

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการ

2.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและหลักการ ระเบียบวิธีไร้เมช(meshless methods)เพื่อใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นใน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุด(moving least square: MLS) และเรเดียลพ้อยอินเทอโพลชัน(radial point interpolation :RPIM) อีกทั้งการกำหนดเงื่อนไขของเขตสำหรับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละแบบซึ่งมีวิธีการที่แตกต่างกัน

2.2 ท่อนำคลื่น(waveguide)

ดังนั้นเราทราบว่าในแบบเอกพันธ์นั้น มีอยู่ 2 โมดดังนี้ ในโมด แรก สิ่งที่ไม่มีส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในทิศทางการแพร่กระจายซึ่งเรียกว่าโมดสนามแม่เหล็กตามขวาง(Transverse Magnetic Mode:TM_Mode) ในทางตรงกันข้ามในโมดที่ไม่มีสนามไฟฟ้าประกอบอยู่ด้วย ในทิศทางการแพร่กระจาย เรียกว่าโมดสนามไฟฟ้าตามขวาง(Transverse Electric Mode:TE-Mode) สมมติว่าขอบเขตของแกนของท่อนำคลื่น ตามแนวแกน z และที่มีการแพร่กระจายในทิศทางของ z สนามในท่อนำคลื่น สามารถแสดงเป็นได้ดังนี้

$$E(x, y, z) = (x, y)e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (2.1)$$

$$H(x, y, z) = H(x, y)e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (2.2)$$

โดยที่ ω แสดงถึงมุมของความถี่ และ k_z แสดงถึง ค่าคงที่การแพร่กระจาย(propagation constant) การแทนที่ลงในสมการที่ไม่มีแหล่งกำเนิดของแมกเวลล์(Maxwell)สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = jk_z E_y - j\omega\mu H_x \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -jk_z E_y - j\omega\mu H_y \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -jk_z H_y + j\omega\epsilon E_x \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -jk_z H_x - j\omega\epsilon E_y \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (2.8)$$

ที่แฟคเตอร์ $e^{j(\omega t - k_z z)}$ ถูกยกเลิก จากที่ทราบค่าที่ชัดเจนของ E_z และ H_z โดยที่ E_y และ H_x สามารถหาค่าได้จากสมการ และ เช่นเดียวกันกับ E_x และ H_y ก็สามารถหาค่าได้จากสมการ และการหาค่าการลดลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ไปยังการหาค่าของ E_z และ H_z ทำให้ได้สมการของเฮลโฮลท์ (Helmholtz) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_t^2 \phi = 0 \quad (2.9)$$

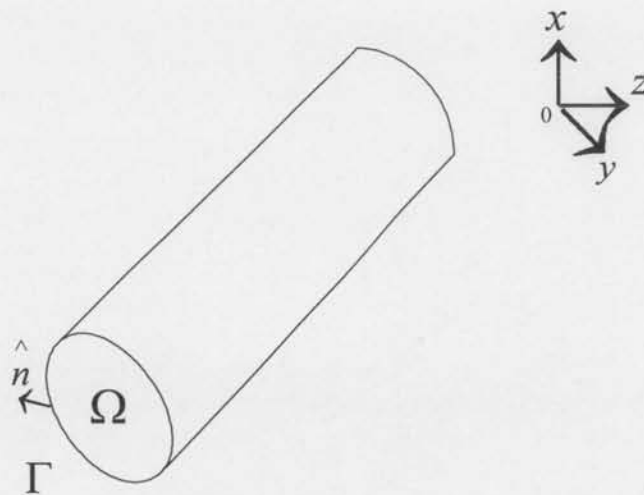
ที่ $k_t^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_z^2$ สำหรับกรณีของ TM เมื่อ $\phi = E_z$ ดังนั้น ϕ ทำให้เกิดเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังของท่อนำคลื่น

$$\phi = 0 \quad \text{บน} \quad \Gamma \quad (2.10)$$

ในทางตรงกันข้ามสำหรับกรณีของ TE เมื่อ $\phi = H_z$ ดังนั้น ϕ ให้เกิดเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังของท่อนำคลื่น

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{บน} \quad \Gamma \quad (2.11)$$

ที่ Γ แสดงถึงกรณีของเส้นแบ่งเขตของผนังท่อนำคลื่น ที่หน่วยของ \hat{n} เป็นไปตามรูปที่ (2.1)



รูปที่ 2.1 ภาคตัดขวางของท่อनाคลื่น

2.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เป็นการวิเคราะห์ปัญหาโดยที่ไม่ต้องมีการแบ่งขอบเขตบริเวณของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยประกอบกัน (discretization) และกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างชิ้นส่วนย่อยนั้น

ระเบียบวิธีไฟไนต์จะใช้เฉพาะกลุ่มของโนดที่กระจายอยู่ในขอบเขต โดยที่กลุ่มของโนดที่กระจายกันอย่างอิสระจะไม่ได้อยู่ในรูปแบบของเมชเพราะฉะนั้นจึงไม่ต้องกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างโนดสำหรับการประมาณค่าในช่วง (interpolation) หรือการประมาณค่า (approximation) หลักการพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์มีดังนี้

- กำหนดขอบเขตของปัญหา
- กำหนดโนด
- สร้างฟังก์ชันรูปร่างจากกลุ่มของโนดที่อยู่ใน ซัพพอร์ตโดเมน (support domain) ซึ่งเป็นบริเวณที่ถูกกำหนดเพื่อหาจำนวนโนดที่อยู่ในบริเวณนั้นเพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชันรูปร่าง
- รวมระบบสมการในแต่ละซัพพอร์ตโดเมน
- หาผลเฉลยของระบบสมการเมทริกซ์

2.3.1 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

แนวคิดของระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างคือ การพยายามทำให้เศษตกค้างซึ่งก็คือผลต่างระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยทดสอบมีค่าน้อยที่สุด หรือศูนย์ แต่ในความเป็นจริงไม่สามารถทำให้เป็นศูนย์ได้ ทำได้เพียงโดยประมาณให้ใกล้เคียง

$$R = L\tilde{\phi} - f \neq 0 \quad (2.12)$$

ซึ่งในระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะใช้เงื่อนไข

$$R = \int_{\Omega} w_r d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่จะทำให้ $\tilde{\phi} = \phi$ แล้วบังคับให้ $R = 0$ ภายในบริเวณ Ω และใช้ระเบียบวิธีกาลูเออร์คิน (Galerkin's method) ในการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยฟังก์ชันทดสอบใช้เหมือนกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักซึ่งเมื่อพิจารณาสมการ (2.13) โดยใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยการคูณด้วยฟังก์ชันทดสอบ ϕ แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งขอบเขตของปัญหาได้

$$\iint_{\Omega} \phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_r^2 \phi \right) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

โดยการใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์สมการ (2.14) สามารถเขียนได้เป็น

$$\oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_r^2 \phi \phi \right) d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

