บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ตัวกำเนิดนิวตรอน[1]

หมายถึง ตัวที่แผ่นิวตรอนออกมา นิวตรอนที่ออกมานี้ได้มาจากปฏิกิริยานิวเคลียร์ เช่น ระหว่างอนุภาคแอลฟากับนิวเคลียสของธาตุ แล้วส่งนิวตรอนออกมา เรียกปฏิกิริยา (α,n) นิวตรอนอาจเกิดขึ้นได้จากปฏิกิริยาระหว่างรังสีแกมมา กับนิวเคลียสของธาตุ เรียกปฏิกิริยา (γ,n) กรณีนี้นับว่ามีประโยชน์มาก เพราะได้นิวตรอนที่มีพลังงานเดียว นิวตรอนอาจเกิดขึ้นได้จากการใช้อิออนบวกที่มีพลังงานสูงจากเครื่องเร่งอนุภาคยิงเข้าไปยังเป้าที่มีเลขอะตอมต่ำ ก็จะได้นิวตรอนที่มีพลัง - งานสูงเช่นกัน นอกจากนี้ยังอาจจะได้นิวตรอนที่มีพลังงานสูงจากปฏิกิริยาฟิชชัน สำหรับตัวกำเนิดนิวตรอนที่ใช้อ้างอิง ในการคำนวณ คือ ธาตุอเมริเซียมผสมกับเบอริลเลียม จะให้นิวตรอนดังสมการ

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \longrightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1$$

นิวตรอนที่เกิดขึ้น จะมีพลังงานเฉลี่ยประมาณ 5 MeV

---

[1] Ralph E.Lapp, and Howard L. Andrews, Nuclear Radiation Physics (N.J. Prentice-hall, Inc., Englewood Cliff 1953) p. 270

2.2 ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอนสองพวก[2]

ทฤษฎีนี้ใช้สำหรับอธิบายการกระจายของนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่วางอยู่ในวัสดุลดความเร็วใด ๆ โดยคิดว่านิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนแล้วไปฟุ้งอยู่ในตัวกลางมีอยู่เพียง 2 พวกเท่านั้น คือนิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลนิวตรอน เมื่อนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ววิ่งผ่านตัวกลางแล้วไปปรากฏที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในตัวกลาง จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ดังนั้นเทอร์มาลนิวตรอนจะปรากฏอยู่ทุกแห่งในตัวกลาง ในกรณีนี้นิวตรอนเร็วมีต้นกำเนิดเพียงแห่งเดียว คือที่ตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งถือว่าเป็นจุด

ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวกนี้เป็นทฤษฎีที่อาศัยสมการการฟุ้ง (diffusion equation) คำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็ว (fast flux) จากฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วตามจุดต่าง ๆ ที่คำนวณได้นี้นำมาคำนวณหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ (thermal flux) โดยอาศัยสมการการฟุ้งเช่นเดียวกัน

สมการการฟุ้งของระบบ (system) ที่อยู่ในสภาวะสม่ำเสมอ (steady state) มีดังนี้

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad \ldots(2.1)$$

D = สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอน (diffusion coefficient) มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

---

[2]Raymond L.Murray, Nuclear Reactor Physics., (N.J. : Englewood Cliffs, Prentice-Hall, INC., 1957), p. 110-111.

ϕ = นิวตรอนฟลักซ์มีหน่วยเป็น นิวตรอน/ซม^2 /วินาที

Σ_a = ภาคตัดขวางมหภาคสำหรับการดูดกลืน (macroscopic absorption cross section) มีหน่วยเป็นเซนติเมตร$^{-1}$

S = อัตราการเกิดนิวตรอนในตัวกลาง 1 ซม^3 /วินาที มีหน่วยเป็น นิวตรอน/ซม^3 /วินาที

สำหรับระบบที่ศึกษาอยู่มีตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดวางอยู่ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์ (infinite homogeneous medium) อัตราเกิดของนิวตรอนเร็วในตัวกลางถือว่าเป็นศูนย์ นอกจากตำแหน่งที่วางจุดกำเนิดนิวตรอนเร็วในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล จะหาได้โดยให้ S = 0 การกระจายของนิวตรอนจากตัวกำเนิดจึงมีความสมมาตรเชิงทรงกลมกับจุดกำเนิด (Spherical symmetry) สัญญากรของลาปลาซ (Laplacian operator) มีค่าเป็น

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \qquad \ldots(2.2)$$

2.2.1 <u>กรณีของนิวตรอนเร็ว</u>

ต้นกำเนิดของนิวตรอนเร็วอยู่ที่ตำแหน่งของตัวกำเนิดนิวตรอนแห่งเดียวเทอม S ในสมการการฟุ้งเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว คือ

$$\nabla^2\phi_f - K_f^2\,\phi_f = 0 \qquad \ldots(2.3)$$

โดยให้ $$K_f^2 = \frac{1}{L_f^2} = \frac{\Sigma_f}{D_f}$$

และ L_f เป็นความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว

Σ_f เรียกภาคตัดขวางมหภาคที่ทำให้นิวตรอนวิ่งช้าลง (Slowing down macroscopic cross sections)

D_f คือสัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอนเร็ว

เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ในการหาฟลักซ์ในสมการ (2.3) ก็คือ

