

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมา

ระบบทางกายภาพจำนวนมากเป็นระบบพารามิเตอร์กระจาย (distributed parameter system) ซึ่งมีพฤติกรรมขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว เช่น ในระบบทางกลศาสตร์มักพบตัวแปรตำแหน่งและเวลา เป็นต้น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของระบบดังกล่าว มักอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations หรือ PDE) การควบคุมระบบพารามิเตอร์กระจาย อาจจะเป็นการควบคุมแบบกระจาย (distributed control) หรือการควบคุมที่ขอบ (boundary control) ก็ได้ แรงขับเคลื่อนสำคัญที่ทำให้เกิดความสนใจในการควบคุมระบบพารามิเตอร์กระจาย ได้แก่ ความต้องการประสิทธิภาพที่สูงขึ้น, ผลตอบสนองที่รวดเร็ว และมีความแม่นยำมากขึ้น เป็นต้น

ในวิทยานิพนธ์นี้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมที่ขอบสำหรับคานตีโมเซนโค ซึ่งแบบจำลองของคานเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขยายมาจากคานออยเลอร์-แบร์นูลลี โดยพิจารณาโมเมนต์ความเฉื่อยและแรงเฉือนร่วมด้วย นอกจากนี้ยังคำนึงถึงการหน่วงเคลวิน-พอจท์ (Kelvin-Voigt damping) ที่เกิดจากสมบัติของวัสดุที่ใช้ทำคาน ทำให้แบบจำลองที่ได้ใกล้เคียงคานจริงมากขึ้น

#### 1.1.1 คานตีโมเซนโค [1, 2, 3]

พิจารณาคานตีโมเซนโคในหนึ่งมิติที่มีความยาว  $L$  สม่ำเสมอ มีความหนาแน่น  $\rho$  และความแข็งดิ่งงอ (flexural stiffness)  $EI$  ให้การกระจัดตามขวางเป็น  $u(x, t)$  จะได้ว่า แรงเฉือน  $V(x, t)$  และโมเมนต์หมุน  $M(x, t)$  ของคานเป็น

$$V(x, t) = \kappa GA \dot{\gamma} + D_s \gamma_t = \kappa GA(u_x(x, t) - \varphi(x, t)) + D_s(u_{tx}(x, t) - \varphi_t(x, t)) \quad (1.1)$$

$$M(x, t) = EI \varphi_x(x, t) + D_b I \varphi_{tx}(x, t) \quad (1.2)$$

โดยที่

$\kappa$  คือสัมประสิทธิ์การเฉือน

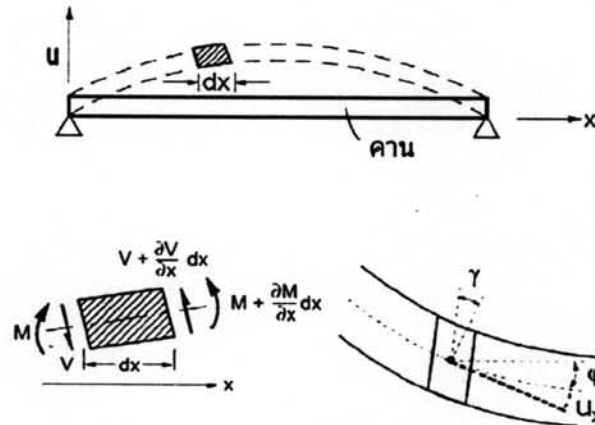
$D_b, D_s$  คือสัมประสิทธิ์การหน่วงเคลวิน-พอจท์ ที่เกิดจากความดันและแรงเฉือน

$I$  คือโมเมนต์ความเฉื่อย

$G$  คือค่ามอดุลัสเฉือน

$A$  คือพื้นที่หน้าตัดของคาน

และความชันของเส้นกลางคาน  $u_x(x, t)$  เป็นผลรวมของความชันจากการบิด  $\varphi(x, t)$  รวมกับ มุมจากแรงเฉือน  $\gamma$  (ดูรูป 1.1)



รูปที่ 1.1: คานตีโมเซนโค

สมการสมดุลของโมเมนต์และแรงเฉือนเป็น

$$V_x(x, t) - \nu u_t(x, t) = \rho A u_{tt}(x, t) \quad (1.3)$$

$$M_x(x, t) = -V(x, t) + \rho I \varphi_{tt}(x, t) \quad (1.4)$$

โดยที่  $\nu$  คือสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ (air resistance coefficient)

