

### บทที่ 3

## แบบจำลองการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ 6 ระดับขั้นเสรี

### 3.1 ข้อสมมติฐานของแบบจำลอง

แบบจำลองการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ 4 สูบ 6 ระดับขั้นเสรี เป็นแบบจำลองวัตถุแข็งเกร็งที่มีข้อสมมติฐานที่สำคัญสำหรับการศึกษาดังนี้

#### 3.1.1 ข้อสมมติฐานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1) ระบบรองรับแทนเครื่องทำจากยาง (Elastomeric system) ซึ่งกำหนดให้เป็นแบบจำลอง Voigt model ซึ่งจะประกอบด้วยสปริงที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น และตัวหน่วงแบบวิสคัส (Viscous damping) ซึ่งถูกเรียกว่า สปริงสมมูล (Equivalent spring) และตัวหน่วงสมมูล (Equivalent damping)

2) การกระตุ้นที่เกิดบนเครื่องยนต์ ที่มีช่วงความถี่ 0-20 Hz ซึ่งทำให้โครงสร้างทางกลจะมีพฤติกรรมเป็นวัตถุแข็งเกร็งบน Flexible mounting

3) การสั่นของเครื่องยนต์เป็นรูปร่างการสั่นของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body mode) ที่ประกอบด้วย การเคลื่อนที่ของเครื่องยนต์ในรูปแบบต่าง 6 รูปแบบ โดยเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกนหลักของเครื่องยนต์ 3 รูปแบบ และการเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกนหลังของเครื่องยนต์ซึ่งจะใช้ลำดับของมุมออยเลอร์ (Euler's angle) แบบ (Yaw( $\gamma$ )-Pitch( $\beta$ )-Roll( $\alpha$ )) ในการอธิบายระบบพลศาสตร์ของเครื่องยนต์มีรายละเอียดดังนี้

- การสั่นตามความยาวของเครื่องยนต์ (Longitudinal)
- การสั่นด้านข้างของเครื่องยนต์ (Lateral)
- การเต้นขึ้นลงของเครื่องยนต์ (Bounce)
- การโคลงของเครื่องยนต์ (Body roll)
- การกระดอนของเครื่องยนต์ (Body pitch)
- การส่ายของเครื่องยนต์ (Body yaw)

4) พื้นหรือแท่นเครื่องไม่มีการเลื่อนตำแหน่ง

#### 3.1.2 สมมติฐาน (Basic assumption) ของการวิเคราะห์และทดสอบโมดัล

1) ระบบของโครงสร้างทางกลที่ศึกษามีคุณสมบัติเชิงเส้น

2) ค่าของตัวแปรต่างๆที่ใช้ในการทดสอบและศึกษาไม่คิดถึงผลกระทบที่เกิดจากเวลาโดยจะให้ เป็นค่าคงที่เสมอ

3) โครงสร้างทางกลจะมีพฤติกรรมเป็นไปตามนิยามของ Maxwell's reciprocity นั่นคือการพิจารณาค่าฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่จะถือว่า แรงที่มาจากองศาอิสระที่ตำแหน่ง p เป็นผล

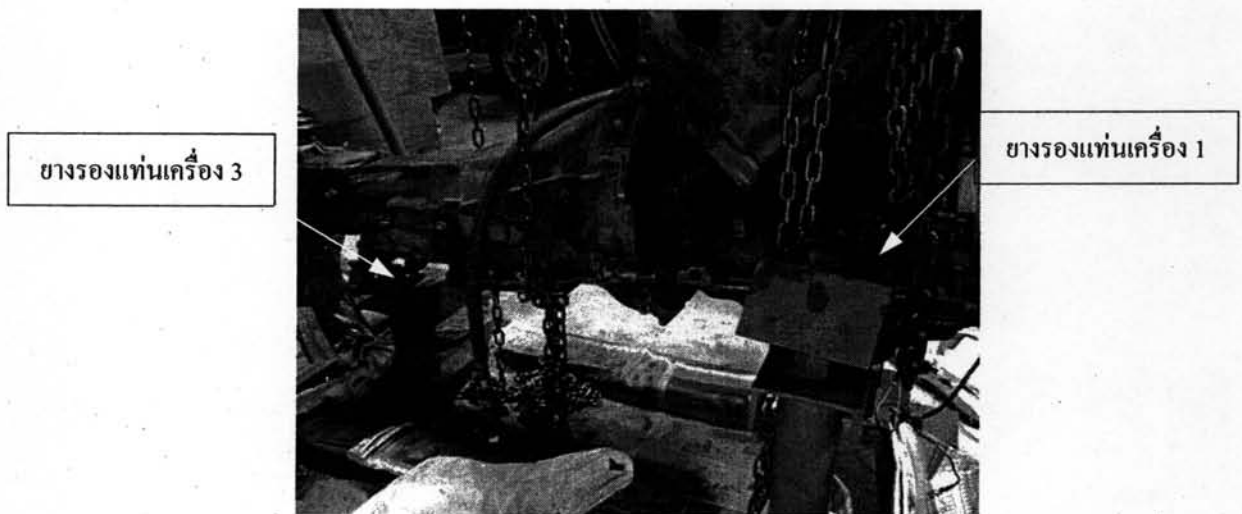
ทำให้เกิดการตอบสนองที่ตำแหน่ง  $q$  ในขณะเดียวกันกันคือการตอบสนองที่เกิดขึ้นที่จุด  $p$  ซึ่งมาจากแรงกระทำที่จุด  $q$  ในมีค่าเท่ากันหรือจะเขียนได้ว่า  $H_{pq} = H_{qp}$

4) อินพุตทุกและผลตอบสนองเอาต์พุต จะต้องมีข้อมูลเพียงพอที่จะทำให้เกิดพฤติกรรมที่จะแสดงออกของแบบจำลองของโครงสร้างทางกล

### 3.2 แบบจำลองการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ 6 ระดับชั้นเสรี

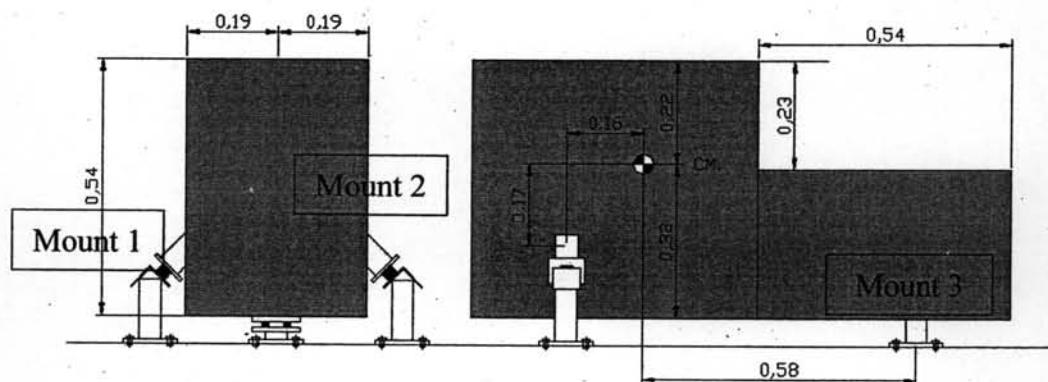
#### 3.2.1 แบบจำลองทางกายภาพของระบบสั่นสะเทือน

จากข้อสมมติฐานในหัวข้อ 3.1 ต้องการสร้างแบบจำลองการสั่นสะเทือนทำได้โดยเริ่มต้นจากแบบจำลองทางกายภาพของระบบที่จะศึกษา ซึ่งระบบที่จะศึกษาแสดงได้ดังรูป 3.1 ซึ่งเป็นโครงสร้างทางกลของเครื่องยนต์โดยเครื่องยนต์มีน้ำหนัก 142.3 กิโลกรัม



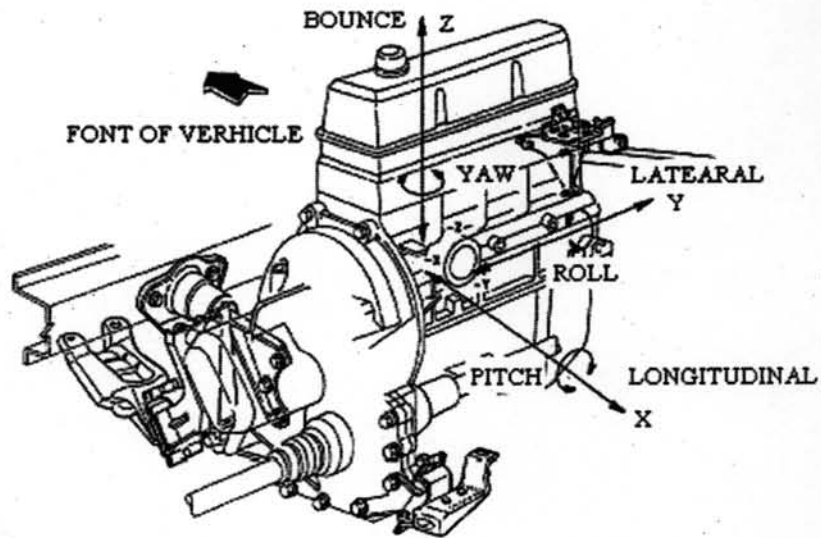
รูปที่ 3.1 โครงสร้างทางกลที่ทำการทดสอบ

จากโครงสร้างทางกลเครื่องยนต์ดังกล่าว สามารถสร้างแบบจำลองทางกายภาพของระบบ ได้ดังรูปที่ 3.2

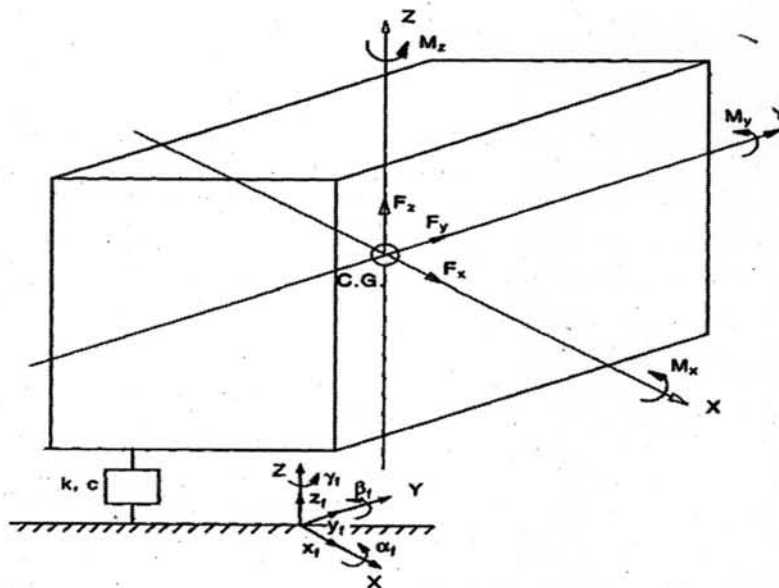


รูปที่ 3.2 แบบจำลองระบบโครงสร้างทางกลที่ทำการทดสอบ

จากแบบจำลองดังกล่าวจะนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งทำได้โดยใช้ความรู้เชิงทฤษฎีสร้างสมการขึ้นมาเพื่อที่จะสามารถนำไปใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของระบบโครงสร้างทางกลนั้นคือการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของรถยนต์ เมื่อพิจารณาให้วัตถุที่ศึกษาคือส่วนของรถยนต์ซึ่งถูกยึดไว้ที่ตำแหน่งใดๆโดยมียางแท่นเครื่องเป็นฐานรองรับ ดังรูปที่ 3.3 มีแรงกระตุ้นในทิศทางต่างๆ ในแนวแกนหลักทั้ง 3 แกนคือ  $F_x$ ,  $F_y$  และ  $F_z$  และมีโมเมนต์จากการกระตุ้นเกิดขึ้นทั้ง 3 แกน คือ  $M_x$ ,  $M_y$  และ  $M_z$  ทำให้รถยนต์มีการเคลื่อนที่เชิงเส้นคือ  $x_c$ ,  $y_c$  และ  $z_c$  และเคลื่อนที่เชิงมุมคือ  $\alpha$ ,  $\beta$  และ  $\gamma$