โดยที่ $\partial \phi / \partial n$ คืออนุพันธ์เชิงตั้งฉากตามขอบ $d\Gamma$ ซึ่งพจน์ทางขวาหมดไปโดยที่ T เป็นศูนย์บนผนังตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (perfect electric conductor: PEC) และ $\partial \phi / \partial n$ เป็นศูนย์บนผนังตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (perfect magnetic conductor: PMC) ซึ่งสามารถพิจารณาได้เป็น

$$\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k_t^2 \phi^2 \right) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} - k_t^2 N_i N_j \right) d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

$j = 1, 2, \dots, n$

เมื่อ n เป็นจำนวนโนดทั้งหมดที่อยู่ในบริเวณย่อยที่พิจารณา
ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของเมตริกซ์เป็น

$$[A][\phi] = k_t^2 [B][\phi] \quad (2.18)$$

โดยที่

$$A = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$B = N_i N_j \quad (2.20)$$

จาก $k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2$ สมการ (2.17) เขียนได้เป็น

$$[A][\phi] = (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) [B][\phi] \quad (2.21)$$

$$\{[A] - (\omega^2 \mu \varepsilon) [B]\} [\phi] = (-k_z^2) [B][\phi] \quad (2.22)$$

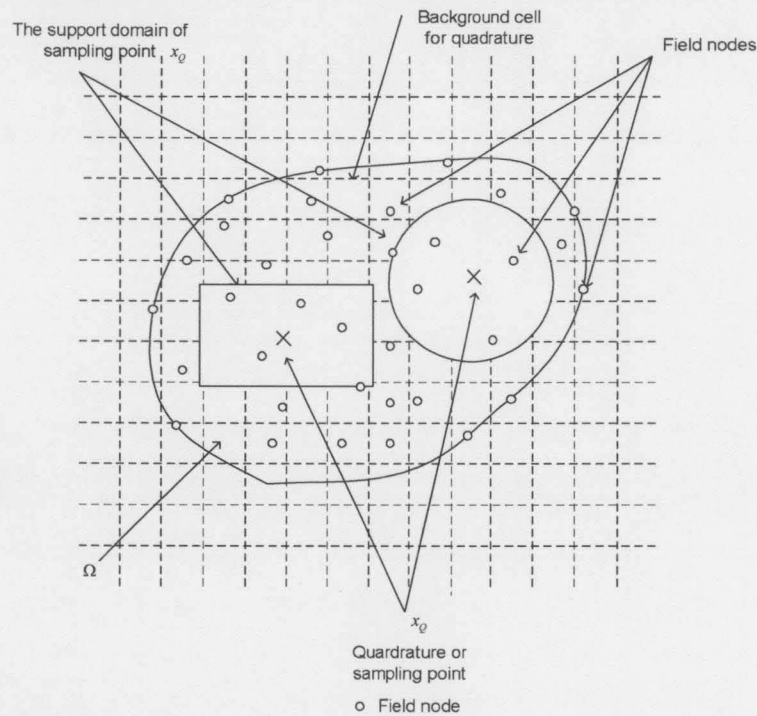
2.4 ซัพพอร์ทโดเมน(Support domain)

ความถูกต้องของการประมาณค่าสำหรับจุดที่สนใจขึ้นอยู่กับโนดที่อยู่รอบๆจุดนั้น ดังนั้น ซัพพอร์ทโดเมน ที่เหมาะสมจะต้องแน่ใจว่ามีประสิทธิภาพและมีความถูกต้อง สำหรับโนดที่สนใจ x_Q ขนาดของ ซัพพอร์ทโดเมน สามารถหาได้โดยความสัมพันธ์

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (2.23)$$

โดยที่ α_s คือค่าคงที่

d_c คือระยะห่างระหว่างโนดที่อยู่ใกล้โนด x_Q



รูปที่ 2.2 จุดศูนย์กลางของ ซัพพอร์ทโดเมนหรือจุดที่ใช้ในการหาค่าอินทิเกรท

ถ้าการกระจายของโนดเป็นแบบเดียวกันค่าของ d_c จะหาได้โดยง่ายคือระยะห่างระหว่างโนด แต่เมื่อโนดกระจายกันอย่างอิสระ d_c จะเป็นค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างโนดในซัพพอร์ทโดเมน

ค่าคงที่ α_s ของซัพพอร์ทโดเมนซึ่งเป็นตัวกำหนดขนาดของซัพพอร์ทโดเมน ซึ่งโดยทั่วไปจะมีค่าประมาณ $\alpha_s = 2 \sim 3$
ค่าเฉลี่ยระยะห่างระหว่างโนด

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s} - 1}} \quad (2.24)$$

A_s คือพื้นที่ของ ซัพพอร์ทโดเมน ซึ่งค่าที่ใช้เป็นค่าประมาณของพื้นที่ที่พิจารณา
 n_{A_s} คือจำนวนของโนดใน ซัพพอร์ทโดเมน

2.5 ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก(weight function)

ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักมีความสำคัญในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งฟังก์ชันมีลักษณะเป็นรูปประซังและมีค่าเป็นบวกซึ่งจะมีค่ามากที่สุดที่จุดที่พิจารณาและมีค่าลดลงเรื่อยๆเมื่อห่างจากจุดที่พิจารณาซึ่งฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักนี้จะมีค่าเฉพาะตามจุดที่พิจารณาและจะมีค่าขึ้นอยู่กักระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด

ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักมีความสำคัญซึ่งมีคุณสมบัติคือ

$w(x - x_i) > 0$ เมื่ออยู่ใน ซัพพอร์ทโดเมน

$w(x - x_i) = 0$ เมื่ออยู่ภายนอก ซัพพอร์ทโดเมน

$w(x - x_i)$ มีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอเมื่อห่างจากจุด x ที่ พิจารณา

$w(x - x_i)$ มีความราบเรียบโดยเฉพาะเมื่ออยู่บน Ω_s

ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่นิยมใช้คือ

Cubic spline

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \equiv w(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3, r \leq 1/2 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - (4/3)r^3, 1/2 \leq r \leq 1 \\ 0, r > 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Quartic spline

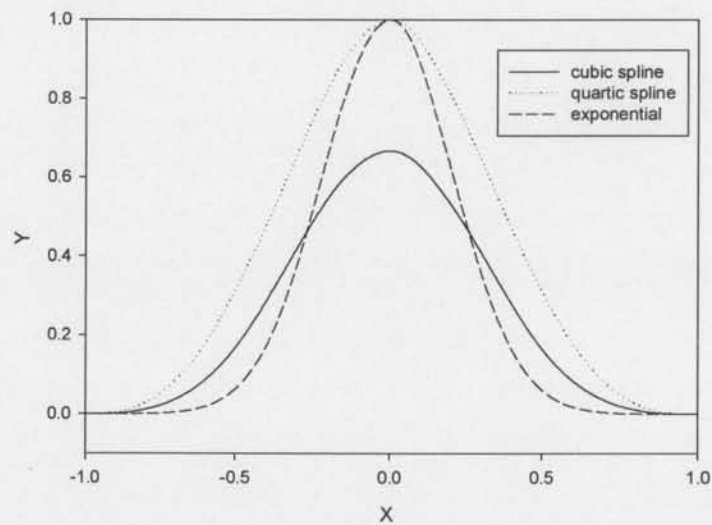
$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Exponential