เมื่อแทนค่า (1.2) และ (1.1) ลงใน (1.4) และ (1.3) จะได้แบบจำลองของคานตีโมเซนโคที่มีการหน่วงเคลวิน-พอยท์เป็น

$$\rho A u_{tt}(x, t) - [\kappa A G (u_x(x, t) - \varphi(x, t)) + D_s (u_{tx}(x, t) - \varphi_t(x, t))]_x + \nu u_t(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho I \varphi_{tt}(x, t) - (EI \varphi_x(x, t) + D_b \varphi_{tx}(x, t))_x - [\kappa A G (u_x(x, t) - \varphi(x, t)) + D_s (u_{tx}(x, t) - \varphi_t(x, t))] = 0 \quad (1.6)$$

เงื่อนไขขอบของคานมีได้หลายแบบได้แก่

1. การติดตั้งแบบอิสระ (free)
  - ไม่เกิดโมเมนต์ ( $M = EI \varphi_x|_{\Gamma} = 0$ )
  - ไม่เกิดแรงเฉือน ( $V = \kappa A G (\varphi - u_x)|_{\Gamma} = 0$ )
2. การติดตั้งแบบยึด (fixed/clamped)
  - ไม่เกิดการกระจัด ( $u|_{\Gamma} = 0$ )
  - ไม่เกิดมุมหมุน ( $\varphi|_{\Gamma} = 0$ )
3. การติดตั้งแบบหมุด (pinned/hinged)

- ไม่เกิดการกระจัด ( $u|_{\Gamma} = 0$ )
- ไม่เกิดโมเมนต์ ( $\varphi_x|_{\Gamma} = 0$ )

เมื่อ  $\Gamma$  คือเซตของตำแหน่งที่ขอบ

### 1.1.2 การประยุกต์ใช้งานสำหรับคานตีโมเซนโค

คานที่มีปลายยึดหรือหมุด สามารถนำมาประยุกต์ใช้งานได้ในหลายรูปแบบเช่น

- ระบบการเลื่อนขนานสื่อ (media translation system) [4] เช่น ระบบเทปแม่เหล็กความเร็วสูง (high-speed magnetic tapes), เลื่อยแถบ (band saws), สายพานรับส่ง (conveyor belt), โซ่การส่งผ่าน (transmission chains), เคเบิลรถราง (tramway cables), เส้นใยสิ่งทอ (textile fibers), การม้วนกระดาษ (webs) ฯลฯ ซึ่งระบบนี้จำเป็นต้องใช้ความเร็วสูงเพื่อเพิ่มผลผลิตให้สูงขึ้น แต่เมื่อมีความเร็วสูงจะทำให้ระบบเกิดการสั่น หรือขาดเสถียรภาพซึ่งส่งผลกระทบต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์นั้น ๆ
- สะพานแขวน (suspension bridges) [5] ที่มีการติดตั้งปลายแบบบานพับ จำเป็นต้องมีการควบคุมการสั่นเนื่องจากต้องรองรับรถยนต์ ซึ่งเป็นภาระเคลื่อนที่ (moving load) และเนื่องจากลมที่พัดอยู่ตลอดเวลา จึงจำเป็นต้องมีการควบคุมเพื่อไม่ให้สะพานเกิดการสั่นจนทำให้เกิดความเสียหายได้ นอกจากนี้ยังมีสะพานลอย (floating bridge) ข้ามทะเลสาบวอชิงตัน [6] ซึ่งอาจจะพิจารณาว่าเป็นคานที่มีปลายแบบบานพับ และจำเป็นที่จะต้องควบคุมการสั่นของสะพานเมื่อมีรถเคลื่อนผ่าน
- หอสูงสำหรับส่งพลังงานไฟฟ้าและโทรคมนาคม (transmission and telecommunication towers) เป็นโครงเหล็กถัก (truss steel) ในประเทศบราซิลเกิดปัญหาการพังทลายเนื่องจากลม เมื่อใช้โครงถักทั่วไป จึงได้ทำการออกแบบให้มีโครงสร้างแบบกึ่งแข็งด้วยการต่อจุดต่อทุกจุดด้วยบานพับ [7] นอกจากนี้มีความเป็นไปได้ที่จะพิจารณาหอสูงเป็นคานในแนวตั้งและสามารถควบคุมการสั่นจากยอดหอเพื่อรักษาเสถียรภาพของหอสูงได้