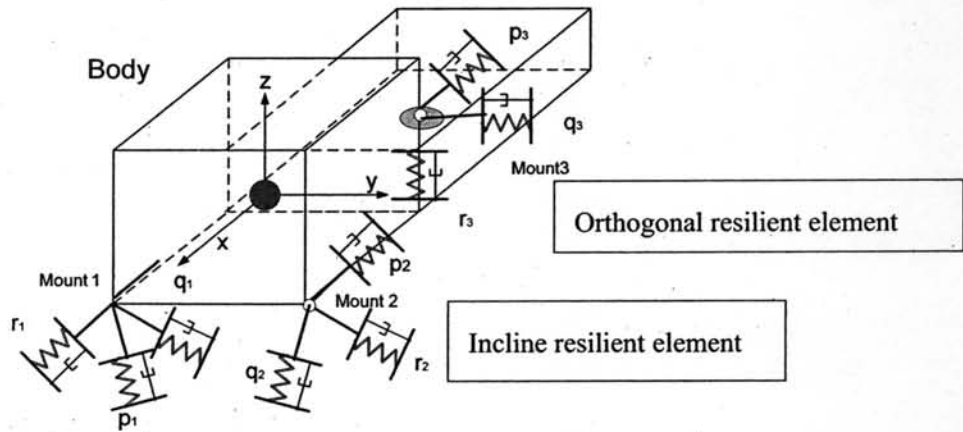
รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะทางกายภาพของการสั่นบนรถยนต์ [4]



รูปที่ 3.4 แบบจำลองเบื้องต้นของรถยนต์ที่มี 6 ระดับความเร็วในการสั่น [1]

รูปที่ 3.3 และ 3.4 แสดงถึงแบบจำลองเบื้องต้นที่จะนำมาอธิบายถึงลักษณะของการเคลื่อนที่ ที่จะนำมาศึกษาการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์

ในแบบจำลองของเครื่องยนต์ที่ทดสอบจะติดตั้งยางรองแท่นเครื่องที่จุดรองรับยาง 3 จุด ในส่วนของยางรองแท่นเครื่อง กำหนดให้ค่าความแข็งเกร็งและความหน่วงสมมูลของยางรองแท่นเครื่องจะอยู่ในแนว Principle of elastic axes ซึ่งเป็นแกนที่ตั้งฉากกันและแทนแกนดังกล่าวด้วยสัญลักษณ์  $p, q$  และ  $r$  ในการติดตั้งจริง การติดตั้งยางรองแท่นเครื่องที่จุดรองรับที่ 1 และ 2 ยางรองแท่นเครื่องจะถูกติดตั้งเป็นมุมเอียงทำให้ทิศตามแกนหลักของค่าความแข็งเกร็งและความหน่วงสมมูลของยางรองแท่นเครื่องไม่อยู่ในทิศทางขนานกับกรอบอ้างอิง แต่การติดตั้งที่จุดรองรับที่ 3 ทิศตามแกนหลักของความแข็งเกร็งและความหน่วงสมมูลของยางรองแท่นเครื่องจะมีทิศทางขนานกับกรอบอ้างอิง ดังนั้นจึงได้แบบจำลองวัตถุแข็งเกร็งของโครงสร้างทางกลของเครื่องยนต์ได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แบบจำลองวัตถุแข็งเกร็งของตัวเครื่องยนต์ที่ศึกษา

สามารถอธิบายสัญลักษณ์ของตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในบทที่ 3 ซึ่งจะนำไปใช้ในการหาสมการบังคับในหัวข้อ 3.2.2 ต่อไป

- $X_0 Y_0 Z_0$  = แกนอ้างอิงเฉื่อยจุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล
- $XYZ$  = แกนของตัวเครื่องยนต์ขณะกำลังเคลื่อนที่
- $i$  = ตำแหน่งจุดรองรับ ( $i = 1, 2$  และ  $3$ )
- $a_{xi} a_{yi} a_{zi}$  = เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดรองรับ  $i$  เกี่ยวกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย
- $[u_i]$  = เมทริกซ์เวกเตอร์การกระจัดที่จุดรองรับ  $i$  เกี่ยวกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย
- $[\dot{u}_i]$  = เมทริกซ์เวกเตอร์ความเร็วที่จุดรองรับ  $i$  เกี่ยวกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย
- $[K_i]$  = เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งของยางแท่นเครื่องที่จุดรองรับ  $i$
- $[C_i]$  = เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ความหน่วงของยางแท่นเครื่องที่จุดรองรับ  $i$

$F_x, F_y, F_z$	= แรงกระตุ้นที่กระทำที่จุดศูนย์กลางมวลในแนวแกน $XY$ และ $Z$ ตามลำดับ
$M_x, M_y, M_z$	= โมเมนต์จากการกระตุ้น
$\lambda_s$	= ทิศทาง cosine ของมุมระหว่าง principles elastic axes กับ coordinate axes ของเครื่องยนต์
$k_{pi}, k_{qi}, k_{ri}$	= ค่าความแข็งเกร็งสมมูลของยางรองแท่นเครื่องที่จุดรองรับ $i$
$c_{pi}, c_{qi}, c_{ri}$	= ค่าความหน่วงสมมูลของยางรองแท่นเครื่องที่จุดรองรับ $i$
$x_c$	= การเคลื่อนที่เชิงเส้นตามความยาวของเครื่องยนต์ (Longitudina)
$y_c$	= การเคลื่อนที่เชิงเส้นด้านข้างของเครื่องยนต์ (Lateral)
$z_c$	= การเคลื่อนที่เชิงเส้นขึ้นลงของเครื่องยนต์ (Bounce)
$\alpha$	= การเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกน $x$ หรือ การโคลงของเครื่องยนต์ (Body Roll)
$\beta$	= การเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกน $y$ หรือ การกระดอนของเครื่องยนต์ (Body pitch)
$\gamma$	= การเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกน $z$ หรือ การส่ายของเครื่องยนต์ (Body yaw)
$I_{xx}$	= โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน $x$ ของเครื่องยนต์
$I_{yy}$	= โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน $y$ ของเครื่องยนต์
$I_{zz}$	= โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน $z$ ของเครื่องยนต์
$H_c$	= โมเมนต์เชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล

พิจารณาที่จุดรองรับที่ 1 และ 2 ซึ่งยางแท่นเครื่องไม่ได้ถูกติดตั้งให้ทิศทางแกนหลักขนานกับแกนหลักของเครื่องยนต์ ในการหาสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งที่จุดรองรับดังกล่าวแต่ละตำแหน่งจะสามารถคำนวณได้โดยใช้ความสัมพันธ์ที่แสดง ด้วยสัญลักษณ์  $\lambda_s$  ซึ่งเป็นปริมาณ cosine ของมุมระหว่าง principle elastic axes ของยางแท่นเครื่อง กับโคออร์ดิเนตตามแนวแกนหลักของเครื่องยนต์ เช่น  $\lambda_{xp}$  จะเป็นค่าของ cosine ของมุมระหว่าง แกนหลัก  $X$  ของเครื่องยนต์ กับ  $p$  ที่เป็นแกนหลักของยางรองท่าเครื่อง ชุดของสมการดังต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งจุดรองรับ 1 และ 2 ตามแนวแกนหลักของเครื่องยนต์[13]

$$\begin{aligned}
 k_{xx} &= k_p \lambda_{xp}^2 + k_q \lambda_{xq}^2 + k_r \lambda_{xr}^2 \\
 k_{yy} &= k_p \lambda_{yp}^2 + k_q \lambda_{yq}^2 + k_r \lambda_{yr}^2 \\
 k_{zz} &= k_p \lambda_{zp}^2 + k_q \lambda_{zq}^2 + k_r \lambda_{zr}^2 \\
 k_{xy} &= k_p \lambda_{xp} \lambda_{yp} + k_q \lambda_{xq} \lambda_{yq} + k_r \lambda_{xr} \lambda_{yr} \\
 k_{xz} &= k_p \lambda_{xp} \lambda_{zp} + k_q \lambda_{xq} \lambda_{zq} + k_r \lambda_{xr} \lambda_{zr} \\
 k_{yz} &= k_p \lambda_{yp} \lambda_{zp} + k_q \lambda_{yq} \lambda_{zq} + k_r \lambda_{yr} \lambda_{zr}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$



และ สำหรับ Viscous damping coefficient จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 c_{xx} &= c_p \lambda_{xp}^2 + c_q \lambda_{xq}^2 + c_r \lambda_{xr}^2 \\
 c_{yy} &= c_p \lambda_{yp}^2 + c_q \lambda_{yq}^2 + c_r \lambda_{yr}^2 \\
 c_{zz} &= c_p \lambda_{zp}^2 + c_q \lambda_{zq}^2 + c_r \lambda_{zr}^2 \\
 c_{xy} &= c_p \lambda_{xp} \lambda_{yp} + c_q \lambda_{xq} \lambda_{yq} + c_r \lambda_{xr} \lambda_{yr} \\
 c_{xz} &= c_p \lambda_{xp} \lambda_{zp} + c_q \lambda_{xq} \lambda_{zq} + c_r \lambda_{xr} \lambda_{zr} \\
 c_{yz} &= c_p \lambda_{yp} \lambda_{zp} + c_q \lambda_{yq} \lambda_{zq} + c_r \lambda_{yr} \lambda_{zr}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3.2.2 การหาสมการบังคับ (Derivation of governing equation)

การหาสมการบังคับ เป็นขั้นตอนการหาแบบจำลองทางพลศาสตร์ของระบบสั่นสะเทือนทางกลของเครื่องยนต์ ขั้นตอนจะมาพิจารณาการวางแทนเครื่องซึ่งเป็น Flexible element โดยคุณสมบัติวัสดุจะสร้างแรงต้านการเคลื่อนที่ระหว่างแทนเครื่องกับเครื่องยนต์ โดยมีแรงต้านจากความแข็งเกร็งที่ขึ้นอยู่กับทั้งขนาดของการขจัดและทิศทางของการขจัดสัมพัทธ์ (Relative displacement) ระหว่างแทนเครื่องกับเครื่องยนต์สามารถเขียนค่าของสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งในรูปของเมทริกซ์ ที่มี 36 elements ได้ดังนี้

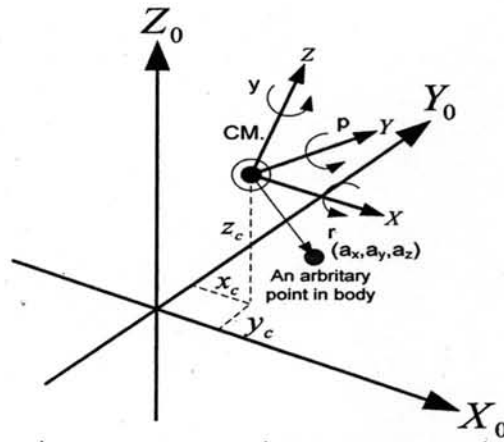
$$\begin{bmatrix}
 k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\alpha} & k_{x\beta} & k_{x\gamma} \\
 k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} & k_{y\alpha} & k_{y\beta} & k_{y\gamma} \\
 k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} & k_{z\alpha} & k_{z\beta} & k_{z\gamma} \\
 k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} & k_{\alpha\gamma} & k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} & k_{\alpha\gamma} \\
 k_{\beta\alpha} & k_{\beta\beta} & k_{\beta\gamma} & k_{\beta\alpha} & k_{\beta\beta} & k_{\beta\gamma} \\
 k_{\gamma\alpha} & k_{\gamma\beta} & k_{\gamma\gamma} & k_{\gamma\alpha} & k_{\gamma\beta} & k_{\gamma\gamma}
 \end{bmatrix}$$

โดยที่  $k_{ij} = k_{ji}$  และสำหรับทุกๆ  $i \neq j$

สำหรับการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางพลศาสตร์บน แบบจำลองของวัตถุแข็งเกร็งที่มีสมมุติฐานตามหัวข้อ 3.1 นี้จะไม่พิจารณาค่าของ สัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็ง (Stiffness coefficient) ที่เกิดจากการบิดตัว ดังนั้นจะได้ว่า  $k_{ij} = 0$  สำหรับ  $(i \text{ และ } j) = \alpha, \beta, \gamma$  ทุกๆ  $i, j$  ค่าของสัมประสิทธิ์ความหน่วง (Damping coefficient) จะเป็นในลักษณะเดียวกัน คือ แรงที่เกิดขึ้นนี้จะขึ้นอยู่กับทั้งขนาดและทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ (Relative velocity) ระหว่างแทนเครื่องกับเครื่องยนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ในลักษณะเดียวกับค่าของสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็ง

