บทที่ ๓
ทฤษฎีและสมมุติฐานที่ใช้ในการวิจัย

๓.๑ รูปไฮโดรกราฟน้ำหลากและส่วนประกอบ

รูปไฮโดรกราฟน้ำหลาก (flood hydrograph) เป็นรูปที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลของน้ำหลากตามเวลาที่ต่อเนื่องกันไป ซึ่งเป็นผลที่เกิดจากคุณลักษณะของลุ่มน้ำกับลำน้ำ และลักษณะของภูมิอากาศ ถ้ารูปไฮโดรกราฟเกิดจากพายุฝนที่มีอัตราฝนตกสม่ำเสมอเพียงลูกเดียวจะได้รูปที่มีความเบ้(skewness) ไปทางซ้ายและมีค่าน้ำหลากสูงสุดเพียงค่าเดียว แต่ถ้าเกิดจากพายุฝนหลายลูกหรือเพียงลูกเดียวแต่มีอัตราฝนตกไม่สม่ำเสมอ จะได้รูปที่มีค่าน้ำหลากสูงสุดหลายค่า (multiple peaks)ฯ ที่นี้จะกล่าวถึงรูปไฮโดรกราฟน้ำหลากที่เกิดจากพายุฝนที่มีอัตราฝนตกสม่ำเสมอเพียงอย่างเดียว (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๗ หน้าที่ ๒๙) ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น ๓ ช่วงคือ ช่วงเริ่ม (approach curve) ช่วงเพิ่ม (rising curve) และช่วงลด (recession curve) โดยรูปร่างในช่วงเพิ่มจะขึ้นอยู่กับช่วงเวลาฝนตก อัตราฝนตก ลักษณะการกระจายของฝนที่ตก และรูปร่างของลุ่มน้ำ ตามปกตินำ้หลากสูงสุดจะเกิดขึ้นหลังจากที่ฝนหยุดตกเป็นระยะเวลาหนึ่งที่แน่นอน ซึ่งระยะเวลานี้จะขึ้นอยู่กับลักษณะการกระจายของฝนที่ตก แต่อย่างไรก็ตามน้ำหลากของรูปไฮโดรกราฟยังประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ตามแหล่งที่มาดังต่อไปนี้ (ดูรายละเอียดประกอบในรูป ๘ หน้าที่ ๓๐)

๓.๑.๑ น้ำหลากส่วนที่ได้จากการไหลบนพื้นผิวดิน (surface runoff) จะมีปริมาณขึ้นกับประเภทของผิวดิน ถ้าผิวดินเป็นดินประเภทยอมให้ซึมผ่านได้ง่ายขึ้น จะได้ปริมาณน้ำหลากที่ได้จากการไหลบนผิวดินจำนวนลดลงตามลำดับ

๓.๑.๒ น้ำหลากส่วนที่ได้จากการไหลในดินชั้นแรกไปแนวข้าง ทันทีที่น้ำฝนไหลซึมผ่านมาอยู่ใต้ผิวดินโดยไหลออกไปบรรจบที่ร่องน้ำ (interflow)

๓.๑.๓ น้ำหลากส่วนที่ได้จากน้ำใต้ดิน (ground water) ซึ่งเกิดจากน้ำฝนบางส่วนไหลซึมลงไปในดินด้วยแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational water) จนถึงชั้นของดินที่อิ่มน้ำใต้ระดับน้ำใต้ดิน แล้วไหลไปทางแนวข้างออกไปสู่ร่องน้ำ แต่อย่างไรก็ตามน้ำใต้ดินสามารถแบ่งออกตามแหล่งเกิดเป็น ๒ ส่วนคือ ส่วนที่เกิดไกลจากฝั่งร่องน้ำ และส่วนที่เกิดริมฝั่งร่องน้ำ ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้ (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๙ และ ๑๐ หน้าที่ ๓๐)

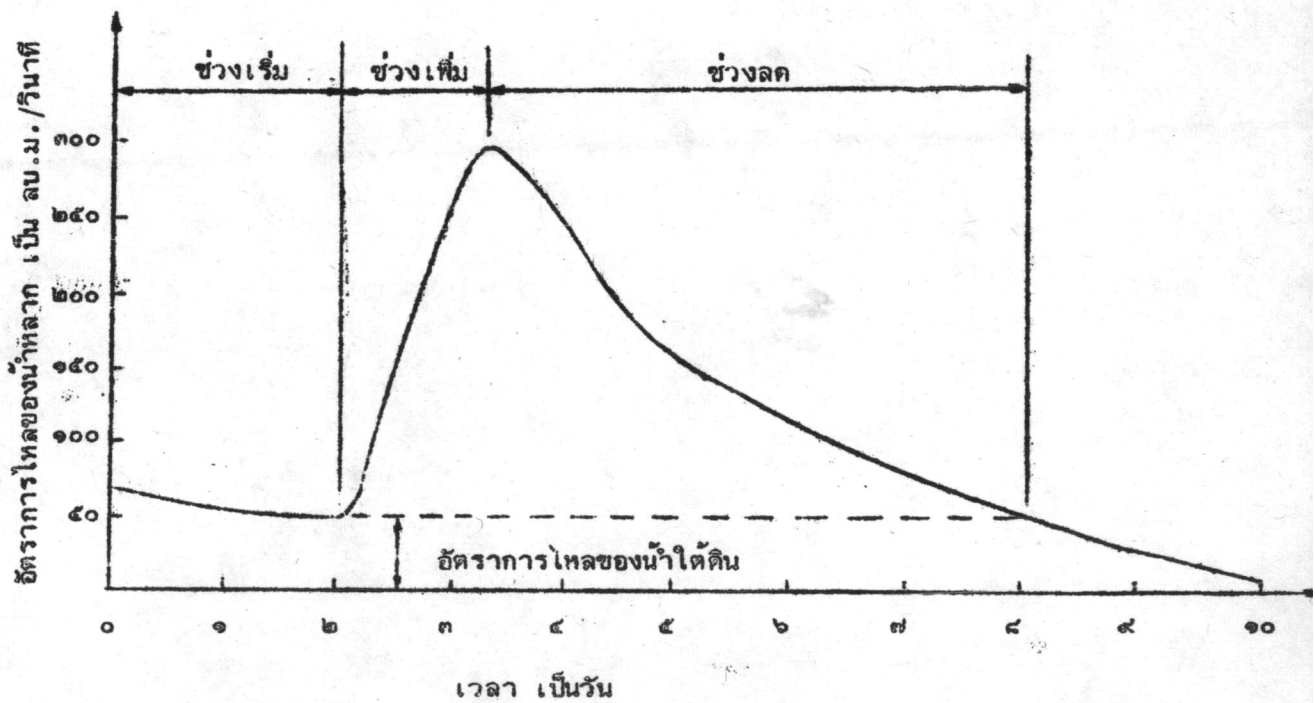
(ก) น้ำใต้ดินส่วนที่เกิดไกลจากฝั่งร่องน้ำ

