บทที่ 3

การวิเคราะห์โครงสร้างเวียเรนดีล

3.1 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีการกระจายโมเมนต์ (Moment Distribution)

3.1.1 การวิเคราะห์หาค่าแรงต่าง ๆ ในส่วนของโครงสร้าง

หลักการวิเคราะห์โครงสร้างเวียเรนดีลที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ใช้ได้กับโครงสร้างเวียเรนดีลที่มีคอร์ดบนและคอร์ดล่างขนานกัน ซึ่งจะเป็นผลให้แกนสมมาตรทับเส้นกึ่งกลางความสูงดังที่แสดงในรูป 3.1.1 การรับน้ำหนักบรรทุกของโครงสร้างจะรับน้ำหนักบรรทุกที่จุดต่อของโครงสร้าง ภายใต้ข้อกำหนดดังกล่าว โครงสร้างเวียเรนดีลที่จะวิเคราะห์สามารถจำลองให้เป็นแบบโครงสร้างเปิด (Open frame) ได้ดังรูปที่ 3.1.2

โดยการพิจารณาส่วนของโครงสร้าง (flexural member) AB ที่รับน้ำหนักบรรทุกภายนอก และมีโมเมนต์ M_{AB} และ M_{BA} กระทำที่ปลาย โดยมีแรงเฉือน V ที่ปลายทั้งสองดังที่แสดงในรูปที่ 3.1.3a จากความสมดุลย์เป็นผลให้แรงเฉือน V กระทำเหมือนน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่ทราบค่า ค่าของแรงและการเปลี่ยนรูปของส่วนโครงสร้างนี้สามารถหาได้โดยการรวมผลการกระทำของน้ำหนักบรรทุกในสามกรณี ดังที่แสดงในรูป 3.1.3b, 3.1.3c และ 3.1.3d จากการรวมผลดังกล่าวจะได้ค่าโมเมนต์ M_{AB} และ M_{BA} อยู่ในรูปของสมการแสดงความสัมพันธ์ความลาดและแรงเฉือน (slope-shear equations)

$$M_{AB} = \frac{EI\theta_A}{L} - \frac{EI\theta_B}{L} - \frac{VL}{2} \qquad \text{-----------------} \; 3.1.1$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2}\left(M'_{AB} - M'_{BA} - VL\right) \qquad \text{-----------------} \; 3.1.1a$$

โดยที่ $M'_{AB} = 2EI\theta_A/L$ และ $M'_{BA} = 2EI\theta_B/L$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$M_{BA} = \frac{1}{2}(M'_{BA} - M'_{AB} - VL) \quad \text{------------------} \quad 3.1.1b$$

พิจารณารูปที่ 3.1.4 ซึ่งแสดงส่วนหนึ่งของโครงสร้างเปิดที่จุดต่อ i-1 i และ i+1 ความสมดุลย์ของโมเมนต์ที่จุดต่อ i เขียนได้เป็น

$$M_{i,i-1} + M_{i,i'} + M_{i,i+1} = 0 \quad \text{------------------} \quad 3.1.2$$

ในสมการที่ 3.1.2 นี้เมื่อแทนค่า $M_{i,i+1}$ และ $M_{i,i+1}$ ให้อยู่ในรูปของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความลาดและแรงเฉือนโดยอาศัยลักษณะความสัมพันธ์ทำนองเดียวกับสมการที่ 3.1.1a และ 3.1.1b แทนค่า $M_{i,i'} = 6E\theta_i \frac{I}{h} = \frac{6}{2} M'_{i,i'}$ (คือการเปลี่ยนโมเมนต์ $M_{i,i'}$ ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของการหมุน θ_i ที่จุด i) จะได้สมการ 3.1.2 ใหม่ดังนี้คือ

$$\frac{2EI\theta_i}{L_{i,i-1}} + \frac{12EI\theta_i}{h_{i,i'}} + \frac{2EI\theta_i}{L_{i,i+1}} = V_{i,i-1} L_{i,i-1} + V_{i,i+1} L_{i,i+1} + M'_{i-1,i} + M'_{i+1,i} \quad \text{-------------} \quad 3.1.3$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$M'_{i,i-1} = \bar{\mu}_{i,i-1}\left[MF_i + M'_{i-1,i} + M'_{i+1,i}\right] \quad \text{-----------} \quad 3.1.4a$$

โดยที่ $K_{i,i-1} = I_{i,i-1}/L_{i,i-1}$

$K_{i,i+1} = I_{i,i+1}/L_{i,i+1}$

$K_{i,i'} = I_{i,i'}/h_{i,i'}$

$$\mu_{i,i-1} = \frac{K_{i,i-1}}{K_{i,i-1}+6K_{i,i'}+K_{i,i+1}}$$

$$\mu_{i,i+1} = \frac{K_{i,i+1}}{K_{i,i-1}+6K_{i,i'}+K_{i,i+1}}$$

$$MF_i = V_{i,i-1}L_{i,i-1}+V_{i,i+1}L_{i,i+1}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$M'_{i,i+1} = \mu_{i,i+1}\left[MF_i+M'_{i-1,i}+M'_{i+1,i}\right] \quad \text{------------- 3.1.4b}$$

ดังนั้น M' คือค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนส่วนของโครงสร้างเมื่อจุดต่อของโครงสร้างมีการหมุน (The rotation contribution)

จากรูป 3.1.5 ค่าโมเมนต์ $M'_{i,i-1}$ ของส่วนของโครงสร้าง i,i-1 เกิดจากผลรวมของโมเมนต์ $(M'_{i,i-1})_I$ ในรูปที่ 3.1.5a และโมเมนต์ $(M'_{i,i-1})_{II}$ ในรูปที่ 3.1.5b โดยที่ $(M'_{i,i-1})_I$ คือค่าโมเมนต์จากการหมุนของส่วนโครงสร้าง i,i-1 เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกและจุดต่อ i+1 เป็นแบบข้อยึด $(M'_{i,i-1})_{II}$ คือ ค่าโมเมนต์จากการหมุนของส่วนโครงสร้าง i,i-1 เมื่อจุดต่อ i+1 หมุนแล้วได้โมเมนต์ของส่วนของโครงสร้าง i,i+1 มีค่าเท่ากับ $M'_{i+1,i}$ โดยที่ไม่มีน้ำหนักบรรทุก กรณีทั้งสาม คือจากรูป 3.1.5a, 3.1.5b,3.1.5c สามารถสรุปค่าโมเมนต์ M' ได้ดังนี้

$$M' = (M')_I + (M')_{II} \quad \text{---------------- 3.1.5}$$

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.1.2 โดยสมการที่ 3.1.4a และ 3.1.4b จะได้ว่า

$$M'_{0,1} = \mu_{0,1}\left[MF_0+M'_{1,0}\right] \quad \text{---------------- 3.1.6}$$

$$= (M'_{0,1})_I+\mu_{0,1}M'_{1,0} \quad \text{---------------- 3.1.7}$$

โดยที่ $\mu_{0,1}MF_0 = (M'_{0,1})_I$

โดยการแทนค่า $M'_{0,1}$ ลงในสมการที่ 3.1.4a และ 3.1.4b และจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$M'_{1,0} = \mu'_{1,0}\left[MF_1 + (M'_{0,1})_I + M'_{2,1}\right] \text{---------------} \quad 3.1.8$$

โดยที่ $\mu'_{1,0} = \mu_{1,0}/(1-\mu_{1,0}\mu_{0,1})$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$M'_{1,2} = \mu'_{1,2}\left[MF_1 + (M'_{0,1})_I + M'_{2,1}\right] \text{---------------} \quad 3.1.9$$

เมื่อพิจารณาขั้นตอนดังเช่นสมการ 3.1.6 ถึง 3.1.9 สามารถสรุปเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$M'_{i,i-1} = \mu'_{i,i-1}\left[MF_i + (M'_{i-1,i})_I + M'_{i+1,i}\right] \text{------} \quad 3.1.10a$$