1) ฟลักซ์จะต้องมีค่าไม่เป็นอนันต์ที่จุดใด ๆ

2) เงื่อนไขสำหรับตัวกำเนิดนิวตรอน กำหนดว่า

กระแสนิวตรอนทั้งหมดที่ผิวของทรงกลมซึ่งมีรัศมียาวเท่ากับ r มีหน่วยเป็นนิวตรอน/วินาที จะมีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกมาจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที เมื่อรัศมี r ของทรงกลมมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เงื่อนไขข้อที่ 2 จึงเขียนได้ว่า

$$\lim_{r \to 0} 4\pi r^2 J = S$$

เมื่อ S = จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่แผ่ออกมาจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที

จากกฎของฟิค (Fick's law)

$$\vec{J} = -D \text{ grad } \phi$$

นำค่า ∇^2 ในสมการ (2.2) แทนลงในสมการ (2.3) แล้วใช้เงื่อนไขทั้งสองข้อ จะได้คำตอบของสมการ (2.3) คือ

$$\phi_f(r) = \frac{S}{4\pi D_f} \frac{e^{-K_f r}}{r} \qquad \ldots(2.4)$$

สมการ (2.4) นี้เป็นค่าฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วรอบ ๆ ตัวกำเนิดนิวตรอนที่มีระยะห่างออกไปจากตัวกำเนิดนิวตรอนเป็นระยะทาง r ในตัวกลางที่มีขนาดอนันต์ ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วที่หามาได้นี้ จะใช้เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนต่อไป

2.2.2 กรณีของเทอร์มาลนิวตรอน

เทอม s ในสมการการฟุ้ง สำหรับเทอร์มาลนิวตรอนมีค่าเท่ากับ

$\Sigma_f \phi_f$

จากสมการ (2.1) เขียนสมการการฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอนได้ดังนี้

$$\nabla^2 \phi - K^2 \phi + \frac{\Sigma_f}{D} \cdot \phi_f = 0 \qquad \ldots(2.5)$$

โดยให้ $K^2 = \frac{1}{L^2} = \frac{\Sigma_a}{D}$

เมื่อ L เป็นความยาวของการฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอน

D คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอน

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ในสมการ (2.5) คือ

1) ฟลักซ์ต้องมีค่าไม่เป็นอนันต์ที่จุดใด ๆ

2) จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งวางอยู่ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้ว่า[3]

$$\int_0^\infty (\Sigma_a \phi) \, 4\pi r^2 \, dr = S \qquad \ldots(2.6)$$

เมื่อ $\Sigma_a \phi$ = จำนวนเทอร์มาลนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง 1 ซม.^{3}/วินาที

นำค่า ∇^2 จากสมการ (2.2) และ ϕ_f จากสมการ (2.4) แทนลงในสมการ (2.5) แล้วใช้เงื่อนไขทั้ง 2 ข้อจะหาคำตอบของสมการ (2.5) ได้ดังนี้

---

[3] Robert V. Meghreblian, and David K. Holms, *Reactor Analysis* (New York : Mc Graw-Hill Book Company, INC., 1960), p.183

$$\phi(r) = \frac{S K_f^2}{4\pi D(K^2-K_f^2)r} \left(e^{-K_f r} - e^{-Kr}\right) \qquad \ldots(2.7)$$

สมการ (2.7) คือค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r

สมการ (2.7) นี้ใช้หาค่าฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเมื่อ $r = 0$ ไม่ได้ แต่สามารถใช้วิธีเคอร์เนลหาค่าออกมาได้ดังนี้

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + \Sigma_f \phi_f = 0 \qquad \ldots(2.8)$$

คำตอบของสมการ (2.8) โดยวิธีเคอร์เนลมีค่าดังนี้

$$\phi(r) = \int_{\text{all space}} \frac{\Sigma_f \phi_f \, e^{-K\left|\vec{r} - \vec{r}_o\right|}}{4\pi D \left|\vec{r} - \vec{r}_o\right|} \, d\vec{r}_o$$

$$\phi(0) = \int \frac{\Sigma_f \phi_f \, e^{-Kr_o}}{4\pi D \, r_o} \, d\vec{r}_o$$

เมื่อ $d\vec{r}_o = 4\pi r_o^2 \, dr_o$ และ $\phi_f(r_o) = \frac{S \, e^{-K_f r_o}}{4\pi D_f r_o}$

$$\phi(0) = \int_0^\infty \frac{\Sigma_f \cdot S \, e^{-K_f r_o} \cdot e^{-Kr_o}}{4\pi D r_o \; 4\pi D_f r_o} \, 4\pi r_o^2 \, dr_o$$

$$\phi (0) \quad = \quad \frac{S \; K_f^2}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-(K+K_f) \, r_o} \, dr_o$$

$$\phi (0) \quad = \quad \frac{S \; K_f^2}{4\pi D \, (K+K_f)} \qquad \ldots\ldots \; (2.9)$$

เมื่อแทนค่า S, K_f, K และ D ลงในสมการ (2.9) จะหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง $r = 0$ ได้

2.3 ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอนสามพวก

เป็นทฤษฎีที่ใช้สำหรับอธิบายการกระจายของนิวตรอน ที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่วางอยู่ในวัสดุสำหรับลดความเร็วใด ๆ โดยคิดว่านิวตรอน ที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนแล้วไปฟุ้งอยู่ในตัวกลาง คือนิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลนิวตรอน การลดพลังงานของนิวตรอนเร็วเป็นไปทีละขั้นมีความยาวของการฟุ้งสำหรับนิวตรอนเร็ว 2 ค่าด้วยกันคือ L_1 กับ L_2 เริ่มต้นจากนิวตรอนที่มีพลังงานสูงจนถึงเทอร์มาลนิวตรอน นิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ว เมื่อวิ่งไปปรากฏตำแหน่งต่าง ๆ ในตัวกลางจะกลายเป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนที่ตำแหน่งนั้น ต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนจึงปรากฏอยู่ทุกแห่งในตัวกลาง ส่วนนิวตรอนเร็วมีต้นกำเนิดอยู่เพียงแห่งเดียว คือที่ตัวกำเนิดนิวตรอน

ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 3 พวกนี้ ใช้สมการการฟุ้งคำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วแล้วหาฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเช่นเดียวกับการหาเทอร์มาลฟลักซ์ โดยใช้ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวก

สมการการฟุ้งของนิวตรอนพวกที่ 1 คือ

$$D_1\nabla^2\phi_{f_1} - \Sigma_{f_1}\phi_{f_1} = 0$$

$$\nabla^2\phi_{f_1} - K_1^2\,\phi_{f_1} = 0 \quad .....(2.10)$$

นำค่า ∇^2 จากสมการ (2.2) แทนในสมการ (2.10) แล้วใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 และ ข้อที่ 2 ในสมการ (2.6) จะได้คำตอบของสมการ (2.10) คือ

$$\phi_{f_1}(r) = \frac{S}{4\pi D_1 r}\, e^{-K_1 r} \quad .....(2.11)$$

เมื่อ D_1 คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอนเร็วพวกที่ 1

$K_1 = \frac{1}{L_1}$ เมื่อ L_1 คือความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว พวกที่ 1

นิวตรอนเร็ว จากสมการ (2.11) นี้จะเป็นต้นกำเนิดของนิวตรอนเร็ว ที่จะลดพลังงานต่อไป

สมการการฟุ้งของนิวตรอนเร็วพวกที่ 2

$$D_2\nabla^2\phi_{f_2} - \Sigma_{f_2}\phi_{f_2} + \Sigma_{f_1}\phi_{f_1} = 0$$

$$\nabla^2\phi_{f_2} - \frac{\Sigma_{f_2}}{D_2}\phi_{f_2} + \frac{\Sigma_{f_2}}{D_2}\phi_{f_1} = 0 \quad .....(2.12)$$

คำตอบของสมการ (2.12) จะหาได้โดยวิธีทางคณิตศาสตร์ แล้วใช้เงื่อนไขจากสมการ (2.6) จะได้ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วคือ

$$\phi_2(r) = \frac{S}{4\pi D_2 r}\,\frac{K_1^2}{K_2^2 - K_1^2}\left[e^{-K_1 r} - e^{-K_2 r}\right] \quad .....(2.13)$$

เมื่อ D_2 คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอนเร็วพวกที่ 2

ค่าฟลักซ์ที่ได้จากสมการ (2.13) จะกลายเป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนต่อไป

สมการการฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอนเขียนได้ดังนี้

$$\nabla^2\phi - K^2\phi + \frac{\Sigma_{f_2}}{D} \cdot \phi_{f_2} = 0 \qquad \text{......(2.14)}$$

นำเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้สำหรับหาเทอร์มาลฟลักซ์ จากสมการ (2.6) มาใช้ในการหาเทอร์มาลฟลักซ์ สำหรับสมการ (2.14) นำค่า ∇^2 จากสมการ (2.2) และ ϕ_{f_2} (r) จากสมการ (2.13) แทนลงในสมการ (2.14) จะหาคำตอบของสมการ (2.14) ได้ดังนี้

$$\phi(r) = \frac{S}{4\pi Dr} \frac{K_1^2 \cdot K_2^2}{K_2^2 - K_1^2} \left[\frac{1}{K^2 - K_1^2} \left(e^{-K_1 r} - e^{-Kr}\right) - \frac{1}{K^2 - K_2^2} \left(e^{-K_2 r} - e^{-Kr}\right) \right] \qquad \text{.....(2.15)}$$

สมการ (2.15) นี้ คือค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r สมการนี้ใช้หาค่าฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเมื่อ r = 0 โดยตรงไม่ได้ แต่อาจนำ L'Hospital Rule มาใช้เพื่อช่วยในการหาค่า จะได้ผลดังนี้

$$\phi(0) = \frac{S}{4\pi D} \frac{K_1^2 K_2^2}{K_2^2 - K_1^2} \left[\frac{1}{K+K_1} - \frac{1}{K+K_2} \right] \qquad \text{......(2.16)}$$

สมการ (2.16) เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ ณ จุดกำเนิดที่เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดที่วางอยู่ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์

2.4 ทฤษฎีเฟอร์มิเอจ[4]

