

## บทที่ 4

### การจำลองแบบด้วยวิธีเชิงตัวเลข

วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อย ในที่นี้ใช้วิธีผลต่างอันดับ (finite difference method) และวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน (Zakian  $I_{MN}$  recursions) ในการจำลองแบบพลวัตของคานตีโมเซนโคที่มีการหน่วงเคลวิน-พอร์จ์ ปลายยึดทั้งสองข้าง พลวัตของคานตีโมเซนโคที่มีการควบคุมมุมหรือโมเมนต์เพื่อทำให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท็บปลายยึดทั้งสองข้างเช่นกัน และสุดท้ายจำลองผลตอบสนองของระบบวงวนปิดที่มีการควบคุมการกระจัดตามขวาง

#### 4.1 ทฤษฎีการคำนวณเชิงตัวเลข

การหาอนุพันธ์ของ  $u(x, t)$  เทียบกับ  $x$  ด้วยวิธีผลต่างอันดับกึ่งวิฤต (semi-discrete finite difference method) ได้ [27]

$$u_x(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} + O(h^2) \quad (4.1)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (4.2)$$

และประมาณการหาปริพันธ์โดยใช้หลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมู

##### 4.1.1 สมการไฮเพอร์โบลิก

สมการไฮเพอร์โบลิกอย่างง่ายเป็น

$$u_{tt}(x, t) = au_{xx}(x, t) \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4.4)$$

$$u(0, t) = \alpha(t) \quad \text{และ} \quad u(1, t) = \beta(t) \quad (4.5)$$

โดยที่  $f(x)$ ,  $\alpha(t)$  และ  $\beta(t)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อประมาณด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยทำให้วิฤตเฉพาะตำแหน่งจะได้

$$u_{tt}^i = a \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} \quad (4.6)$$

$$u_0 = f^i \quad (4.7)$$

$$u^0 = \alpha(t) \quad \text{และ} \quad u^N = \beta(t) \quad (4.8)$$

สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, N-1$

กำหนดให้  $u^i = u(x_0 + ih, t)$  และ  $u_0 = u(x, 0)$  โดยที่

$h$  คือขนาดขั้นคองที่ตลอดทั้งช่วงที่พิจารณา

$N$  คือจำนวนตำแหน่งตลอดทั้งช่วงที่พิจารณา

จาก (4.6)-(4.8) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\ddot{z} + B\dot{z} + Cz = P \quad (4.9)$$

$$z_0 = D \quad (4.10)$$

สำหรับ  $z = [u^1 \ u^2 \ \dots \ u^{N-1}]^T$ ,  $A, B, C \in R^{(N-2) \times (N-2)}$  และ  $P, D \in R^{(N-2)}$  มีค่าดังนี้

$$A = h^2 I, B = 0$$

$$C = a \text{tridiag}\{-1, 2, -1\}_{N-2} = a \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = [\alpha(t) \ 0 \ \dots \ 0 \ \beta(t)]^T$$

$$D = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^{N-1}]^T$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการอันดับหนึ่งได้เป็น

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} = GZ + P \quad (4.11)$$

$$Z_0 = [D \ 0]^T \quad (4.12)$$

เมื่อ  $Z = [z \ \dot{z}]^T$

#### 4.1.2 การเวียนเกิด $I_{MN}$ ของซาเกียน

ผลเฉลยของสมการผลต่างอันดับสอง (4.11)-(4.12) สามารถหาได้โดยใช้วิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน ซึ่งมีความแม่นยำสูง สามารถใช้กับระบบที่แข็ง (stiff) และเป็นวิธีที่มีเสถียรภาพแบบ A-stable สำหรับขนาดขั้นคองที่ใด ๆ [28] ซึ่งเหมาะสมกับระบบที่เราพิจารณา

กำหนดให้

$$I_{MN}(Z, t) \triangleq \int_0^\infty Z(\lambda t) \sum_{i=1}^N K_i e^{-\alpha_i \lambda} d\lambda \quad (4.13)$$

เมื่อ

$\alpha_i, K_i$  เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$M, N$  คืออันดับของพจน์เศษและพจน์ส่วนของผลการแปลงลาปลาซของ  $\sum_{i=1}^N K_i e^{-\alpha_i \lambda}$

ในที่นี้ต้องการให้

$$Z(t) \approx I_{MN}(Z, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N K_i Z\left(\frac{\alpha_i}{t}\right), \quad t \neq 0 \quad (4.14)$$

เมื่อ  $Z(s) = \int_0^\infty Z(t)e^{-st} dt$  คือผลการแปลงลาปลาซของ  $Z(t)$

ค่าของ  $(\alpha_i, K_i)$  กำหนดขึ้นโดย

$$\sum_{i=1}^N \frac{K_i}{z + \alpha_i} = \frac{B_{MN}(-z)}{B_{MN}(z)}, \quad \min\{\operatorname{Re}\{\alpha_i\}\} > 0 \quad (4.15)$$