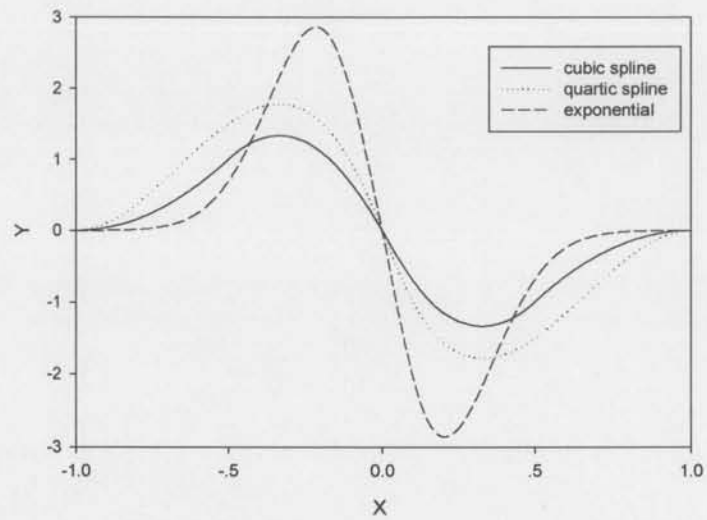
$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2}, & r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

ซึ่งค่า α เป็นค่าคงที่ ที่กำหนดรูปร่างของฟังก์ชันและ

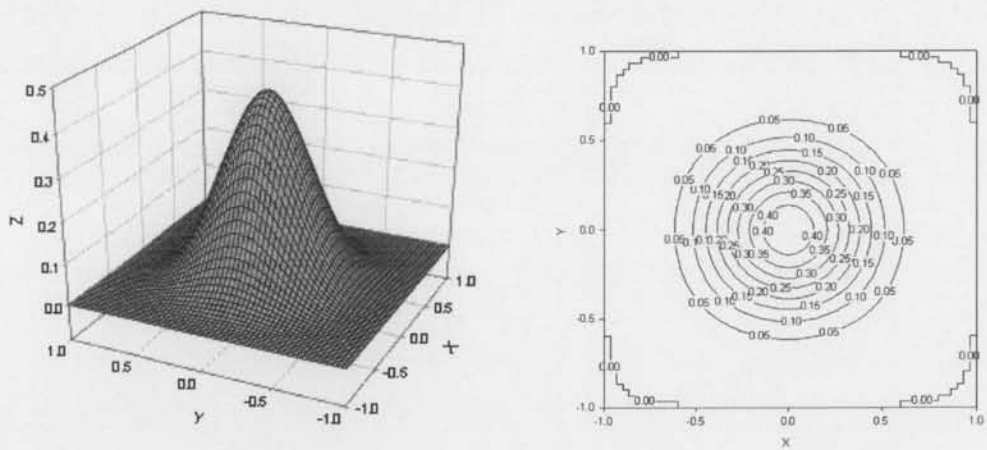
$$r = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{r_w} \quad (2.28)$$



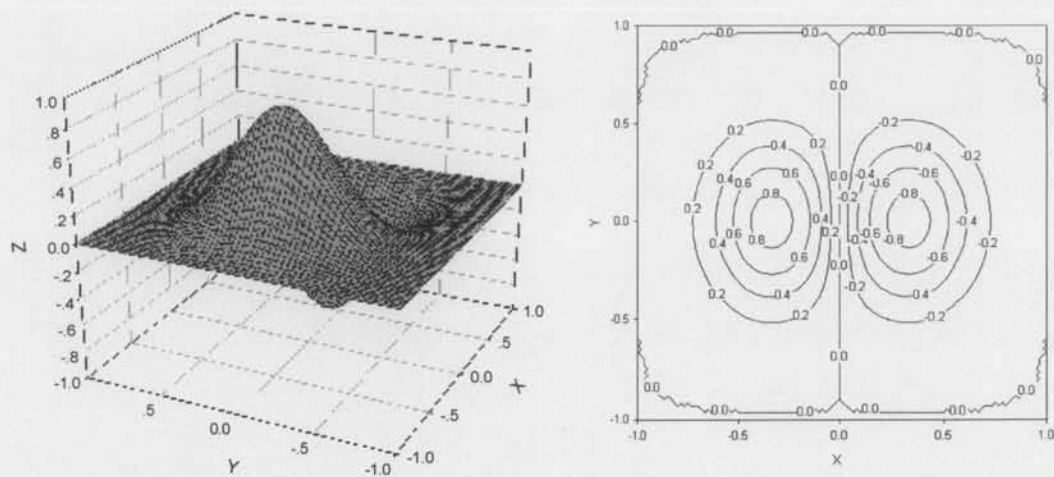
รูปที่ 2.3 เปรียบเทียบรูปร่างของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักใน 1 มิติ



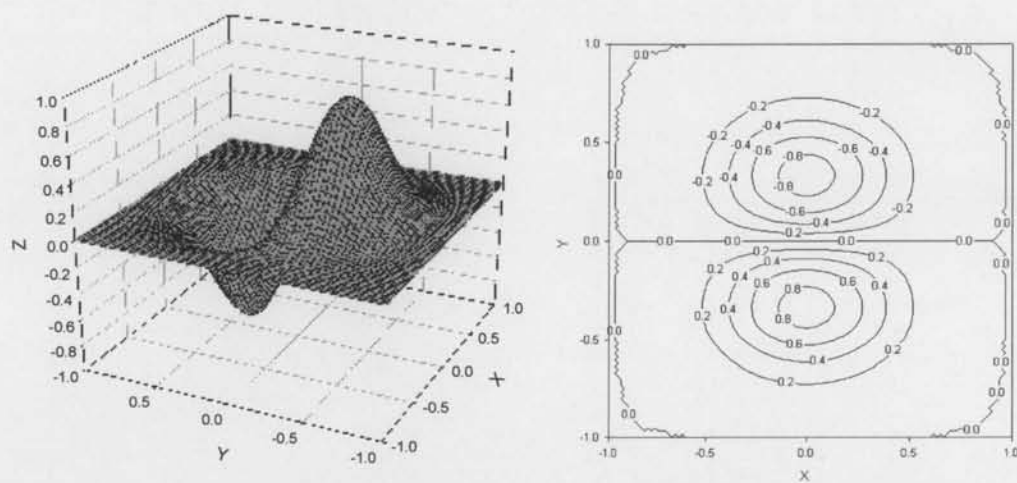
รูปที่ 2.4 เปรียบเทียบรูปร่างของอนุพันธ์ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักใน 1 มิติ



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันรูปร่างของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก cubic spline ที่โนด (0,0) โดยใช้ 25 โหนด
ในระนาบ 2 มิติ และ คอนทัวร์พล็อต(countour plot)



รูปที่ 2.6 ฟังก์ชันรูปร่างของอนุพันธ์ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก cubic spline เทียบกับ x ที่โนด $(0,0)$
โดยใช้ 25 โหนดในระนาบ 2 มิติและ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันรูปร่างของอนุพันธ์ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก cubic spline เทียบกับ y ที่โนด $(0,0)$
โดยใช้ 25 โหนดในระนาบ 2 มิติและคอนทัวร์พล็อต

