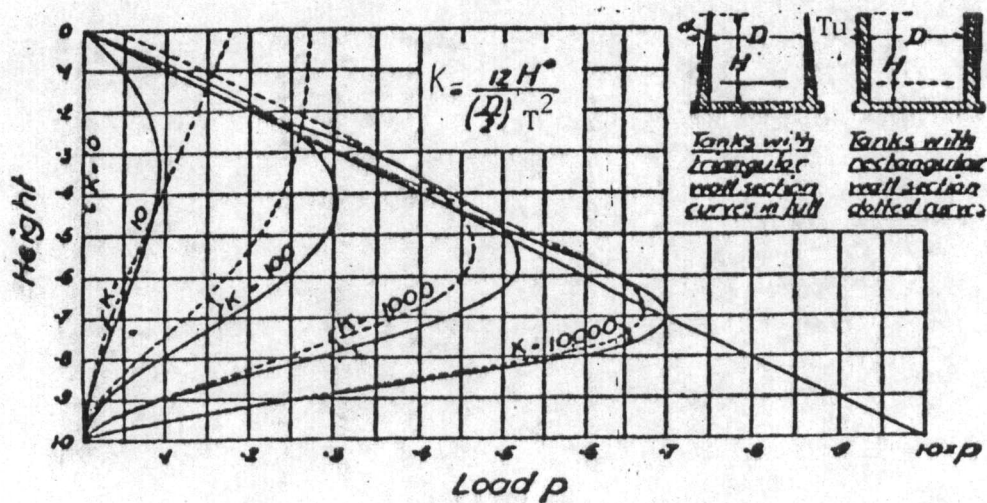
จากการวิเคราะห์ข้างต้นจะเห็นการกระจายแรงบนผนังของถังทรงกระบอก ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า  $x$  ในรูปที่ 2.10 แรงกระจายบนผนังได้ให้พิภักตามค่า  $x$

$x = 10, 100, 1,000,$  และ  $10,000$  สำหรับผนังหนาคงที่และรูปสามเหลี่ยม

โมเมนต์ที่เกิดในผนังหาจากสมการ (70) สำหรับค่า  $x$  ถ้าให้  $x = \frac{12H^4(1-m^2)}{R^2 Tu^2}$

เมื่อ  $m$  เป็น Poisson's ratio ตามข้างล่างให้สมมุติฐานของคอนกรีตเสริมเหล็ก

เมื่อ  $m$  เป็น ศูนย์  $x = \frac{12H^4}{R^2 Tu^2}$



รูปที่ 2.10 การกระจายของแรงบนผนัง

ถ้าให้  $T = Tu$  และ  $x = k$  จะได้

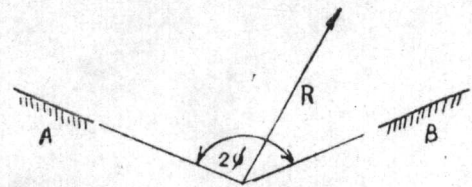
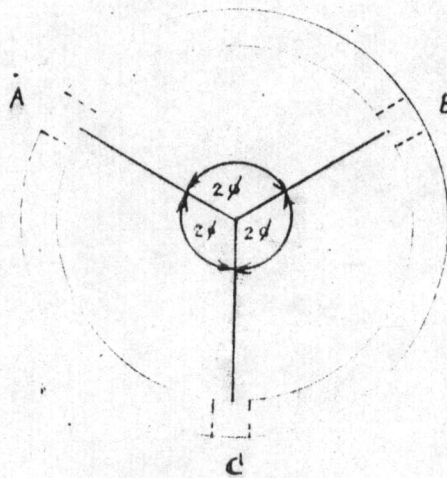
$$k = 12 \left( \frac{H}{\sqrt{TR}} \right)^4$$

เมื่อ  $k = 10$ ,  $\frac{H}{\sqrt{TR}} = \sqrt[4]{\frac{10}{12}} = 0.954$

เมื่อ  $k = 100$ ,  $\frac{H}{\sqrt{TR}} = \sqrt[4]{\frac{100}{12}} = 1.698$

สมการที่ (70) ใช้ได้กับผนังหนาคงที่ แต่สามารถใช้ได้กับผนังที่แปรได้ แต่ต้องแก้ไขเล็กน้อย