เป็นทฤษฎีที่เหมาะที่จะใช้ศึกษาการกระจายของนิวตรอน ในตัวกลางที่ประกอบด้วยนิวเคลียสที่ค่อนข้างหนัก เมื่อเทียบกับนิวตรอน เช่น กราไฟต์ ซึ่งมีเลขมวลเท่ากับ 12 สำหรับตัวกลางที่ประกอบด้วยนิวเคลียสเบา เช่น น้ำ ซึ่งประกอบด้วยนิวเคลียสของไฮโดรเจน มีเลขมวลเท่ากับ 1 ใช้ทฤษฎีนี้ไม่ใคร่ได้ผลดี นิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ว เมื่อนิวตรอนนี้วิ่งไปในตัวกลาง ซึ่งประกอบด้วยนิวเคลียสที่ค่อนข้างหนัก นิวตรอนจะมีการชนกับนิวเคลียสหลายครั้งก่อนที่จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน การชนระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียส (ที่มีเลขมวลค่อนข้างหนัก) แต่ละครั้งนิวตรอนจะสูญเสียพลังงานไม่มากนัก ถือได้ว่าการวิ่งช้าลงของนิวตรอนเนื่องจากการสูญเสียพลังงานโดยชนกับนิวเคลียสเป็นไปอย่างต่อเนื่อง (continuous) ค่าเฉลี่ยของอัตราส่วนของลอการิทึม (logarithm) ของพลังงานของนิวตรอนก่อนชนกับหลังชนทุกครั้งมีค่าใกล้เคียงกัน ไม่ขึ้นกับค่าพลังงานของนิวตรอนก่อนชนแต่ละตัว ตั้งแต่นิวตรอนเร็วเมื่อเริ่มมีการชนกับนิวเคลียสจนกระทั่งกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน

สมการเฟอร์มิเอจเขียนได้ดังนี้

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau} \qquad \text{.......(2.17)}$$

---

[4]Samuel Glasstone and Alexander Sesonske, <u>Nuclear Reactor Engineering</u>. (New York: Van Nostrand Reinhold Company., 1967) 1.p.140

เมื่อ q คือความหนาแน่นของนิวตรอนพลังงาน E ที่วิ่งช้าลงใน 1 หน่วยปริมาตรต่อวินาที

$$q = \phi(E)\ \xi\ \Sigma_s^E \qquad \ldots\ldots (2.18)$$

τ คือเฟอร์มิเอจ หรือ เอจของนิวตรอนที่มีพลังงาน E โดยมีพลัง านเริ่มต้นเท่ากับ E_o มีหน่วยเป็นความยาวกำลังสอง

$$\tau(E) = \int_E^{E_o} \frac{D_f}{\xi\,\Sigma_s^E}\, dE \qquad \ldots. (2.19)$$

ξ คือ average logarithmic energy decrement per collision

D_f คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอนเร็ว

พิจารณาตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบ ขนาดอนันต์ (infinite plane source) ส่งนิวตรอนเร็วออกมามีพลังงานเดียว (monoenergetic neutrons) นิวตรอนออกมาอย่างสม่ำเสมอในอัตรา S นิวตรอน/วินาที ตัวนิวตรอนอยู่ในระนาบ YZ ผ่านตำแหน่ง x=0 ในตัวกลางเอกพันธ์ ซึ่งมีขอบเขตอนันต์ ค่า q ที่ตำแหน่งห่างจากตัวกำเนิดเท่ากับ x จึงมีค่าไม่ขึ้นกับ y และ z

สมการ (2.17) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x,\tau) - \frac{\partial q}{\partial \tau}(x,\tau) = 0 \qquad x \neq 0 \text{ และ } -\infty < x < \infty \ \ldots (2.20)$$

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับตัวกำเนิดนิวตรอน มีดังนี้ [5]

---

[5] Meghreblian and Holmes, Reactor Analysis p. 276

1) ที่ตัวกำเนิด S นิวตรอนต่อ 1 หน่วยพื้นที่ต่อ 1 หน่วยเวลา

$x = 0, \quad \tau = 0$

2) ไม่มีตัวกำเนิดอื่น นอกจากที่ $x = 0$

3) $\int_0^\infty q(x,\tau)\, dx = \frac{1}{2} S,$

$$q(-x,\tau) = q(x,\tau), \quad \tau > 0 \quad \ldots(2,21)$$

กรณีที่ตัวกำเนิดนิวตรอนอยู่ในตัวกลางที่ไม่มีการดูดกลืนนิวตรอนคำตอบของสมการ (2.20) หาได้โดยใช้วิธี ลาปลาซทรานซฟอร์ม[6] แล้วใช้เงื่อนไขของตัวกำเนิดนิวตรอน คือ สมการ (2.21) คำตอบที่ได้ คือ

$$q_{pl}(x,\tau) = \frac{S e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots(2.22)$$

$q(x,\tau)$ ในสมการ (2.22) คือความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลงที่ตำแหน่งห่างจากตัวกำเนิดแบบระนาบเท่ากับ x

สำหรับตัวกำเนิดนิวตรอนที่เป็นจุดวางอยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$ ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ จะหาความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลงได้จากคำตอบของสมการเฟอร์มิเอจ ที่ตัวกำเนิดนิวตรอนเป็นแบบระนาบมีขนาดอนันต์ คือสมการ (2.22) โดยใช้ความสัมพันธ์[7]

$$q_{pt}(x,\tau) = \frac{1}{2\pi x} \frac{d}{dx} q_{pl}(x,\tau) \quad \ldots(2.23)$$

---

[6] Ruel V. Churchill, Operational Mathematics, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill Book Company., 1958) p 328

[7] Samuel Glasstone and Milton C. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, 4 ed. (New York : D Van Nostrand Company, INC. 1955) p. 179

เมื่อ $q_{pt}(x,\tau)$ = ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลงจากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด

$q_{pl}(x,\tau)$ = ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลงจากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบขนาดอนันต์

แทนค่า $q_{pl}(x,\tau)$ จากสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.23) จะได้

$$q_{pt}(x,\tau) = \frac{S}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4\tau}} \quad \ldots(2.24)$$

ถ้าตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดอยู่ที่ตำแหน่ง x_o

$$q_{pt}(x,\tau) = \frac{S}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-x_o|^2}{4\tau}} \quad \ldots(2.25)$$