2.6 ฟังก์ชันรูปร่าง(Shape Function)

2.6.1 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุด(moving least square:mls)

ค่าประมาณ $u^h(x)$ สำหรับฟังก์ชัน $u(x)$ ถูกกำหนดโดยโพลีโนเมียลอันดับ m และฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $a(x)$ อันดับของฟังก์ชันโพลีโนเมียลถูกกำหนดโดยอันดับของส่วนประกอบ ซึ่งตัวแปรไม่ทราบค่า $a_j(x)$ แปรตามค่า x การประมาณค่าแบบนี้เป็นที่รู้จักกันดีว่าเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุด(mls) ซึ่งเป็นการประมาณค่าในช่วงที่จำกัด ซึ่งการประมาณค่าในบริเวณเฉพาะที่กำหนดโดย

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)a_j(x) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}(x) \quad (2.29)$$

โดยที่ $\mathbf{p}(x)$ เป็นฟังก์ชันในระบบโคออดิเนต (x, y) สำหรับปัญหาใน 2 มิติ และ m คือจำนวนของฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบ(basis function) ซึ่งมักจะใช้ฟังก์ชันโมโนเมียลจากสามเหลี่ยมปาสคาล อย่างไรก็ตามสามารถเพิ่มฟังก์ชันบางอย่างเพื่อเพิ่มคุณสมบัติของฟังก์ชันได้ และ $\mathbf{a}(x)$ กำหนดโดย

$$\mathbf{a}^T(x) = [a_0(x) \ a_1(x) \ a_2(x), \dots, a_m(x)] \quad (2.30)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ $\mathbf{a}(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ซึ่ง \mathbf{a} สามารถหาได้โดยการหาค่าเฉลี่ยต่ำสุดจากสมการ

$$J = \sum_{i=1}^n w(x-x_i)[\mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{a}(x) - u_i]^2 \quad (2.31)$$

โดยที่ n คือจำนวนโนดรอบๆบริเวณที่จุด x ที่พิจารณาซึ่ง $w(x-x_i) \neq 0$ และ u_i คือค่าของ u ที่จุด $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$

หาค่าต่ำสุดของ J เทียบกับ \mathbf{a} ได้

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)\mathbf{u} \quad (2.33)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{l=1}^n w(x-x_l) \mathbf{p}(x_l) \mathbf{p}^T(x_l) \\ &= w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_0 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_0 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_1 \\ y_1 & x_2 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \dots + w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_0 \\ x_n & x_n^2 & x_n y_1 \\ y_1 & x_n y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

และ

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= [w(x-x_1) \mathbf{p}(x_1), w(x-x_2) \mathbf{p}(x_2), \dots, w(x-x_n) \mathbf{p}(x_n)] \\ &= [w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_1 \end{bmatrix}, \dots, w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_1 \end{bmatrix}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

ซึ่งได้การประมาณค่าแบบ MLS เป็น

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^n \phi_l(x) u_l \quad (2.36)$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่าง $\phi_l(x)$ นิยามโดย

$$\phi_l(x) = \sum_{j=0}^m p_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{jl} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_l \quad (2.37)$$

ซึ่ง m คืออันดับของโพลิโนเมียล $p(x)$ ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างสามารถหาได้โดย

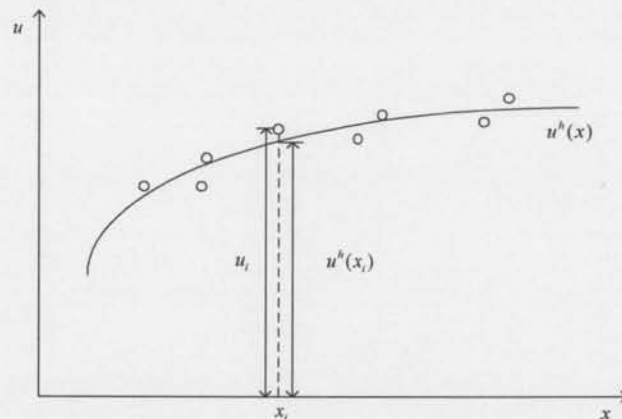
$$\begin{aligned} \Phi_{l,x} &= (\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_l)_x \\ &= \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_l + \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^{-1})_{,x} \mathbf{B}_l + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{l,x} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}_{l,x}(x) = \frac{dw}{dx} (x-x_l) \mathbf{p}(x_l) \quad (2.39)$$

ซึ่ง $\mathbf{A}_{,x}^{-1}$ หาได้โดย

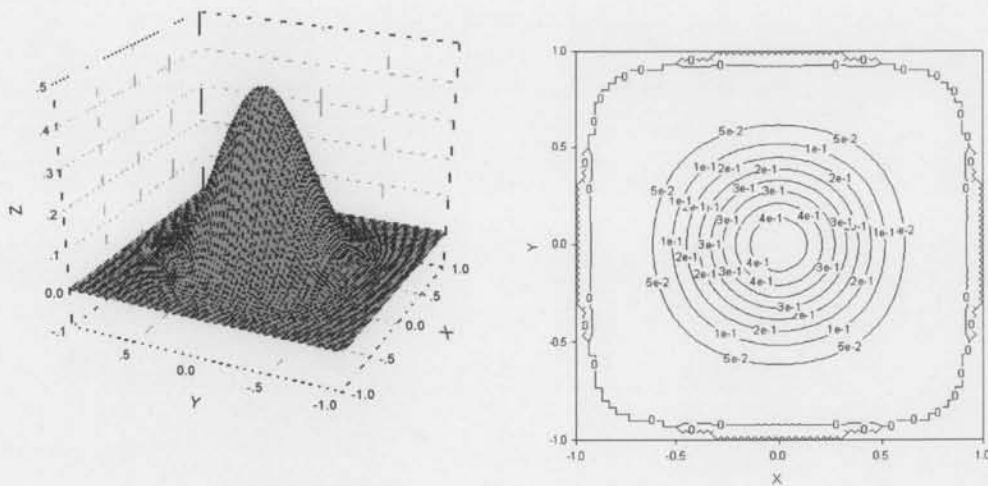
$$\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{,x} &= \sum_{l=1}^n w(x-x_l) \mathbf{p}(x_l) \mathbf{p}^T(x_l) \\ &= \frac{dw}{dx}(x-x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \frac{dw}{dx}(x-x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} + \dots, \\ &+ \frac{dw}{dx}(x-x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