น้ำใต้ดินส่วนนี้เกิดมาจากน้ำฝนบางส่วนไหลซึมลงไปในดินด้วยแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitional water) จนถึงชั้นของดินที่อิ่มน้ำใต้ระดับน้ำใต้ดิน แล้วไหลไปทางแนวข้างออกไปสู่ร่องน้ำค่อนข้างช้าเมื่อเทียบกับการไหลของน้ำหลากในข้อ ๓.๑.๑ และ ๓.๑.๒ ส่วนปริมาณน้ำใต้ดินส่วนนี้จะขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของฝนที่ตก ประเภทของดิน และคุณลักษณะของลุ่มน้ำ

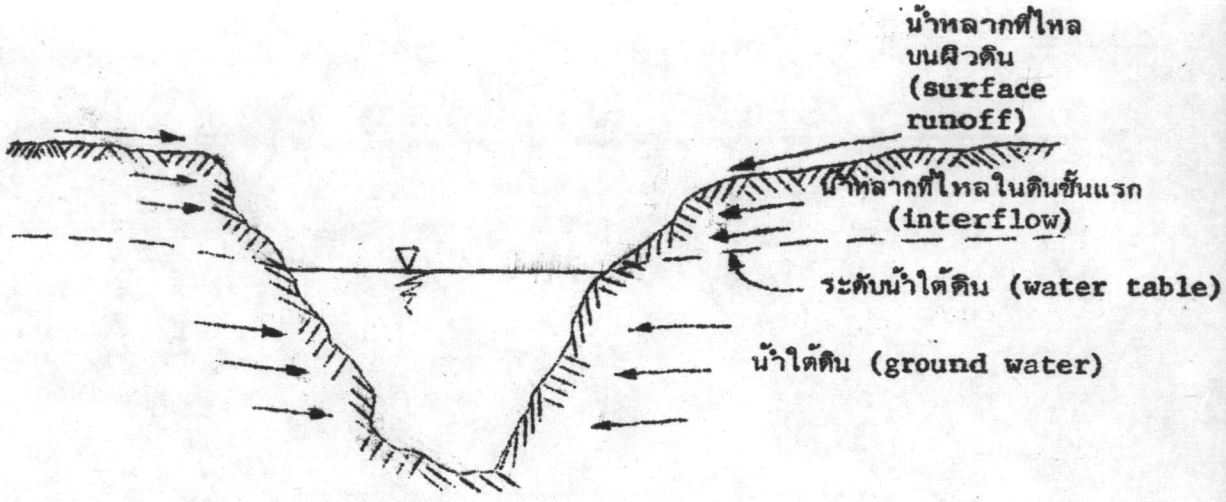
(ข) น้ำใต้ดินส่วนที่เกิดริมฝั่งร่องน้ำ

น้ำใต้ดินส่วนนี้เกิดมาจาก ในขณะที่ระดับน้ำในร่องน้ำขึ้นสูง ดังนั้นจะเกิดน้ำบางส่วนไหลเข้าไปอยู่ในดินริมฝั่ง ต่อมาระดับน้ำเกิดลดลงจะทำให้น้ำส่วนที่ไหลเข้าไปอยู่ในดินริมฝั่งไหลออกมาสู่ร่องน้ำอย่างรวดเร็ว ซึ่งปริมาณนี้จะน้อยกว่าน้ำใต้ดินส่วนที่เกิดไกลจากฝั่งร่องน้ำ

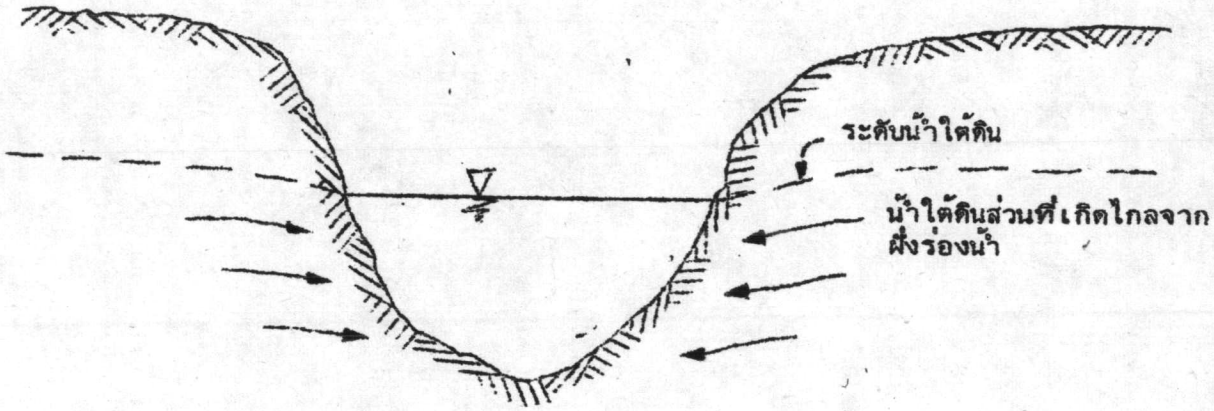
แต่อย่างไรก็ตามการหาอัตราการไหลของน้ำใต้ดินซึ่งมีวิธีมาตรฐานที่ขึ้นกับสมมุติฐานต่าง ๆ แต่ในการวิจัยลุ่มน้ำนี้จะใช้สมมุติฐานที่ยึดถือว่าดินที่อุ้มน้ำใต้ดินมีคุณสมบัติในการระบายน้ำออกไปได้ไม่เร็ว และอิทธิพลการอุ้มน้ำของฝั่งแม่น้ำมีส่วนทำให้ระดับน้ำในแม่น้ำสูงขึ้นหรือต่ำลงด้วย ดังนั้นวิธีหาอัตราการไหลของน้ำใต้ดินจึงถือว่าคงที่ตลอด (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๗ หน้าที่ ๒๙) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในทางปฏิบัติโดยทั่วไป



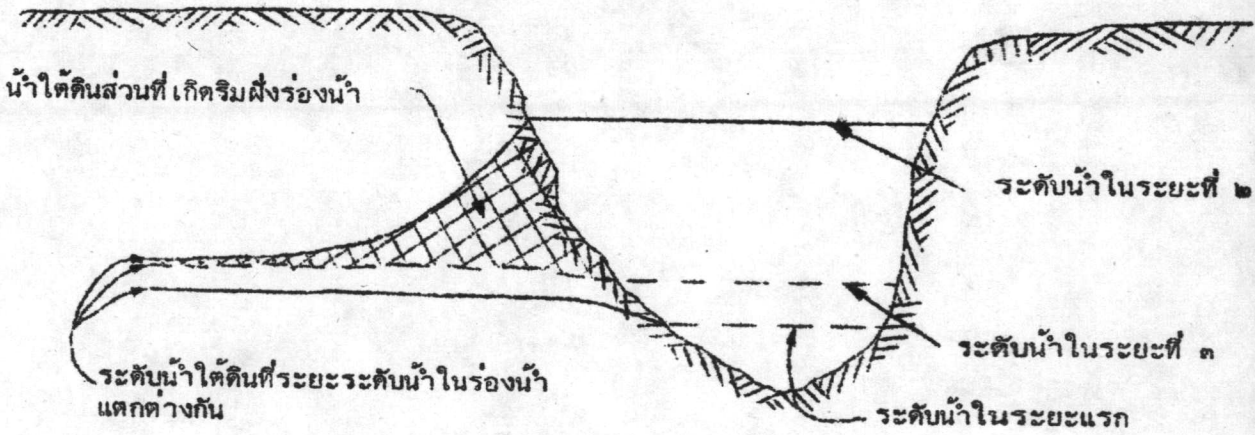
รูปที่ ๗ รายละเอียดส่วนประกอบรูปไฮโดรกราฟน้ำหลาก



รูปที่ ๘ ส่วนประกอบของน้ำหลากตามแหล่งที่มา



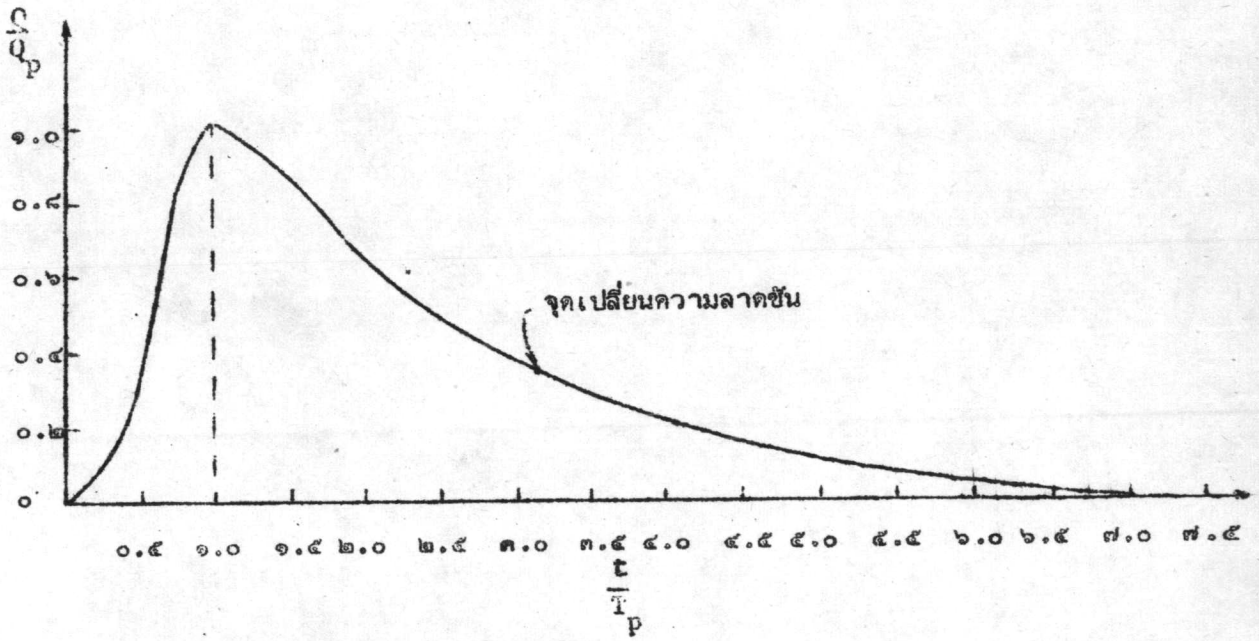
รูปที่ ๙ น้ำใต้ดินส่วนที่เกิดไกลจากฝั่งร่องน้ำ



รูปที่ ๑๐ น้ำใต้ดินส่วนที่เกิดริมฝั่งร่องน้ำ

๓.๒ รูปไฮโดรกราฟน้ำท่าไร้มิติ (dimensionless hydrograph)

