เมเซอร์ของวีเนอร์

นางสาว สุมา บรรณวณิชกุล

006006

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๑๙

i 18032436

ON THE WIENER MEASURE

Miss Suma Barnwanijakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1976

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science.

Kirid Prachuabmoh
.....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee Subha Sutchritpongsa ..... Chairman

Sawai Nualtaranee
.....

Sompom Seugsee
.....

Thesis Supervisor Asistant Professor Dr. Sawai Nualtaranee.

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : เมเซอร์ของวีเนอร์

ชื่อ : นางสาว สุมา บรรณวณิชกุล

แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : ๒๕๑๔

บทคัดย่อ

ให้ C แทนซเพซของฟังก์ชั่นต่อเนื่อง x ทั้งหลายที่นิยามจากช่วง $[0,1]$ ไปยังเซทของเลขจำนวนจริง โดยที่ $x(0) = 0$

จุดมุ่งหมายของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็คือ เพื่อแสดงถึงการสร้างเมเซอร์ของวีเนอร์ที่นิยามบนซเพซ C วิธีหนึ่ง นอกจากนี้เราจะแสดงถึงการเปลี่ยนไปของวีเนอร์อินทิกรัลภายใต้ทรานส์เลชั่น และหาสภาวะที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง ในตอนท้ายเราได้พิจารณาถึงคุณสมบัติบางประการของอินทิกรัลภายใต้สเกล่าทรานส์ ฟอร์เมชั่นอันหนึ่ง

Thesis Title : On the Wiener Measure.

Name : Miss Suma Barnwanijakul.

Department : Mathematics.

Academic Year : 1975.

ABSTRACT

Let C be the space of all real-valued continuous functions x defined on $[0,1]$ and vanish at 0.

The purpose of this thesis is to give a full treatment of a construction of the Wiener measure on the Wiener space C. We also show how the Wiener integral transforms under a translation and find a necessary and sufficient condition under which it is invariant. Finally, we consider a certain behaviour of the integral under a scalar multiplication.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to express her sincere gratitude to Dr. Sawai Nualtaranee, the author's thesis supervisor, for his valuable advice and suggestions during the preparation of this thesis. The author also wishes to express her gratitude to all lecturers at Chulalongkorn University for their previous lectures in the undergraduate and graduate courses.

TABLE OF CONTENTS

Page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH v

ACKNOWLEDGMENT vi

CHAPTER

0. INTRODUCTION 1

I. PRELIMINARIES 3

II. ON THE WIENER SPACE 19

III. CONSTRUCTION OF WIENER MEASURE 31

IV. THE WIENER INTEGRAL 63

V. TRANSFORMATIONS OF WIENER INTEGRALS UNDER TRANSLATIONS 75

VI. RELATION BETWEEN W_c AND W 98

REFERENCES 102

VITA 103

CHAPTER 0

INTRODUCTION

The original problem which Wiener posed himself was the following : Can one introduce in the space C of continuous functions x defined on $[0,1]$ and vanish at 0, a countably additive measure W such that the measure of the set of paths which at times $t_1,\dots,t_n$ $(0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1)$ pass through the " gates " $(\alpha_1, \beta_1),\dots,(\alpha_n, \beta_n)$ is such that

$$W\{\alpha_1 \leq x(t_1) \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq x(t_n) \leq \beta_n\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \dots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \exp\left\{\frac{-\xi_1^2}{t_1} - \dots - \frac{(\xi_n-\xi_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right\} d\xi_1 \dots d\xi_n .$$

In this thesis we call such set of paths an interval in C. The structure in this thesis is the followings :

In chapter I we recall, without proof, some notions and facts from measure and integration theory, particularly for Lebesgue, sufficiently for use in this thesis.

In chapter II we deal with quasi-intervals in C which are the generalization of intervals and then prove that the two collections $\mathcal{J}^0$ and $\mathcal{J}$ of intervals and quasi-intervals in C are respectively, semi-algebra and algebra of subsets of C.

In chapter III we define, for each positive constant c, a set function on $\mathcal{S}$ and then prove that this set function is indeed the measure.

In chapter IV we show that even though we have two algebras on C, according to Carathéodory for each positive constant c there is only one measure which defines on the σ-algebra of C. We also define the Wiener Integral Theorem in this chapter.

In chapter V we prove the translation theorem for Wiener measurable sets and Wiener integrals of arbitrary measurable functionals. We also consider a necessary and sufficient condition under which the integral is invariant.

Finally in chapter VI, we consider a certain behaviour of the Wiener integral under the scalar multiplication $y \longmapsto y/\sqrt{c}$, $c > 0$.

A symbol such as (m.n), where m and n are integers, refers to the equation n in chapter m.

It is hoped that this study will be enough to provide tools for further studies in the evaluation of various Wiener integrals by others who feel interested in this area.