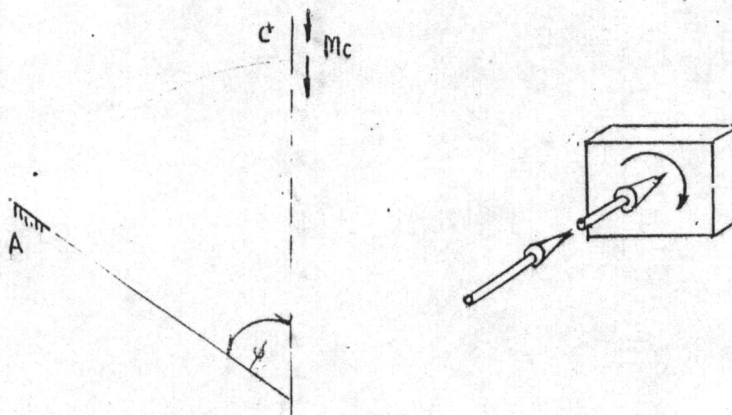
#### 2.400 การวิเคราะห์คานารับวงแหวน



รูปที่ 2.11 การวิเคราะห์คานารับวงแหวน

รูปที่ 2.11 แสดงคานวงแหวนอยู่บนเสา มุมที่รองรับโดยจุดศูนย์กลางคาน มีค่าเท่ากัน น้ำหนักแผ่นฆ่าเสมอกระทำบนคาน ทำให้เป็นโครงสร้างที่สมมาตรช่วงของ คานวงแหวน ถือได้ว่าเป็นปลายที่ยึดแน่น (fixed) ที่ A และ B ด้วยความสมมาตร จะประมาณว่าที่กึ่งกลางคานจะไม่ปรากฏแรงเฉือน และโมเมนต์บิดหากจะมีแรงดัด  $M_c$  เป็นแรงดัดภายในกระทำอยู่เท่านั้น สามารถใช้ strain energy principle's ทำให้อยู่ในรูปสมการเดียวที่มีตัวไม่ทราบค่าตัวเดียว

พิจารณาที่กึ่งกลางคานตามรูปที่ 2.12  $M_c$  จะเป็น redundant ที่กึ่งกลางคาน ที่ตำแหน่งใด ๆ จะสามารถเขียนแรงดัดและแรงบิด  $M$  และ  $T$  ในรูปของ  $M_c$  ได้ พลังงานเครียด (strain energy) จะเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 2.12 แปลนครึ่งคานและลูกศรโมเมนต์

$$U = \int_c^A \frac{M^2 ds}{2 EI} + \int_c^A \frac{T^2 ds}{2 GJ}$$

ค่ามุมที่ผิดไปที่กึ่งกลางคานโดยอาศัย Castigliano's theorem ได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \text{มุมที่ผิดไปที่ } C &= \frac{\partial u}{\partial M_c} \\ &= \int_C^A \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_c} ds}{EI} + \int_C^A \frac{T \frac{\partial T}{\partial M_c} ds}{GJ} \end{aligned}$$

ด้วยความสมมาตรจะประมาณได้ว่ามุมที่ผิดไป ที่กึ่งกลางคานจะต้องเท่ากับศูนย์

ดังนั้น

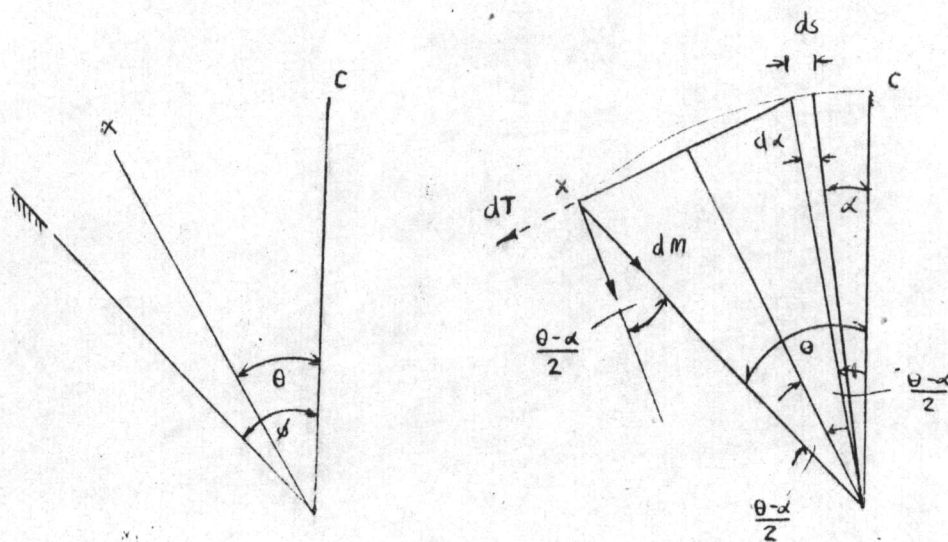
$$\int_C^A M \frac{\partial M}{\partial M_c} ds + \int_C^A T \frac{\partial T}{\partial M_c} ds = 0$$