## 1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

### 1.2.1 การควบคุมเพื่อให้เสถียร

- Kim และ Renardy [8] พิจารณาคานตีโมเซนโคปลายยืด โดยใช้ทฤษฎีกิ่งกรุปร่วมกับฟังก์ชันพลังงานที่ลดลงแบบเลขชี้กำลังในการพิสูจน์เสถียรภาพแบบเอกรูปพร้อมกับศึกษาสเปกตรัมด้วยวิธีเชิงตัวเลข เมื่อกำหนดให้โมเมนต์ขึ้นอยู่กับความเร็วเชิงมุมและแรงเฉือนขึ้นอยู่กับความเร็วตามขวางที่ปลายนั้น
- Zhang และคณะ [9] พิจารณาคานยื่นที่ปลายมีก้อนมวล และใช้การป้อนกลับแรงและแรงบิดที่ปลายอิสระเพื่อทำให้เกิดเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง แต่จำเป็นต้องวัดการกระจัด, มุมหมุน, ความชัน และอนุพันธ์เทียบกับเวลาของแต่ละตัวแปรดังกล่าว
- Taylor และ Yau [10] พิจารณาคานหมุนที่มีปลายอิสระข้างหนึ่งและปลายหมุนอีกข้างหนึ่ง โดยใช้สมบัติของสภาพควบคุมได้ร่วมกับตัวแปรลักษณะเฉพาะทางกายภาพในการออกแบบตัวควบคุมแรงที่ปลายอิสระและควบคุมแรงบิดที่ปลายหมุน เพื่อควบคุมการสั่นของคาน
- Xu และ Yung [11] พบว่าคานตีโมเซนโคที่มีการป้อนกลับที่ขอบด้วยการหน่วงเป็นระบบเชิง-สเปกตรัมรีสซ์ (Riesz-spectral system) มีอัตราการลดลงแบบเลขชี้กำลัง ซึ่งถูกกำหนดด้วยสเปกตรัม และเมื่อควบคุมคานปลายอิสระทั้งสองข้างด้วยการป้อนกลับแรงและโมเมนต์ที่ปลายด้านเดียวด้วยการหน่วง, การกระจัดและมุมหมุน จะสามารถทำให้มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังได้ [12]
- Zhang [13] พิจารณาคานไม่เอกรูป ที่มีการกำหนดแรงเฉือนเท่ากับโมเมนต์ด้านหนึ่ง และแรงเฉือนกับโมเมนต์เท่ากับกการหน่วงและการกระจัดอีกด้านหนึ่ง เพื่อสร้างเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง
- Khodja และคณะ [14] ควบคุมคานยื่นไม่เอกรูปด้วยแรงทั้งจากภายในด้วยการหน่วงหรือโมเมนต์ที่ขอบทั้งสองข้างด้วยการหน่วง ซึ่งเสถียรภาพขึ้นอยู่กับความเร็วคลื่น (อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์ของ  $w_{xx}$  และ  $w_{tt}$ )

### 1.2.2 การออกแบบด้วยเทคนิคการแปลงก้าวถอยหลัง

- การแปลงก้าวถอยหลัง (backstepping transformation) เริ่มต้นพัฒนาเพื่อใช้ในการควบคุมระบบไม่เชิงเส้นมิติจำกัดป้อนกลับโดยแท้ (strict-feedback form) การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเวียนเกิดสำหรับระบบย่อยของโครงสร้างสามเหลี่ยม [15] และได้ขยายไปสู่ระบบมิติอนันต์โดย Coron และ d'Andrea-Novel [16] โดยการควบคุมระบบคานหมุนแบบก้าวถอยหลังไม่เชิงเส้นด้วยแรงบิดตลอดคานปลายอิสระทั้งสองด้าน ซึ่งทำให้เกิดเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง
- Liu และ Krstic [17] นำมาใช้กับสมการของเบอร์เกอร์ซึ่งเป็นสมการพาราโบลิก ด้วยกฎการควบคุมที่ขอบแบบก้าวถอยหลัง ทำให้ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