และ $$M'_{i,i+1} = \mu'_{i,i+1}\left[MF_i + (M'_{i-1,i})_I + M'_{i+1,i}\right] \text{------} \quad 3.1.10b$$

โดยที่ $$\mu'_{i,i-1} = \frac{\mu_{i,i-1}}{1-\mu_{i,i-1}\mu'_{i-1,i}} \text{---------------} \quad 3.1.11a$$

และ $$\mu'_{i,i+1} = \frac{\mu_{i,i+1}}{1-\mu_{i,i-1}\mu'_{i-1,i}} \text{---------------} \quad 3.1.11b$$

ค่าของ μ' ตามสมการ 3.1.11a และ 3.1.11b จะช่วยให้การกระจายโมเมนต์ที่จุดต่อเพื่อหาค่าโมเมนต์สมดุลย์ในส่วนของโครงสร้างเรียเรนดีลสะดวกรวดเร็วขึ้น

ขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าโมเมนต์ในส่วนของโครงสร้างกระทำดังนี้

1. หาค่าแฟคเตอร์ของการกระจาย $\mu'_{i,i-1}$ และ $\mu'_{i,i+1}$ โดยเริ่มจากจุดต่อทางซ้ายมือสุดของโครงสร้างไปที่จุดต่อทางขวามือสุดของโครงสร้าง

2. หาค่าโมเมนต์เนื่องจากแรงกระทำภายนอกที่ปลายยึด (fixed end moment) บนส่วนของโครงสร้างดังที่แสดงในรูปที่ 3.1.6

3. กระจายโมเมนต์โดยแฟคเตอร์การกระจายที่หาได้จากข้อที่ 1 โดยตั้งต้นที่จุดต่อทางซ้ายสุดของโครงสร้างไปทางขวามือสุดของโครงสร้างก็เป็นการสิ้นสุดของการกระจายโมเมนต์ในรอบที่ 1

4. กระจายโมเมนต์ที่ไม่สมดุลย์จากจุดต่อทางขวามือสุดกลับมาที่จุดต่อทางซ้ายมือสุด ก็เป็นการสิ้นสุดของการกระจายโมเมนต์ในรอบที่ 2 ในการกระจายโมเมนต์ทั้งสองรอบให้ใช้ค่าแฟคเตอร์ของการส่งถ่ายโมเมนต์ (carry over factor) = - 1 (cantileves carry-over factor)

5. หาค่าโมเมนต์ของส่วนของโครงสร้างต่าง ๆ ได้จากผลรวมของการกระจายทั้งสองรอบและค่าโมเมนต์ปลายยึดจากข้อที่ 2

การพิสูจน์ว่าค่าโมเมนต์ ในส่วนของโครงสร้างที่ได้ตามข้อที่ 5 นี้เป็นโมเมนต์สมดุลย์ของโครงสร้างแสดงได้ดังนี้

จากรูปที่ 3.1.4 ในรอบแรกของการกระจายโมเมนต์ในส่วนของโครงสร้าง i,i+1 จะได้ค่าดังนี้

ก. จากจุดต่อ i-1 การส่งถ่ายโมเมนต์ (carry-over moment) มาที่จุด i และผลรวมจาก MF_i (ซึ่งค่า MF_i ในที่นี้มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ MF_i ในสูตรที่กล่าวมาแล้ว) คูณค่า $\mu'_{i,i+1}$ มีค่า

$$= \frac{\mu'_{i,i+1}}{2}\left[MF_i + (M'_{i-1,i})_I\right] = \frac{1}{2}(M'_{i,i+1})_I \quad \text{--------} \quad 3.1.12$$

ข. การส่งถ่ายโมเมนต์จากจุดต่อ i+1 มาที่จุดต่อ i มีค่า

$$= -\frac{\mu'_{i+1,i}}{2}\left[MF_{i+1} + (M'_{i,i+1})_I\right] = -\frac{1}{2}(M'_{i+1,i})_I \text{ ------ } 3.1.13$$

ในการกระจายรอบที่สองจะได้ค่าต่าง ๆ ในส่วนของโครงสร้าง i,i+1 ดังนี้

ก. การส่งถ่ายโมเมนต์ที่ไม่สมดุลย์ที่จุดต่อ i+1 มาที่จุดต่อ i มีค่า

$$= -\frac{\mu'_{i+1,i}}{2}\left[M'_{i+2,i+1}\right] \text{ ---------------- } 3.1.14$$

ข. การกระจายโมเมนต์ที่ไม่สมดุลย์ที่จุดต่อ i ให้ส่วนของโครงสร้าง i,i+1 มีค่า

$$= \frac{\mu'_{i,i+1}}{2}\left[(M'_{i+1,i})_I + \mu'_{i+1,i}M'_{i+2,i+1}\right]$$

$$= \frac{\mu'_{i,i+1}}{2}(M'_{i+1,i}) \text{ ---------------- } 3.1.15$$

จากแรงกระทำภายนอกทำให้ส่วนของโครงสร้าง i,i+1 มีแรงเฉือน V กระทำในทิศทางตามรูปที่ 3.1.3 และความยาวของส่วนของโครงสร้างเท่ากับ L

โมเมนต์ที่ปลายยึดมีค่า $= -\frac{VL}{2}$ ---------------- 3.1.16

ดังนั้นโมเมนต์สมดุลย์ ($M_{i,i+1}$) ของส่วนของโครงสร้าง i,i+1 มีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนต์จากสมการที่ 3.1.12 ถึงสมการที่ 3.1.16

$$= -\frac{VL}{2} + \frac{1}{2}(M'_{i,i+1})_I - \frac{1}{2}(M'_{i+1,i})_I - \frac{\mu'_{i+1,i}}{2}M'_{i+2,i+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\mu'_{i,i+1}(M'_{i+1,i}) \text{ ---------------- } 3.1.17$$

จัดรูปสมการ 3.1.17 ใหม่ได้เป็น

$$M_{i,i+1} = -\frac{VL}{2} + \frac{M'_{i,i+1}}{2} - \frac{M'_{i+1,i}}{2} \text{ ---------------- } 3.1.18$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 3.1.18 ซึ่งแสดงความสมดุลย์ของโมเมนต์ในส่วนของโครงสร้าง i,i+1 ก็จะเห็นได้ว่าเป็นสมการที่สอดคล้องกับสมการที่ 3.1.1a หรือ 3.1.1b นั่นเอง

3.1.2 การหาค่าระยะโก่งของจุดต่อ ของโครงสร้างที่มีคอร์ดบนและคอร์ดล่างขนานกัน

ระยะโก่งของจุดต่อของโครงสร้างหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างการหมุนที่ปลายของส่วนโครงสร้างกับโมเมนต์สมดุลย์ที่หาได้จากวิธีการข้างต้นดังนี้

จากรูป 3.1.7 ส่วนของโครงสร้าง i-1,i มีโมเมนต์สมดุลย์ $M_{i-1,i}$ และ $M_{i,i-1}$ กระทำที่ปลาย i-1 และปลาย i ตามลำดับ มุมของการหมุนที่ปลาย i-1 เท่ากับ $\theta_{i-1,i}$ และที่ปลาย i เท่ากับ $\theta_{i,i-1}$ ทำให้เกิดระยะโก่งที่ปลาย i เท่ากับ Δ_{io} ซึ่งเป็นค่าที่ต้องการหา

ระยะโก่ง Δ_{io} จากรูป 3.1.7a มีค่าเท่ากับผลรวมของระยะโก่งจากรูปที่ 3,1.7b, 3,1.7c และ 3.1.7d นั่นคือ

$$\Delta_{io} = \Delta'_{i,i-1} + \Delta''_{i,i-1} + \theta_{i-1,i}\ell + \frac{KV\ell}{AG} \quad \text{----------} \quad 3.1.19$$