และเมื่อกำหนดให้  $\frac{EI}{GJ}$  แทนด้วยอักษร  $m$  จะเขียนได้ดังนี้:

$$\int_C^A M \frac{\partial M}{\partial M_c} ds + m \int_C^A T \frac{\partial T}{\partial M_c} ds = 0 \dots \dots \dots (72)$$

ด้วยสมการ (72) นี้จะสามารถรู้ค่า  $M_c$

คานวงแหวนเป็นส่วนโครงสร้างใช้รองรับถังน้ำทรงกระบอกจึงได้คำนวณค่าแรงดัด แรงบิด โดยทำเป็นกราฟเพื่อให้อ่านค่าการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ข



รูปที่ 2.13 - แพลนครึ่งคานภายใต้น้ำหนักแผ่

รูปที่ 2.13 แสดงแพลนครึ่งคานภายใต้อิทธิพลของน้ำหนักแผ่  $w$  กำหนดให้  $x$  เป็นตำแหน่งใด ๆ ระหว่างกึ่งกลางคานกับปลายคาน โดยตำแหน่งนี้มีมุม  $\theta$  วัดจากกึ่งกลางคานเป็นมุมเท่ากับ  $dM_R = 2wR^2 \sin \frac{\theta-d}{2} dx$  โมเมนต์ต้าน  $dM_R$  จะแตกออกได้เป็นสองทิศทาง ในทิศทางที่อยู่ในแนวรัศมีจะเป็น bending moment โดยมีค่า:

$$\begin{aligned}
 dM &= dM_R \cos \frac{\theta - \alpha}{2} \\
 &= 2wR^2 \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} d \\
 &= wR^2 \sin (\frac{\theta - \alpha}{2}) d\alpha
 \end{aligned}$$

อาศัย integration ในการพิจารณาอิทธิพลของ  $w$  โดยตลอดจาก  $C$  ถึง  $x$  โดยถือ  $e$  เป็นมุมแปร (variable) จะได้ดังนี้:

$$M = \int_c^x dM$$

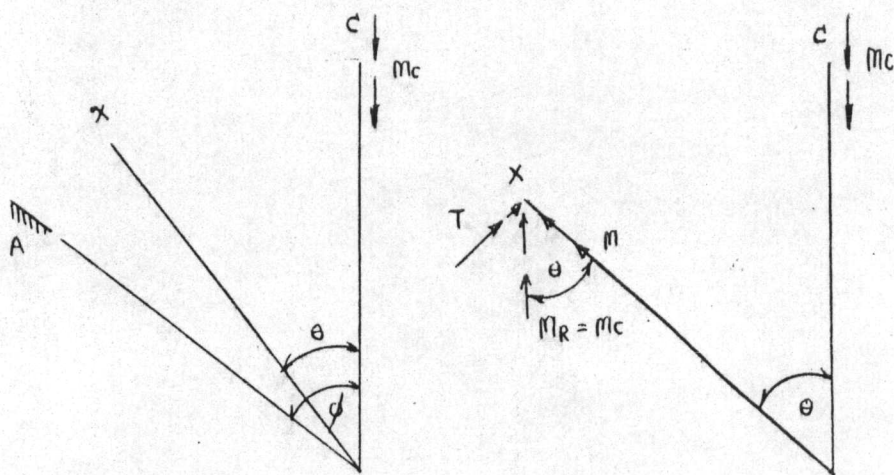
แทนค่า  $dM$  จะได้

$$M = wR^2 (1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (73)$$

$$T = \int_c^x dT$$

แทนค่า  $dT$  จะได้

$$T = wR^2 (\theta - \sin \theta) \dots \dots \dots (74)$$



รูปที่ 2.14. เพลนครึ่งคานภายใต้อิทธิพลของ  $M_c$

ในรูปที่ 2.14 กำหนดให้  $M_C$  เป็น redundant bending moment ที่กระทำ ณ กึ่งกลางคาน โดยมีทิศทางตามรูปสมมูลย์ของช่วง CX จะเกิดขึ้นได้ต่อเมื่อมีโมเมนต์ต้าน  $M_R$  โดยลูกศรของ  $M_R$  ขนานกับลูกศรของ  $M_C$   $M_R$  จะต้องเท่ากับ  $M_C$  ด้วยวิธีการคล้ายกันจะสามารถแตก  $M_R$  ออกเป็นสองทิศทาง

$$\begin{aligned} M &= M_R \cos \theta \\ &= M_C \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$\begin{aligned} T &= M_R \sin \theta \\ &= M_C \sin \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (76)$$