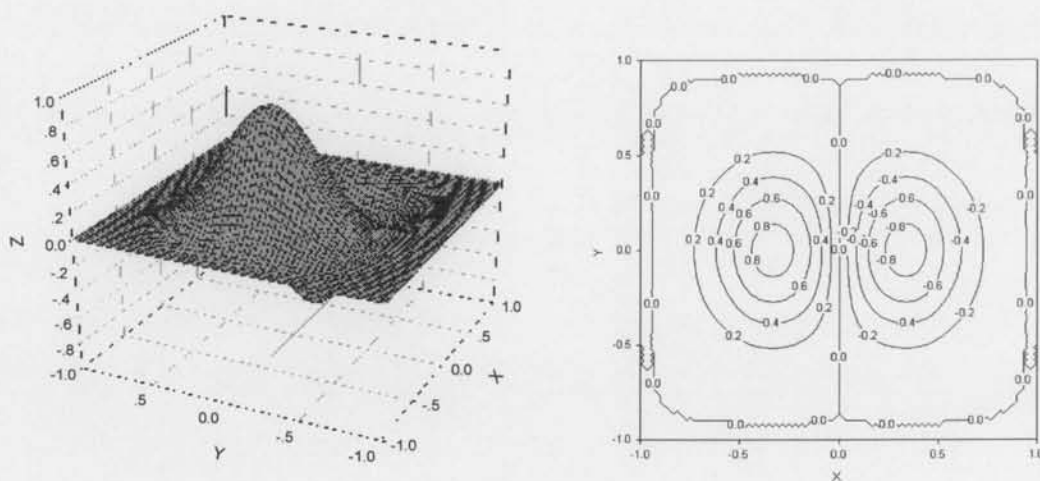


รูปที่ 2.8 ค่าประมาณของ $u^h(x)$ ในการประมาณค่าแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุด

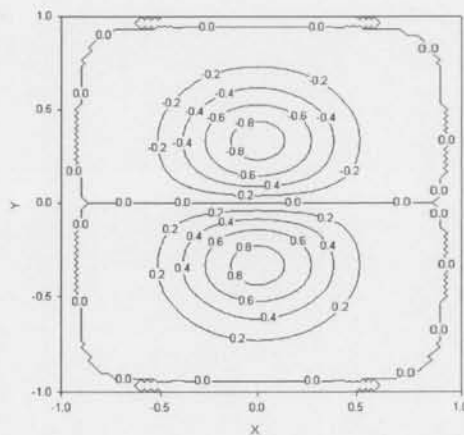
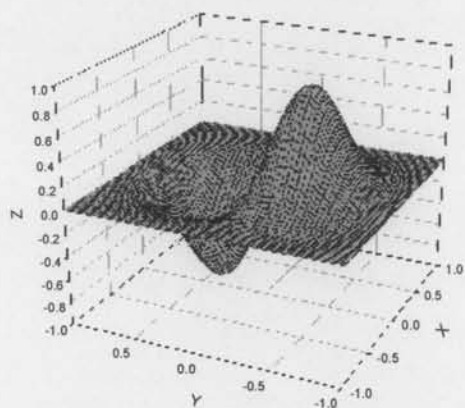
เป็นที่สังเกตว่าฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุดไม่มีคุณสมบัติของ โครเนกเกอร์เดลตาฟังก์ชัน (kronecker delta function) กล่าวคือ $\Phi_l(x_j) \neq \delta_{lj}$ เพราะฉะนั้นจึงไม่เป็นการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ดังนั้นจึงเรียกว่าเป็นการประมาณค่า (approximation)



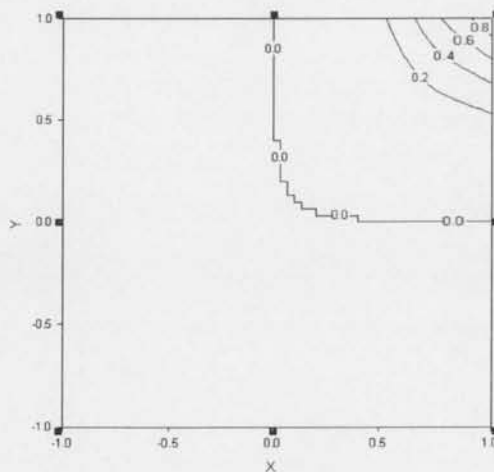
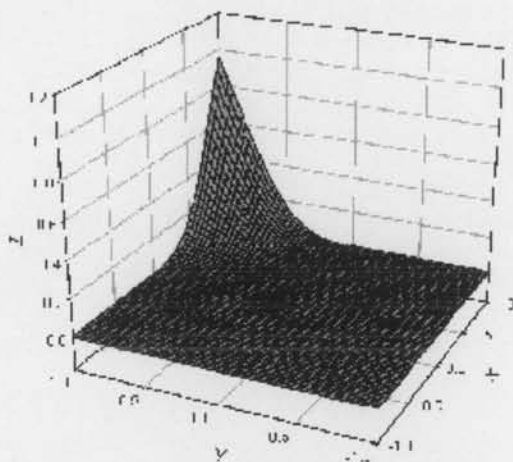
รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุดที่โหนด (0,0) โดยใช้ 25 โหนด และ คอนทัวร์พล็อต



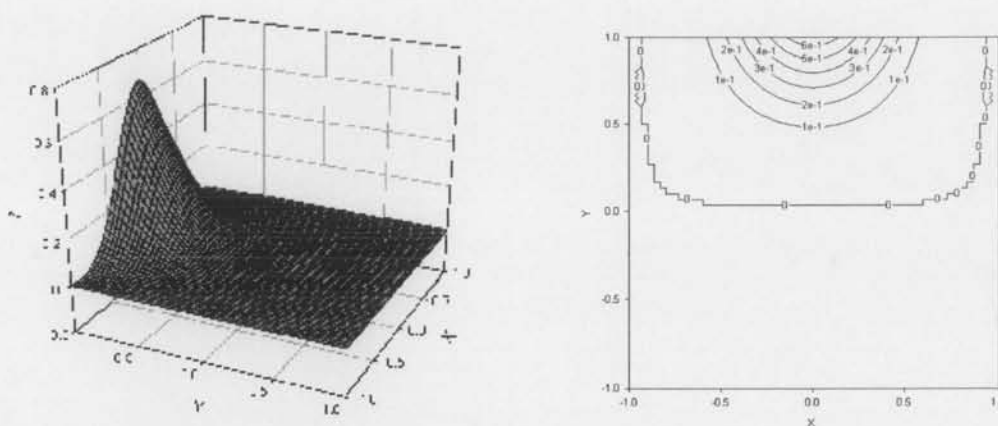
รูปที่ 2.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนกำลังสองน้อยที่สุดที่โหนด (0,0) โดยใช้ 25 โหนด เทียบกับ x และ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.11 อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุดที่โนด (0,0) โดยใช้ 25 โหนด
เทียบกับ y และ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลื่อนที่กำลังสองน้อยที่สุดที่โนด (1,1) โดยใช้ 25 โหนด
และ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.13 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเคลิอนที่กำลังสองน้อยที่สุดที่โนด (0,1) โดยใช้ 25 โหนด และคอนทัวร์พล็อต

2.6.2 เรเดียลพ้อยอินเทอโพลชัน(Radial point interpolation)

สมมติว่า $u = u(x)$ คือฟังก์ชันของจำนวนจริงใน 2 มิติ และ radial basis functions(RBFs) ประมาณค่า u ในรูปของ

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{R}^T(x) a(x_Q) \quad (2.42)$$