ทิศทางของโมเมนต์ดัดและมุมของการหมุนที่ปลายของส่วนโครงสร้างและแรงเฉือนมีทิศทางตามรูปที่ 3.1.7a ให้มีค่าเป็นบวก

จากหลักการรวมสภาพสมดุลย์โดยตรง (Superimposed) จะได้ว่า

$$- M'_{i-1,i} - M''_{i-1,i} = M_{i-1,i} \quad \text{---------------} \quad 3.1.20a$$

$$- M'_{i,i-1} + M''_{i,i-1} = M_{i,i-1} \quad \text{---------------} \quad 3.1.20b$$

จากรูปที่ 3.1.7b และ 3.1.7c จะได้ว่า

$$M'_{i-1,i} = M'_{i,i-1} = -\frac{V\ell}{2} \qquad \text{------------------ 3.1.21a}$$

$$M''_{i-1,i} = M''_{i,i-1} \qquad \text{------------------ 3.1.21b}$$

แทนค่าโมเมนต์จากสมการที่ 3.1.21a และ 3.1.21b ลงในสมการ 3.1.20a และ 3.1.20b นั่นคือ

$$M'_{i-1,i} = M'_{i,i-1} = -\frac{M_{i-1,i} + M_{i,i-1}}{2} \qquad \text{-------------- 3.1.22a}$$

และ
$$M''_{i,i-1} = M''_{i-1,i} = \frac{M_{i,i-1} - M_{i-1,i}}{2} \qquad \text{-------------- 3.1.22b}$$

จากรูปที่ 3.1.7b และ 3.1.7c จะได้ระยะโก่งที่ปลาย i มีค่าคือ

$$\Delta'_{i,i-1} = \frac{M'_{i-1,i}\ell^2}{6EI} + \frac{KV\ell}{AG} \text{ และ } \Delta''_{i,i-1} = \frac{M''_{i,i-1}\ell^2}{2EI}$$

นั่นคือ

$$\Delta_{i,0} = \frac{M'_{i-1,i}\ell^2}{6EI} + \frac{M''_{i,i-1}\ell^2}{2EI} + \theta_{i-1,i}\ell + \frac{KV\ell}{AG} \qquad \text{----- 3.1.23}$$

จากรูป 3.1.7a จะได้มุมของการหมุนที่จุดต่อ i มีค่าเท่ากับ

$$\theta_{i,i-1} = \theta''_{i,i-1} + \theta_{i-1,i} = \frac{M''_{i,i-1}\ell}{EI} + \theta_{i-1,i} + \frac{KV}{AG}$$

เมื่อจุดต่อของโครงสร้างหมุนไปเท่าใดจะทำให้ปลายของส่วนโครางสร้างที่ต่ออยู่กับจุดต่อดังกล่าวหมุนไปเป็นมุมเท่ากัน นั่นคือ จากรูปที่ 3.1.8 จะได้ว่า

$$\theta_{i,i-1} = \theta_{i-1,i} + \frac{M''_{i,i-1}\ell}{EI} + \frac{KV}{AG} \qquad \text{------------------ 3.1.24}$$

$$= \theta_{i,i'} = \frac{M_{i,i'}h}{6EI} + \frac{KV}{AG} \qquad \text{-----------------} \quad 3.1.25$$

โดยที่ ℓ คือความยาวของส่วนโครงสร้างในแนวระดับและ h คือความสูงของส่วนโครงสร้างในแนวดิ่ง

ความต่อเนื่องของโครงสร้างตามรูปที่ 3.1.9 สามารถสรุประยะโก่งของจุดต่อใด ๆ ของโครงสร้างมีค่าเท่ากับ

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + \Delta_{i+1,0} \qquad \text{-----------------} \quad 3.1.26$$

โดยที่ Δ_i = ระยะโก่งจริงที่จุดต่อ i

$\Delta_{i+1,0}$ = ระยะโก่งที่จุดต่อ i+1 ของส่วนของโครงสร้าง i,i+1

ขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าระยะโก่งของจุดต่อของโครงสร้าง ดำเนินการดังนี้

1. เริ่มที่จุดต่อทางซ้ายมือสุดของโครงสร้าง โดยให้จุดต่อทางซ้ายมือสุดไม่มีระยะโก่งและมุมของการหมุนเท่ากับ $\theta_{0,0'}$

2. แทนค่าโมเมนต์ดัดที่ทราบค่าในสมการที่ 3.1.22a และ 3.1.22b

3. หาค่าระยะโก่ง $\Delta_{i,0}$ โดยสมการที่ 3.1.23 จากค่าที่หาโดยข้อที่ 2

4. แทนค่า $\Delta_{i,0}$ ในสมการที่ 3.1.26 แล้วกลับไปดำเนินการจากข้อที่ 1 ถึง 4 ไปจนกว่าถึงจุดต่อทางขวามือสุดของโครงสร้าง

5. ที่จุดต่อของโครงสร้างทางขวามือสุดระยะโก่งมีค่าเป็นศูนย์ หากระยะโก่งที่ดำเนินการดังกล่าวมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ให้ปรับปรุงค่าระยะโก่งดังนี้

สมมุติให้ระยะโก่งที่จุดต่อทางขวามือสุดที่ดำเนินการตามข้อ 1 ถึงข้อ 4 มีค่าระยะโก่งเท่ากับ Δ (สมมุติให้เป็นบวก)

ค่าระยะโก่งที่ปรับปรุงแล้วมีค่าเท่ากับ

$$= \Delta_i - \frac{\Delta X \text{ (ระยะจากจุดต่อซ้ายมือสุดถึงจุดต่อ i)}}{\text{ความยาวทั้งหมดของโครงสร้าง}} \quad \text{---------- 3.1.27}$$

3.2 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีพลังงานเสมือน (Virtual Work)

โครงสร้างเวียเรนดีลเป็นโครงสร้างที่มีดีกรีอินดีเทอร์มิเนทเท่ากับ 3n เมื่อ n คือจำนวนแพเนล (panel) ของโครงสร้าง

3.2.1 กรณีที่คอร์ดบนและคอร์ดล่างของโครงสร้างขนานกัน จึงกำหนดให้พฤติกรรมของระบบโครงสร้างหลักอยู่ในรูปของระบบโครงสร้างชนิด Three hinged frame ประกอบกันเข้าดังแสดงในรูปที่ 3.2.1 สำหรับแพแนลที่ i-1,i โดยมีโมเมนต์ไม่ทราบค่าที่จุดข้อต่อทั้งสามสำหรับแพแนลที่ i-1,i คือ

$M^{(T)}_{i,i-1}$ $M^{(B)}_{i,i-1}$ โมเมนต์กระทำที่จุด i ของส่วนโครงสร้าง i-1,i ของคอร์ดบนและล่าง