โดยที่

$$B_{MN}(z) = \sum_{k=0}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N)!} \frac{N!}{(N-k)!} \frac{z^k}{k!} \quad (4.16)$$

และค่าของ  $(\alpha_i, K_i)$  สามารถหาได้จาก [29]

ผลการแปลงลาปลาซของ (4.11) ในช่วง  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  สำหรับ  $r = 1, 2, 3, \dots$  เป็น

$$(sI - G)Z_{t_r}(s) = Z(t_r) + P_{t_r}^*(s) \quad (4.17)$$

หรือ

$$Z_{t_r}(s) = (sI - G)^{-1}(Z(t_r) + P_{t_r}^*(s)) \quad (4.18)$$

เมื่อ  $Z(t_r)$  คือค่า  $Z$  ที่เวลา  $t_r$  และ  $P_{t_r}^*(s)$  คือผลการแปลงลาปลาซของ  $P$  ที่เวลา  $t_r$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ (4.14) ร่วมกับ (4.18) เมื่อ  $s = \frac{\alpha_i}{h}$  สามารถเขียนเป็นสมการเวียนเกิดได้ดังนี้

$$Z_{j+1} = \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{N/2} \operatorname{Re}(K_i Z_{i,j}) \quad (4.19)$$

เมื่อ  $N$  เป็นจำนวนคู่

ผลเฉลยที่หาได้จะมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่เป็น

$$I_{MN}(Z, t) - Z(t) = O(t^{-(N-M)}), \quad t \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

และ

$$I_{MN}(Z, t) - Z(t) = O(t^{M+N+1}), \quad t \rightarrow 0^+ \quad (4.21)$$

และมีเสถียรภาพแบบ A-stable ก็ต่อเมื่อ  $N - 2 \leq M \leq N - 1$  ซึ่งสามารถเลือก  $h > 0$  ใดๆ ก็สามารทำให้ระบบการประมาณเชิงตัวเลขมีเสถียรภาพ ในที่นี้เลือก  $h = 0.05$  s

## 4.2 การจำลองแบบคานติโมเซนโค

แบบจำลองคานติโมเซนโค ที่มีการหน่วงเคลวิน-พอจท์ ปลายยึดทั้งสองข้างและมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันพาราโบลา คือ

$$\epsilon u_{tt}(x, t) = (1 + d\partial_t)(u_{xx}(x, t) - \varphi_x(x, t)) \quad (2.1)$$

$$\mu \epsilon \varphi_{tt}(x, t) = (1 + d\partial_t)(\epsilon \varphi_{xx}(x, t) - a(u_x(x, t) - \varphi(x, t))) \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = -x^2 + x \quad (4.22)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (4.23)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \quad (4.24)$$

และเขียนในรูปสมการผลต่างอันดับกึ่งวิฤตได้เป็น

$$\epsilon h^2 u_{tt}^i - du_{t^{i+1}}^i + 2du_t^i - du_{t^{i-1}}^i + dh \frac{\varphi_t^{i+1} - \varphi_t^{i-1}}{2} - u^{i+1} + 2u^i - u^{i-1} + h \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2} = 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mu \epsilon h^2 \varphi_{tt}^i - d\epsilon \varphi_t^{i+1} + 2d\epsilon \varphi_t^i - d\epsilon \varphi_t^{i-1} - adh^2 \varphi_t^i + adh \frac{u_t^{i+1} - u_t^{i-1}}{2} \\ - \epsilon \varphi^{i+1} + 2\epsilon \varphi^i - \epsilon \varphi^{i-1} - ah^2 \varphi^i + ah \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$u_0^i = -(hi)^2 + hi \quad (4.27)$$

$$u^0 = u^N = 0 \quad (4.28)$$

$$\varphi^0 = \varphi^N = 0 \quad (4.29)$$

สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, N-1$

สมการ (4.25)-(4.29) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (4.11)-(4.12) ได้ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon h^2 \mathbf{I}_{N-2} & 0 \\ 0 & \mu \epsilon h^2 \mathbf{I}_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \text{tridiag}\{-1, 2, -1\}_{N-2} & \frac{h}{2} \text{tridiag}\{-1, 0, 1\}_{N-2} \\ \frac{ah}{2} \text{tridiag}\{1, 0, -1\}_{N-2} & \text{tridiag}\{-\epsilon, 2\epsilon - ah^2, -\epsilon\}_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$B = dC$$