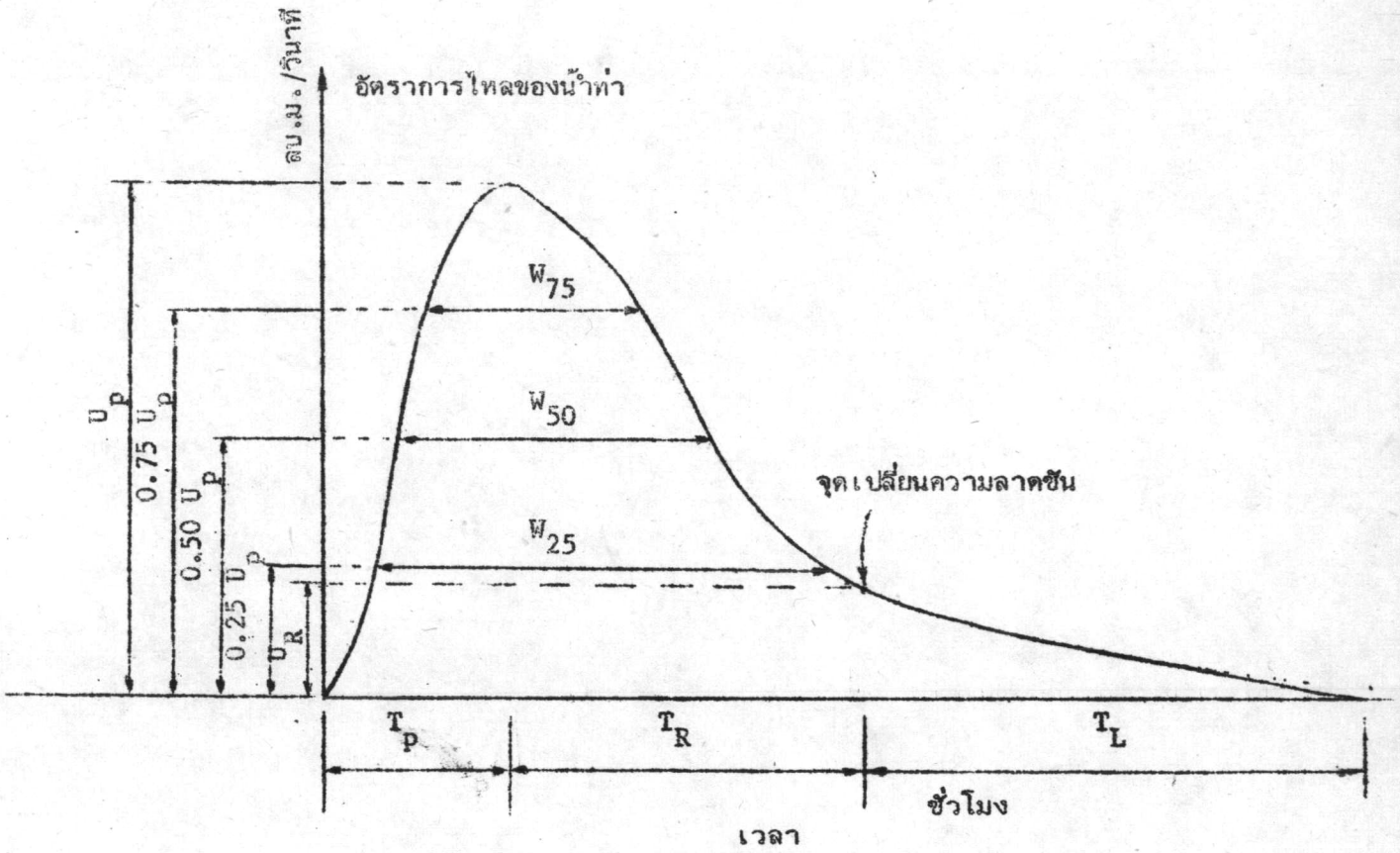
รูปไฮโดรกราฟน้ำท่าไร้มิติเป็นรูปซึ่งเกิดจากการแยกอัตราการไหลของน้ำใต้ดินออกจากรูปไฮโดรกราฟน้ำหลากที่เกิดจากพายุฝนที่มีอัตราฝนตกสม่ำเสมอ แล้วเปลี่ยนค่าของแกนตั้งและแกนนอนใหม่โดยหารด้วยค่าอัตราการไหลน้ำท่าสูงสุด (Qp) และระยะเวลาช่วงเพิ่ม (Tp) (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๑ หน้าที่ ๓๑) ตามลำดับ



รูปที่ ๑๑ รูปไฮโดรกราฟน้ำท่าไร้มิติ

๓.๓ รูปหน่วยไฮโดรกราฟ

รูปหน่วยไฮโดรกราฟเป็นรูปที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาการไหลกับอัตราการไหล โดยมีปริมาตรน้ำท่าเทียบเท่า ๑ หน่วยความสูง ซึ่งมีแนวความคิดสำคัญดังนี้ รูปไฮโดรกราฟน้ำท่าเป็นรูปที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาการไหลกับอัตราการไหล เวลาของการไหลจะไม่เปลี่ยนแปลง เพราะรูปร่างของลุ่มน้ำไม่เปลี่ยนแปลงขณะที่เกิดพายุฝน ดังนั้นพายุฝนแต่ละครั้งแม้จะแตกต่างกันก็จะให้รูปไฮโดรกราฟน้ำท่าบนฐานเวลาเดียวกัน แต่แตกต่างกันที่อัตราการไหลเท่านั้น ดังนั้นถ้าย่อส่วนรูปไฮโดรกราฟน้ำท่าลงมาให้เหลือปริมาตรน้ำท่าเทียบเท่า ๑ หน่วยความสูง จะได้รูปหน่วยไฮโดรกราฟซึ่งมีองค์ประกอบที่สำคัญ (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๒ หน้าที่ ๓๒) คือ T_p T_R T_L W_{25} W_{50} W_{75} U_p และ U_R นอกจากนี้ยังเชื่อว่าค่าเหล่านี้มีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบที่สำคัญของลุ่มน้ำและลำน้ำ อยู่ในรูปสูตรดังต่อไปนี้