$M^{(V)}_{i-1}$ โมเมนต์กระทำที่จุดกึ่งกลางของส่วนโครงสร้างในแนวดิ่ง

ถ้าคอร์ดบนและคอร์ดล่างของโครงสร้างมีขนาดเท่ากัน เราจะได้แรงร่วมแกน (Normal forces) ระหว่างจุดต่อ i-1 และ i ของคอร์ดบนและคอร์ดล่าง (N_{iT} และ N_{iB} ตามลำดับ) ของโครงสร้างมีขนาดเท่ากันและมีค่าคงที่ จากผลดังกล่าวจะทำให้แรงเฉือนของส่วนโครงสร้างในแนวดิ่งมีค่าคงที่ นั่นคือ $M^{(V)}_{i-1}$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ และ

$$M^{(T)}_{i,i-1} = M^{(B)}_{i,i-1}$$

006304

จากรูป 3.2.2 ค่าโมเมนต์ M_i แรงร่วมแกน N_i และแรงเฉือน V_i สำหรับหนึ่งหน่วยของโมเมนต์ดัดสมมุติ $-X_i = 1$ กระทำที่จุดต่อ i ทั้งคอร์ดบนและคอร์ดล่างพร้อมกัน มีค่าเป็น

$$V^{(T)}_{i\,1} = V^{(B)}_{i\,1} = 0$$

$$N^{(V)}_{i-1,1} = N^{(V)}_{i\,1} = 0$$

$$V^{(V)}_{i-1,1} = V^{(V)}_{i,1} = -\frac{2}{h_i}$$

$$-N^{(T)}_{i1} = N^{(B)}_{i1} = \frac{2}{h_i} \qquad \text{------------} \quad 3.2.1$$

$$M_{i1} = V^{(V)}_{i1} \frac{h_i}{2}$$

ที่จุดต่อใด ๆ การหมุนที่ปลายของส่วนโครงสร้างแต่ละชิ้นที่ประกอบกันเข้าที่จุดต่อนั้นจะต้องเป็นไปตามสมการซึ่งแสดงความต่อเนื่อง ดังนี้

$$X_{i-1}\,\delta_{i,i-1} + X_i\,\delta_{i,i} + X_{i+1}\,\delta_{i,i+1} + \delta_{io} = 0 \qquad \text{------------} \quad 3.2.2$$

โดยที่ X_{i-1}, X_i และ X_{i+1} คือ โมเมนต์ดัดของส่วนโครงสร้าง i-1,i-2 i,i-1 และ i+1,i ที่ต้องการทราบค่าตามลำดับ

$\delta_{i,i-1}$ $\delta_{i,i}$ และ $\delta_{i,i+1}$ คือ มุมที่หมุนไปของจุดต่อข้อหมุน i จากโมเมนต์หนึ่งหน่วยกระทำที่จุดต่อข้อหมุน i-1 i และ i+1 ตามลำดับ

δ_{io} คือ ค่ามุมที่หมุนไปของจุดต่อ i เมื่อมีน้ำหนักกระทำ (ดูรูป 3.2.4)

มุมของการหมุนไปจากเดิมของจุดต่อชนิดข้อหมุนของระบบโครงสร้าง (principal system) Three hinged frame เมื่อมีหนึ่งหน่วยของโมเมนต์สมมุติ ($X_{i-1} = 1$, $X_i = 1$, $X_{i+1} = 1$) กระทำสามารถเขียนในรูปสมการ Virtual Work ได้เป็น[7] (เมื่อค่าโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของคอร์ดบนและล่าง (I_{iT} และ I_{iB}) มีค่าแตกต่างกันในการคำนวณให้ใช้ค่าเฉลี่ยของโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของคอร์ดทั้งสองเป็น $I_{iC} = (I_{iT} + I_{iB})/2$)

$$EI_C\,\delta_{i,i-1} = \Sigma\int_o^s M_i M_{i-1}\frac{I_c}{I_s}\,ds + \Sigma\frac{I_c}{A_s}\int_o^s N_i N_{i-1}\frac{A_c}{A_s}\,ds$$

$$+ \Sigma K\frac{EI_c}{GA_c}\int_o^s V_i V_{i-1}\frac{A_c}{A_s}\,ds$$

$$= -\frac{1}{3}\left(h'_{i-1} + 12\frac{\nu_{i-1}}{h_i}\right) \qquad \text{---------------- } 3.2.3a$$

$$EI_C\,\delta_{i,i} = \Sigma\int_o^s M_i^2\frac{I_c}{I_s}\,ds + \Sigma\frac{I_c}{A_c}\int_o^s N_i^2\frac{A_c}{A_s}\,ds + \Sigma K\frac{EI_c}{GA_c}\int_o^s V_i^2\frac{A_c}{A_s}\,ds$$

$$= \frac{1}{3}\left[h'_{i-1} + h'_i + 6\ell'_i + \frac{12}{h_i}(\nu_{i-1} + \nu_i) + 24\frac{I_c}{A_i}\frac{\ell_i}{h_i^2}\right]$$

$$\text{---------------- } 3.2.3b$$

$$EI_C\,\delta_{i,i+1} = \Sigma\int_o^s M_i M_{i+1}\frac{I_c}{I_s}\,ds + \Sigma\frac{I_c}{A_s}\int_o^s N_i N_{i+1}\frac{A_c}{A_s}\,ds$$

$$+ \Sigma K\frac{EI_c}{GA_c}\int_o^s V_i V_{i+1}\frac{A_c}{A_s}\,ds$$

$$= -\frac{1}{3}\left(h'_i + \frac{12\nu_i}{h_{i+1}}\right) \qquad \text{---------------- } 3.2.3c$$

โดยที่ $h'_{i-1} = \frac{I_c}{I_s}h_{i-1}$

$K\frac{EI_c}{GA_c} = \nu$ และ $\ell'_i = \frac{I_c}{I_s}\ell_i$

I_s คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของส่วนโครงสร้างที่เกี่ยวข้อง

จากกฎของ Maxwell's Law of Reciprocal Deflection จะได้ว่า

$$\delta_{i,i-1} = \delta_{i-1,i} \text{ และ } \delta_{i,i+1} = \delta_{i+1,i}$$

และจากรูปที่ 3.2.3 ค่าโมเมนต์ M_{io} แรงรวมแกน N_{io} และแรงเฉือน V_{io} จากน้ำหนักภายนอกกระทำมีค่าตามรูป 3.2.4 เป็น

$$V_{io} = R_o - \sum_{o}^{i-1} P$$

$$V_{io}^{(T)} = V_{io}^{(B)} = \frac{V_{io}}{2}$$

$$V_{i-1,o}^{(V)} = -\frac{V_{io}}{h_{i-1}} \ell i$$

$$V_{io}^{(V)} = -\frac{V_{i+1,o}}{h_i} \ell_{i+1} \qquad \text{------------------------ } 3.2.4$$

$$-N_{io}^{(T)} = N_{io}^{(B)} = \frac{M_{io}}{h_i}$$

$$M_{io}^{(V)} = V_{io}^{(V)} \frac{h_i}{2} = \frac{V_{i+1,o}}{2} \ell_{i+1}$$

ดังนั้น จากรูป 3.2.4 และ 3.2.2 การหมุนไปจากเดิมของจุดต่อชนิดข้อหมุนของโครงสร้าง Three hinged frame เมื่อมีน้ำหนักกระทำสามารถเขียนในรูปของสมการ Virtual Work ได้เป็น(7)

$$EI_c\delta_{io} = \Sigma\int_o^s M_{io}M_i\frac{I_c}{I_s}ds + \Sigma\frac{I_c}{A_s}\int_o^s N_{io}N_i\frac{A_c}{A_s}ds$$

$$+\Sigma\frac{KEI_c}{GA_c}\int_o^s V_{io}V_i\frac{A_c}{A_s}ds$$

$$= V_{io}\frac{\ell_i}{6h_i}(3h_i\ell_i' + h_{i-1}'h_{i-1} + 12\nu_{i-1})$$

$$-V_{i+1,o}\frac{\ell_{i+1}}{6}(h_i' + 12\frac{\nu_i}{h_i}) + 2\frac{\ell_i}{h_i^2}(\frac{I_c}{A_i^{(B)}} + \frac{I_c}{A_i^{(T)}})M_{io} \quad 3.2.5$$

3.2.2 กรณีคอร์ดบนและล่างของโครงสร้างเวียเรนดีลมิได้ขนานกันค่าแรงเฉือน V_{il} ในคอร์ด (สมการที่ 3.2.1) จะไม่เป็นศูนย์ แต่จะมีค่าเป็น

$$V_{il}^{(T)} = V_{il}^{(B)} \simeq \frac{\Delta h_i}{h_i} \quad \text{(ใช้กับคอร์ดที่ความเอียงไม่มากนัก)}$$