แนวทางแบบจำลองทางพลศาสตร์ของเครื่องยนต์

เริ่มต้นจากพิจารณา  $X_0Y_0Z_0$  เป็นกรอบอ้างอิง (Reference frame) และมีจุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของตัวเครื่องยนต์ในขณะที่ยังไม่มีการเคลื่อนที่ และ  $XYZ$  เป็นแกนของตัวเครื่องยนต์ในขณะที่กำลังเคลื่อนที่ไป ดังรูปที่ 3.6

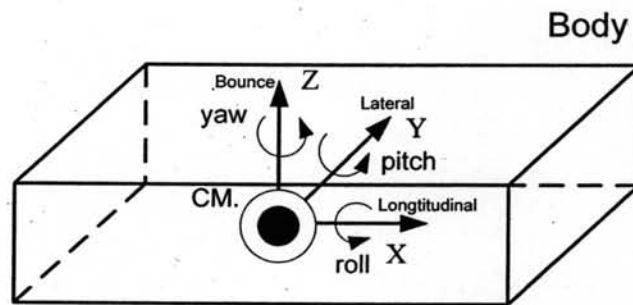


รูปที่ 3.6 กรอบอ้างอิงเฉื่อยและแกนของเครื่องยนต์

สำหรับแบบจำลองดังกล่าวจะอยู่ภายใต้สมมติฐานดังนี้

1. พิจารณาการเคลื่อนที่แบบ เลื่อนตำแหน่งและการหมุนเป็นปริมาณน้อยๆ
2. ผลของการเปลี่ยนตำแหน่งไม่มีผลต่อการหมุนของวัตถุ
3. มุมที่เกิดจากการหมุนเป็นการหมุนรอบแกนซึ่งเป็นแกนของ Inertial axes แสดงได้ดัง

รูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 การเคลื่อนที่ของเครื่องยนต์แบบ 6 ระดับขั้นเสรี

สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของตัวเครื่องยนต์แบบ 6 ระดับขั้นเสรี ได้จากสมการของนิวตัน-ออยเลอร์ (Newton-Euler's Equation)

สมการนิวตันเป็นกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันสามารถเขียนความสัมพันธ์ทั่วไปคือ

$$m\ddot{X} = \sum F$$

$$X = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \text{ และ } \sum F = \begin{bmatrix} \sum f_x \\ \sum f_y \\ \sum f_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum f_x \\ m\ddot{y}_c &= \sum f_y \\ m\ddot{z}_c &= \sum f_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

และจากสมการของออยเลอร์

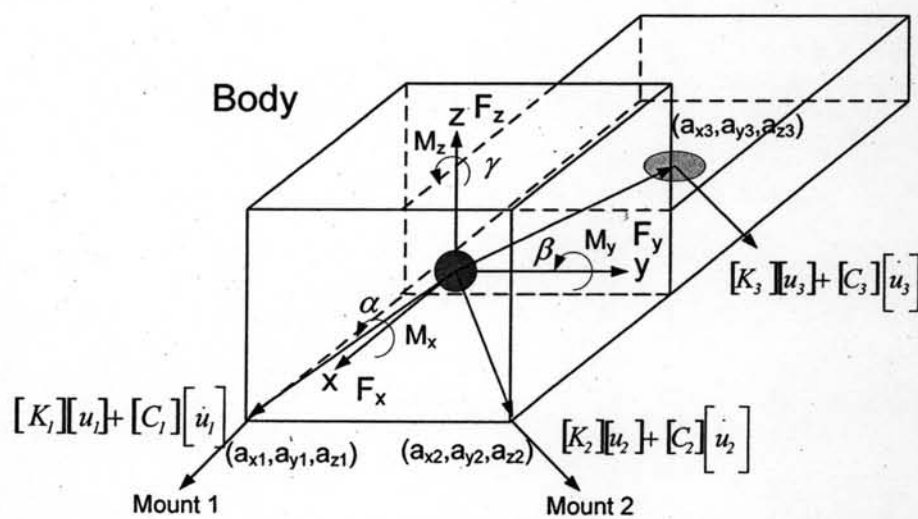
$$\dot{H}_c = \sum M_c \quad (3.5)$$

โดยที่  $H_c$  คือ โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล (Angular momentum about CM. point)

จาก  $\dot{H}_c = \sum M_c$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} I_{xx}\ddot{\alpha} - I_{xy}\ddot{\beta} - I_{xz}\ddot{\gamma} &= \sum M_x \\ -I_{xy}\ddot{\alpha} + I_{yy}\ddot{\beta} - I_{yz}\ddot{\gamma} &= \sum M_y \\ -I_{xz}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\beta} + I_{zz}\ddot{\gamma} &= \sum M_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

จากสมการทั่วไปของนิวตัน - ออยเลอร์ดังกล่าวจะต้องหาแรงและโมเมนต์ที่เกิดบนแบบจำลอง โดยใช้การหาการกระจัดและความเร็วที่จุดรองรับ (Mount) แต่ละตำแหน่ง



รูปที่ 3.8 แผนภาพลักษณะแรงที่กระทำบนแบบจำลองของเครื่องยนต์



รูปที่ 3.8 จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะแรงบนแบบจำลองรวม โดยแรงและโมเมนต์ที่กระตุ้นที่จุดศูนย์กลางมวลของระบบทำให้เกิดแรงที่กระทำต่อจุดรองรับจากการกระชากและความเร็วที่ตำแหน่งนั้นๆ โดยวิธีการหาการกระจัดและความเร็วที่จุดรองรับ (Mount) แต่ละตำแหน่ง นั้นจะใช้ลำดับของมุมออยเลอร์ (Euler's angle) แบบ (Yaw( $\gamma$ )-Pitch( $\beta$ )-Roll( $\alpha$ )) ซึ่งจะนำมาใช้ในการอธิบายระบบพลศาสตร์ สามารถแสดงลำดับของการแปลงโคออร์ดิเนตของเวกเตอร์ที่จุดรองรับ จาก XYZ แปลงโดยใช้การหมุนครั้งแรกรอบแกน Z หรือเรียกว่า Yaw เป็นโคออร์ดิเนต  $x'y'z'$  จากนั้นพิจารณาการหมุนรอบแกน Y หรือเรียกว่า Pitch จะเปลี่ยนเป็น  $x''y''z''$  และการหมุนครั้งสุดท้ายรอบแกน X ก็จะได้โคออร์ดิเนตที่ต้องผ่านการแปลงแล้วคือ  $xyz$  เป็นโคออร์ดิเนตของการเคลื่อนที่เชิงมุมของเครื่องยนต์ ซึ่งสรุปเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\text{Sequence, XYZ} \xrightarrow{\text{Yaw}} x'y'z' \xrightarrow{\text{Pitch}} x''y''z'' \xrightarrow{\text{Roll}} xyz$$

$$\text{YAW, } \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Linearize}} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\text{PITCH, } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Linearize}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

$$\text{ROLL, } \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Linearize}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้หาความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \rightarrow$$

เนื่องจากจะพิจารณาสำหรับการเคลื่อนที่ที่มีขนาดน้อยๆ ดังนั้นจึงทำให้

$$\alpha \cdot \beta = 0$$

$$\alpha \cdot \gamma = 0$$

$$\beta \cdot \gamma = 0$$

จะได้เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดรองรับ คือ

$$\begin{bmatrix} x_c + a_x - a_y\gamma + a_z\beta \\ y_c + a_y - a_z\alpha + a_x\gamma \\ z_c + a_z - a_x\beta + a_y\alpha \end{bmatrix}$$

แสดงเป็นเวกเตอร์การกระจัดที่จุดรองรับใดคือ  $[u_i] =$

$$\begin{bmatrix} x_c - a_{yi}\gamma + a_{zi}\beta \\ y_c - a_{zi}\alpha + a_{xi}\gamma \\ z_c - a_{xi}\beta + a_{yi}\alpha \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

และเวกเตอร์ความเร็ว คือ

$$[\dot{u}_i] = \begin{bmatrix} \dot{x}_c - a_{yi}\dot{\gamma} + a_{zi}\dot{\beta} \\ \dot{y}_c - a_{zi}\dot{\alpha} + a_{xi}\dot{\gamma} \\ \dot{z}_c - a_{xi}\dot{\beta} + a_{yi}\dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

จากรูปที่ 3.8 ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ของสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นของตัวเครื่องได้ดังนี้

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_c \end{bmatrix} = -[K_1][u_1] - [K_2][u_2] - [K_3][u_3] - [C_1][\dot{u}_1] - [C_2][\dot{u}_2] - [C_3][\dot{u}_3] + \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งของยางแท่นเครื่องที่หาได้จากชุดสมการที่ (3.1) แสดงด้วยเมทริกซ์สัญลักษณ์ทั่วไป ของตำแหน่งจุดรองรับต่างๆ ได้ดังนี้

$$[K_1] = \begin{bmatrix} k_{xx1} & k_{xy1} & k_{xz1} \\ k_{xy1} & k_{yy1} & k_{yz1} \\ k_{xz1} & k_{yz1} & k_{zz1} \end{bmatrix}, [K_2] = \begin{bmatrix} k_{xx2} & k_{xy2} & k_{xz2} \\ k_{xy2} & k_{yy2} & k_{yz2} \\ k_{xz2} & k_{yz2} & k_{zz2} \end{bmatrix}, [K_3] = \begin{bmatrix} k_{xx3} & k_{xy3} & k_{xz3} \\ k_{xy3} & k_{yy3} & k_{yz3} \\ k_{xz3} & k_{yz3} & k_{zz3} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

สัมประสิทธิ์ความหน่วงของแท่นเครื่องหาได้จากชุดสมการที่ (3.2) ได้ในลักษณะเดียวกับการหาค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็ง แสดงด้วยเมทริกซ์สัญลักษณ์ทั่วไป ของตำแหน่งจุดรองรับต่างๆ ได้ดังนี้

$$[C_1] = \begin{bmatrix} c_{xx1} & c_{xy1} & c_{xz1} \\ c_{xy1} & c_{yy1} & c_{yz1} \\ c_{xz1} & c_{yz1} & c_{zz1} \end{bmatrix}, [C_2] = \begin{bmatrix} c_{xx2} & c_{xy2} & c_{xz2} \\ c_{xy2} & c_{yy2} & c_{yz2} \\ c_{xz2} & c_{yz2} & c_{zz2} \end{bmatrix}, [C_3] = \begin{bmatrix} c_{xx3} & c_{xy3} & c_{xz3} \\ c_{xy3} & c_{yy3} & c_{yz3} \\ c_{xz3} & c_{yz3} & c_{zz3} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

แสดงค่าเวกเตอร์การกระจัดที่จุดรองรับต่างๆ ได้ดังนี้

$$[u_1] = \begin{bmatrix} x_c - a_{y1}\gamma + a_{z1}\beta \\ y_c - a_{z1}\alpha + a_{x1}\gamma \\ z_c - a_{x1}\beta + a_{y1}\alpha \end{bmatrix}, [u_2] = \begin{bmatrix} x_c - a_{y2}\gamma + a_{z2}\beta \\ y_c - a_{z2}\alpha + a_{x2}\gamma \\ z_c - a_{x2}\beta + a_{y2}\alpha \end{bmatrix}, [u_3] = \begin{bmatrix} x_c - a_{y3}\gamma + a_{z3}\beta \\ y_c - a_{z3}\alpha + a_{x3}\gamma \\ z_c - a_{x3}\beta + a_{y3}\alpha \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