รูปที่ ๑๒ องค์ประกอบที่สำคัญของรูปหน่วยไฮโดรกราฟ

$$T_p = K_1 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_1} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$T_R = K_2 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_2} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$T_L = K_3 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_3} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$W_{25} = K_4 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_4} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$W_{50} = K_5 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_5} \quad \ldots\ldots (5)$$

$$W_{75} = K_6 \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_6} \quad \ldots\ldots (6)$$

$$U_p = K_7 A^{n_7} \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_8} \quad \ldots\ldots (7)$$

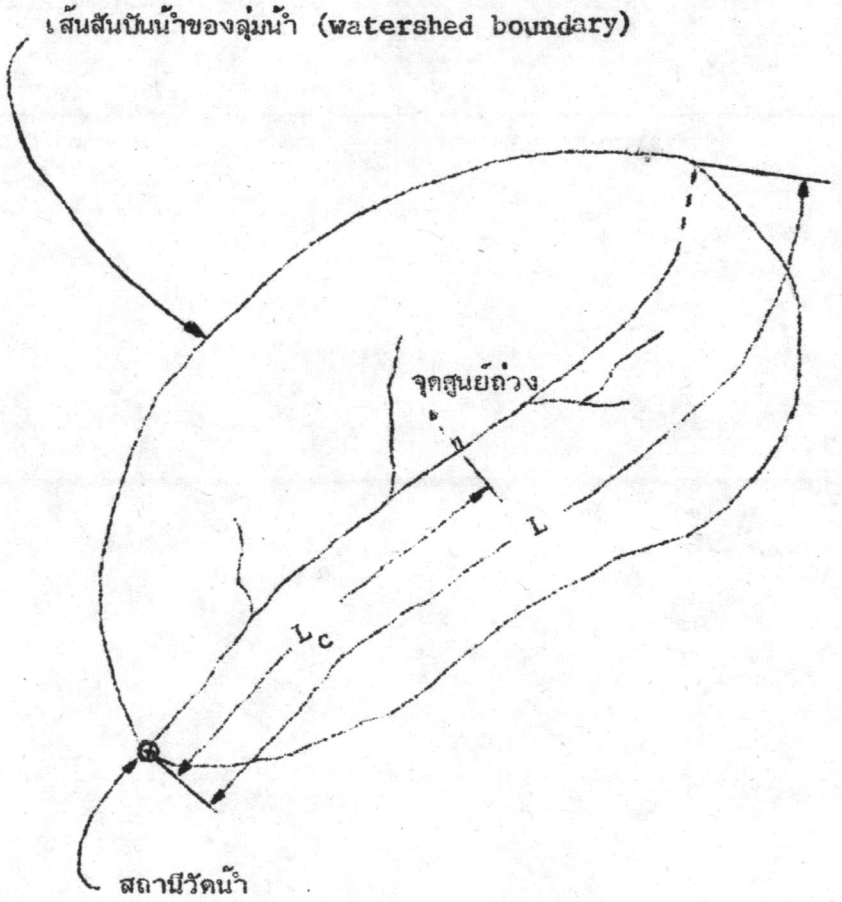
$$U_R = K_8 A^{n_9} \left(\frac{LLc}{\sqrt{S}}\right)^{n_{10}} \quad \ldots\ldots (8)$$

เมื่อ L คือ ความยาวของร่องน้ำที่ยาวที่สุด โดยลากต่อออกไปจรดเส้นสันปันน้ำของลุ่มน้ำ เป็น กิโลเมตร (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๓ หน้าที่ ๓๓)

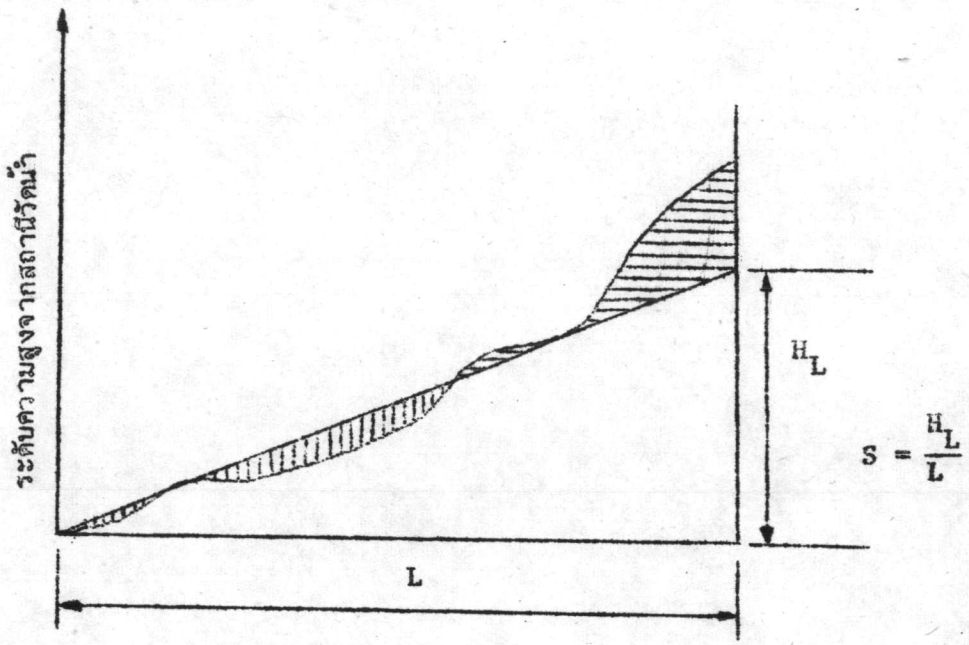
Lc คือ ความยาวลำน้ำถึงศูนย์ถ่วงของลุ่มน้ำ เป็น กิโลเมตร (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๓ หน้าที่ ๓๓)

S คือ ความลาดชันของร่องน้ำที่ยาวที่สุด คิดมาจากการหาค่าเฉลี่ยตลอดความยาวของร่องน้ำที่ยาวที่สุดโดยลากต่อออกไปจรดเส้นสันปันน้ำของลุ่มน้ำ (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๔ หน้าที่ ๓๔)