ดังนั้นสมการ 3.2.3 จะอยู่ในรูปใหม่เป็น

$$EI_c\,\delta_{i,i-1} = -\frac{1}{3}(\frac{h_{i-1}}{h_i}h_{i-1}' + \frac{12\nu_{i-1}}{h_i}) \quad \text{------------} \quad 3.2.6a$$

$$EI_c\,\delta_{i,i+1} = -\frac{1}{3}(\frac{h_i}{h_{i+1}}h_i' + \frac{12\nu_i}{h_{i+1}}) \quad \text{----------------} \quad 3.2.6b$$

$$EI_c\,\delta_{i,i} = \frac{1}{3}\Big[2\ell_i'(\frac{h_{i-1}^2}{h_i^2} + \frac{h_{i-1}}{h_i} + 1) + \frac{h_{i-1}^2}{h_i^2}h_{i-1}' + h_i'$$

$$+12\frac{\nu_{i-1}h_{i-1}+\nu_ih_i}{h_i^2} + 12\frac{\ell_i}{h_i^2}(\frac{I_c}{A_i^{(T)}} + \frac{I_c}{A_i^{(B)}})\Big] \quad \text{---} \quad 3.2.6c$$

จากสมการ 3.2.4 ค่าของแรงเฉือน V_{io} เป็นค่าที่หาได้จากรูป 3.2.3 ซึ่งทิศทางของแรงเฉือนมีทิศทางอยู่ในแนวดิ่งเท่านั้น ถ้าหากคอร์ดของโครงสร้างมิได้อยู่ในแนวระดับค่าแรงเฉือน V_{io} ในทิศทางตั้งฉากกับคอร์ดจะมีค่าใหม่เป็น (ดูรูป 3.2.5 ประกอบ)

$$\bar{V}_{io} = V_{io} \cos\theta - N_{io}^{(T)} \sin\theta \quad \text{---------------} \quad 3.2.7$$

ถ้าหาก θ มีค่าน้อย ๆ จะได้ค่า $\cos \simeq 1$

$$N_{io}^{(T)} = \frac{M_{io}}{h_i} \quad \text{และ} \quad \sin\theta = \frac{\Delta h_i}{\ell_i}$$

จัดสมการ 3.2.7 ได้ใหม่เป็น ($\bar{V}_{io}$ คือค่าแรงเฉือนที่ตั้งฉากกับคอร์ด)

$$\bar{V}_{io} = V_{io} \left(1 - \frac{M_{io}}{V_{io}} \frac{\Delta h_i}{h_i \ell_i}\right) \quad \text{---------------} \quad 3.2.8$$

โดยที่ $\zeta_i = \left(1 - \frac{M_{io}}{V_{io}} \frac{\Delta h_i}{h_i \ell_i}\right)$

ดังนั้น เขียนสมการ 3.2.4 ได้เป็น

$$V_{io}^{(T)} = V_{io}^{(B)} = \frac{V_{io}}{2} \zeta_i$$

$$V_{i-1,o}^{(V)} = -V_{io} \frac{\ell_i}{h_{i-1}} \zeta_i \quad \text{---------------} \quad 3.2.9$$

$$V_{io}^{(V)} = -V_{i+1,o} \frac{\ell_{i+1}}{h_i} \zeta_{i+1}$$

$$-N_{io}^{(T)} \simeq N_{io}^{(B)} = \frac{M_{io}}{h_i}$$

การเปลี่ยนแปลงแรงร่วมแกน N_{io} เนื่องจากคอร์ดเอียงมีค่าน้อยจะไม่นำมาพิจารณา ฉะนั้น สมการ 3.2.5 เขียนใหม่ได้ คือ

$$EI_c\, \delta_{io} = \frac{V_{io}\zeta_i \ell_i}{6h_i} \left[\ell_i'(2h_{i-1}+h_i) + h_{i-1} h_{i-1}' + 12\, \nu_{i-1} \right] - V_{i+1,o} \frac{\zeta_{i+1}\ell_{i+1}}{6} \left(h_i' + \frac{12\nu_i}{h_i}\right) + \frac{2\ell_i}{h_i^2} \left(\frac{I_c}{A_i^{(T)}} + \frac{I_c}{A_i^{(B)}}\right) M_{io}$$

--------------- 3.2.10

3.2.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าแรงลัพธ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในส่วนของโครงสร้าง ดำเนินการดังนี้

1. คำนวณหาค่า $\delta_{i,i-1}$ $\delta_{i,i}$ และ $\delta_{i,i+1}$ จากสมการที่ 3.2.3 และ δ_{io} จากสมการ 3.2.5 ในกรณีที่คอร์ดบนและคอร์ดล่างของโครงสร้างขนานกัน ในกรณีที่คอร์ดบนและคอร์ดล่างไม่ขนานกัน คำนวณค่า $\delta_{i,i-1}$ $\delta_{i,i}$ และ $\delta_{i,i+1}$ จากสมการที่ 3.2.6 และ $\delta_{i,o}$ จากสมการที่ 3.2.10

2. แทนค่าต่าง ๆ ที่หาได้จากขั้นตอนที่ 1 ลงในสมการที่ 3.2.2 แก้สมการหาค่า X_i (ซึ่งจะได้จำนวนสมการที่จะแก้หาค่า X_i อยู่เท่ากับจำนวน panel ของโครงสร้าง)

3. ค่าโมเมนต์สมดุลย์ ($M^{(T)}_{i,i-1}$ หรือ $M^{(B)}_{i,i-1}$) ที่เกิดขึ้นจากน้ำหนักบรรทุกของส่วนโครงสร้าง i,i-1 ก็จะมีค่าเท่ากับ X_i ในกรณีที่ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อนของคอร์ดบน (I_{iT}) และโมเมนต์ของความเฉื่อยของคอร์ดล่าง (I_{iB}) มีค่าเท่ากัน ในกรณีที่โมเมนต์ของความเฉื่อนของคอร์ดบนและคอร์ดล่างมีค่าไม่เท่ากัน การหาค่าโมเมนต์สมดุลย์ ($M^{(T)}_{i,i-1}$ และ $M^{(B)}_{i,i-1}$) หาได้ดังนี้

$$M^{(T)}_{i,i-1} = X_i \frac{I_{iT}}{I_{ic}} \qquad \text{------------------ 3.2.11a}$$

$$M^{(B)}_{i,i-1} = X_i \frac{I_{iB}}{I_{ic}} \qquad \text{------------------ 3.2.11b}$$

โดยหลักการการสมดุลย์ทางสถิติ (static equilibrium) ของโครงสร้างและโมเมนต์สมดุลย์ที่หาได้จากขั้นตอนที่ 3 ก็จะหาค่าแรงต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในส่วนของโครงสร้างได้ตามที่ต้องการ

3.2.4 การคำนวณหาค่าระยะโก่ง

การคำนวณหาค่าระยะโก่งของจุดต่อบนโครงสร้างโดยวิธีพลังงานเสมือนที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการคำนวณโดยประมาณซึ่งตั้งอยู่บนสมมุติฐานดังนี้

ก. การคำนวณหาค่าระยะโก่งที่มากที่สุดที่จุดกึ่งกลางสำหรับโครงสร้างที่มีจำนวนแพแนลเป็นจำนวนคู่และน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตร

1. กำหนดให้โครงสร้างมีพฤติกรรมเหมือนคาน ซึ่งจากสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของ elastic curve ของคานในการหาค่าระยะโก่ง สำหรับโครงสร้างเวียเรนดีล คือ

$$\frac{d^2\Delta}{dx^2} = \frac{M}{EI_c} + W \frac{dV}{dx} \qquad \text{----------------} \quad 3.2.12$$

2. ขณะที่จุดต่อต่าง ๆ บนโครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ (Translation) จะไม่ทำให้จุดต่อเกิดการหมุนสัมพัทธ์ (Rotation) (ดูรูปที่ 3.2.6 ประกอบ)