จะเห็นได้ว่า  $M$  และ  $T$  เนื่องจาก  $w$  และ  $M_C$  มีลูกศรทิศทางสวนกัน ดังนั้น จะเขียนโมเมนต์ทั้งสองภายใต้อิทธิพลของ  $w$  และ  $M_C$  ร่วมกันได้ดังนี้:

$$M = M_C \cos \theta - wR^2 (1 - \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (77)$$

$$T = M_C \sin \theta - wR^2 (\theta - \sin \theta) \quad \dots\dots\dots (78)$$

กระทำ differentiation กับ 77 และ 78 ด้วย  $M_C$  :

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = \cos \theta \quad \dots\dots\dots (79)$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_C} = \sin \theta \quad \dots\dots\dots (80)$$

เมื่อใช้สมการ (72) จะเขียนสมการสอดคล้อง (compatibility equation) ได้ดังต่อไปนี้:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\theta} [M_C \cos \theta - wR^2 (1 - \cos \theta)] (c \cos \theta) R d\theta \\ &+ m \int_0^{\theta} [M_C \sin \theta - wR^2 (\theta - \sin \theta)] (\sin \theta) R d\theta = 0 \end{aligned}$$



$$M_C \left( \frac{\theta}{2} \frac{(\theta + \sin \theta)}{4} \right) WR^2 \left( \sin \theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) + m \left[ M_C \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - m WR^2 \left( \sin \theta - \theta \cos \theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right] = 0$$

ทำให้ลงจะได้:

$$M_C = \frac{4(1+m) \sin \theta - (1-m) \sin 2\theta - 4m \theta \cos \theta - 2(1+m)\theta}{(1-m) \sin 2\theta + 2(1+m) \theta} WR^2 \dots\dots\dots(81)$$

สำหรับ  $M_A$  และ  $T_A$  จะเขียนได้ด้วยการแทนค่า  $M_C$  จากสมการ

(81) ลงในสมการ (77) โดยให้  $\theta = \theta$  :

$$M_A = \left[ \frac{4(1+m) \sin \theta - 4m \theta \cos \theta}{2(1+m)GI + (1-m) \sin 2\theta} \cos \theta - 1 \right] WR^2 \dots\dots\dots(82)$$

$$T_A = \left[ \frac{4(1+m) \sin \theta - 4m \theta \cos \theta}{2(1+m) \theta + (1-m) \sin 2\theta} \sin \theta - \theta \right] WR^2 \dots\dots\dots(83)$$

สูตรสำหรับโมเมนต์ ณ ตำแหน่งใด ๆ ระหว่างกึ่งกลางคานกับปลายคานเขียนได้ดังนี้

$$M = M_C \cos \theta - WR^2 (1 - \cos \theta) \dots\dots\dots(84)$$

$$T = M_C \sin \theta - WR^2 (\theta - \sin \theta) \dots\dots\dots(85)$$

ดิฟสมการ (85) ด้วย  $\theta$  ค่า  $Max = 0$  จะเขียนมุมกำกับตำแหน่งที่

torsional moment มีค่าสูงสุดได้ดังนี้:

$$\frac{dT}{d\theta} = \left[ \frac{4(1+m) \sin \theta - (1-m) \sin 2\theta - 4m \theta \cos \theta - 2(1+m) \theta}{(1-m) \sin 2\theta + 2(1+m) \theta} \cos \theta - (1 - \cos \theta) \right] WR^2 = 0$$

หรือ

$$\left[ 4(1+m) \sin \theta - 4m \theta \cos \theta \right] \cos \theta T - \left[ 2(1+m)\theta + (1-m) \sin 2\theta \right] = 0$$

ปรากฏว่า

$$\theta T = \cos^{-1} \frac{(1-m) \sin 2\theta + 2(1+m)\theta}{4(1+m) \sin \theta - 4m \theta \cos \theta} \dots\dots\dots(86)$$

แทนค่า  $\theta_T$  ลงในสมการ (85) จะเขียนสูตร Maximum torsional moment ได้:

$$T_{\max} = \left[ \frac{4(1+m)\sin\theta - 4m\theta\cos\theta}{(1-m)\sin 2\theta + 2(1+m)\theta} \sin \left[ \cos^{-1} \frac{(1+m)\sin 2\theta + 2(1+m)\theta}{4(1+m)\sin\theta - 4m\theta\cos\theta} \right] \right. \\ \left. - \cos^{-1} \frac{(1-m)\sin 2\theta + 2(1+m)\theta}{4(1+m)\sin\theta - 4m\theta\cos\theta} \right] wR^2 \dots\dots\dots (87)$$

มีค่า  $M_A$ ,  $M_c$ ,  $T_A$ ,  $\theta_T$ ; และ  $T_{\max}$  ที่มุม  $\theta$  ต่าง ๆ สามารถเขียนออกมาในรูปกราฟ ดังแสดงในภาคผนวก ข.