และแสดงเวกเตอร์ความเร็วที่จุดรองรับต่างๆ ได้ดังนี้

$$[\dot{u}_1] = \begin{bmatrix} \dot{x}_c - a_{y1}\dot{\gamma} + a_{z1}\dot{\beta} \\ \dot{y}_c - a_{z1}\dot{\alpha} + a_{x1}\dot{\gamma} \\ \dot{z}_c - a_{x1}\dot{\beta} + a_{y1}\dot{\alpha} \end{bmatrix}, [\dot{u}_2] = \begin{bmatrix} \dot{x}_c - a_{y2}\dot{\gamma} + a_{z2}\dot{\beta} \\ \dot{y}_c - a_{z2}\dot{\alpha} + a_{x2}\dot{\gamma} \\ \dot{z}_c - a_{x2}\dot{\beta} + a_{y2}\dot{\alpha} \end{bmatrix}, [\dot{u}_3] = \begin{bmatrix} \dot{x}_c - a_{y3}\dot{\gamma} + a_{z3}\dot{\beta} \\ \dot{y}_c - a_{z3}\dot{\alpha} + a_{x3}\dot{\gamma} \\ \dot{z}_c - a_{x3}\dot{\beta} + a_{y3}\dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ดังนั้นเมื่อแทนชุดสมการ (3.11) ถึง (3.14) ลงในสมการหลัก (3.10) จะได้ชุดของสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกนหลักของเครื่องยนต์ทั้ง 3 แกน ตามสมการที่ (3.15) ถึง (3.17) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c + \sum_{i=1}^3 c_{xxi}\dot{x}_c + \sum_{i=1}^3 c_{xyi}\dot{y}_c + \sum_{i=1}^3 c_{xzi}\dot{z}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{yi} - c_{xyi}a_{zi})\dot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xxi}a_{zi} - c_{xzi}a_{xi})\dot{\beta} \\ + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{xi} - c_{xxi}a_{yi})\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 k_{xxi}x_c + \sum_{i=1}^3 k_{xyi}y_c + \sum_{i=1}^3 k_{xzi}z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{yi} - k_{xyi}a_{zi})\alpha \\ + \sum_{i=1}^3 (k_{xxi}a_{zi} - k_{xzi}a_{xi})\beta + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{xi} - k_{xxi}a_{yi})\gamma = F_X \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c + \sum_{i=1}^3 c_{xyi}\dot{x}_c + \sum_{i=1}^3 c_{yyi}\dot{y}_c + \sum_{i=1}^3 c_{yzi}\dot{z}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{yzi}a_{yi} - c_{yyi}a_{zi})\dot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{zi} - c_{yzi}a_{xi})\dot{\beta} \\ + \sum_{i=1}^3 (c_{yyi}a_{xi} - c_{xyi}a_{yi})\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 k_{xyi}x_c + \sum_{i=1}^3 k_{yyi}y_c + \sum_{i=1}^3 k_{yzi}z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{yzi}a_{yi} - k_{yyi}a_{zi})\alpha \\ + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{zi} - k_{yzi}a_{xi})\beta + \sum_{i=1}^3 (k_{yyi}a_{xi} - k_{xyi}a_{yi})\gamma = F_Y \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{z}_c + \sum_{i=1}^3 c_{xzi}\dot{x}_c + \sum_{i=1}^3 c_{yzi}\dot{y}_c + \sum_{i=1}^3 c_{zzi}\dot{z}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{zzi}a_{yi} - c_{yzi}a_{zi})\dot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{zi} - c_{zzi}a_{xi})\dot{\beta} \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{yzi}a_{xi} - c_{xzi}a_{yi})\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 k_{xzi}x_c + \sum_{i=1}^3 k_{yzi}y_c + \sum_{i=1}^3 k_{zzi}z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{zzi}a_{yi} - k_{yzi}a_{zi})\alpha \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{zi} - k_{zzi}a_{xi})\beta + \sum_{i=1}^3 (k_{yzi}a_{xi} - k_{xzi}a_{yi})\gamma = F_Z
\end{aligned}$$

(3.17)

จากนั้นมาหาสมการการเคลื่อนที่ในแนวเชิงมุมจากสมการทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned}
[I]\{\ddot{\theta}\} &= -\{a_1\} \times \{K_1\} - \{a_2\} \times \{K_2\} - \{a_3\} \times \{K_3\} - \{a_1\} \times \{C_1\} - \{a_2\} \times \{C_2\} \\
&- \{a_3\} \times \{C_3\} + \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$\{a_i\} \times \{K_i\}$  = โมเมนต์ของแรงเนื่องจากสปริงรอบจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องยนต์

$\{a_i\} \times \{C_i\}$  = โมเมนต์ของแรงเนื่องจากตัวหน่วงรอบจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องยนต์

โดยที่ ชุดตัวแปรแสดงได้ดังนี้

$$\{\ddot{\theta}\} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix}, \{a_1\} \times \{K_1\} = [\tilde{a}_1]\{K_1\}, \{a_2\} \times \{K_2\} = [\tilde{a}_2]\{K_2\}, \{a_3\} \times \{K_3\} = [\tilde{a}_3]\{K_3\}$$

$$\{a_1\} \times \{C_1\} = [\tilde{a}_1]\{C_1\}, \{a_2\} \times \{C_2\} = [\tilde{a}_2]\{C_2\}, \{a_3\} \times \{C_3\} = [\tilde{a}_3]\{C_3\}$$

จัดรูปได้ง่าย โดยใช้  $[\tilde{a}_i]$  ซึ่งมีคุณสมบัติเป็น skew symmetry Matrix นั่นคือ

$$[\tilde{a}_i] = \begin{bmatrix} 0 & -a_{zi} & a_{yi} \\ a_{zi} & 0 & -a_{xi} \\ -a_{yi} & a_{xi} & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับรูปแบบของ  $\{K_i\}, \{C_i\}$  จะแตกต่างกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น ซึ่งจะต้องจัดรูปแบบของปริมาณเชิงมุมโดยเฉพาะ จะจัดรูปให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ที่ใช้สำหรับแทนค่าในสมการหลัก (3.18) ได้ดังนี้

$$\{K_i\} = \begin{bmatrix} k_{xx}\dot{x}_c + k_{xy}\dot{y}_c + k_{xz}\dot{z}_c + (k_{xz}a_{yi} - k_{xy}a_{zi})\alpha + (k_{xx}a_{zi} - k_{xz}a_{xi})\beta + (k_{xy}a_{xi} - k_{xx}a_{yi})\gamma \\ k_{xy}\dot{x}_c + k_{yy}\dot{y}_c + k_{yz}\dot{z}_c + (k_{yz}a_{yi} - k_{yy}a_{zi})\alpha + (k_{xy}a_{zi} - k_{yz}a_{xi})\beta + (k_{yy}a_{xi} - k_{xy}a_{yi})\gamma \\ k_{xz}\dot{x}_c + k_{yz}\dot{y}_c + k_{zz}\dot{z}_c + (k_{zz}a_{yi} - k_{yz}a_{zi})\alpha + (k_{xz}a_{zi} - k_{zz}a_{xi})\beta + (k_{yz}a_{xi} - k_{xz}a_{yi})\gamma \end{bmatrix}$$

$$(3.19)$$

$$\{C_i\} = \begin{bmatrix} c_{xxi}\dot{x}_c + c_{xyi}\dot{y}_c + c_{xzi}\dot{z}_c + (c_{xzt}a_{yi} - c_{xyt}a_{zi})\dot{\alpha} + (c_{xxt}a_{zi} - c_{xzt}a_{xi})\dot{\beta} + (c_{xyt}a_{xi} - c_{xxt}a_{yi})\dot{\gamma} \\ c_{xyi}\dot{x}_c + c_{yyi}\dot{y}_c + c_{yzi}\dot{z}_c + (c_{yzt}a_{yi} - c_{yyt}a_{zi})\dot{\alpha} + (c_{xyt}a_{zi} - c_{yzt}a_{xi})\dot{\beta} + (c_{yyt}a_{xi} - c_{xyt}a_{yi})\dot{\gamma} \\ c_{xzi}\dot{x}_c + c_{yzi}\dot{y}_c + c_{zzi}\dot{z}_c + (c_{zzt}a_{yi} - c_{yzt}a_{zi})\dot{\alpha} + (c_{xzt}a_{zi} - c_{zzt}a_{xi})\dot{\beta} + (c_{yzt}a_{xi} - c_{xzt}a_{yi})\dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$(3.20)$$

โดยจะลดรูปให้อยู่ในรูปแบบ  $\{K_i\} = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix}, \{C_i\} = \begin{bmatrix} D_i \\ E_i \\ F_i \end{bmatrix}$

ดังนั้นจะได้ว่า  $[\tilde{a}_i]\{K_i\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{zi} & a_{yi} \\ a_{zi} & 0 & -a_{xi} \\ -a_{yi} & a_{xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{yi}C_i - a_{zi}B_i \\ a_{zi}A_i - a_{xi}C_i \\ a_{xi}B_i - a_{yi}A_i \end{bmatrix}$  (3.21)

$$[\tilde{a}_i]\{C_i\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{zi} & a_{yi} \\ a_{zi} & 0 & -a_{xi} \\ -a_{yi} & a_{xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i \\ E_i \\ F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{yi}F_i - a_{zi}E_i \\ a_{zi}D_i - a_{xi}F_i \\ a_{xi}E_i - a_{yi}D_i \end{bmatrix}$$
 (3.22)

จะได้สมการหลักสำหรับอธิบายการเคลื่อนที่เชิงมุมคือ

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^3 [\tilde{a}_i]\{C_i\} + \sum_{i=1}^3 [\tilde{a}_i]\{M_i\} = \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}$$
 (3.23)

สามารถแสดงด้วยสมการการเคลื่อนที่เชิงมุมได้โดยแทนตัวแปรต่างๆ จากสมการ (3.19) ถึง (3.22) ลงในสมการ (3.23) จะได้ชุดของสมการการเคลื่อนที่เชิงมุมที่รอบแกนหลักของเครื่องยนต์ทั้ง 3 แกนตามชุดสมการที่ (3.24) ถึง (3.26)

$$\begin{aligned}
& I_{xx}\ddot{\alpha} - I_{xy}\ddot{\beta} - I_{xz}\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{yi} - c_{xyi}a_{zi})\dot{x}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{yzi}a_{yi} - c_{yyi}a_{zi})\dot{y}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{zzi}a_{yi} - c_{yzi}a_{zi})\dot{z}_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{yyi}a_{zi}^2 + c_{zzi}a_{yi}^2 - 2c_{yzi}a_{yi}a_{zi})\dot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{yi}a_{zi} + c_{yzi}a_{xi}a_{zi} - c_{zzi}a_{xi}a_{yi} - c_{xyi}a_{zi}^2)\dot{\beta} \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{yi}a_{zi} + c_{yzi}a_{xi}a_{yi} - c_{yyi}a_{xi}a_{zi} - c_{xzi}a_{yi}^2)\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{yi} - k_{xyi}a_{zi})x_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{yzi}a_{yi} - k_{yyi}a_{zi})y_c + \sum_{i=1}^3 (k_{zzi}a_{yi} - k_{yzi}a_{zi})z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{yyi}a_{zi}^2 + k_{zzi}a_{yi}^2 - 2k_{yzi}a_{yi}a_{zi})\alpha \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{yi}a_{zi} + k_{yzi}a_{xi}a_{zi} - k_{zzi}a_{xi}a_{yi} - k_{xyi}a_{zi}^2)\beta \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{yi}a_{zi} + k_{yzi}a_{xi}a_{yi} - k_{yyi}a_{xi}a_{zi} - k_{xzi}a_{yi}^2)\gamma = M_X
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& -I_{xy}\ddot{\alpha} + I_{yy}\ddot{\beta} - I_{yz}\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (c_{xxi}a_{zi} - c_{xz}a_{xi})\dot{x}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{zi} - c_{yz}a_{xi})\dot{y}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{zi} - c_{zz}a_{xi})\dot{z}_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{xzi}a_{yi}a_{zi} + c_{yzi}a_{xi}a_{zi} - c_{zzi}a_{xi}a_{yi} - c_{xyi}a_{zi}^2)\dot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xxi}a_{zi}^2 + c_{zzi}a_{xi}^2 - 2c_{xzi}a_{xi}a_{zi})\dot{\beta} \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{xi}a_{zi} + c_{xzi}a_{xi}a_{yi} - c_{xxi}a_{yi}a_{zi} - c_{yz}a_{xi}^2)\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (k_{xxi}a_{zi} - k_{xz}a_{xi})x_c + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{zi} - k_{yz}a_{xi})y_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{zi} - k_{zz}a_{xi})z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{xzi}a_{yi}a_{zi} + k_{yzi}a_{xi}a_{zi} - k_{zzi}a_{xi}a_{yi} - k_{xyi}a_{zi}^2)\alpha \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xxi}a_{zi}^2 + k_{zzi}a_{xi}^2 - 2k_{xzi}a_{xi}a_{zi})\beta \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{xi}a_{zi} + k_{xzi}a_{xi}a_{yi} - k_{xxi}a_{yi}a_{zi} - k_{yz}a_{xi}^2)\gamma = M_Y
\end{aligned} \tag{3.25}$$