โดยที่ n คือจำนวนโนดที่อยู่ในบริเวณย่อย(local domain) รอบจุด x_Q ที่ทำการพิจารณา R_i คือ radial basis function ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\mathbf{R}^T(x) = [R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)] \quad (2.43)$$

และ $a_i(x_Q)$ คือสัมประสิทธิ์ของ R_i ซึ่งขึ้นอยู่กับจุด x_Q ซึ่งเวกเตอร์ a นิยามโดย

$$a^T(x_Q) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \quad (2.44)$$

โดยทั่วไป R_i มีรูปแบบได้เป็น

$$\begin{aligned}
 R_i(x, y) &= (r_i^2 + C^2)^q = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + C^2]^q && ; \text{multiquadric, MQ} \\
 R_i(x, y) &= r_i^\eta = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^\eta && ; \text{thin plat spline, TPS} \\
 R_i(x, y) &= r_i^\eta \log r_i && ; \text{Logarithmic} \\
 R_i(x, y) &= e^{-cr_i^2} && ; \text{Gaussian, GS}
 \end{aligned}$$

โดยที่ค่าคงที่บวก C, q, η, c เรียกว่า shape parameters

r คือระยะห่างระหว่างจุด x, x_i สำหรับปัญหาใน 2 มิตินิยามโดย

$$r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.45)$$

การประมาณค่าในช่วงที่จุดที่ i อยู่ในรูปของ

$$u(x_i) = \sum_{k=1}^n a_k R_i(x_i, x_k) \quad (2.46)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์คือ

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \quad (2.47)$$

โดยที่ \mathbf{U}_s คือเวกเตอร์ของกลุ่มตัวแปร n โหนดที่อยู่ใน ซับพอร์ทโดเมน ซึ่งมี n สมการ สำหรับตัวแปรไม่ทราบค่า n ตัวซึ่งสมการนี้สามารถหาคำตอบได้ก็ต่อเมื่อ \mathbf{R}_Q ไม่เป็นเอกพันธ์

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (2.48)$$

ดังนั้นฟังก์ชันของ $u(x)$ ที่ตำแหน่งใดๆสามารถกำหนดโดย

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n a_i R(x, x_i) \quad (2.49)$$

สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$u^h(x) = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{U}_s = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (2.50)$$

โดยที่ $\Phi(x)$ คือฟังก์ชันรูปร่างนิยามโดย

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= [R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)] R_Q^{-1} \\ &= [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]\end{aligned}\quad (2.51)$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างสามารถหาได้โดย

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial x}, \frac{\partial R_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial R_n}{\partial x} \right] R_Q^{-1} \quad (2.52)$$

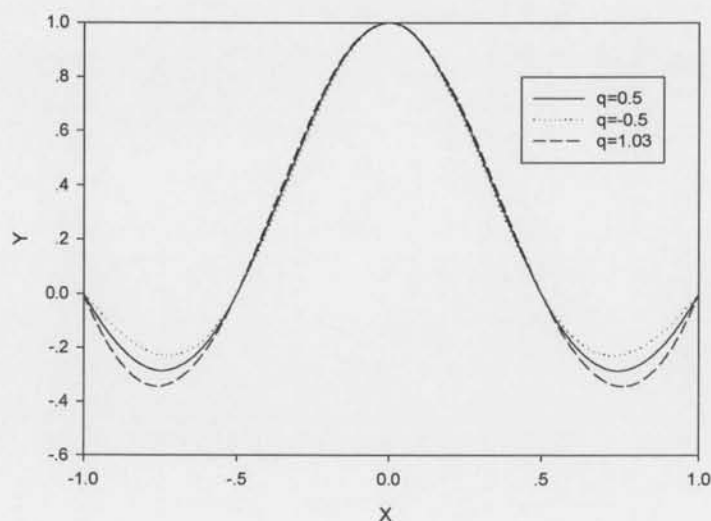
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial y}, \frac{\partial R_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial R_n}{\partial y} \right] R_Q^{-1} \quad (2.53)$$

เพื่อประสิทธิภาพที่ดีในหลายตัวอย่างได้เลือกใช้ เรเดียลเบซิสฟังก์ชัน (radial basis function) เป็น แบบ MQ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้โดยง่ายเป็น

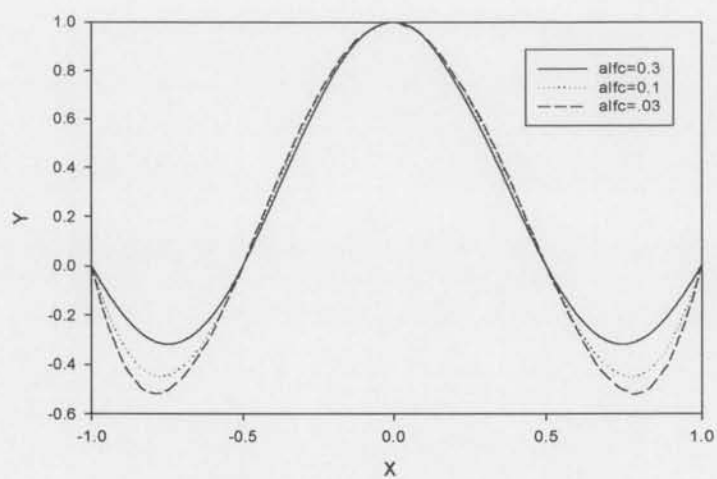
$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = 2q(r_i^2 + C^2)^{q-1}(x - x_i) \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial y} = 2q(r_i^2 + C^2)^{q-1}(y - y_i) \quad (2.55)$$

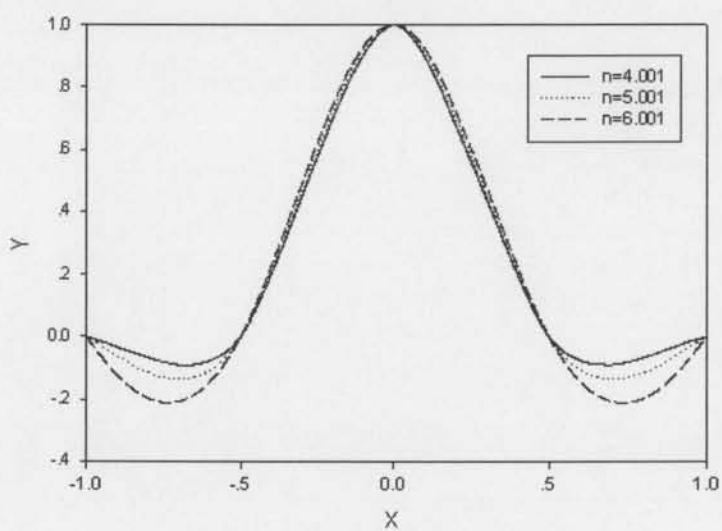
ซึ่ง c และ q เป็น ค่าคงที่สัมประสิทธิ์ สำหรับ MQ ซึ่งสามารถกำหนดโดยผู้ใช้