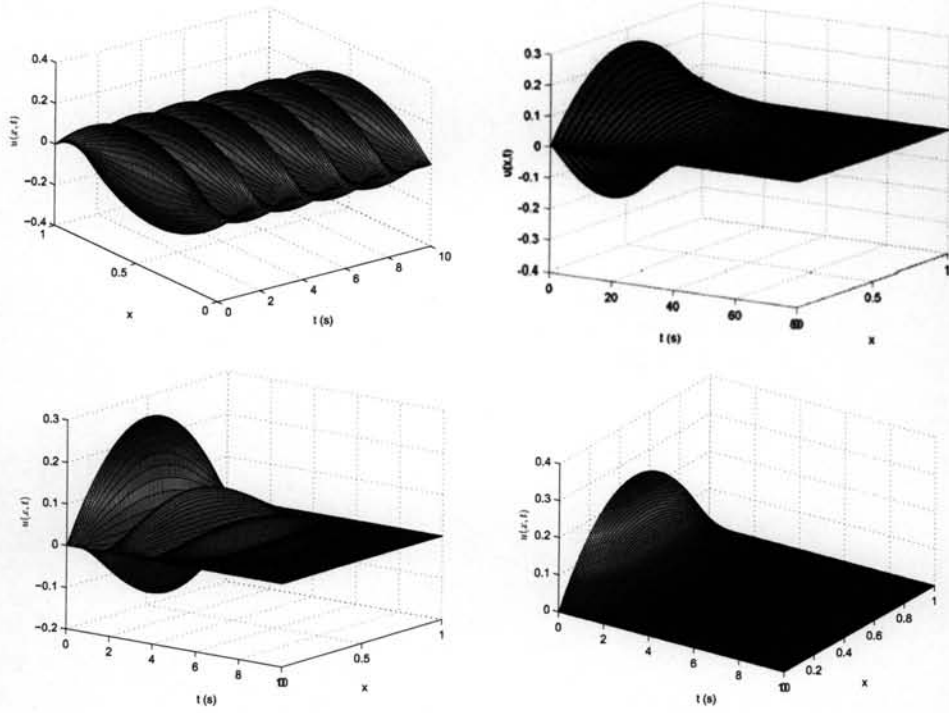
$$P = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} -h^2 + h & -4h^2 + 2h & -9h^2 + 3h & \dots & -(N-1)^2 h^2 + (N-1)h & 0_{N-2} \end{bmatrix}^T$$

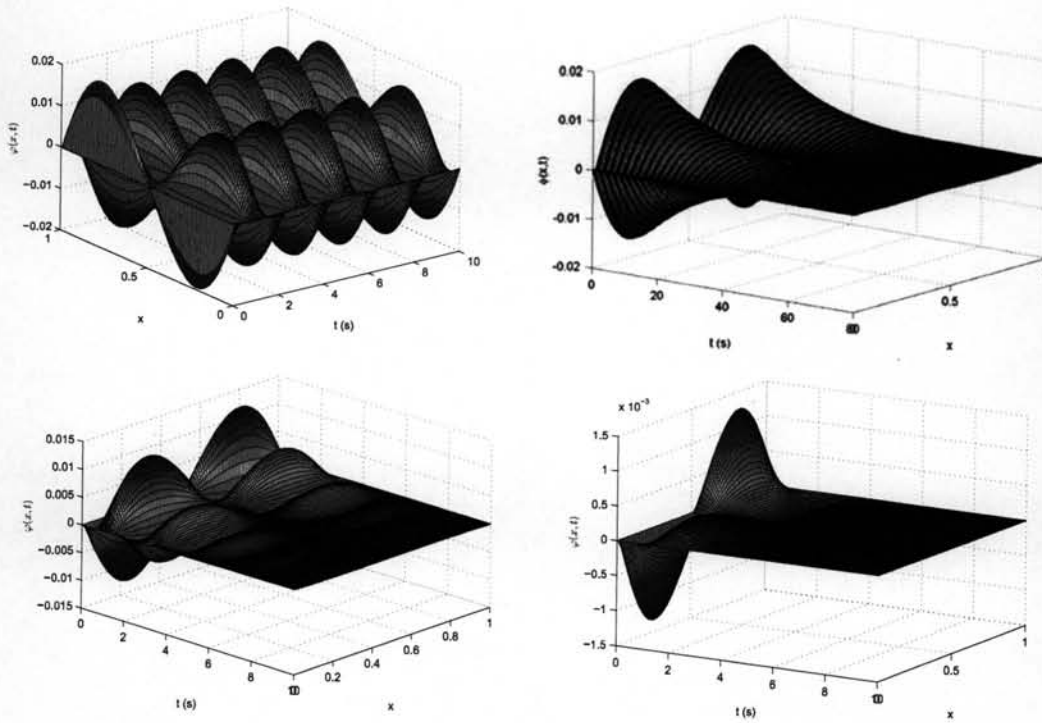
$$\text{สำหรับ } z = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^{N-1} & \varphi^1 & \varphi^2 & \dots & \varphi^{N-1} \end{bmatrix}^T$$

หาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน โดยให้  $M = 3$  และ  $N = 4$  จะได้การกระจัดตามขวาง  $u(x, t)$  ของคานสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับเป็นดังรูปที่ 4.1 และมีมุมหมุน  $\varphi(x, t)$  เป็นดังรูปที่ 4.2

ในที่นี้ เลือกค่า  $\mu = 0.001$  เพื่อทำให้เป็นคานเรียวยาว และลดผลของความเฉื่อยแบบหมุน ทำให้สามารถประมาณมุมหมุนได้ใกล้เคียงกับมุมหมุนของคานเนื่องด้วยทฤษฎีการรบกวนเอกฐาน และลดรูปแบบจำลองให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้



รูปที่ 4.1: การกระจายตามขวางสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับ



รูปที่ 4.2: มุมหมุนสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับ

### 4.3 การจำลองแบบคานติโมเซนโคลดรูป

จากทฤษฎีการรบกวนเอกฐานทำการลดรูปคานติโมเซนโค (2.1)-(2.2) เพื่อทำให้เป็นระบบป้อนกลับ โดยแท้ โดยการป้อนกลับมุ่มมุ่น (2.32) หรือโมเมนต์ (2.33) ที่ขอบ จะได้สมการของคานติโมเซนโคลดรูป พร้อมเงื่อนไขขอบ (4.22)-(4.23) เป็น

$$\epsilon u_{tt}(x, t) = (1 + d\partial_t) \left\{ u_{xx}(x, t) + b^2 u(x, t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y, t)dy \right\} \quad (2.35)$$

$$u(x, 0) = -x^2 + x \quad (4.22)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (4.23)$$

$$\varphi(1, t) = -b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y, t)dy \quad \text{หรือ} \quad (2.32)$$

$$\varphi_x(1, t) = -b^2 u(1, t) - b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y, t)dy \quad (2.33)$$

สามารถเขียนในรูปสมการผลต่างอันตะกึ่งวิฤตและประมาณค่าปริพันธ์ โดยใช้หลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมูได้เป็น

$$\epsilon h^2 u_{tt}^i - db^2 h^2 u_t^i - du_t^{i+1} + 2du_t^i - du_t^{i-1} - \frac{db^3 h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u_t^l \sinh(bh(i-l)) + u_t^{l-1} \sinh(bh(i-l+1))] \quad (4.30)$$

$$-u^{i+1} + 2u^i - u^{i-1} - b^2 h^2 u^i - \frac{b^3 h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(bh(i-l)) + u^{l-1} \sinh(bh(i-l+1))] = 0 \quad (4.30)$$

$$u_0^i = -(hi)^2 + hi \quad (4.31)$$

$$u^0 = u^N = 0 \quad (4.32)$$

$$\varphi^N = -b^2 h \sum_{i=2}^{N-1} \cosh(b(1-hi))u^i \quad \text{หรือ} \quad (4.33)$$

$$\varphi_x^N = -b^3 h \sum_{i=2}^{N-1} \sinh(b(1-hi))u^i \quad (4.34)$$

สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, N-1$

สมการที่ (4.30)-(4.32) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (4.11)-(4.12) ได้ โดยที่

$$A = \epsilon h^2 \mathbf{I}_{N-2}$$

$$C = \text{tridiag}\{-1, 2 - b^2 h^2, -1\}_{N-2} - L$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b^3 h^3 \sinh(bh) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b^3 h^3 \sinh(2bh) & b^3 h^3 \sinh(bh) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b^3 h^3 \sinh(98bh) & b^3 h^3 \sinh(97bh) & \dots & b^3 h^3 \sinh(bh) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = dC$$

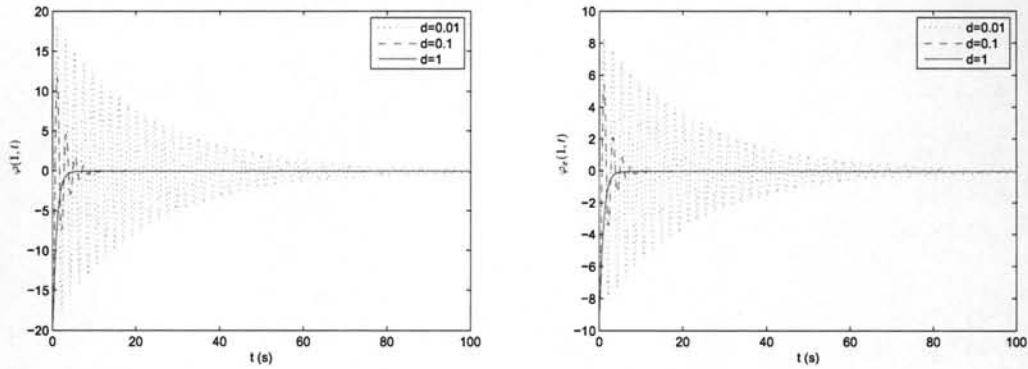
$$P = 0$$

$$D = \left[ -h^2 + h \quad -4h^2 + 2h \quad -9h^2 + 3h \quad \dots \quad -(N-1)^2 h^2 + (N-1)h \right]^T$$