$$\begin{aligned}
& -I_{xz}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\beta} + I_{zz}\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{xi} - c_{xxi}a_{yi})\ddot{x}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{yyi}a_{xi} - c_{xyi}a_{yi})\ddot{y}_c + \sum_{i=1}^3 (c_{yzi}a_{xi} - c_{zxi}a_{yi})\ddot{z}_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{yi}a_{zi} + c_{yzi}a_{xi}a_{yi} - c_{yyi}a_{xi}a_{zi} - c_{zxi}a_{yi}^2)\ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 (c_{xyi}a_{xi}a_{zi} + c_{zxi}a_{xi}a_{yi} - c_{xxi}a_{yi}a_{zi} - c_{yzi}a_{xi}^2)\ddot{\beta} \\
& + \sum_{i=1}^3 (c_{xxi}a_{yi}^2 + c_{yyi}a_{xi}^2 - 2c_{xyi}a_{xi}a_{yi})\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{xi} - k_{xxi}a_{yi})x_c + \sum_{i=1}^3 (k_{yyi}a_{xi} - k_{xyi}a_{yi})y_c \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{yzi}a_{xi} - k_{zxi}a_{yi})z_c + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{yi}a_{zi} + k_{yzi}a_{xi}a_{yi} - k_{yyi}a_{xi}a_{zi} - k_{zxi}a_{yi}^2)\alpha \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xyi}a_{xi}a_{zi} + k_{zxi}a_{xi}a_{yi} - k_{xxi}a_{yi}a_{zi} - k_{yzi}a_{xi}^2)\beta \\
& + \sum_{i=1}^3 (k_{xxi}a_{yi}^2 + k_{yyi}a_{xi}^2 - 2k_{xyi}a_{xi}a_{yi})\gamma = M_Z
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) ข้างต้นสามารถสรุปให้ดูง่ายขึ้นจะจัดอยู่ในรูปของเมทริกซ์ (Matrix) ได้ดังต่อไปนี้

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \tag{3.27}$$

$[M_i]$  = เมทริกซ์มวลของระบบ

$[I_i]$  = เมทริกซ์โมเมนต์ความเฉื่อยของระบบ

ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

$$\{X\} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_i] & 0 \\ 0 & [I_i] \end{bmatrix}, [M_i] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, [I_i] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{i=1}^3 c_{xxi}$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^3 c_{xyi}$$

$$c_{13} = c_{31} = \sum_{i=1}^3 c_{xzi}$$

$$c_{14} = c_{41} = \sum_{i=1}^3 (c_{xzi} a_{yi} - c_{xyi} a_{zi})$$

$$c_{15} = c_{51} = \sum_{i=1}^3 (c_{xxi} a_{zi} - c_{xzi} a_{xi})$$

$$c_{16} = c_{61} = \sum_{i=1}^3 (c_{xyi} a_{xi} - c_{xxi} a_{yi})$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^3 c_{yyi}$$

$$c_{23} = c_{32} = \sum_{i=1}^3 c_{yzi}$$

$$c_{24} = c_{42} = \sum_{i=1}^3 (c_{yzi} a_{yi} - c_{yyi} a_{zi})$$

$$c_{25} = c_{52} = \sum_{i=1}^3 (c_{xyi} a_{zi} - c_{yzi} a_{xi})$$

$$c_{26} = c_{62} = \sum_{i=1}^3 (c_{yyi} a_{xi} - c_{xyi} a_{yi})$$

$$c_{33} = \sum_{i=1}^3 c_{zzi}$$

$$c_{34} = c_{43} = \sum_{i=1}^3 (c_{zzi} a_{yi} - c_{yzi} a_{zi})$$

$$c_{35} = c_{53} = \sum_{i=1}^3 (c_{xzi} a_{zi} - c_{zzi} a_{xi})$$

$$c_{36} = c_{63} = \sum_{i=1}^3 (c_{yzi} a_{xi} - c_{xzi} a_{yi})$$

$$c_{44} = \sum_{i=1}^3 (c_{yyi} a_{zi}^2 + c_{zzi} a_{yi}^2 - 2c_{yzi} a_{yi} a_{zi})$$

$$c_{45} = c_{54} = \sum_{i=1}^3 (c_{xzi} a_{yi} a_{zi} + c_{yzi} a_{xi} a_{zi} - c_{zzi} a_{xi} a_{yi} - c_{xyi} a_{zi}^2)$$

$$c_{46} = c_{64} = \sum_{i=1}^3 (c_{xyi} a_{yi} a_{zi} + c_{yzi} a_{xi} a_{yi} - c_{yyi} a_{xi} a_{zi} - c_{xzi} a_{yi}^2)$$

$$c_{55} = \sum_{i=1}^3 (c_{xxi} a_{zi}^2 + c_{zzi} a_{xi}^2 - 2c_{xzi} a_{xi} a_{zi})$$

$$c_{56} = c_{65} = \sum_{i=1}^3 (c_{xyi} a_{xi} a_{zi} + c_{xzi} a_{xi} a_{yi} - c_{xxi} a_{yi} a_{zi} - c_{yzi} a_{xi}^2)$$

$$c_{66} = \sum_{i=1}^3 (c_{xxi} a_{yi}^2 + c_{yyi} a_{xi}^2 - 2c_{xyi} a_{xi} a_{yi})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = \sum_{i=1}^3 k_{xxi}$$

$$k_{12} = k_{21} = \sum_{i=1}^3 k_{xyi}$$

$$k_{13} = k_{31} = \sum_{i=1}^3 k_{xzi}$$

$$k_{14} = k_{41} = \sum_{i=1}^3 (k_{xzi} a_{yi} - k_{xyi} a_{zi})$$

$$k_{15} = k_{51} = \sum_{i=1}^3 (k_{xxi} a_{zi} - k_{xzi} a_{xi})$$

$$k_{16} = k_{61} = \sum_{i=1}^3 (k_{xyi} a_{xi} - k_{xxi} a_{yi})$$

$$k_{22} = \sum_{i=1}^3 k_{yyi}$$

$$k_{23} = k_{32} = \sum_{i=1}^3 k_{yzi}$$

$$k_{24} = k_{42} = \sum_{i=1}^3 (k_{yzi} a_{yi} - k_{yyi} a_{zi})$$

$$k_{25} = k_{52} = \sum_{i=1}^3 (k_{xyi} a_{zi} - k_{yzi} a_{xi})$$

$$k_{26} = k_{62} = \sum_{i=1}^3 (k_{yyi} a_{xi} - k_{xyi} a_{yi})$$

$$k_{33} = \sum_{i=1}^3 k_{zzi}$$

$$k_{34} = k_{43} = \sum_{i=1}^3 (k_{zzi} a_{yi} - k_{yzi} a_{zi})$$

$$k_{35} = k_{53} = \sum_{i=1}^3 (k_{xzi} a_{zi} - k_{zzi} a_{xi})$$

$$k_{36} = k_{63} = \sum_{i=1}^3 (k_{yzi} a_{xi} - k_{xzi} a_{yi})$$

$$k_{44} = \sum_{i=1}^3 (k_{yyi} a_{zi}^2 + k_{zzi} a_{yi}^2 - 2k_{yzi} a_{yi} a_{zi})$$

$$k_{45} = k_{54} = \sum_{i=1}^3 (k_{xzi} a_{yi} a_{zi} + k_{yzi} a_{xi} a_{zi} - k_{zzi} a_{xi} a_{yi} - k_{xyi} a_{zi}^2)$$

$$k_{46} = k_{64} = \sum_{i=1}^3 (k_{xyi} a_{yi} a_{zi} + k_{yzi} a_{xi} a_{yi} - k_{yyi} a_{xi} a_{zi} - k_{xzi} a_{yi}^2)$$

$$k_{55} = \sum_{i=1}^3 (k_{xxi} a_{zi}^2 + k_{zzi} a_{xi}^2 - 2k_{xzi} a_{xi} a_{zi})$$

$$k_{56} = k_{65} = \sum_{i=1}^3 (k_{xyi} a_{xi} a_{zi} + k_{xzi} a_{xi} a_{yi} - k_{xxi} a_{yi} a_{zi} - k_{yzi} a_{xi}^2)$$

$$k_{66} = \sum_{i=1}^3 (k_{xxi} a_{yi}^2 + k_{yyi} a_{xi}^2 - 2k_{xyi} a_{xi} a_{yi})$$

และ

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}$$

ในการทดสอบเพื่อศึกษาการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์จะทดสอบในเงื่อนไขดังต่อไปนี้

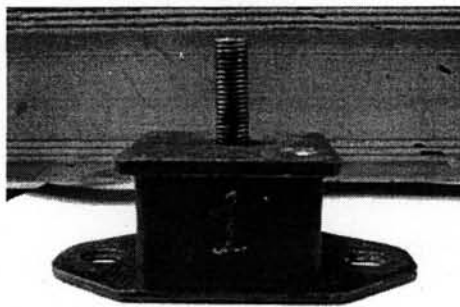
- กรอบอ้างอิงในแกน  $X Y Z$  ที่ใช้จะเป็นแกนเดียวกับ Principal inertia axes ของตัวเครื่องยนต์ซึ่งจะทำให้  $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
- การกระตุ้นที่เกิดขึ้นทั้งที่เป็นแรงและโมเมนต์เกิดจากการกระตุ้นบนตัวเครื่องยนต์ที่ไม่ได้เกิดมาจากแท่นเครื่อง

### 3.3 การหาคุณลักษณะทางพลศาสตร์ (The dynamic properties) ของระบบการสั่นสะเทือน

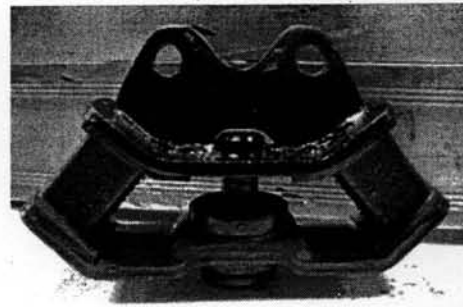
การหาคุณลักษณะทางพลศาสตร์ของการสั่นสะเทือนในวัตถุแข็งเกร็งบนฐานรองรับ เป็นส่วนสำคัญอย่างหนึ่งของงานวิจัยโดยจะนำค่าที่ได้ไปแทนค่าในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายรูปร่างของการสั่นของระบบทางกลและสร้าง FRFs ตามแนวทางเชิงทฤษฎี คุณสมบัติเหล่านี้จะเป็นคุณสมบัติทางกายภาพของระบบได้แก่ มวลและค่าความเฉื่อยเชิงมวล คุณสมบัติของแท่นเครื่องคือ ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งแกร่งและค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

#### 3.3.1 การหาค่าคุณสมบัติของแท่นเครื่อง

แท่นเครื่องที่ใช้เป็นระบบรองรับเครื่องยนต์เป็นวัสดุที่ทำจากยางธรรมชาติในการทดสอบ แสดงค่าแท่นเครื่องได้ดังรูปที่ 3.7



(ก)



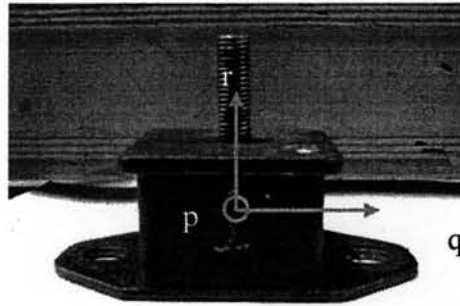
(ข)