จากข้อ 1 สามารถสรุปได้ว่า ระยะโก่งที่จุดต่อใด ๆ บนโครงสร้างเกิดจากผลรวมของการกระทำของโมเมนต์ (M) และแรงเฉือน (V) จึงแยกการพิจารณาระยะโก่งของโครงสร้างออกเป็นดังนี้

ระยะโก่งที่เกิดจากโมเมนต์ จากหลักการหาค่าระยะโก่งโดยวิธี Virtual Work สามารถคำนวณหาค่าระยะโก่งที่เกิดจากโมเมนต์ได้ คือ

$$\Delta_b = \frac{1}{EI_c} \int_o^x M_o\bar{M}\, dx \qquad \text{---------------} \quad 3.2.13$$

โดยที่ M_o คือ โมเมนต์เมื่อโครงสร้างเป็นคานช่วงเดียวรับแรงกระทำภายนอกซึ่งเขียนได้ในรูปของฟังชั่นทางคณิตศาสตร์

$\bar{M}$ คือค่าของโมเมนต์ในรูปของฟังชั่นทางคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการใช้น้ำหนัก 1 หน่วยกระทำที่จุดต่อที่ต้องการหาระยะโก่ง ดูรูป 3.2.7

x คือระยะจากจุดรองรับด้านใดด้านหนึ่งถึงจุดต่อที่ต้องการหาค่าระยะโก่ง

ระยะโก่งที่เกิดจากการหมุนของส่วนโครงสร้างสามารถหาได้โดยรูปที่ 3.2.6 ซึ่งสามารถเขียนสมการของระยะโก่งที่เกิดจากการหมุนของส่วนโครงสร้างได้เป็น

$$\Delta_s = V_i \frac{\ell_{io}}{12E}\left[\frac{\ell_{io}^2}{I_c} + \frac{12KE}{GA_c}\right] \quad \text{---------------} \quad 3.2.14$$

โดยที่ K คือตัวคูณประกอบที่ขึ้นกับคุณสมบัติของหน้าตัดของส่วนโครงสร้าง (form factor)

จากสมการ 3.2.13 และสมการ 3.2.14 ระยะโก่งที่จุดต่อกึ่งกลางบนโครงสร้าง (Δ) คือ ผลรวมของ

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s$$

$$= \frac{1}{EI_c}\int_o^x M_o\bar{M}dx + \frac{1}{12E}\sum_{i=0}^{i} \ell_{io}\left[\left(\frac{\ell_{io}^2}{I_T+I_B} + \frac{12KE}{G(A_T+A_B)}\right) V_i + \left(\frac{h_{i-1}^2}{I_v} + \frac{12KE}{GA_v}\right) V_{i-1}^{(V)}\right] \quad \text{---------------} \quad 3.2.15$$

โดยที่ V_i คือค่าผลรวมของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นจริงบนส่วนของโครงสร้างที่หาได้จากการวิเคราะห์หาแรงใน panel i

$V_{i-1}^{(V)}$ คือค่าแรงเฉือนที่หาได้จากการวิเคราะห์หาค่าแรงในแนวดิ่งในส่วนของโครงสร้าง i-1

ข. ขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าระยะโก่งที่มากสุดที่จุดกึ่งกลางแพแนลสำหรับโครงสร้างที่มีจำนวนแพแนลเป็นจำนวนคู่

1. คำนวณหาค่าโมเมนต์ M_o จากค่าแรงในแนวแกนที่หาได้จากข้อ 3.2.3 ดังรูปที่ 3.2.8 จะได้ค่าโมเมนต์ M_o เป็น

$$M_o = N_{3T} x\ h \text{ or } = N_{4T} x\ h \quad \text{---------------} \quad 3.2.16$$

และจากรูป 3.2.7 จะได้ $\bar{M}$ เป็น

$$\bar{M} = \frac{PL}{4} = \frac{L}{4} \quad \text{---------------} \quad 3.2.17$$

เมื่อ P มีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วย

จากรูปที่ 3.2.8 จะได้ค่าระยะโก่งจากโมเมนต์ Δ_b มีค่าเท่ากับ

$$\Delta_b = \frac{1}{EI_c} \int_0^x M_o\bar{M}dx$$

$$= \frac{5}{12EI_c} (Nxh) \left(\frac{L}{4}\right) \text{ ----------------- } 3.2.18$$

แทนค่าแรงเฉือนที่หาได้จากข้อ 3.2.3 ตามรูป 3.2.8 ในสมการ 3.2.14 จะได้ค่าระยะโก่งจากแรงเฉือน Δ_s

2. ระยะโก่งที่จุดกึ่งกลางได้จากผลรวมของสมการ 3.2.18 และค่าΔ_s จากสมการ 3.2.14

ค. การคำนวณหาค่าระยะโก่งที่จุดต่อใด ๆ บนโครงสร้าง

1. หาค่าโมเมนต์ (M) จากน้ำหนักกระทำตามหัวข้อ 3.2.3

2. กำหนดน้ำหนักกระทำหนึ่งหน่วยที่จุดต่อที่ต้องการหาค่าระยะโก่ง แล้วดำเนินหาค่าโมเมนต์ (m) จากข้อ 3.2.3

3. คำนวณหาค่าระยะโก่งที่จุดต่อใด ๆ โดยวิธีพลังงานเสมือนตามรูป 3.2.10 และ 3.2.11 ได้เป็น

$$\Delta = \Sigma\frac{1}{EI_c} \int_0^x Mmdx + \Sigma\int_0^x \frac{KVv}{AG}\, dx + \Sigma\int_0^x \frac{Nn}{AE}\, dx \text{ ---------- } 3.2.19$$

3.3 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีแมทริก (Matrix Analysis)

การวิเคราะห์โครงสร้างเวียเรนดีลโดยวิธีแมทริก เป็นการวิเคราะห์โดยใช้หลักการของ displacement method ในวิธีนี้กำหนดให้การเคลื่อนที่ (Displacements) หรือการเปลี่ยนรูปทรง (Deformations) ที่จุดต่อต่าง ๆ ในโครงสร้างเป็นตัวไม่ทราบค่า แล้วสร้างสมการแสดงความสมดุลย์ของโครงสร้างเพื่อหาค่าของการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่าง ๆ นั้น จำนวนสมการที่ต้องสร้างจะเท่ากับจำนวน Degree of Freedom หรืออีกนัยหนึ่ง Degree of Kinematic Indeterminacy ของโครงสร้าง เมื่อทราบค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่าง ๆ ก็สามารถคำนวณหาการแปรเปลี่ยนรูปทรงและแรงภายในของส่วนโครงสร้างต่าง ๆ ภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุกหรือแรงภายนอกได้

3.3.1 สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำภายนอกและการเคลื่อนที่ในขั้นมูลฐานของทฤษฎีที่ใช้มีดังนี้

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำภายนอก (R) กับแรงภายใน (S) ที่เกิดขึ้นในส่วนโครงสร้างในทิศทางเทียบกับ local element coordinates คือ

$$S = bR \quad \text{-------------------------------- 3.3.1}$$

โดยที่ b คือแมทริกของการเปลี่ยนแรงระบบโครงสร้างไปเป็นแรงในส่วนโครงสร้าง (force transformation matrix)

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการแปรเปลี่ยนรูปทรง (v) ของส่วนโครงสร้าง (element) กับการเคลื่อนที่ของจุดต่อ (r) ของระบบโครงสร้าง คือ

$$v = ar \quad \text{-------------------------------- 3.3.2}$$

โดยที่ a คือแมทริกที่ใช้เปลี่ยนระยะการเคลื่อนที่ในระบบโครงสร้างไปเป็นระยะการเคลื่อนที่ในส่วนโครงสร้าง (Displacement transformation matrix)

r คือ เวคเตอร์ของระยะเคลื่อนที่ของจุดต่อในระบบโครงสร้าง

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายใน (S) กับการแปรเปลี่ยนรูปทรง (v) ของส่วนโครงสร้าง คือ

$$S = kv \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.3$$

v คือ เวคเตอร์ของการแปรเปลี่ยนรูปทรงของส่วนโครงสร้าง

Strain Energy (U) ในระบบโครงสร้างสามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของสตีฟเนส (K) ของทั้งระบบโครงสร้างได้คือ

$$U = \frac{1}{2} r^T K r \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.4$$