สำหรับ  $z = [u^1 \ u^2 \ \dots \ u^{N-1}]^T$

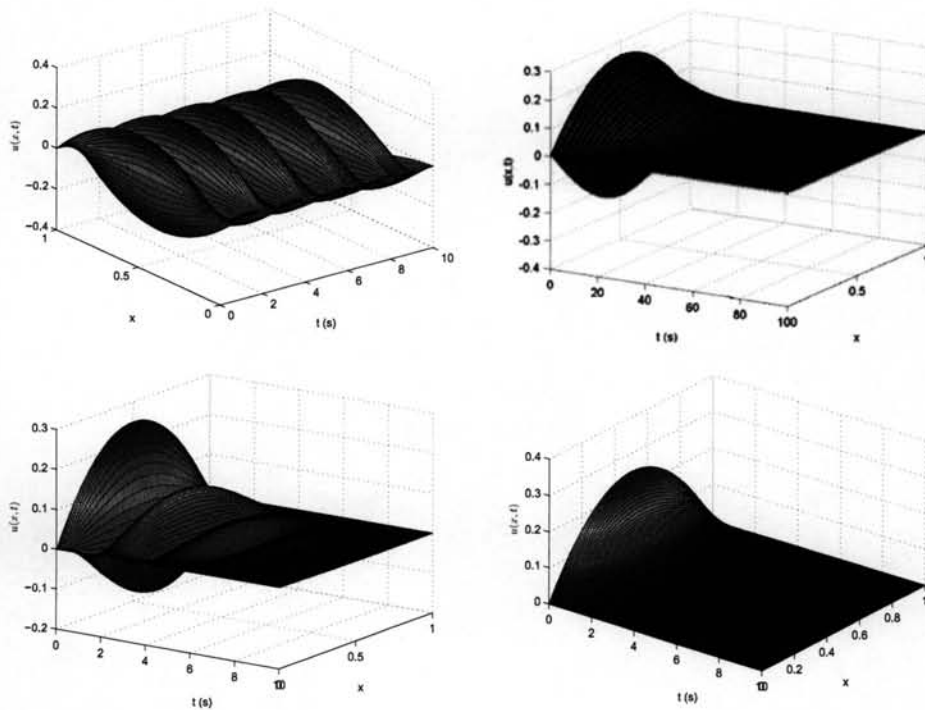
หาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน โดยให้  $M = 3$  และ  $N = 4$  โดยมี

สัญญาณควบคุมมุ่มหุน (4.33) หรือโมเมนต์ (4.34) เป็นดังรูปที่ 4.3



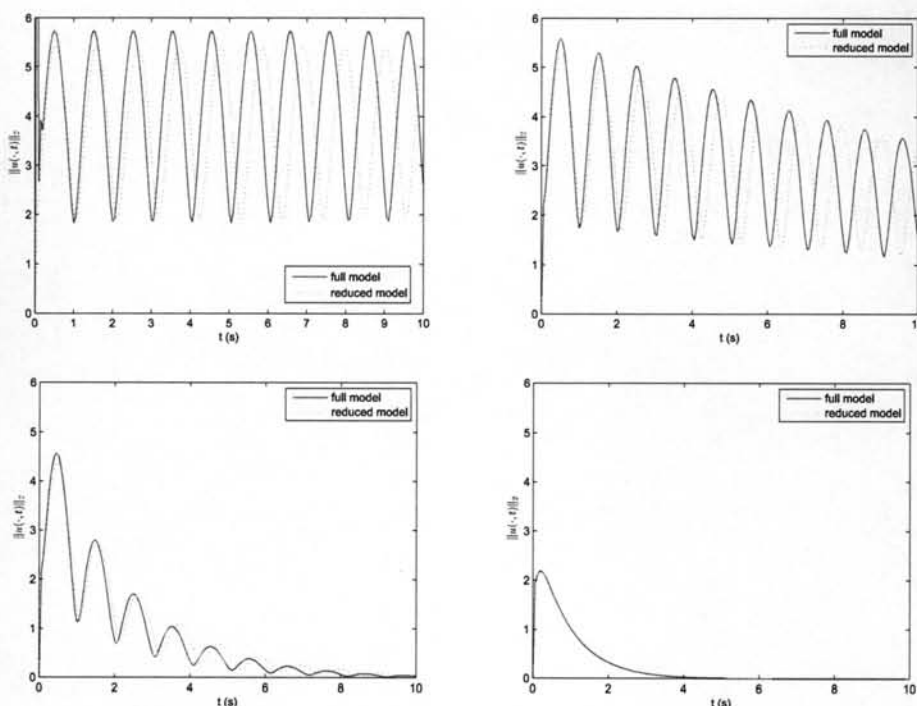
รูปที่ 4.3: สัญญาณควบคุมมุ่มหุนหรือโมเมนต์เมื่อ  $d$  เท่ากับ 0.01 0.1 และ 1