รูปที่ 3.7 ยางแท่นเครื่องที่ใช้การทดสอบ (ก) แท่นเครื่องที่ 1 และ (ข) แท่นเครื่องที่ 3

การศึกษาจะพิจารณาในช่วงคุณสมบัติเชิงเส้น โดยไม่คิดค่าน้ำหนักของแท่นเครื่อง (Mass less) นั่นคือจะพิจารณาว่าแรงที่เกิดจากค่าความเป็นสปริงจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าการกระจัดซึ่งหมายความว่ามีความสัมพันธ์ความแข็งแกร่งเป็นค่าคงที่ ส่วนค่าแรงหน่วง (Damping force) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วซึ่งเป็นพฤติกรรมของ ตัวหน่วงแบบวิสคัส จากสมมติฐานดังกล่าวทำให้สามารถจำลองระบบการสั่นที่จะนำมาใช้เป็นระบบทดสอบว่าเป็น Dynamic of planar isolation โดยในการทดสอบจะจำลองระบบการสั่นภายใต้เงื่อนไขของ

Three – Plane of symmetry with orthogonal resilient support สามารถพิจารณาได้ 3 ระดับขั้นเสรีของการสั่นในระบบทดสอบคือการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวลของยางแท่นเครื่องในแกน  $p, q$  และ  $r$  ทำให้สามารถหาค่าคุณสมบัติของแท่นเครื่องได้ภายใต้สมมุติฐานดังนี้ [11]

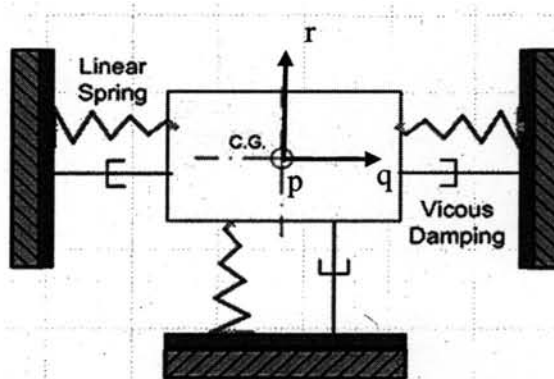
- 1) แกนอ้างอิง  $p, q, r$  ถูกเลือกให้อยู่ในแกนเดียวกับ Principal inertia of the body



- 2) ตำแหน่งของฐานรองรับวัตถุถูกจัดให้อยู่ในระนาบที่สมมาตร

- 3) ค่าความแข็งแรงแรงของของฐานรองรับมีคุณสมบัติ Orthogonal

จากข้อ 1) ถึง 3) ทำให้สรุปได้ว่า  $k_{xy} = k_{xz} = k_{yz} = k_{yx} = k_{zx} = k_{zy} = 0$  ทำให้ในการแก้ปัญหาสามารถระบบการสั่นสะเทือนที่ทดสอบทำได้ง่ายขึ้น [8] จากรูปต่อไปนี้จะแสดงแบบจำลองสำหรับระบบทดสอบอย่างง่ายสำหรับทดสอบเพื่อหาค่าคุณสมบัติของแท่นเครื่อง



รูปที่ 3.10 แบบจำลองที่ใช้ในการหาค่าคุณสมบัติแท่นเครื่อง

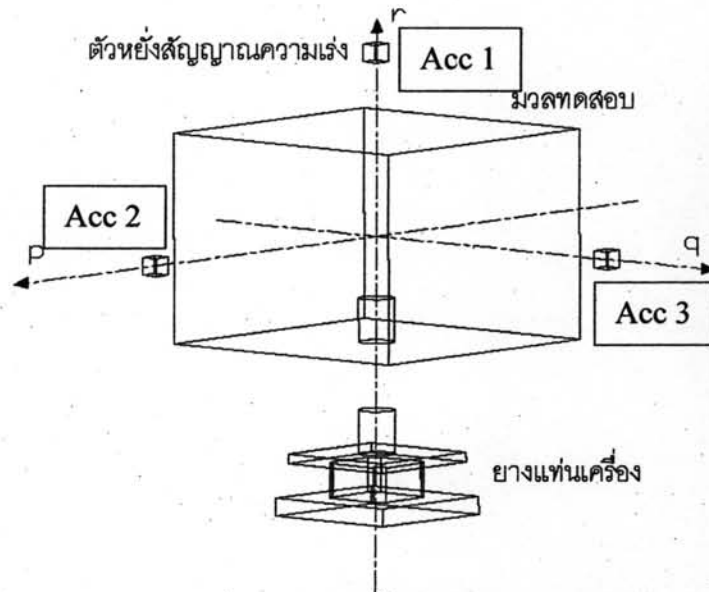
ชุดทดสอบมีลักษณะ Three – Plane of symmetry with orthogonal resilient support และในการทดสอบแต่ละครั้งจะกำหนดให้มีการสั่นเฉพาะในแกนหลักคือ  $p, q, r$  โดยใช้สมการสำหรับหาค่าความแข็งแรงแรงของแท่นเครื่องได้จากค่าความถี่ธรรมชาติคือ

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum k_p}{m}} \quad f_q = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum k_q}{m}} \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum k_r}{m}} \quad (3.28)$$



การติดตั้งชุดทดสอบ

ติดตั้งชุดทดสอบให้มีลักษณะตามแบบจำลองรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ชุดติดตั้งสำหรับทดสอบ

ชุดทดสอบประกอบด้วย

มวลทดสอบทำจากเหล็ก มีน้ำหนัก 23.7 กิโลกรัม มีขนาด กว้าง x ยาว x สูง = 16 cm x 16 cm x 12 cm

ตัวหยังสัญญาณความเร่ง 3 ชุด

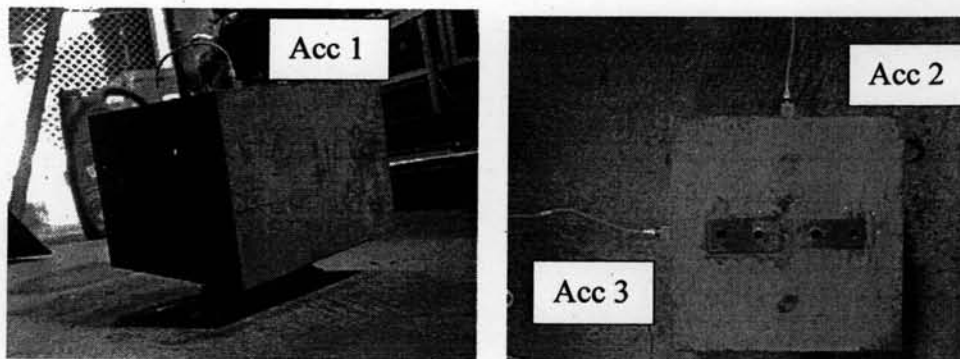
เครื่องวิเคราะห์ความถี่ “Multi-analyzer system Type 3560D” ของ Brüel & Kjær

ติดตั้งตัวหยังสัญญาณความเร่งโดยมีทิศทางเดียวกับ แกน  $p$   $q$  และ  $r$  ของชุดทดสอบโดยที่ตำแหน่งติดตั้งจะอยู่ในแนวที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของมวลทดสอบ โดยให้

Acc 1 วัดสัญญาณการตอบสนองของการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกน  $r$

Acc 2 วัดสัญญาณการตอบสนองของการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกน  $p$

Acc 3 วัดสัญญาณการตอบสนองของการเคลื่อนที่เชิงเส้นในแนวแกน  $q$



รูปที่ 3.12 การติดตั้งตัวหยังสัญญาณความเร่ง

จากนั้นทำการทดลองโดยใช้ Impact test เคาะชุดทดสอบในทิศทางเดียวกับแกน  $p$   $q$  และ  $r$  ของชุดทดสอบ โดยในการเคาะแต่ละครั้งจะเคาะที่ตำแหน่งใกล้จุดศูนย์กลางมวลมากที่สุด ซึ่งจะได้สัญญาณของการสั่นสะเทือนจากตัวห้อยสัญญาณความเร่งที่มีลักษณะเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้นมาวิเคราะห์เพื่อหาค่าตัวแปรโมดัล สำหรับการหาตัวแปรโมดัลทำได้โดย[14]

1) การหาค่าความถี่โมดัลหรือความถี่ธรรมชาติของระบบ

นั่นคือการหาค่าการความถี่ที่สั่นพ้องซึ่งเป็นตัวแปรที่หาง่ายที่สุดโดยสามารถหาได้จากการแยกค่าสูงสุดของปริมาณที่เกิดขึ้นใน FRFs จากสัญญาณที่เกิดขึ้น (A peak in magnitude) ค่าความถี่ที่เกิดขึ้นสามารถนำไปหาค่าความถี่โมดัลเพื่อนำไปหาค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งแกร่งได้โดยใช้สมการ (3.28)

2) การหาค่าโมดัลความหน่วง

สามารถทำได้โดยพิจารณาที่ค่าการความถี่ที่สั่นพ้อง จากนั้นใช้วิธี Frequency analyzer เพื่อที่จะแยกค่าช่วง The half power (-3db) ของปริมาณที่ปรากฏใน FRFs ในแต่ละโมด ค่า Damping ratio,  $\xi_r$  หาได้จากสมการดังต่อไปนี้ [9]

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f} \quad (3.29)$$

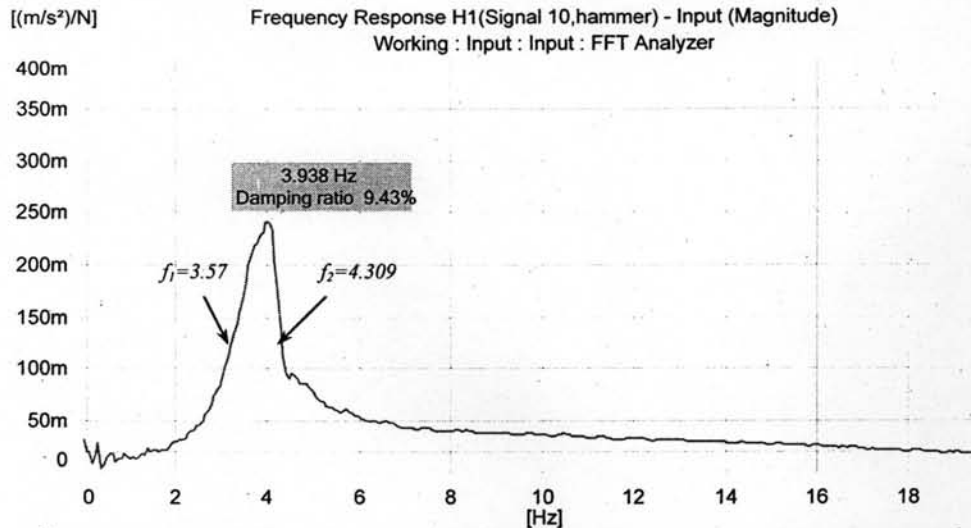
$\Delta f$  = Frequency bandwidth ระหว่าง 2 จุดที่เกิด Half power

$f$  = ค่าการความถี่ที่สั่นพ้อง

$\xi$  = อัตราส่วนความหน่วง

ตัวอย่างการผลทดสอบและการคำนวณคุณลักษณะของยางแท่นเครื่อง 1 ในแนวแกน  $p$

ในการทดสอบจริงกับชุดทดสอบ จะใช้วิธีเคาะชุดทดสอบ ด้วย Impact hammer ซึ่งเป็นวิธี Impact test ที่ทิศทางเดียวกับกับแกน  $p$  จากนั้นวัดสัญญาณผลตอบสนองที่เกิดขึ้นจากตัวห้อยสัญญาณความเร่งทั้ง 3 ชุด ผลตอบสนองที่ได้จะนำมาคำนวณเพื่อหาค่าคุณลักษณะของยางแท่นเครื่องต่อไป จากตัวอย่างที่แสดงพบว่าผลตอบสนองจากการเคาะในแนวแกน  $p$  Acc 2 จะให้ผลตอบสนองที่เด่นที่สุด เมื่อเทียบกับ Acc 1 และ Acc 3 ดังนั้นจึงเลือกสัญญาณจาก Acc 2 มาวิเคราะห์หาค่าคุณลักษณะของยางแท่นเครื่องแสดงได้ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 ผลการทดสอบยางแท่นเครื่องที่ 1 ของ Acc 1 ของการเคาะชุดทดสอบที่ศ  $p$