โดยหลักการเดียวกันสามารถเขียน strain energy (U_s) ของส่วนโครงสร้างให้อยู่ในเทอมของสติฟเนสแมทริก (k) ของส่วนโครงสร้างได้ คือ

$$U_s = \frac{1}{2} v^T k v \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.5$$

และสามารถเขียนสมการ 3.3.5 โดยสมการ 3.3.2 ได้ใหม่ คือ

$$U_s = \frac{1}{2} r^T a^T k a r \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.6$$

จากสมการ 3.3.4 และ 3.3.6 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างสติฟแมทริก (K) ของระบบโครงสร้างกับสติฟเนสแมทริก (k) ของส่วนโครงสร้าง คือ

$$K = a^T k a \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.7$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำภายนอก (R) กับการเคลื่อนที่ (r) ของจุดต่อในระบบโครงสร้าง คือ

$$R = Kr \qquad \text{------------------------} \quad 3.3.8$$

3.3.2 สติฟเนสแมทริกของส่วนโครงสร้าง (Member Stiffness Matrix k)

จากรูป 3.3.1 แสดงการหาค่าสติฟเนสแมทริก ของส่วนโครงสร้างชนิดเป็นคาน ใน 2 มิติ เมื่อไม่คิดผลการยืดหดในแนวแกนและกำหนดให้ทิศทางตามรูปมีค่าเป็นบวก จะได้ค่าสติฟเนสแมทริกของส่วนโครงสร้าง เป็น

$$k = \frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6/\ell & 6/\ell \\ 2 & 4 & -6/\ell & 6/\ell \\ -6/\ell & -6/\ell & 12/\ell^2 & -12/\ell^2 \\ 6/\ell & 6/\ell & -12/\ell^2 & 12/\ell^2 \end{bmatrix} \qquad \text{---------------} \ 3.3.9$$

และจากรูป 3.3.2 จะได้ค่าสติฟเนสแมทริกของส่วนโครงสร้าง เมื่อคิดผลการเปลี่ยนรูปทรงในแนวแกน คือ

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{-12EI}{\ell^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{-12EI}{\ell^3} & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & \frac{-EA}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \text{-----------} \ 3.3.10$$

3.3.3 การดำเนินการวิเคราะห์โดยวิธี displacement method

1. หาค่า tranformation matrix (a) ของโครงสร้าง ดังเช่นรูปที่ 3.3.5 และ 3.3.7 เมื่อไม่คิดการเปลี่ยนแปรรูปทรงในแนวแกนและคิดการเปลี่ยนแปรรูปทรงในแนวแกนตามลำดับ เมื่อจุดต่อโครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ (r) ในทิศทางแรงภายนอกที่ไปเป็นระยะทาง 1 หน่วยจะทำให้เกิด การเปลี่ยนแปรรูปทรงภายใน (v) สัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ (r) ตามสมการ 3.3.2

2. คำนวณหาค่าสติฟเนสแมทริก (K) ของทั้งระบบโครงสร้างได้โดยสมการ 3.3.7

3. คำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ (r) ในทิศทางของ system coordinate ตามรูป 3.3.5 หรือ 3.3.7 โดยสมการ 3.3.8 เมื่อไม่คิดหรือคิดผลการเปลี่ยนแปรรูปทรงในแนวแกนตามลำดับ ซึ่งจะได้สมการการเคลื่อนที่ (r) ของระบบโครงสร้างเป็น

$$r = K^{-1}R \qquad \text{------------------------} \; 3.3.11$$

4. คำนวณหาค่าการเปลี่ยนแปรรูปทรง (v) ภายในของส่วนโครงสร้างได้จากสมการ 3.3.2

5. คำนวณหาค่าแรงภายใน (S) ของส่วนโครงสร้างได้โดยสมการ 3.3.3

3.3.4 การดำเนินการวิเคราะห์โดยวิธีสติฟเนสแมทริกโดยตรง (Direct Stiffness Method)

1. หาค่า tranformation matrix (a) ของแต่ละส่วนโครงสร้างโดย คิดการเปลี่ยนแปรรูปทรงในแนวแกน จากความสัมพันธ์จากรูป 3.3.2 และ 3.3.3 จะได้ค่า tranformation matrix (a) ของส่วนโครงสร้างเพื่อเปลี่ยนแมทริกใน local coordinates ไปเป็นแมทริกใน global coordinates เป็น

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & 0 & -C_y \\ 0 & 0 & C_y & 0 & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & 0 & C_x \end{bmatrix} \quad \text{-------------} \quad 3.3.12$$

โดยที่ $C_x = \cos\theta$ และ $C_y = \sin\theta$

2. คำนวณหาค่าสติฟเนสแมทริก $(\bar{k})$ ของแต่ละส่วนโครงสร้าง โดยสมการ 3.3.7 จากค่า (k) ในสมการ 3.3.10 และ Transpose ค่า (a_i) ในสมการ 3.3.12 จะได้ค่าสติฟเนสแมทริก $(\bar{k})$ ของแต่ละส่วนโครงสร้างใน global coordinate ตามสมการที่ 3.3.7 เป็น

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & C_xK_{13} & C_xK_{14} & -C_yK_{13} & -C_yK_{14} \\ K_{21} & K_{22} & C_xK_{23} & C_xK_{24} & -C_yK_{23} & -C_yK_{24} \\ C_xK_{31} & C_xK_{32} & C_x^2K_{33}+C_y^2K_{55} & C_x^2K_{34}+C_x^2K_{56} & C_xC_yK_{55}-C_xC_yK_{33} & C_xC_yK_{56}-C_xC_yK_{3} \\ C_xK_{41} & C_xK_{42} & C_x^2K_{43}+C_y^2K_{65} & C_x^2K_{44}+C_y^2K_{66} & C_xC_yK_{65}-C_xC_yK_{43} & C_xC_yK_{66}-C_xC_yK_{4} \\ -C_yK_{31} & -C_yK_{32} & C_xC_yK_{55}-C_xC_yK_{33} & C_xC_yK_{56}-C_xC_yK_{34} & C_x^2K_{55}+C_y^2K_{33} & C_x^2K_{56}+C_y^2K_{34} \\ -C_yK_{41} & -C_yK_{42} & C_xC_yK_{65}-C_xC_yK_{43} & C_xC_yK_{66}-C_xC_yK_{44} & C_x^2K_{65}+C_y^2K_{43} & C_x^2K_{66}+C_y^2K_{44} \end{bmatrix}$$

---------- 3.3.13

3. คำนวณหาค่าสติฟเนสแมทริก (K) ของทั้งระบบโครงสร้างโดยค่า $(\bar{k})$ ของแต่ละส่วนโครงสร้างที่สัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ (r) ในระบบโครงสร้างจะถูกจัดลงในตำแหน่งที่ตรงกันและถูกต้องกับ (K) ถ้าหากค่า $(\bar{k})$ ที่สัมพันธ์กับค่า (r) ของแต่ละส่วนโครงสร้างเมื่อวางในตำแหน่ง (K) อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน จะได้ค่า (K) ในตำแหน่งนั้นเกิดจากผลรวมทางคณิตศาสตร์

ของค่า $(\bar{k})$ ที่ตรงตำแหน่งกัน เมื่อจัดค่าสติฟเนสของส่วนโครงสร้างลงใน (K) จนครบทุกส่วนแล้ว จะต้องดำเนินการแยกส่วนของแมทริก (K) ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_{uu} & K_{ur} \\ \hline K_{ru} & K_{rr} \end{array}\right] \quad \text{------------------------} \; 3.3.14$$