A คือ พื้นที่ของลุ่มน้ำ เป็น ตารางกิโลเมตร



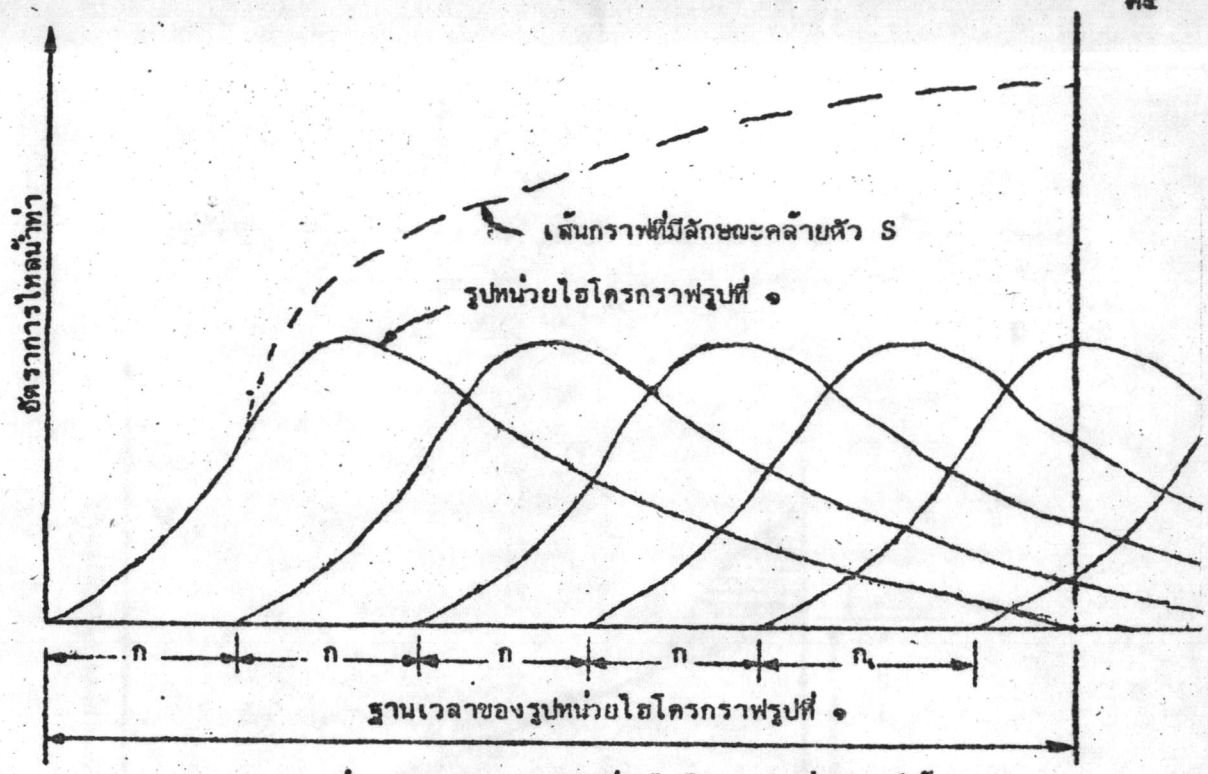
รูปที่ ๑๓ แสดงองค์ประกอบสำคัญของลุ่มน้ำและลำน้ำ



รูปที่ ๑๔ การหาค่าความลาดชันของร่องน้ำที่ยาวที่สุด

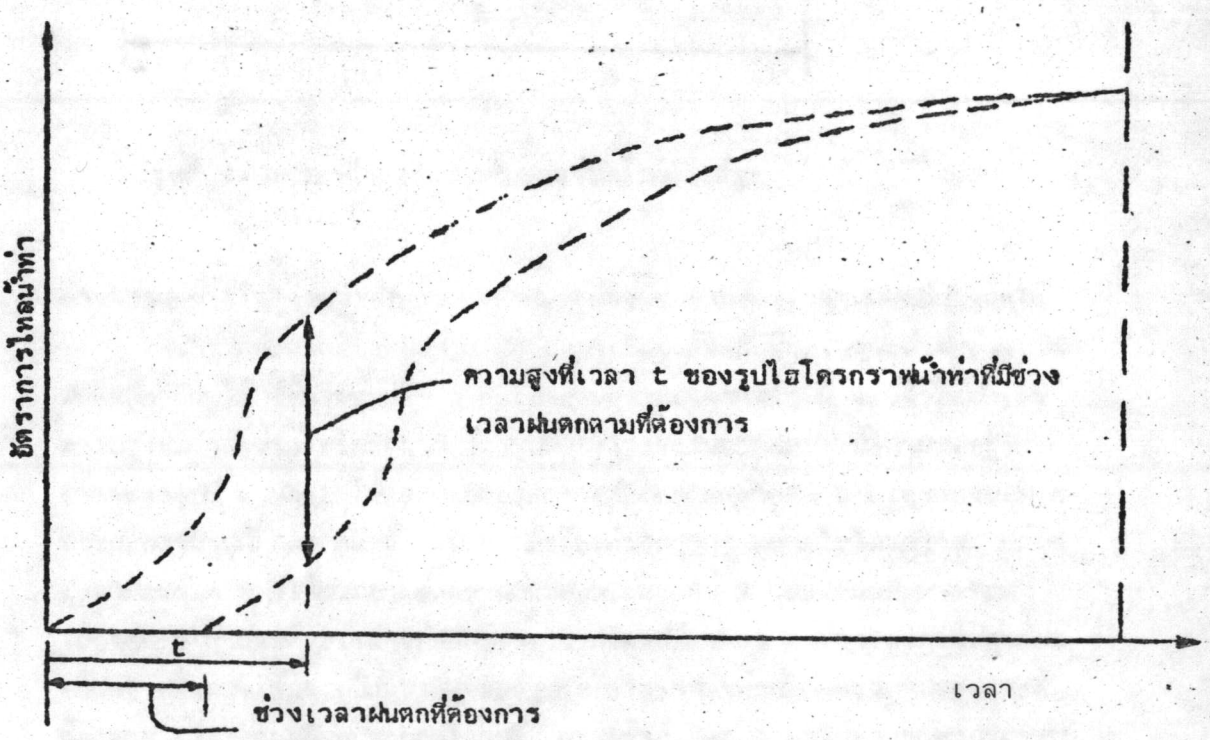
๓.๔ การหารูปหน่วยไฮโดรกราฟในช่วงเวลาฝนตกต่าง ๆ จากช่วงเวลาฝนตกที่กำหนดให้