ตัวอย่างการคำนวณจะทำให้ได้ค่าความแข็งเกร็งสมมูลและความหน่วงสมมูลแสดงได้  
ดังนี้

พบว่า ความถี่ที่สั่นพ้องของระบบ คือ 3.938 Hz

หาค่าความแข็งเกร็งของยางรองแท่นเครื่องในแนวแกน  $p$  ได้จากสมการ

$$f_p = 3.938 = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{\Sigma k_p}{m}}$$

$$m = \text{มวลทดสอบ} = 23.7 \text{ kg}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma k_p}{m}} = 3.938(2\pi)\sqrt{23.7}$$

ค่าความแข็งเกร็งสมมูล  $k_p$  ของยางแท่นเครื่องในแนวแกน  $p = 14,509.8 \text{ N/m}$

การหาค่าความหน่วงสมมูลของยางแท่นเครื่องหาได้จากสมการ อัตราส่วนความหน่วงคือ

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f} = \frac{f_1 - f_2}{2f} = 0.0943 \text{ หรือ } 9.43\%$$

ค่า Critical damping ของระบบคือ  $= C_r = 2m\omega_n$

$$\text{หรือ} \quad = \sqrt{4mk} = \sqrt{4(23.7 + 14,509.9)}$$

$$= 1172.83 \text{ Ns/m}$$

จาก อัตราส่วนความหน่วงที่ได้สามารถหาค่าความหน่วงสมมูลของยางรองแท่นเครื่องในทิศทาง

แกน  $p$  ได้คือ

$$C = 1,172.83 \left( \frac{9.43}{100} \right) = 110.6 \text{ Ns/m}$$

จากการทดสอบสามารถสรุปผลการทดสอบของยางรองแท่นคือ

ที่แท่นเครื่องที่ 1	$f_p = 3.938 \text{ Hz}$	Damping ratio = 9.43 %
	$f_q = 3.375 \text{ Hz}$	Damping ratio = 9.52 %
	$f_r = 33.00 \text{ Hz}$	Damping ratio = 7.82 %
ที่แท่นเครื่องที่ 2	$f_p = 3.938 \text{ Hz}$	Damping ratio = 9.28 %
	$f_q = 3.375 \text{ Hz}$	Damping ratio = 10.3 %
	$f_r = 30.69 \text{ Hz}$	Damping ratio = 10 %
ที่แท่นเครื่องที่ 3	$f_p = 1.938 \text{ Hz}$	Damping ratio = 9.43 %
	$f_q = 6.653 \text{ Hz}$	Damping ratio = 9.52 %
	$f_r = 2.063 \text{ Hz}$	Damping ratio = 4.19 %

ตัวห้อย  $p, q, r$  คือ Principles of elastic axes ของยางแท่นเครื่องของชุดทดสอบนั่นเอง สำหรับผลการทดสอบสามารถแสดงประกอบในภาคผนวก ข

### 3.3.2 การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวลของวัสดุทดสอบจากการทดลอง

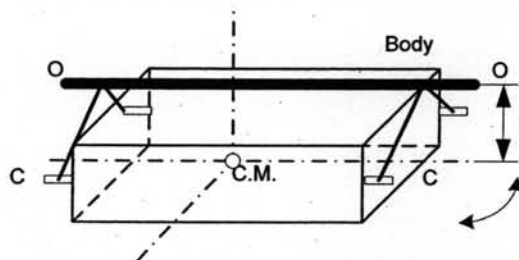
การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวลรอบแกนใดๆจากการทดสอบทำได้โดยแขวนวัตถุทดสอบเป็น Pendulum จากนั้นแกว่งรอบแกนที่กำหนดอย่างอิสระ คาบของการแกว่งที่ปรากฏสามารถวัดได้จากการจับเวลาแล้วนำมาคำนวณเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวล มีการทดสอบ 2 รูปแบบที่นิยมใช้คือ [8] [15]

#### 1) The compound pendulum

การหาโมเมนต์ความเฉื่อยวิธีนี้จะพิจารณาจากคาบของการแกว่ง พิจารณาจากรูปวัตถุทดสอบจะถูกแขวนด้วยลวดหรือสลิง นำค่าที่วัดได้จากคาบของการแกว่งคำนวณได้จากสมการดังนี้คือ

$$T = 2\pi / \sqrt{b/I} \quad (3.30)$$

$b$  เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับ ขนาดและน้ำหนักของ Pendulum นั่นคือ  $b = mg \times l$



รูปที่ 3.14 แบบจำลองการทดสอบเพื่อหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลแบบ Compound pendulum

จากรูปจะสามารถหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลจากการแกว่งได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$I_{oo} = \frac{T^2 mgl}{4\pi^2} \quad (3.31)$$

และสามารถนำไปประยุกต์หาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลได้ดังนี้

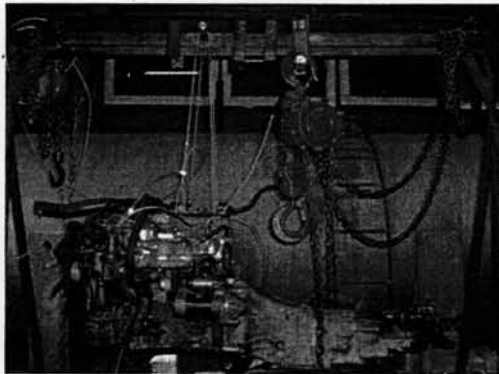
$$I_{cc} = ml^2 \left[ \left( \frac{\tau_0}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{g}{l} \right) - 1 \right] \quad (3.32)$$

$\tau_0$  = คาบของการแกว่ง (วินาที)

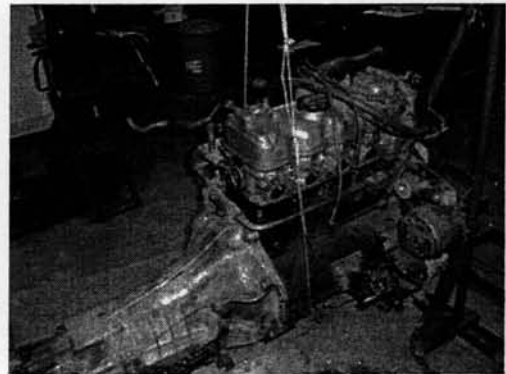
$l$  = ความยาวของการแกว่ง (เมตร)

$g$  = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (เมตร/วินาที<sup>2</sup>)

$m$  = มวล (กิโลกรัม)



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.15 (ก) การหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลรอบแกน Y (ข) การหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลรอบแกน X

ในการทดสอบพบว่าค่า  $I$  ไม่สามารถวัดค่าได้โดยตรงจึงต้องทดสอบ 2 ครั้งเพื่อหาค่า  $I$  ก่อน จากนั้นจึงนำค่า  $I$  ที่ได้ไปหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$I^2 \left[ \left( \frac{\tau_1}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{g}{l} \right) - 1 \right] = (l + \Delta l)^2 \left[ \left( \frac{\tau_2}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{g}{l + \Delta l} \right) - 1 \right] \quad (3.35)$$

$l_1$  = ระยะจากแกนหมุนถึงผิวเครื่องยนต์ของการทดสอบครั้งแรก (เมตร)

$l_2$  = ระยะจากแกนหมุนถึงผิวเครื่องยนต์ของการทดสอบครั้งแรก (เมตร)

$\Delta l = l_1 - l_2$  (เมตร)

$\tau_1$  = คาบการแกว่งของการทดสอบครั้งที่ 1 (วินาที)

$\tau_2$  = คาบการแกว่งของการทดสอบครั้งที่ 2 (วินาที)

ข้อมูลจากการทดสอบแสดงได้ดังนี้

สำหรับหาค่า  $I_{xx}$

$$l_1 = 0.595 \text{ เมตร}$$

$$l_2 = 0.745 \text{ เมตร}$$

$$\Delta l = 0.15 \text{ เมตร}$$

$$\tau_1 = 1.849 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

$$\tau_2 = 2.008 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

สำหรับหาค่า  $I_{yy}$

$$l_1 = 0.545 \text{ เมตร}$$

$$l_2 = 0.695 \text{ เมตร}$$

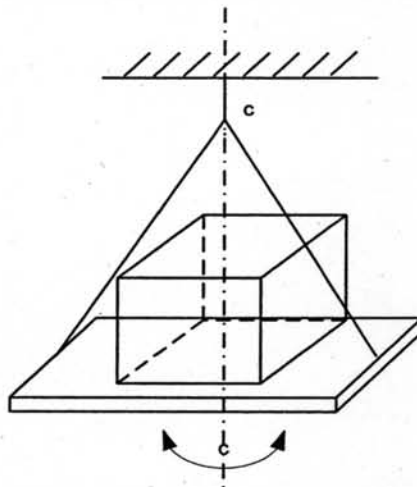
$$\Delta l = 0.15 \text{ เมตร}$$

$$\tau_1 = 1.818 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

$$\tau_2 = 1.969 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

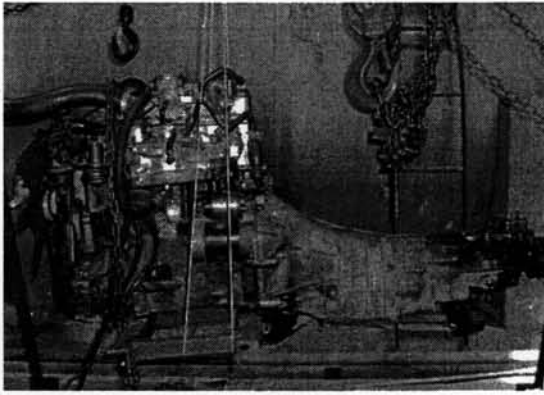
## 2) The torsional pendulum

ทำได้โดยใช้การแขวนวัสดุทดสอบด้วย Single torsion และใช้ Platform เป็นวัสดุรองรับ วัสดุทดสอบสามารถหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลรอบแกนที่ต้องการดูได้จากรูปประกอบต่อไปนี้

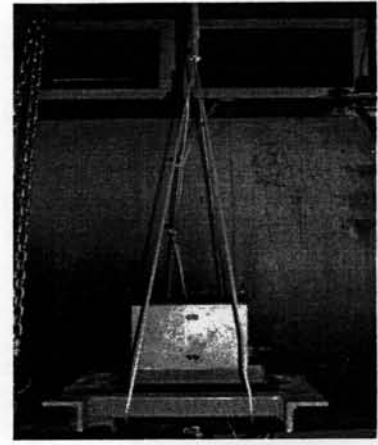


รูปที่ 3.16 แบบจำลองการทดสอบเพื่อหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลแบบ Torsional pendulum





(ก)



(ข)

รูปที่ 3.17 (ก) การแขวนของเครื่องยนต์ (ข) การแขวนบนวัสดุที่รู้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวล

$$I_2 = I_1 \frac{\left[ \frac{\tau_2}{\tau_0} \right]^2 - 1}{\left[ \frac{\tau_1}{\tau_0} \right]^2 - 1} \quad (3.34)$$