จะเห็นได้ว่า ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง ณ ตำแหน่งใด ๆ ขึ้นอยู่กับค่า x และ τ ดังนั้น ถ้าใช้ค่า τ ซึ่งเป็นเอจของเทอร์มาลนิวตรอนคำนวณหาค่าความหนาแน่นของนิวตรอนก็จะเป็นความหนาแน่นของเทอร์มาลนิวตรอนซึ่งเกิดขึ้นจากการวิ่งช้าลงของนิวตรอนที่มีพลังงานสูงกว่า

พิจารณาปริมาตรเล็ก ๆ ที่ตำแหน่ง x_o, พื้นที่หน้าตัดมีขนาด 1 ซม^2 ความหนา dx_o ซม. ต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนในปริมาตรนี้มีค่า

$$q(x_o)\, dx_o = \frac{e^{\frac{-x_o^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{1}{2}}} dx_o \quad \ldots(2.26)$$

อาศัยวิธีเคอร์เนล หาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง x สำหรับตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบขนาดอนันต์ โดยใช้สมการ (2.26) เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนที่กระจายอยู่ทั่วไปในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ ค่าของฟลักซ์ คือ

$$\phi(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-K|x-x_o|}}{2KD} \frac{e^{\frac{-x_o^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{1}{2}}} \, dx_o$$

หรือ $$\phi(x,\tau) = \frac{1}{4KD\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K|x-x_o| - \frac{x_o^2}{4\tau}} \, dx_o \quad \ldots(2.27)$$

เมื่อ $\frac{e^{-K|x-x_o|}}{2KD}$ เป็นการฟังเคอร์เนล สำหรับตัวกำเนิดแบบระนาบในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ และตัวกำเนิดนิวตรอนกรณีนี้คือ

$$\frac{e^{\frac{-x_o^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}$$

การอินทิเกรตสมการ (2.27) ทำได้โดยการแยกอินทิเกรตออกเป็น 2 ช่วงคือ

1) x_o มีค่าจาก $-\infty$ จนถึง x เมื่อ $x > x_o$ ดังนั้นจึงสามารถแทน $|x-x_o|$ ได้ด้วย $x-x_o$ และ

2) x_o มีค่าจาก x จนถึง ∞ เมื่อ $x_o > x$ กรณีนี้สามารถแทน $|x-x_o|$ ได้ด้วย x_o-x

ผลสุดท้ายได้คำตอบ คือ

$$\phi_{pl}(x,\tau) = \frac{S}{4\,KD}\, e^{K^2\tau} \left\{ e^{-Kx} \left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - K\sqrt{\tau}\right) \right] + e^{Kx} \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + K\sqrt{\tau}\right) \right] \right\} \qquad \ldots(2.28)$$

เมื่อ $\mathrm{erf}(x)$ = error function $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du$

ค่า $\phi(x,\tau)$ ในสมการ (2.28) นี้เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง x ห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบขนาดอนันต์ที่มีความแรง S นิวตรอน/วินาที ซึ่งวางอยู่ที่ระนาบ $x = 0$ ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟลักซ์ที่เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดกับค่าฟลักซ์ที่เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบ คือ

$$\phi_{pt}(x,\tau) = -\frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{d}{dx}\, \phi_{pl}(x,\tau) \qquad \ldots(2.29)$$

แทนค่า $\phi(x,\tau)$ จากสมการ (2.28) ซึ่งเป็น $\phi_{pl}(x,\tau)$ ลงในสมการ (2.29) จะได้

$$\phi_{pt}(x,\tau) = \frac{S}{8\pi Dx}\, e^{K^2\tau} \left\{ e^{-Kx} \left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - K\sqrt{\tau}\right) \right] - e^{Kx} \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + K\sqrt{\tau}\right) \right] \right\} \qquad \ldots(2.30)$$

ค่า x ในสมการ (2.30) อาจแทนได้ด้วย r ซึ่งกำหนดให้เป็นระยะระหว่างตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดที่วางอยู่ ณ ตำแหน่ง x = 0 กับตำแหน่งที่ต้องการหาค่าฟลักซ์ ฟลักซ์จะมีค่าดังนี้

$$\phi_{pt}(r,\tau) = \frac{S}{8\pi Dr} e^{K^2\tau}\left\{ e^{-Kr}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau}}-K\sqrt{\tau}\right)\right] - e^{Kr}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau}}+K\sqrt{\tau}\right)\right]\right\} \quad \ldots\ldots (2.31)$$

ค่า $\phi_{pt}(r,\tau)$ ในสมการ (2.31) เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำ - แหน่ง r ณ ตำแหน่งใด ๆ รอบตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด ที่มีความแรง S นิวตรอน/วินาที ซึ่งวางอยู่ที่ตำแหน่ง r = 0 ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์

สมการ (2.31) นี้ใช้หาค่าฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเมื่อ r = 0 โดยตรงไม่ได้ แต่อาจนำ L'Hospital Rule มาใช้เพื่อช่วยในการหาค่า จะได้ผลดังนี้

$$\phi_{pt}(0,\tau) = \frac{S}{4\pi D}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - e^{K^2\tau} \cdot K(1-\mathrm{erf}\, K\sqrt{\tau})\right] \ldots (2.32)$$

ค่าของฟลักซ์ในสมการ (2.32) เป็นฟลักซ์ ณ จุดกำเนิดที่เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดที่วางอยู่ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์