โดยที่ K_{uu} คือ ค่าสติฟเนสแมทริก ของโครงสร้างที่เกิดจากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่จุดและในทิศทางน้ำหนักกระทำจากผลของการเคลื่อนที่ไป 1 หน่วยในทิศทางน้ำหนักกระทำ

K_{ur} คือ ค่า สติฟเนสแมทริก ของโครงสร้างที่เกิดจากความสัมพันธ์ที่ที่จุดและในทิศทางน้ำหนักกระทำจากผลของการเคลื่อนที่ไป 1 หน่วยในทิศทางอื่นที่มิใช่ทิศทางน้ำหนักกระทำ

K_{rr} คือ ค่าสติฟเนสแมทริก ของโครงสร้างที่เกิดจากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับทิศทางที่กำหนดให้เกิดการเคลื่อนไป 1 หน่วย โดยที่ทิศทางนี้มิใช่ทิศทางของน้ำหนักกระทำ

ดังนั้น สมการ 3.3.4 จะจัดใหม่ได้เป็น

$$\left\{\begin{array}{c} R_u \\ \hline R_r = 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} K_{uu} & K_{ur} \\ \hline K_{ru} & K_{rr} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} r_u \\ \hline r_r \end{array}\right\} \quad \text{------------------} \; 3.3.15$$

โดยที่ r_u คือค่าเวคเตอร์ของระยะเคลื่อนที่ของจุดต่อของโครงสร้างในทิศทางน้ำหนักกระทำ

r_r คือค่าเวคเตอร์ของระยะเคลื่อนที่ของจุดต่อของโครงสร้างในทิศทางอื่นที่กำหนดลงไปเพื่อให้ครบตามจำนวน degree of kinematic indeterminacy

จัดสมการ 3.3.15 ใหม่ได้เป็น

$$R_u = (K_{uu} - K_{ur} K_{rr}^{-1} K_{ru}) \, r_u \quad \text{---------------------} \; 3.3.16$$

4. คำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ (r_u) ทั้งระบบในทิศทางของน้ำหนักจากสมการ 3.3.16 ได้คือ

$$r_u = (K_{uu} - K_{ur}K_{rr}^{-1}K_{ru})^{-1} R_u \qquad \text{-----------------} \; 3.3.17$$

และคำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ r_r จากสมการ 3.3.15 ได้เป็น

$$r_r = -K_{rr}^{-1}K_{ru}r_u \qquad \text{-----------------} \; 3.3.18$$

5. คำนวณหาค่าการเปลี่ยนแปรรูปทรงภายใน (v) ของส่วนโครงสร้างจาก r_u และ r_r โดยนำเฉพาะค่าของ r_u และ r_r ที่เกี่ยวข้องกับส่วนของโครงสร้างที่จะทำการวิเคราะห์หาค่า (v_i)ของส่วนโครงสร้างนั้น ๆ โดยอาศัยความสัมพันธ์ตามรูป 3.3.3

จากค่า r_u และ r_r และสมการ 3.3.12 จะได้ค่า (v_i) ของส่วนโครงสร้าง i คือ

$$v_i = a_i r_i \qquad \text{-------------------------} \; 3.3.19$$

6. คำนวณหาค่าแรงภายในของส่วนโครงสร้าง (i) โดยสมการ 3.3.10 และ 3.3.19 ได้เป็น

$$S_i = k_i a_i r_i \qquad \text{-------------------------} \; 3.3.20$$

3.4 การวิเคราะห์หาค่าระยะโก่งสำหรับโครงสร้างที่ทำด้วยคอนกรีตเสริมเหล็ก

กรณีโครงสร้างที่ทำด้วยคอนกรีตเสริมเหล็กมีค่าน้ำหนักบรรทุกเกินน้ำหนักบรรทุกแตกร้าว จะมีรอยแตกร้าวเกิดขึ้น จึงเป็นผลให้ค่าของโมเมนต์ของความเฉื่อยของส่วนโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลง คือเมื่อเกิดรอยแตกร้าวจะทำให้ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยลดลงและเป็นผลให้ระยะโก่งมีค่าเพิ่มมากขึ้น เนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว การวิเคราะห์กระทำได้เป็นขั้นตอนดังนี้คือ

1. คำนวณหาค่าโมเมนต์ของการแตกร้าว (M_{cr}) ของส่วนโครงสร้างได้จากสูตร

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y} \quad \text{------------------------------} \quad 3.4.1$$

โดยที่ $f_r = 1.99\sqrt{f'_c}$

I_g = โมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัดที่ยังไม่แตกร้าว

y = คือระยะทางจาก N.A. ถึงผิวนอกสุดของด้านรับแรงดึง

2. คำนวณหาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของส่วนโครงสร้างแตกร้าว I_{cr}) ได้จาก cracked transformed section moment of inertia

3. คำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุก P ที่ทำให้ส่วนโครงสร้างเกิดโมเมนต์สมดุลย์มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของการแตกร้าว (M_{cr})

4. คำนวณหาค่าโมเมนต์สมดุลย์ที่เกิดขึ้นบนส่วนโครงสร้าง ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีทั้งสามที่น้ำหนักบรรทุกใด ๆ

5. คำนวณหาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยประสิทธิผล (I_e) สำหรับส่วนโครงสร้างที่มีค่าโมเมนต์สมดุลย์เกินค่าโมเมนต์ของการแตกร้าว (M_{cr}) ของส่วนโครงสร้างได้จากสูตร

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_{max.}}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{max.}}\right)^3\right] I_{cr} \quad \text{----------} \quad 3.4.2$$

โดยที่ I_e = โมเมนต์ของความเฉื่อยประสิทธิผล

$M_{max.}$ = ค่าโมเมนต์สมดุลย์มากสุดบนส่วนโครงสร้างนั้น

6. คำนวณหาค่าระยะโก่งที่น้ำหนักบรรทุกใด ๆ โดยแทนค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยสำหรับส่วนโครงสร้างที่มีค่าโมเมนต์สมดุลย์เกินค่าโมเมนต์ของการแตกร้าวของส่วนโครงสร้างนั้นด้วยโมเมนต์ของความเฉื่อยประสิทธิผลที่หาได้จากสูตร 3.4.2 แล้วดำเนินการวิเคราะห์หาค่าระยะโก่ง โดยการวิเคราะห์ทางทฤษฎีทั้งสาม

<u>หมายเหตุ</u> ในการคำนวณหาค่า I_e ของส่วนโครงสร้างขั้นแรกดำเนินการหาค่าโมเมนต์สมดุลย์บนส่วนโครงสร้างที่มีน้ำหนักบรรทุกที่ต้องการคำนวณหาค่าระยะโก่งใด ๆ โดยวิเคราะห์หาค่าโมเมนต์สมดุลย์จากค่า I_g แล้วคำนวณหาค่า I_e จากสูตร 3.4.2 โดยแทนค่า $M_{max.}$ จากโมเมนต์สมดุลย์ที่หาได้ แล้วดำเนินการวิเคราะห์หาโมเมนต์สมดุลย์บนส่วนโครงสร้างใหม่ โดยการแทนค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของส่วนโครงสร้างนั้น ๆ ด้วย I_e สำหรับส่วนโครงสร้างที่มีโมเมนต์สมดุลย์เกินค่า M_{cr} กระทำเช่นนี้จนทำให้โมเมนต์สมดุลย์บนส่วนโครงสร้างมีค่าแตกต่างกันน้อย จึงดำเนินการวิเคราะห์หาค่าระยะโก่งที่จุดต่อของโครงสร้างได้จากโมเมนต์สมดุลย์ครั้งสุดท้ายจากวิธีการวิเคราะห์ทางทฤษฎีทั้งสามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น