$I_1$  = โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลทดสอบ

$I_2$  = โมเมนต์ความเฉื่อยของเครื่องยนต์ =  $I_{zz}$

$\tau_0$  = คาบการแกว่งของ Platform โดยเฉพาะ

$\tau_1$  = คาบการแกว่งของ มวลตัวอย่างที่สามารถหาค่าความเฉื่อยเชิงมวลได้

$\tau_2$  = คาบการแกว่งของชุดทดสอบทั้งหมด

ข้อมูลจากการทดสอบแสดงได้ดังนี้

$$\tau_1 = 13.110 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

$$\tau_0 = 4.138 \text{ วินาทีต่อรอบ}$$

$$I_1 = 0.101 \text{ kg/m}^2$$

### 3.3.3 สรุปผลการหาค่าคุณสมบัติทางพลศาสตร์ (The dynamic properties) ของระบบการสั่นสะเทือน

#### 1) คุณสมบัติของยางแท่นเครื่อง

##### 1.1) ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งของยางแท่นเครื่อง

$$\text{แท่นเครื่องที่ 1} \quad K_{p1} = 14,509.8 \text{ N/m}$$

$$K_{q1} = 10,657.5 \text{ N/m}$$

$$K_{r1} = 881,255.5 \text{ N/m}$$

$$\text{แท่นเครื่องที่ 2} \quad K_{p2} = 14,509.8 \text{ N/m}$$

$$K_{q2} = 10,657.5 \text{ N/m}$$

$$K_{r2} = 1,018,910.3 \text{ N/m}$$

แท่นเครื่องที่ 3  $K_{p3} = 3,514.1 \text{ N/m}$

$$K_{q2} = 40,300.7 \text{ N/m}$$

$$K_{r3} = 3,982 \text{ N/m}$$

1.2) ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยางแท่นเครื่อง

แท่นเครื่องที่ 1  $C_{p1} = 110.59 \text{ N s/m}$

$$C_{q1} = 95.69 \text{ N s/m}$$

$$C_{r1} = 768.6 \text{ N s/m}$$

แท่นเครื่องที่ 2  $C_{p2} = 108.8 \text{ N s/m}$

$$C_{q2} = 103.5 \text{ N s/m}$$

$$C_{r2} = 914.0 \text{ N s/m}$$

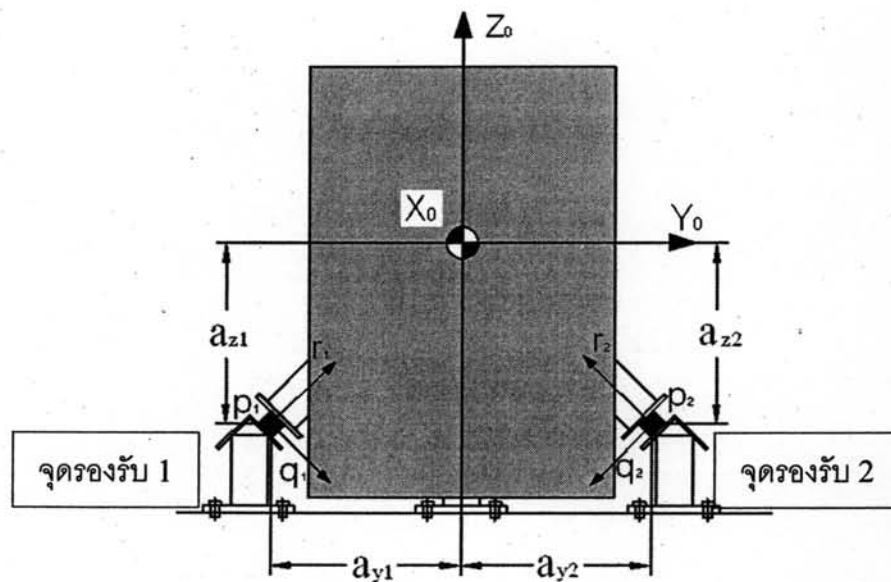
แท่นเครื่องที่ 3  $C_{p3} = 40.34 \text{ N s/m}$

$$C_{q3} = 85.4 \text{ N s/m}$$

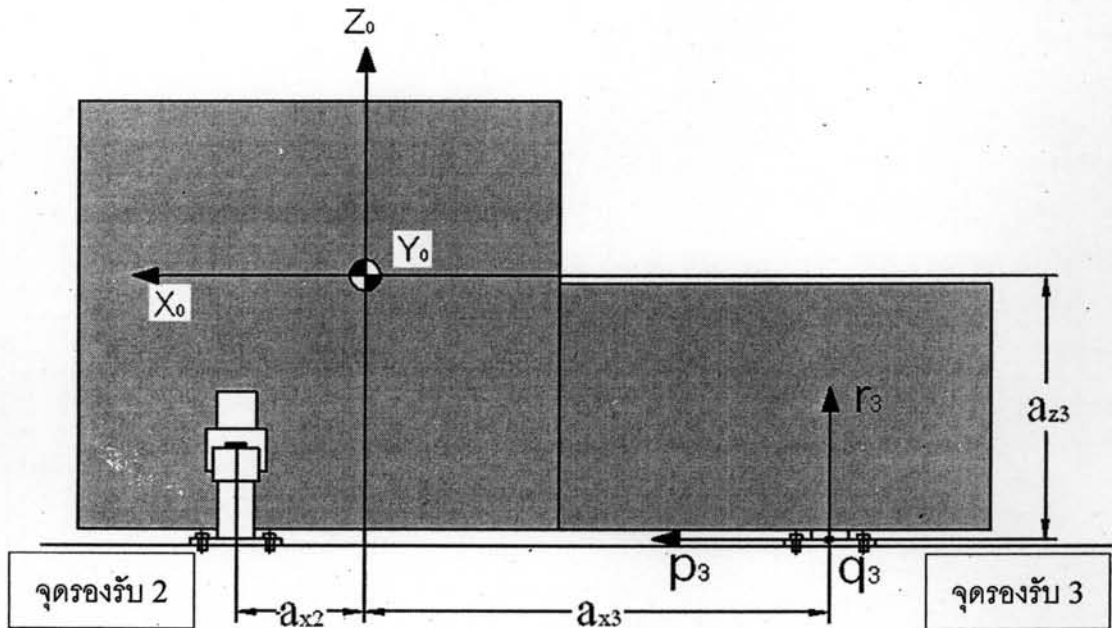
$$C_{r3} = 25.74 \text{ N s/m}$$

2) คุณสมบัติทางพลศาสตร์ของเครื่องยนต์

กำหนดกรอบอ้างอิงจากหัวข้อ 3.2.2 นั่นคือ  $X_0Y_0Z_0$  เป็นกรอบอ้างอิง (Reference frame) และมีจุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของตัวเครื่องยนต์ในขณะที่ยังไม่มีการเคลื่อนที่ รูปที่ 3.14 แสดงแบบจำลองประกอบคุณสมบัติทางพลศาสตร์ของเครื่องยนต์



รูปที่ 3.18 (ก) ภาพด้านหน้าชุดทดสอบ



รูปที่ 3.19 (ข) ภาพด้านข้างชุดทดสอบ

น้ำหนักเครื่องยนต์ 142.3 กิโลกรัม

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวลได้แก่

$$I_{xx} = 3.10 \text{ kg/m}^2 \quad I_{yy} = 5.27 \text{ kg/m}^2 \quad I_{zz} = 14.05 \text{ kg/m}^2$$

ตำแหน่งของจุดรองรับ 1

$$a_{x1} = 0.16 \text{ m} \quad a_{y1} = -0.19 \text{ m} \quad a_{z1} = -0.17 \text{ m}$$

ตำแหน่งของจุดรองรับ 2

$$a_{x2} = 0.16 \text{ m} \quad a_{y2} = 0.19 \text{ m} \quad a_{z2} = -0.17 \text{ m}$$

ตำแหน่งของจุดรองรับ 3

$$a_{x3} = -0.58 \text{ m} \quad a_{y3} = 0 \text{ m} \quad a_{z3} = -0.32 \text{ m}$$

การหามุมที่จุดรองรับเครื่องยนต์ที่กระทำกับแกนอ้างอิงของแท่นเครื่อง เช่น  $pX$  คือมุมของแกนหลักของยางแท่นเครื่อง  $p$  ทำกับแกนอ้างอิง  $X$  สำหรับ  $pX = 0^\circ$  หมายความว่าแกน  $p$  ขนานกัน และไปในทิศทางเดียวกันกับอ้างอิง  $X$

มุมที่จุดรองรับของยางแท่นเครื่องที่ 1

$$\begin{array}{lll} pX1 = 0^\circ & pY1 = 90^\circ & pZ1 = 90^\circ \\ qX1 = 90^\circ & qY1 = 45^\circ & qZ1 = 135^\circ \\ rX1 = 90^\circ & rY1 = 45^\circ & rZ1 = 45^\circ \end{array}$$

มุมที่จุดรองรับของยางแท่นเครื่องที่ 2

$$\begin{array}{lll} pX2 = 180^\circ & pY2 = 90^\circ & pZ2 = 90^\circ \\ qX2 = 90^\circ & qY2 = 135^\circ & qZ2 = 135^\circ \\ rX2 = 90^\circ & rY2 = 135^\circ & rZ2 = 45^\circ \end{array}$$

มุมที่จุดรองรับของยางแท่นเครื่องที่ 3

$$\begin{array}{lll} pX3 = 0^0 & pY3 = 90^0 & pZ3 = 90^0 \\ qX3 = 90^0 & qY3 = 0^0 & qZ3 = 90^0 \\ rX3 = 90^0 & rY3 = 90^0 & rZ3 = -0^0 \end{array}$$

ข้อมูลทั้งหมดนำมาใช้หาเมทริกซ์ของ มวล สัมประสิทธิ์ของความแข็งแกร่งและความหน่วงได้ เนื่องจากสมการที่ได้ค่อนข้างซับซ้อนและยุ่งยากในการคำนวณ จึงใช้โปรแกรมของภาษา C++ ช่วยในการคำนวณและทำให้ง่ายขึ้นโดยสามารถป้อนค่าตัวแปรต่าง ๆ และใช้ผลการคำนวณที่ได้บันทึกค่าเป็นเมทริกซ์สำหรับประยุกต์ใช้ในแบบจำลองซึ่งใช้ในโปรแกรม MATLAB โปรแกรมที่ได้แสดงได้ในภาคผนวก ก

เมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งแกร่งที่จุดรองรับแสดงได้ดังนี้  
ที่แท่นเครื่องที่ 1

$$\begin{pmatrix} 14509.8 & 0 & 0 \\ 0 & 445956 & 435299 \\ 0 & 435299 & 445956.5 \end{pmatrix}$$

ที่แท่นเครื่องที่ 2

$$\begin{pmatrix} 14509.8 & 0 & 0 \\ 0 & 514783.9 & -504126.4 \\ 0 & -504126.4 & 514783.9 \end{pmatrix}$$

ที่แท่นเครื่องที่ 3

$$\begin{pmatrix} 3514 & 0 & 0 \\ 0 & 40300.7 & 0 \\ 0 & 0 & 3982 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงที่จุดรองรับแสดงได้ดังนี้  
ที่ยางแท่นเครื่องที่ 1

$$\begin{pmatrix} 108.8 & 0 & 0 \\ 0 & 508.8 & 405.3 \\ 0 & 405.3 & 508.8 \end{pmatrix}$$

ที่ยางแท่นเครื่องที่ 2

$$\begin{pmatrix} 110.6 & 0 & 0 \\ 0 & 432.1 & -336.5 \\ 0 & -336.5 & 432.1 \end{pmatrix}$$

ที่ยางแท่นเครื่องที่ 3

$$\begin{pmatrix} 40.3 & 0 & 0 \\ 0 & 85.4 & 0 \\ 0 & 0 & 25.7 \end{pmatrix}$$

สำหรับระบบการลั่นสะเทือนของรถยนต์เมทริกซ์คุณลักษณะของระบบสามารถแสดงได้ดังนี้

เมทริกซ์มวล คือ

$$\begin{pmatrix} 142.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 142.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 142.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.05 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งแกร่งของระบบมวลลั่นสะเทือน คือ

$$\begin{pmatrix} 32534 & 0 & 0 & 0 & -6057.8 & 0 \\ 0 & 1001000 & -68827 & -2268.7 & 11012 & 130340 \\ 0 & -68827 & 999520 & 1376.5 & -131230 & -11012 \\ 0 & -2268.7 & 1376.5 & 5888 & -220.2 & -9906.2 \\ -6057.8 & 11012 & -131230 & -220.2 & 38839 & 1762 \\ 0 & 130340 & -11012 & -9906.2 & 1762 & 39200 \end{pmatrix}$$

และเมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของระบบ คือ

$$\begin{pmatrix} 259.7 & 0 & 0 & 0 & -50.2 & -0.3 \\ 0 & 1026.3 & 68.8 & 46.4 & -11 & 101 \\ 0 & 68.8 & 1011.8 & -2.9 & -109.4 & 11 \\ 0 & 46.4 & -2.9 & 22 & 0.5 & -12.8 \\ -50.2 & -11 & -109.4 & 0.5 & 58.4 & -1.7 \\ -0.3 & 101 & 11 & -12.8 & -1.7 & 60.7 \end{pmatrix}$$