2.5 การหาเทอร์มาลฟลักซ์เฉลี่ยรอบจุดกำเนิด

ถ้าเป็นเครื่องวัดความชื้น มักมีหัววัดซึ่งมีความยาว เช่น ยาวประมาณ 40 ซม. และตัวกำเนิดนิวตรอนอยู่ที่กลางหัววัด นิวตรอนวิ่งเข้าหัววัดตลอดแนว ในกรณีนี้จะหาเทอร์มาลฟลักซ์เฉลี่ยได้ดังนี้

$$\bar{\phi}_D = \frac{1}{a}\int_0^a \phi_{th}(r)\,dr \quad \ldots\ldots (2.33)$$

เมื่อ a คือความยาวครึ่งหนึ่งของหัววัด

โดยการใช้ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวก นำค่า $\phi_{th}(r)$ จากสมการ (2.7) แทนลงในสมการ (2.33) จะได้ค่าเทอร์มาลฟลักซ์เฉลี่ย

$$\bar{\phi}_D = \frac{1}{a}\,\frac{S}{4\pi D}\,\frac{L^2}{L_f^2-L^2}\left[E_1\left(\frac{a}{L}\right) - E_1\left(\frac{a}{L_f}\right) + \ln\left(\frac{L_f}{L}\right)\right] \quad \ldots(2.34)$$

ถ้าจะนำค่า $\phi_{th}(r)$ จากทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 3 พวกในสมการ (2.15) แทนลงในสมการ (2.33) จะหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์เฉลี่ยได้ คือ

$$\bar{\phi}_D = \frac{1}{a}\,\frac{S}{4\pi D}\,\frac{L^2}{L_1^2-L_2^2}\left[\frac{L_1^2}{L_1^2-L^2}\left\{E_1\left(\frac{a}{L}\right) - E_1\left(\frac{a}{L_1}\right) + \ln\left(\frac{L_1}{L}\right)\right\} - \frac{L_2^2}{L_2^2-L^2}\left\{E_1\left(\frac{a}{L}\right) - E_1\left(\frac{a}{L_2}\right) + \ln\left(\frac{L_2}{L}\right)\right\}\right] \quad \ldots(2.35)$$

เมื่อ

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$$

2.6 <u>วิธีหาค่าคงที่ต่าง ๆ จากทฤษฎี</u>

2.6.1 <u>การหาความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนช้า (L)</u>

ขณะที่นิวตรอนเร็ววิ่งผ่านวัสดุลดความเร็ว ทำให้ความเร็วลดลง ระยะทางที่นิวตรอนเร็วเคลื่อนที่จนเป็นเทอร์มาลนิวตรอนเรียกความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว (L_f) ขณะที่นิวตรอนเร็วกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอนแล้ว เทอร์มาลนิวตรอนเหล่านั้นจะฟุ้งไปในตัวกลาง มีความยาวของการฟุ้งของนิวตรอน (L) หาได้โดยใช้สมการการฟุ้ง

กรณีที่อยู่ในสภาวะคงที่และไม่มีตัวกำเนิดนิวตรอนอยู่ในตัวกลาง สมการการฟุ้งเขียนได้ว่า

$$D\nabla^2\phi - \phi\Sigma_a = 0 \qquad \ldots(2.36)$$

ค่าของฟลักซ์ที่เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่เป็นจุดในตัวกลางขนาดอนันต์ คือ

$$\phi = \frac{q\,e^{-\frac{r}{L}}}{4\pi Dr}$$

เมื่อ q คือ ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง (slowing down density) อัตราการดูดกลืนนิวตรอนต่อ 1 หน่วยปริมาตรที่ตำแหน่ง r ห่างจากตัวกำเนิด คือ $\phi\Sigma_a$

ค่าเฉลี่ยของระยะทางกำลังสองที่นิวตรอนวิ่งไปก่อนที่จะถูกดูดกลืน

$$\overline{r^2} = \frac{\int r^2\,\phi\Sigma_a \cdot dV}{\int \phi\Sigma_a \cdot dV} = \frac{\int r^2\,\phi\, dV}{\int \phi \cdot dV}$$

โดยการแทนค่า ϕ และ $dV = 4\pi r^2\, dr$, และอินทิเกรตจาก $r =$ จนถึง $r = \infty$ จะได้

$$\overline{r^2} = 6L^2$$

และ $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ [8] $L^2 = \frac{\lambda_t \cdot \lambda_a}{3}$

---

[8] Murray, Nuclear Reactor Physics, p. 66

เมื่อ λ_t คือระยะทางเฉลี่ยแบบทรานสปอร์ต (transport mean free path) มีค่าเท่ากับ $\frac{\lambda_s}{1-\overline{\mu}}$

$$L^2 = \frac{\lambda_a \lambda_s}{3(1-\overline{\mu})} \qquad ...(2.37)$$

$\overline{\mu}$ คือค่าเฉลี่ยของมุมที่กระจายไปต่อการชน 1 ครั้ง ไม่ขึ้นกับพลังงาน สำหรับวัสดุที่ใช้ลดความเร็วเป็นของผสม

$$\overline{\mu} = \frac{\frac{2}{3} \Sigma_i \frac{N_i \sigma_s^i}{A_i}}{\Sigma_i N_i \sigma_s^i} \qquad ...(2.38)$$