ซึ่งมีการกระจัดตามขวาง  $u(x, t)$  ของคานลดรูปสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับเป็นดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4: การกระจัดตามขวางของคานลดรูปสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับ

พบว่าคานลดรูปที่ถูกทำให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้มีการกระจัดตามขวางไม่ต่างกับระบบคานเดิมมากนัก มีเพียงความถี่ของการแกว่งที่ต่ำลงเล็กน้อยเท่านั้น และเมื่อพิจารณา นอร์มสองเทียบกับตำแหน่งของการกระจัดตามขวางเปรียบเทียบกันทั้งสองระบบจะได้ผลดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5: เปรียบเทียบนอร์มสองของการกระจัดตามขวางของคานสำหรับค่า  $d$  เท่ากับ 0, 0.01, 0.1 และ 1 ตามลำดับ

#### 4.4 การจำลองแบบระบบวงวนปิด

ระบบวงวนปิดของคานดีโมเซนโค ที่มีการหน่วงเคลวิน-พอจท์ ปลายยึดหรือหมุด พร้อมตัวควบคุมที่ขอบเป็น

$$\epsilon u_{tt}(x, t) = (1 + d\partial_t) \left\{ u_{xx}(x, t) + b^2 u(x, t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y)) u(y, t) dy \right\} \quad (2.35)$$

$$u(x, 0) = -x^2 + x \quad (4.35)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (4.36)$$

$$u(1, t) = \int_0^1 k(1, y) u(y, t) dy \quad (3.23)$$

$$\varphi(1, t) = -b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y)) u(y, t) dy \quad \text{หรือ} \quad (2.32)$$

$$\varphi_x(1, t) = -b^2 u(1, t) - b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y)) u(y, t) dy \quad (2.33)$$

สามารถเขียนในรูปสมการผลต่างอันตะกึ่งวิฤตและประมาณค่าปริพันธ์ โดยใช้หลักเกณฑ์เชิงสี่-



เหลี่ยมหาคงหมู่ได้เป็น

$$\epsilon h^2 u_{tt}^i - db^2 h^2 u_t^i - du_t^{i+1} + 2du_t^i - du_t^{i-1} - \frac{db^3 h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u_t^l \sinh(bh(i-l)) + u_t^{l-1} \sinh(bh(i-l+1))]$$

$$-u^{i+1} + 2u^i - u^{i-1} - b^2 h^2 u^i - \frac{b^3 h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(bh(i-l)) + u^{l-1} \sinh(bh(i-l+1))] = 0 \quad (4.37)$$

$$u_0^i = -(h(i))^2 + h(i) \quad (4.38)$$

$$u^0 = 0 \quad (4.39)$$

$$u^N = \frac{h}{2} \sum_{m=1}^N [k^{N,m-1} u^{m-1} + k^{N,m} u^m] \quad (4.40)$$

$$\varphi^N = -\frac{b^2 h}{2} \sum_{i=1}^N [\cosh(b(1-h(i-1))) u^{i-1} + \cosh(b(1-hi)) u^i] \quad \text{หรือ} \quad (4.41)$$

$$\varphi_x^N = -b^2 u^N - \frac{b^3 h}{2} \sum_{i=1}^N [\sinh(b(1-h(i-1))) u^{i-1} + \sinh(b(1-hi)) u^i] \quad (4.42)$$

สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, N-1$

สมการที่ (4.37)-(4.40) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (4.11)-(4.12) ได้ โดยที่

$$A = \epsilon h^2 \mathbf{I}_{N-2}$$

$$C = \text{tridiag}\{-1, 2 - b^2 h^2, -1\}_{N-2} - L - J$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{hk(N,1)}{1-\frac{1}{2}k(N,N)} & \frac{hk(N,2)}{1-\frac{1}{2}k(N,N)} & \dots & \frac{hk(N,N-1)}{1-\frac{1}{2}k(N,N)} \end{bmatrix}$$