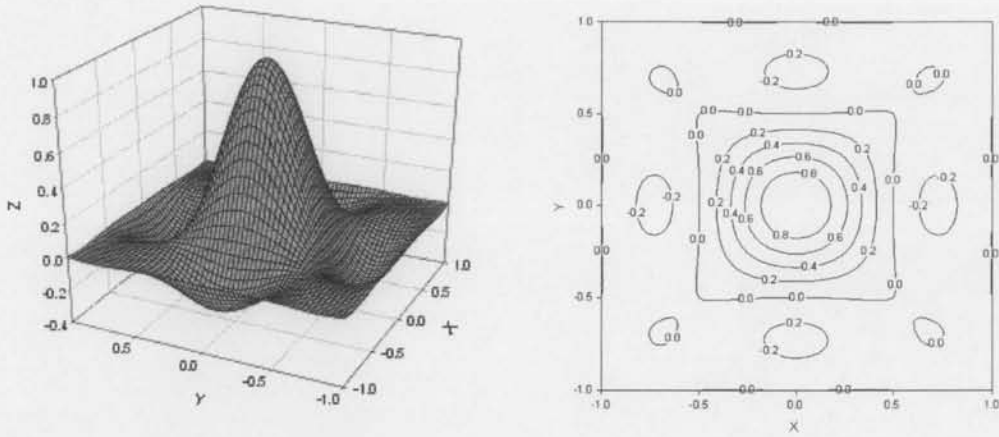
รูปที่ 2.14 ฟังก์ชันรูปร่างแบบ $RPIM - MQ$



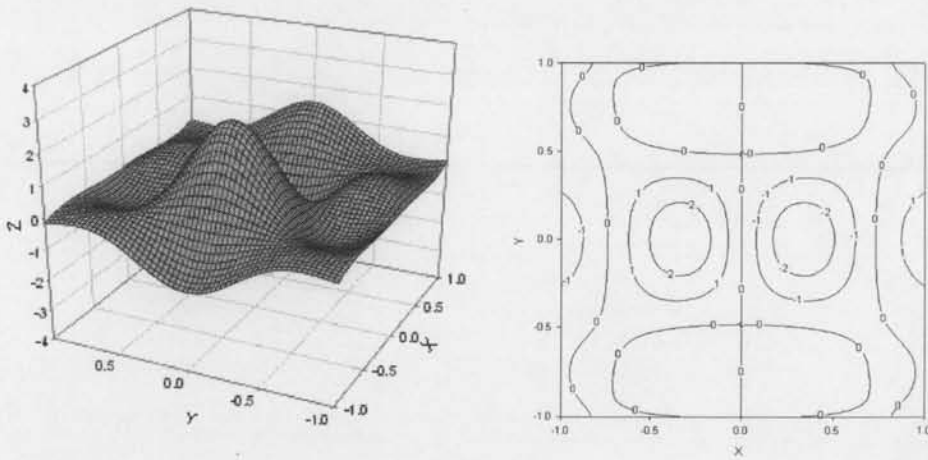
รูปที่ 2.15 ฟังก์ชันรูปร่างแบบ *RPIM-EXP*



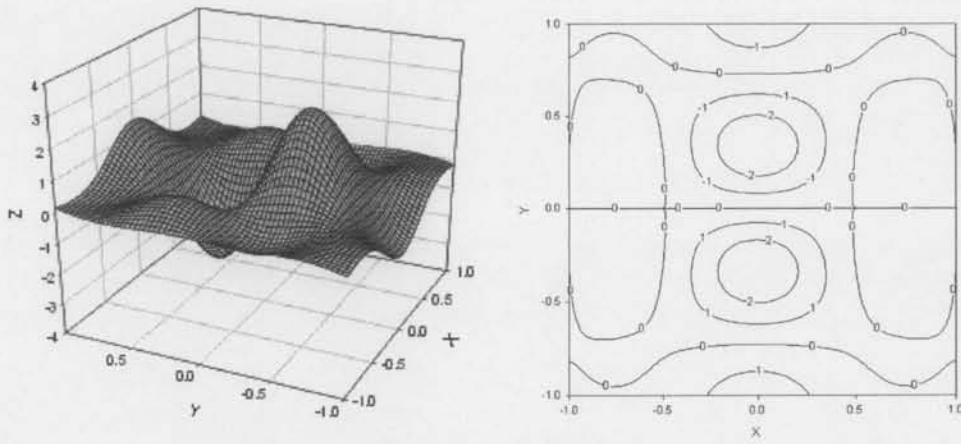
รูปที่ 2.16 ฟังก์ชันรูปร่างแบบ *RPIM-TPS*



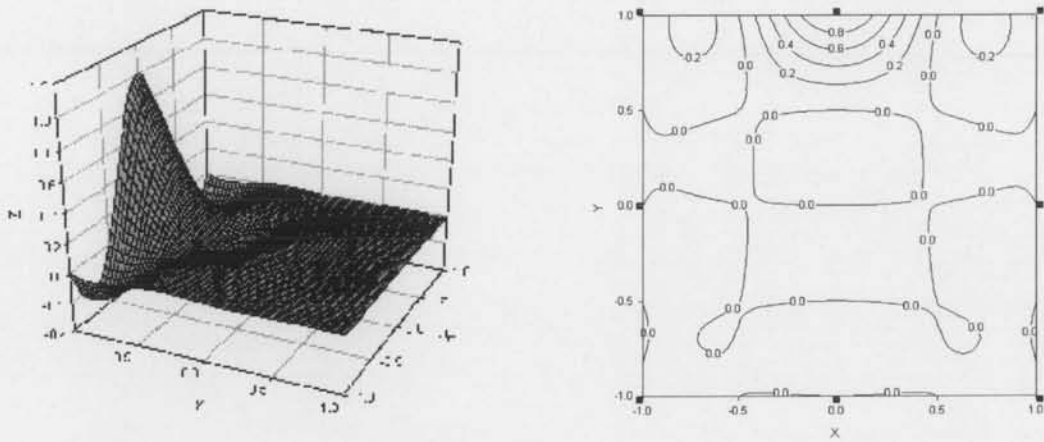
รูปที่ 2.17 ฟังก์ชันรูปร่างแบบ $RPIM - MQ$ ที่โนด $(0,0)$ โดยใช้ 25 โหนดและ คอนทัวร์พล็อต