เมื่อ A_i คือ เลขมวล (mass number) ของแต่ละธาตุ

σ_s^i เป็นภาคตัดขวางสำหรับการกระเจิงต่ออะตอมของธาตุที่ i

N_i เป็นจำนวนอะตอมต่อ 1 หน่วยปริมาตรของธาตุที่ i

$$N_i = \frac{\rho N_a \nu_i}{M} \qquad ...(2.39)$$

เมื่อ ν_i เป็นจำนวนอะตอมของธาตุที่ i ในโมเลกุลของของผสม

M เป็นน้ำหนักโมเลกุลของของผสม

2.6.2 <u>ความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว (L_f) กรณีทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวกและทฤษฎีเฟอร์มิเอจ</u>

การหา L_f ทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 [9]

กำหนดให้ E_1 เป็นพลังงานของนิวตรอนก่อนชนกับนิวเคลียส

E_2 เป็นพลังงานของนิวตรอนหลังชนกับนิวเคลียส

$\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{av}$ คืออัตราส่วนของพลังงานเฉลี่ยก่อนชนและหลังชน

ถ้านิวตรอนเร็วพลังงานเดิม E_i ชนกับนิวเคลียส N ครั้ง ทำให้พลังงานลดลงจนเหลือ E_f จะเขียนได้ว่า

$$\left\{\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{av}\right\}^N = \frac{E_i}{E_f}$$

หรือ

$$N = \frac{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)}{\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{av}} \qquad .....(2.40)$$

$\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{av}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ logarithm ของพลังงานที่สูญเสียไปต่อการชน 1 ครั้ง แทนได้ด้วย

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1}$$

---

[9] D.J. Littler, and J.F. Raffle, An Introduction to Reactor Physics, (New York : Pergamon Press., 1957) p. 61

และ $\approx \dfrac{2}{A+\frac{2}{3}}$, $A > 10$ ...(2.41)

เมื่อ A เป็นเลขมวลของตัวกลางที่ใช้ลดความเร็ว

เมื่อวัสดุที่ใช้ลดความเร็วเป็นของผสม

$$\xi \quad \frac{\Sigma_i N_i \sigma_s^i \xi_i}{\Sigma_i N_i \sigma_s^i} \qquad ...(2.42)$$

โอกาสที่นิวตรอนวิ่งไปได้ระยะทาง s โดยไม่มีการชนกับนิวเคลียส แล้วจะชนกับนิวเคลียสในระยะทาง ds ต่อมา คือ

[10] $e^{-\left(\frac{s}{l_s}\right)} \dfrac{ds}{l_s}$

ถ้า $(s^2)_{av}$ = ระยะทางเฉลี่ยกำลังสองที่นิวตรอนวิ่งไปทั้งหมดตามทิศทางที่กระเจิง

เมื่อ $\Sigma_s >> \Sigma_a$

$$(S^2)_{av} = \int_0^\infty S^2 \, e^{-\frac{S}{l_s}} \frac{ds}{l_s} \qquad ...(2.43)$$

---

[10] Ibid. p. 76

โดยการอินทิเกรต จะได้

$$(s^2)_{av} = 2\lambda_s^2 \qquad ...(2.44)$$

และ r^2 เป็นระยะทางกำลังสองที่นิวตรอนเริ่มเคลื่อนที่พลังงาน E_i จนกระทั่งพลังงานลดลงเป็น E_f โดยมีการชน N ครั้ง

$$(r^2)_{av} = N(s^2)_{av} \qquad ...(2.45)$$

แทนสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.43)

$$(r^2)_{av} = 2N\lambda_s^2 \qquad ...(2.46)$$

โดยอาศัยทฤษฎีทรานสปอร์ต (Transport theory) สำหรับการกระเจิงของนิวตรอนที่ไม่กระจายออกรอบตัว (anisotropic)

$$\lambda_t = \frac{\lambda_s}{1-\bar{\mu}} \qquad ...(2.47)$$

เมื่อ λ_t เป็นระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเคลื่อนที่โดยใช้ทฤษฎีทรานสปอร์ต (Transport mean free path) และ $\bar{\mu}$ คือค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมที่กระเจิงไป สมการ (2.44) เขียนได้ว่า

$$(r^2)_{av} = \frac{2N.\ \lambda_s^2}{1-\bar{\mu}} \qquad ...(2.48)$$

และ

$$L_f^2 = \frac{(r^2)_{av}}{6}$$

ความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็วก็คือ

$$L_f^2 = \frac{N^{fast}\lambda_s^2}{3(1-\bar{\mu})} \qquad \ldots(2.49)$$

เมื่อ

$$N^{fast} = \frac{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)}{\xi}$$

<u>วิธีที่ 2</u> วิธีของฟลุกก์-ติทเติล (Flugge -Tittle method)[11]

การหาความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว โดยวิธีนี้ได้มาจากการทดลองโดยใช้ของผสมระหว่างธาตุหนักกับไฮโดรเจน ภาคตัดขวางสำหรับการกระเจิงของธาตุต่าง ๆ แปรเปลี่ยนอย่างรวดเร็วตามพลังงาน

ถ้า S เป็นต้นกำเนิดของนิวตรอนพลังงาน E_1 วางอยู่ที่จุดกำเนิด ฟลักซ์ที่ r คือ

$$\phi(r) = \frac{S\, e^{-\frac{r}{\lambda_1}}}{4\pi r^2} \qquad \ldots(2.50)$$

เมื่อ λ_1 คือระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเคลื่อนที่

อัตราการชนของนิวตรอนกับนิวเคลียสของตัวกลางต่อ 1 หน่วยปริมาตรที่ r $= \phi\Sigma_s$