- Boskovic และ Krstic [18] พิจารณาวงการพาความร้อน (thermal convection loop) ที่มีความหน่วงหนืดและแปลงเป็นวิฤตเทียบกับตำแหน่ง จากนั้นจึงแปลงพิกัดด้วยการแปลงก้ำวถอย-หลังวิฤตไปเป็นระบบสองระบบที่ไม่คู่ควบ และมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง นอกจากนี้ยังนำไปใช้กับเครื่องปฏิกรณ์เคมีแบบท่อ (chemical tubular reactor) [19], จรวดเชื้อเพลิงแข็ง (solid propellant rockets) [20] และนำมาใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นทั่วไป [21] ซึ่งสามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังได้ แต่ข้อเสียคือเคอร์เนลที่ใช้ในการแปลงพิกัดเป็นฟังก์ชันไม่เรียบ
- Smyshlyaev และ Krstic [22] ได้พัฒนาไปสู่การแปลงปริพันธ์ก้ำวถอยหลัง พร้อมทั้งออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะและตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณออกซัดแจ้ง ทั้งเงื่อนไขขอบตรีเคิลและนอยมันน์ สำหรับสมการความร้อนไม่เสถียร, สมการความร้อนที่เงื่อนไขขอบทำให้ไม่มีเสถียรภาพ, เครื่องปฏิกรณ์เคมีแบบท่อ และจรวดเชื้อเพลิงแข็ง สุดท้ายสามารถหารูปแบบปิด (closed-form) ของตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่ขอบ [23] และตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณออกที่ขอบ มีตัวสังเกตทั้งในกรณีร่วมตำแหน่ง (collocated) และกรณีไม่ร่วมตำแหน่ง (noncollocated) [24] สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยทั่วไป
- Krstic, Smyshlyaev และ Siranosian [25] ได้ขยายไปสู่สมการไฮเพอร์โบลิกที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจท์ ซึ่งนำมาใช้ออกแบบตัวควบคุมคานตีโมเซนโค ในกรณีติดตั้งแบบปลายอิสระ

### 1.3 วัตถุประสงค์

ออกแบบตัวควบคุมที่ขอบสำหรับคานตีโมเซนโค แบบปลายยึดหรือปลายหมุนเพื่อให้ได้ระบบวงวนปิดที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

### 1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

ออกแบบตัวควบคุมที่ขอบสำหรับคานตีโมเซนโค ที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจท์ ที่ปลายด้านหนึ่งเป็นแบบปลายยึดหรือปลายหมุน เพื่อให้ได้ระบบวงวนปิดที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

### 1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ค้นคว้าและศึกษาบทความที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อย การควบคุมที่ขอบ การสร้างเสถียรภาพด้วยการแปลงก้ำวถอยหลัง คานตีโมเซนโค และการคำนวณเชิงตัวเลข
2. ออกแบบตัวควบคุมคานตีโมเซนโค ที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจท์และมีการติดตั้งแบบปลายยึดหรือปลายหมุน
3. หาสมการเคอร์เนลของการแปลงก้ำวถอยหลัง
4. ใช้วิธีเชิงตัวเลขจำลองแบบผลตอบสนองของระบบวงวนปิด

## 1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ตัวควบคุมคานตีโมเซนโค แบบปลายยึดและปลายหมุน เพื่อให้ได้ระบบวงวนปิดที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

## 1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในบทที่ 1 ได้นำเสนอแบบจำลองทั่วไปของคานตีโมเซนโคที่มีการหน่วงเคลวิน-พอจท์ ในบทที่ 2 จะใช้ทฤษฎีการรบกวนเอกฐานในการลดรูปแบบจำลองคานตีโมเซนโค ให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้ ในบทที่ 3 จะนำแบบจำลองลดรูปดังกล่าว มาออกแบบตัวควบคุมที่ขอบด้วยเทคนิคก้าวถอยหลังโดยการแปลงปริพันธ์ ไปเป็นระบบที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง ซึ่งตัวควบคุมต้องการผลเฉลยของสมการเคอร์เนล และสามารถหาผลเฉลยได้โดยวิธีการประมาณสี่บ่งหรือวิธีเชิงตัวเลข ในบทที่ 4 จะใช้วิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียนในการจำลองแบบพลวัตของคานตีโมเซนโคเมื่อไม่มีตัวควบคุม พลวัตของคานตีโมเซนโคลดรูป และผลตอบสนองของระบบวงวนปิด และในบทสุดท้ายเป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ โดยมีภาคผนวก ก. เป็นชุดคำสั่ง MATLAB ที่ใช้หาผลเฉลยของสมการเคอร์เนลและจำลองแบบพลวัตของคานตีโมเซนโค