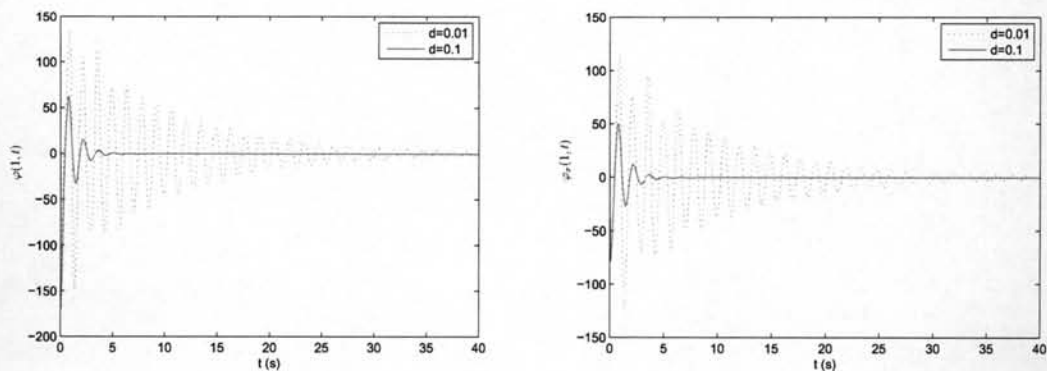
$$B = dC$$

$$P = \mathbf{0}$$

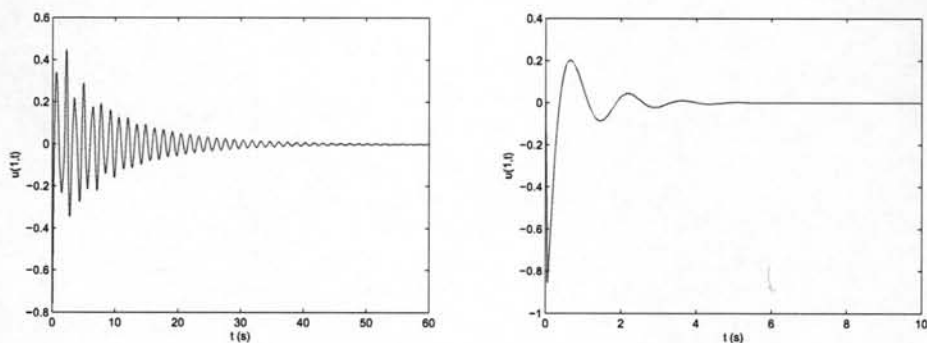
$$D = \left[ -h^2 + h \quad -4h^2 + 2h \quad -9h^2 + 3h \quad \dots \quad -(N-1)^2 h^2 + (N-1)h \right]^T$$

พิจารณาค่า  $d$  เท่ากับ 0.1 และ 0.01 โดยให้  $c = 10$  ทาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน โดยให้  $M = 3$  และ  $N = 4$  โดยมีสัญญาณควบคุมมุมหมุน (4.41) หรือโมเมนต์ (4.42) เป็นดังรูปที่ 4.6

เมื่อทำการป้อนกลับที่ขอบด้วย  $u(1, t)$  ในรูปที่ 4.7

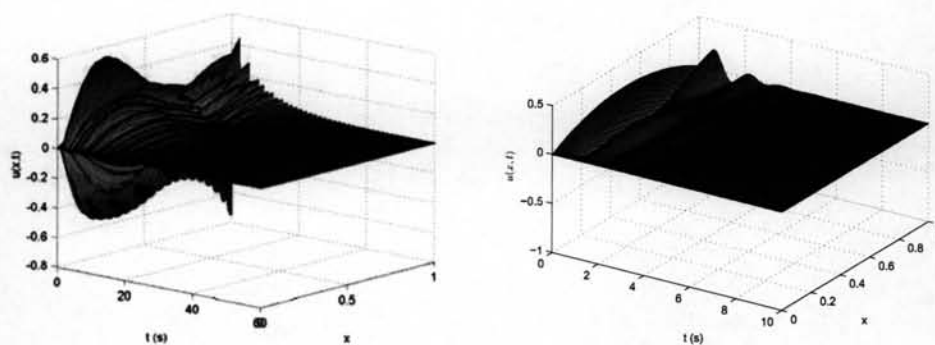


รูปที่ 4.6: สัญญาณควบคุมมุมหมุนหรือโมเมนต์เมื่อ  $d$  เท่ากับ 0.01 และ 0.1



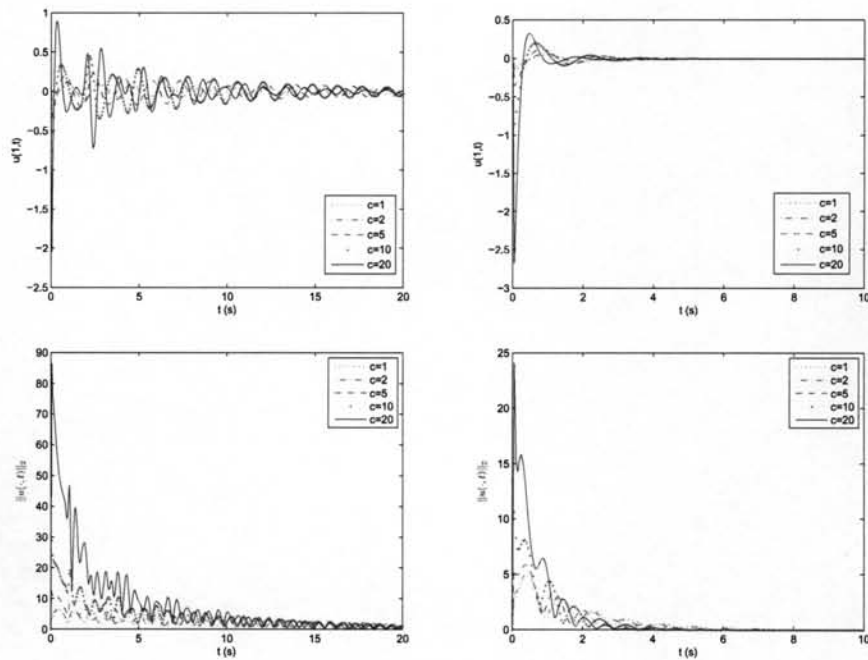
รูปที่ 4.7: สัญญาณควบคุมการกระจัดที่ขอบ เมื่อ  $d = 0.01$  (ซ้าย)  $d = 0.1$  (ขวา)