ให้นำรูปหน่วยไฮโดรกราฟรูปเดียวกันมาเรียงเยื้องกันด้วยเวลาเท่ากับช่วงเวลาฝนตกที่กำหนดให้ ให้ทำเช่นนี้ซ้ำ ๆ กันไปจนหมดฐานเวลาของรูปที่ ๑ แล้วให้นำเอาความสูงของรูปหน่วยไฮโดรกราฟแต่ละรูปที่มีเวลาตรงกันบวกกันเช่นนี้ไปจนหมดฐานเวลาของรูปที่ ๑ นำเอาไปแสดงเป็นเส้นกราฟที่มีลักษณะคล้ายตัว S (ดูรายละเอียดประกอบตามรูปที่ ๑๕ หน้าที่ ๓๕) เมื่อต้องการทราบรูปหน่วยไฮโดรกราฟตามช่วงเวลาฝนตกใด ๆ ก็ให้นำเอาเส้นกราฟที่มีลักษณะคล้ายตัว S เส้นเดียวกันมาเรียงเยื้องกันกับเส้นแรกด้วยเวลาเท่ากับช่วงเวลาฝนตกที่ต้องการ ผลต่างของความสูงของเส้นกราฟทั้งสองเส้นจะเป็นความสูงของรูปไฮโดรกราฟน้ำท่าที่มีช่วงเวลาฝนตกตามที่ต้องการ (ดูรายละเอียดประกอบในรูปที่ ๑๖ หน้าที่ ๓๕) นำไปคำนวณหาปริมาตรน้ำท่าแล้วหารด้วยพื้นที่ของลุ่มน้ำ ผลที่ได้คือปริมาณน้ำท่า และให้นำเอาค่านี้ไปหารค่าความสูงของรูปไฮโดรกราฟน้ำท่าที่มีช่วงเวลาฝนตกตามที่ต้องการ จะได้รูปหน่วยไฮโดรกราฟที่มีช่วงเวลาฝนตกตามที่ต้องการ



n = ช่วงเวลาฝนตกของรูปหน่วยไฮโดรกราฟที่กำหนดให้

รูปที่ ๑๕ การหาเส้นกราฟที่มีลักษณะคล้ายตัว S



รูปที่ ๑๖ การหาความสูงของรูปไฮโดรกราฟน้ำท่าที่มีช่วงเวลาฝนตกตามที่ต้องการ

๓.๕ การคาดคะเนน้ำหลากสูงสุดในรอบปีต่าง ๆ

การหาค่าน้ำหลากสูงสุดในรอบปี T หาได้โดยวิธีวิเคราะห์ความถี่ของน้ำหลากสูงสุดรายปี ซึ่งมีวิธีทำอยู่หลายวิธีคือ Plotting-position Formula วิธีจากสูตรของ Gumbel การกระจายความถี่แบบ Pearson Type III และวิธีอื่น ๆ ซึ่งในการวิจัยนี้ใช้วิธีจากสูตรของ Gumbel ดังมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

L 378.7014 3

๓.๕.๑ สูตรของ Gumbel

$$T = \frac{1}{1 - e^{-e^{-b}}} \quad \ldots\ldots (9)$$

$$b = a(x_T - x_f) \quad \ldots\ldots (10)$$

$$x_f = \bar{x} - 0.45005\, S_x \quad \ldots\ldots (11)$$

$$a = \frac{1.28255}{S_x} \quad \ldots\ldots (12)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad \ldots\ldots (13)$$

จากสมการ (10) (11) และ (12) จะได้

$$b = \frac{1.28255}{S_x} (x_T - \bar{x} + 0.45005\, S_x) \quad \ldots\ldots (14)$$

จากสมการ (9) จะได้

$$b = -\ln\left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right] \quad \ldots\ldots (15)$$

ข้างขวามือของสมการ (14)= ข้างขวามือของสมการ (15)จะได้

$$x_T = \bar{x} - 0.45005\, S_x - \frac{S_x}{1.28255} \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right] \quad \ldots\ldots (16)$$

เมื่อ e คือ ฐานของ Napierian logarithm

a คือ พารามิเตอร์ของการกระจาย (dispersion parameter)ของ x_i

b คือ รีดิวส์แวเรียต (reduced variate)

x_i คือ ข้อมูลอัตราการไหลสูงสุดของน้ำหลากรายปีในปีที่ i

x_f คือ ค่าสูงสุดของการกระจายของ x_i

x_T คือ ค่าคาดคะเนของอัตราการไหลสูงสุดของน้ำหลากในรอบ T ปี

$\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยของ x_i ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

N คือ จำนวนปีของสถิติของน้ำหลากที่มีบันทึก

๓.๖ การหาค่าสัมประสิทธิ์ของน้ำท่า

เนื่องจากสภาพพื้นที่ของลุ่มน้ำมีความชื้นและการอุ้มน้ำแปรเปลี่ยนไปตามฤดูต่าง ๆ ดังนั้นปริมาณน้ำฝนเท่ากันที่ตกลงมาในลุ่มน้ำเดียวกันในแต่ละเดือนของฤดูต่าง ๆ จะให้ปริมาณน้ำท่าจำนวนไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงมีวิธีหาค่าปริมาณน้ำท่าจากค่าสัมประสิทธิ์ของน้ำท่าดังนี้

$$C_d = \frac{h_d}{h_p} \qquad \ldots\ldots (17)$$

เมื่อ C_d คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของน้ำท่า

h_d คือ ปริมาณน้ำท่า เป็น มิลลิเมตร

h_p คือ ปริมาณน้ำฝน เป็น มิลลิเมตร

๓.๗ การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ด้วย multiple linear regression