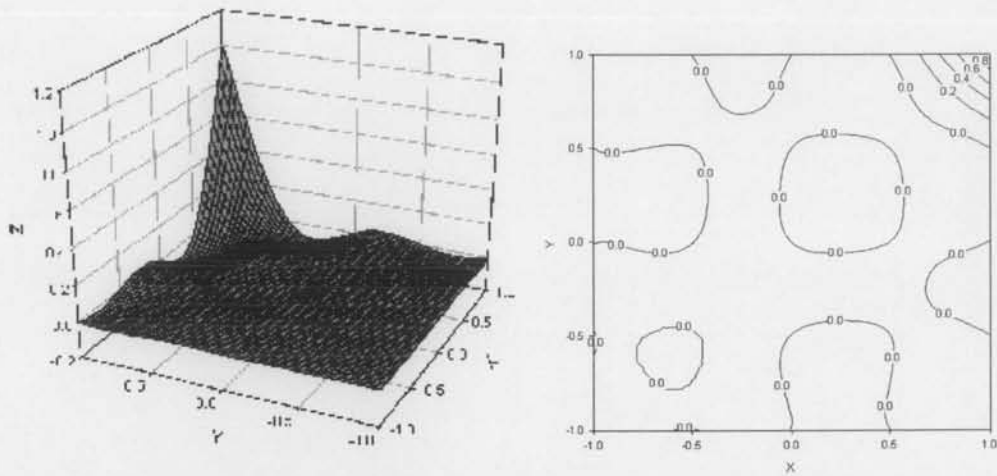
รูปที่ 2.18 อนุพันธ์ฟังก์ชันรูปร่างแบบ $RPIM - MQ$ เทียบกับ x ที่โนด $(0,0)$ โดยใช้ 25 โหนด
และ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.19 อนุพันธ์ฟังก์ชันรูปร่างแบบ $RPIM - MQ$ เทียบกับ y ที่โนด $(0,0)$ โดยใช้ 25 โหนด และคอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.20 ชั้นรูปร่างแบบ $RPIM - MQ$ เทียบกับ y ที่โนด $(0,1)$ โดยใช้ 25 โหนด และ คอนทัวร์พล็อต



รูปที่ 2.21 ฟังก์ชันรูปร่างแบบ *RPIM-MQ* เทียบกับ y ที่โนด (1,1) โดยใช้ 25 โหนดและ คอนทัวร์พล็อต

2.7 เงื่อนไขขอบเขต

ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตถ้าฟังก์ชันรูปร่างมีคุณสมบัติคือ $\Phi_j(x_j) = \delta_{ij}$ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสามารถทำได้โดยตรงคือการแทนค่าได้เลยแต่ถ้าฟังก์ชันนั้นไม่มีคุณสมบัตินี้การกำหนดเงื่อนไขต้องใช้วิธีอื่นซึ่งในที่นี้ได้ใช้ ระเบียบวิธีพินอลตี้ (penalty methods)

2.7.1 กำหนดโดยตรง

โดยการกำหนดค่าของโนดที่จุด i กำหนดโดยคือ

$$\phi_i = \bar{\phi}_i \quad (2.56)$$

ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยวิธีการนี้สามารถกำหนดได้โดยตรงในระบบสมการเมตริกซ์ซึ่งพิจารณาได้จาก

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1(i-1)} & 0 & A_{1(i+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{(i-1)1} & \cdots & A_{(i-1)(i-1)} & 0 & A_{(i-1)(i+1)} & \cdots & A_{(i-1)n} \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ A_{(i+1)1} & \cdots & A_{(i+1)(i-1)} & 0 & A_{(i+1)(i+1)} & \cdots & A_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n(i-1)} & 0 & A_{n(i+1)} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

สำหรับเวกเตอร์ F_j

$$F_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{\phi}_i, & i = j \\ F_j - A_{ji}\bar{u}_i, & i \neq j \end{cases} \quad (2.58)$$

2.7.2 ระเบียบวิธีพีนอลตี้ (pealty method)

วิธีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตอีกวิธีหนึ่งคือระเบียบวิธีพีนอลตี้โดยการเปลี่ยนค่าที่อยู่ในตำแหน่งของเมตริกซ์ A_{ii} เป็น

$$A_{ii} \Rightarrow \alpha \cdot A_{ii} \quad (2.59)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $\alpha \gg 1$ เพราะฉะนั้น เมตริกซ์ K เป็น

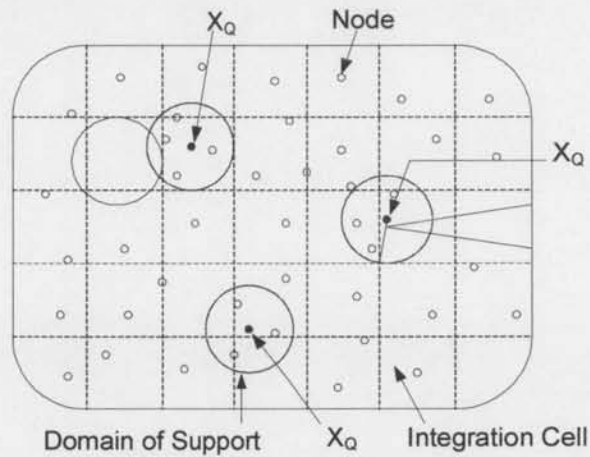
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1(i-1)} & A_{1i} & A_{1(i+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{(i-1)1} & \cdots & A_{(i-1)(i-1)} & A_{(i-1)i} & A_{(i-1)(i+1)} & \cdots & A_{(i-1)n} \\ A_{i1} & \vdots & A_{i(i-1)} & \alpha A_{ii} & A_{i(i+1)} & \cdots & A_{in} \\ A_{(i+1)1} & \cdots & A_{(i+1)(i-1)} & A_{(i+1)i} & A_{(i+1)(i+1)} & \cdots & A_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n(i-1)} & A_{ni} & A_{n(i+1)} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

สำหรับเวกเตอร์ F_j

$$F_j \Rightarrow \begin{cases} \alpha A_{ii}\bar{\phi}_i, & i = j \\ F_j, & i \neq j \end{cases} \quad (2.61)$$

2.8 ระเบียบวิธีอีลีเมนต์ฟรีกาเลอร์คิน(element free galerkin methods)

ในระเบียบวิธีอีลีเมนต์ฟรีกาเลอร์คินถึงแม้ในการสร้างฟังก์ชันรูปร่างจะไม่ต้องใช้เมชเพื่อสร้างฟังก์ชันรูปร่างแต่ก็ยังจำเป็นต้องใช้เมชเพื่อใช้ในการหาค่าอินทิเกรตโดยการแบ่งบริเวณของปัญหาที่ทำการพิจารณาออกเป็นบริเวณย่อยๆเรียกว่าเซลล์



รูปที่ 2.22 แบบจำลองเซลล์ที่ใช้ในระเบียบวิธีอีลีเมนต์ฟรีกาเลอร์คินสำหรับการอินทิเกรต

2.8.1 บริเวณสำหรับอินทิเกรต(background integration)

ในการหาค่าผลการอินทิเกรตในระเบียบวิธีอีลีเมนต์ฟรีกาเลอร์คินจำนวนโนดที่ใช้แทนตัวแปรไม่ทราบค่าและจำนวนโนดที่ใช้ในการหาค่าผลการอินทิเกรตในเกาส์อินทิเกรตชันจะต้องมีความสัมพันธ์กันซึ่งจำนวนโนดทั้งหมดที่ใช้ในการอินทิเกรต n_q มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $2/3$ ของโนดทั้งหมดที่เป็นอิสระ \tilde{N} ในขอบเขตของปัญหา

$$n_q > \frac{2}{3} \tilde{N} \text{ สำหรับปัญหาใน 2 มิติ}$$

โดยที่เงื่อนไขนี้มีความจำเป็นแต่ไม่พอเพียง



รูปที่ 2.23 อัลกอริทึมของระเบียบวิธีอีลีเมนต์ฟรังกาเลอร์คิน