---

[11] Raymon L. Murray, <u>Nuclear Reactor Physics</u>, (N.J: Prentice-Hall, INC., 1957) p. 278-279

ระยะทางเฉลี่ยกำลังสองสำหรับการชนครั้งแรก

$$\overline{r_1^2} = \frac{\int \phi \ \Sigma_s r^2 \, dV}{\int \phi \ \Sigma_s \cdot dV} = 2 \lambda_1^2$$

นิวตรอนที่ผ่านการชนครั้งแรกนี้ จะทำตัวเหมือนกับเป็นต้นกำเนิดที่ r มีความแรง $\phi \Sigma_s$ ต่อ 1 หน่วยปริมาตรต่อเวลา และมีพลังงานเฉลี่ย $E_2 = \frac{E_1}{e}$ หลังจากการชนกับไฮโดรเจนแล้ว

โดยการรวม $\overline{r^2}$ จากการชนหลาย ๆ ครั้ง จนนิวตรอนมีพลังงานประมาณ 100 KeV

$$r^2 \ (E_1 - 100 \text{ KeV}) = 2 \lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2 + 2 \lambda_3^2 \ \ldots\ldots.$$

ระยะทางที่นิวตรอนวิ่งช้าลงหาได้จาก $L_f^2 = \frac{\overline{r^2}}{6}$

$$L_f^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots\ldots..}{3} \qquad \ldots(2.51)$$

จากการคำนวณหาระยะทางเฉลี่ยที่พลังงาน i (λ_i) เป็นฟังก์ชั่นของระยะทางเฉลี่ยในน้ำ (λ) ในไฮโดรเจน (λ_H) และในออกซิเจน(λ_O) จะเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} = 2.155 - 0.119 \frac{\lambda_O}{\lambda_H} \qquad \ldots..(2.52)$$

ความยาวของการฟุ้งกำลังสองตั้งแต่พลังงาน 5 MeV จนถึงประมาณ 100 KeV หาได้จาก

$$L_f^2 = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{3}$$

ในการคำนวณ กำหนดให้พลังงานนิวตรอนที่ออกจากต้นกำเนิด 5 MeV พลังงานลดลงเป็น $E_2 = \frac{E_1}{e}$, $E_3 = \frac{E_2}{e}$ และ $E_4 = \frac{E_3}{e}$ หาค่า L_f^2 แต่ละพลังงานแล้วนำมารวมกัน

จากพลังงาน E_4 จนถึงพลังงานเทอร์มาล (เข้าใกล้ศูนย์)คำนวณโดยวิธีหาค่าเฉลี่ยจากกราฟทั้งสองวิธีโดยคิดว่าที่พลังงาน 0 , $L_f^2=0$ และจากพลังงาน E_4 จนถึง 0 มีการลดพลังงานประมาณ 12 ครั้ง รวม L_f^2 ทุกพลังงานนำมาใช้ในการคำนวณต่อไป

จากการพิจารณาหาค่า L_f^2 ทั้งวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 ได้คำนวณโดยใช้นิวตรอนที่เกิดจากฟิชชัน พลังงาน 2 MeV สำหรับของผสมระหว่างอลูมิเนียมกับน้ำเพื่อนำค่า L_f^2 ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลองในหนังสืออ้างอิงเล่มที่ 3 ปรากฏว่า วิธีที่ 1 ได้ผลใกล้เคียง กับผลที่ได้จากการทดลองดังตารางที่ 2.1 จึงนำ L_f^2 ที่ได้โดยใช้วิธีที่ 1 มาใช้ในการคำนวณเพียงวิธีเดียว

Volume fraction Al : H_2O	L_f^2 วิธีที่ 1	L_f^2 วิธีที่ 2	ผลที่ได้จากการทดลอง[12]
0.5	50.87	67.48	53.9
0.652	57.01	76.77	60.25

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า L_f^2 ที่คำนวณได้ตามทฤษฎี ทั้งวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง

[12] Ibid ., p 124

2.5.3 การหาความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็วพวกที่ 1 และพวกที่ 2[13]

วิธีนี้ได้มาจากหนังสืออ้างอิง[13] โดยแบ่งพลังงานของนิวตรอนออกเป็น 7 กลุ่ม แล้วรวมกันเหลือ 2 กลุ่ม มีความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว กลุ่มที่1 คือ L_1 มีพลังงาน 3 ช่วงด้วยกัน ตั้งแต่ 4.5 MeV จ ถึง 2.00 MeV และกลุ่มที่ 2 คือ L_2 มีพลังงานจาก 2.00 MeV จนถึง 0.025 eV โดยถือหลักว่า L_1 และ L_2 จะต้องมีค่าใกล้เคียงกัน อาจจะขียนได้ดังนี้

$$L_1^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\ln \frac{E_{up,i}}{E_{low,i}}}{3(\xi\,\Sigma_s)(\Sigma_s(1-\bar{\mu}))_i}$$

$$L_2^2 = \sum_{i=4}^{7} \frac{\ln \frac{E_{up,i}}{E_{low,i}}}{3(\xi\,\Sigma_s)(\Sigma_s(1-\bar{\mu}))_i} \qquad .....(2.53)$$

ในการคำนวณหาค่า L_f^2 ได้นำค่าคงที่จากตารางที่ **3.2** มาใช้ โดยใช้พลังงานเริ่มต้น 4.5 MeV

---

[13] Ølgaard, On the Theory of the Neutronic Method for Measuring the Water Content in Soil, (January 1965) 1.p 14-15