จะมีการกระจัดตามขวางเป็นดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8: การกระจัดตามขวางสำหรับ  $c = 10$  เมื่อ  $d = 0.01$  (ซ้าย)  $d = 0.1$  (ขวา)

เมื่อทำการปรับค่า  $c$  เป็น 1, 2, 5, 10 และ 20 จะได้สัญญาณควบคุมที่ขอบและ  $\|u(\cdot, t)\|_2$  เป็นดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9: สัญญาณควบคุมที่ขอบและนอร์มสองของการกระจัดตามขวาง สำหรับค่า  $d = 0.01$  (ซ้าย) และ  $d = 0.1$  (ขวา)

เมื่อกำหนดให้เวลาในการเข้าสู่สภาวะอยู่ตัว ( $t_s$ ) เป็นเวลาที่  $\|u(x, t)\|_2$  ลดลงจนไม่เกิน 5% ของค่าเริ่มต้น แล้วทำการปรับค่า  $c$  จะได้ผลเป็นไปดังตารางที่ 4.2-4.1

$d = 0.01$	full model	reduced model	c=1	c=2	c=5	c=10	c=20
$\max  u(1, t) $	0	0	0.0956	0.1482	0.3357	0.7556	2.0414
$\max \ u(\cdot, t)\ _2$	5.5862	5.2916	6.3515	7.0979	12.7516	29.0834	86.5018
$t_s$	85.40	92.95	76.85	71.70	60.05	48.45	37.20

ตารางที่ 4.1: ค่า  $\max |u(1, t)|$ ,  $\max \|u(\cdot, t)\|_2$  และ  $t_s$  สำหรับ  $d = 0.01$

$d = 0.1$	full model	reduced model	$c=1$	$c=2$	$c=5$	$c=10$	$c=20$
$\max  u(1, t) $	0	0	0.0974	0.1526	0.3568	0.8521	2.6674
$\max \ u(\cdot, t)\ _2$	4.5773	4.3817	4.8298	5.0745	5.9435	10.6573	24.0802
$t_s$	7.95	9.25	7.45	7.10	5.65	4.85	3.50

ตารางที่ 4.2: ค่า  $\max |u(1, t)|$ ,  $\max \|u(\cdot, t)\|_2$  และ  $t_s$  สำหรับ  $d = 0.1$

จากผลการจำลองพบว่าตัวควบคุมที่ออกแบบสามารถทำให้มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง และสามารถควบคุมเวลาในการเข้าสู่สภาวะอยู่ตัว ด้วยการปรับค่า  $c$  ถ้าค่า  $c$  เพิ่มขึ้นจะทำให้  $t_s$  มีค่าน้อยลง แต่ส่งผลให้การกระจัดสูงสุดและ  $\max \|u(\cdot, t)\|_2$  สูงขึ้นตามไปด้วย

#### 4.5 สรุป

จากการจำลองแบบพลวัตของคานติโมเซนโค เมื่อเทียบกับพลวัตของคานติโมเซนโคลดรูปพบว่า ได้การกระจัดตามขวางคล้ายคลึงกันมาก ต่างกันเพียงความถี่ในการแกว่งที่ขึ้นอยู่กับค่า  $d$  เมื่อออกแบบตัวควบคุมที่ขอบด้วยวิธีการแปลงกัวยอดยหลัง ทำให้ผลตอบสนองของระบบวงวนปิดที่มีการควบคุมการกระจัดตามขวางที่ปลายด้านหนึ่ง เข้าสู่สภาวะอยู่ตัวเร็วขึ้นด้วยการปรับค่า  $c$  แต่ค่า  $c$  ที่สูงขึ้นมีผลให้ค่าสูงสุดของการกระจัดตามขวาง และ  $\max \|u(\cdot, t)\|_2$  ของปลายที่ควบคุม มีค่าสูงมากขึ้นด้วย