ถ้ามีตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กันอยู่จำนวน m ตัวแปร โดยมีตัวหนึ่งเป็นตัวแปรไม่อิสระซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรที่เหลือคือ (m-1) ตัว ดังนั้นเราสามารถเขียนเป็นสมการสำหรับ multiple linear regression ได้ดังนี้

$$x_1 = B_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + \ldots\ldots + B_mx_m \qquad \ldots\ldots (18)$$

เมื่อ B_1 คือ ค่าตัดแกน

B_j คือ ค่าสัมประสิทธิ์ multiple regression ประจำตัวแปรอิสระ x_j ของตัวแปรไม่อิสระ x_1 โดยค่า j เริ่มต้นจาก 2 ถึง m

แล้วใช้วิธี least-squares และให้ผลต่างค่า x_1' ที่วัดได้กับค่า x_1 ที่คำนวณจากสมการ (18) เท่ากับ Δ_1

$$\Delta_1 = x_1' - B_1 - B_2x_2 - B_3x_3 - \ldots\ldots - B_mx_m \qquad \ldots\ldots (19)$$

สมการ (19) ยกกำลังสอง แล้วแก้สมการหาค่า B_i โดยทำเป็นสมการพาเชียลดิฟเฟอร์เรนเชียล (partial differential equation) จำนวน m สมการ ผลที่ได้เป็นสมการเชิงเส้นจำนวน m สมการดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned}
B_2\Sigma(\Delta x_2)^2 + B_3\Sigma(\Delta x_2\Delta x_3) + \ldots + B_m\Sigma(\Delta x_2\Delta x_m) &= \Sigma(\Delta x_1\Delta x_2)\\
B_2\Sigma(\Delta x_2\Delta x_3) + B_3\Sigma(\Delta x_3)^2 + \ldots + B_m\Sigma(\Delta x_3\Delta x_m) &= \Sigma(\Delta x_1\Delta x_3)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\\
B_2\Sigma(\Delta x_2\Delta x_m) + B_3\Sigma(\Delta x_3\Delta x_m) + \ldots + B_m\Sigma(\Delta x_m)^2 &= \Sigma(\Delta x_1\Delta x_m)\\
B_1 = \bar{x}_1 - B_2\bar{x}_2 - B_3\bar{x}_3 - \ldots\ldots - B_m\bar{x}_m &
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

เมื่อ $$\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{N} x_i/N$$

$$\Delta x_i = \Sigma x_i - \bar{x}_i$$

$$\Sigma(\Delta x_i)^2 = \Sigma x_i^2 - N(\bar{x}_i)^2$$

$$\Sigma(\Delta x_i \Delta x_j) = \Sigma x_i x_j - N\bar{x}_i\bar{x}_j$$

โดย i มีค่าเริ่มตั้งแต่ 1 ถึง m และ N เป็นจำนวนของกลุ่มข้อมูลการหาความสัมพันธ์ของค่า x_1' ที่วัดได้ กับค่า x_1 ที่คำนวณจากสมการที่ (18) โดยแสดงออกมาเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์ (coefficient of multiple correlation) ดังนี้

$$R_1 = \frac{B_2\Sigma\Delta x_1\Delta x_2 + B_3\Sigma\Delta x_1\Delta x_3 + \ldots\ldots + B_m\Sigma\Delta x_1\Delta x_m}{\Sigma(\Delta x_1)^2} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

เมื่อ R_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์ (coefficient of multiple correlation) ระหว่าง x_1 กับตัวแปรอิสระ

โดย R_1 มีค่าอยู่ระหว่าง -1 กับ +1 ซึ่งมีรายละเอียดบ่งบอกถึงความสัมพันธ์ในกรณีที่ R_1 มีค่าต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$R_1 = 1$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยตรงแน่นอน

$0.6 < R_1 < 1$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยตรงค่อนข้างดี

$0 < R_1 < 0.6$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยตรงไม่ดี

$R_1 = 0$ แสดงว่าไม่มีความสัมพันธ์กัน

$-0.6 < R_1 < 0$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยผกผันที่ไม่ดี

$-1 < R_1 < -0.6$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยผกผันค่อนข้างดี

$R_1 = -1$ แสดงว่ามีความสัมพันธ์กันโดยผกผันแน่นอน

๓.๘ การประยุกต์สมการ multiple non-linear regression ให้อยู่ในรูปสมการ multiple linear regression

ในการวิจัยนี้จะพบว่ามีสมการที่จะวิเคราะห์หาความสัมพันธ์นั้นอยู่ในรูปสมการ multiple non-linear regression ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการ multiple linear regression เพื่อที่จะใช้วิธีในข้อ ๓.๗ วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ต่าง ๆ การเปลี่ยนแปลงนั้นสามารถทำได้ดังนี้

สมการ multiple non-linear regression จะมีรูปเป็น

$$Y_1 = K_1 Y_2^{n_2} Y_3^{n_3} \ldots\ldots\ldots Y_m^{n_m} \qquad \ldots\ldots (22)$$

ทำให้เป็นรูปสมการ multiple linear regression โดยการใส่ logarithm สมการ (22) ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$\log Y_1 = \log K_1 + n_2 \log Y_2 + n_3 \log Y_3 + ... + n_m \log Y_m .... (23)$$

ให้ $\log Y_1, \log Y_2, \log Y_3, ..., \log Y_m = x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ ตามลำดับ

และ $n_2, n_3, ..., n_m = B_2, B_3, ..., B_m$ ตามลำดับ

รวมทั้งให้ $\log K_1 = B_1$

ก็จะได้สมการที่ (23) อยู่ในรูปเดียวกับสมการ (18) ซึ่งเป็นสมการของ multiple linear regression