บทที่ 2
งานวิจัย และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การศึกษาการสั่นสะเทือนของรถยนต์

การศึกษาแบบจำลองการสั่นสะเทือนของรถยนต์ด้วยวิธีวิเคราะห์โมดัลเชิงทดลอง (A study of car vibration model by the experimental modal analysis method) [2]

ศึกษาการสั่นสะเทือนของรถยนต์โดยคำนึงถึงอินพุตที่มาจากสภาพถนน รถที่ใช้ทดสอบเป็นรถกระบะขับเคลื่อนด้วยล้อหลัง มีสมมติฐานคือส่วนทั้งหมดของรถยนต์ที่ถูกรองรับด้วยระบบแขวนถูกรวมเป็นวัตถุแข็งเกร็งเดียวกัน ล้อหน้าทั้ง 2 ล้อเคลื่อนที่อิสระต่อกัน กำหนดให้การสั่นที่มีขนาดน้อย แบบจำลองจึงกำหนดให้เป็นลักษณะเชิงเส้นและส่วนประกอบต่างๆของระบบแขวนและยางถูกแทนที่ด้วยสปริงที่มีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นและตัวหน่วงแบบวิสคัส (equivalent spring and equivalent damping) การศึกษาการสั่นในระดับขั้นเสรีเท่ากับ 7 โดยมีการ 7 รูปแบบการสั่นประกอบด้วยการ เต้นขึ้นลงของมวลที่ถูกแขวน (body bounce) การกระดอนของมวลที่ถูกแขวน (body pitch) การโคลงตัวของมวลที่ถูกแขวน (body roll) การกระโดดของล้อหน้าทั้ง 2 (front wheel hop) การกระดอนของล้อหน้าทั้ง 2 (front wheel tramp) การกระโดดของชุดเพลาล้อหลัง (rear wheel hop) และการกระดอนของชุดเพลาล้อหลัง (rear wheel tramp) โดยทำแบ่งศึกษาเป็น 2 กรณีคือในภาวะที่รถยนต์ไม่ได้บรรทุกน้ำหนักและขณะที่รถยนต์บรรทุกน้ำหนัก180 กิโลกรัม โดยใช้ทั้งแบบจำลองทางกายภาพและแบบจำลองโมดัลและนำไปใช้ทำนายผลของการสั่นตามตำแหน่งต่างๆของรถยนต์ซึ่งได้ใกล้เคียงกับการสั่นจริงโดยเฉพาะการสั่นที่เกิดขึ้นกับตัวรถได้ดีพอสมควร

การศึกษาการสั่นสะเทือนของรถบรรทุกเล็ก (A study of vibration of a light truck) [3]

เป็นการศึกษาการสั่นสะเทือนของรถบรรทุกเล็กเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และศึกษาตามแบบจำลองที่สร้างขึ้นโดยมีระดับขั้นความเสรีในการสั่นเท่ากับ 8 โดยเพิ่มการพิจารณาการสั่นที่เกิดขึ้นบนที่นั่งคนขับมาด้วย ในการศึกษาจะทำการใน 2 แนวทางทั้งแนวทางทฤษฎีและแนวทางเชิงการทดลองโดยใช้แบบจำลองทั้ง 3 แบบคือ แบบจำลองกายภาพ แบบจำลองโมดัลและแบบจำลองผลตอบสนอง จากแบบจำลองที่ได้จะนำไปสู่สมการการสั่นสะเทือนของรถบรรทุกเล็กได้แล้วจึงทดสอบทำการปรับแต่งและเปลี่ยนแปลงโครงสร้างและชิ้นส่วนของรถยนต์เพื่อลดระดับการสั่นสะเทือนโดยวิธีโมดัลโมเดล จากการศึกษาดังกล่าวทำให้สามารถทำนายการ

เปลี่ยนแปลงของรูปร่างการสั่นสะเทือนได้ง่ายและประหยัดเวลาได้มากขึ้น แล้วจึงทำการทดสอบโดยมีการขับขี่จริงวิ่งผ่านสิ่งกีดขวาง จากผลทดสอบจริงของการสั่นสะเทือนที่มีผลต่อคนขับพบว่าการทำงานของระบบรองรับส่วนของล้อหน้าทำงานได้ดีกว่าล้อหลังและการสั่นสะเทือนที่มีผลต่อคนขับทั้งการโยกซ้ายขวาและสั่นขึ้นลง

2.1.2 การสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ (Vibration in engine)

จุดประสงค์แรกในการนำระบบรองรับมาใช้งานคือเพื่อรองรับน้ำหนักของเครื่องยนต์ แต่จากเนื่องจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องยนต์ในแนวระนาบไม่ได้อยู่บนตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งฐานแท่นเครื่อง เมื่อมีการทำงานของเครื่องยนต์จึงเกิดแรงที่ไม่สมดุล (Unbalance force) ขึ้น การออกแบบระบบรองรับต้องคำนึงถึงการลดการส่งผ่านแรงจากภาระที่ไม่สมดุลจากเครื่องยนต์สันดาปภายใน (Internal combustion engine) การสั่นรบกวนจะเกิดขึ้นด้วยสาเหตุหลัก 2 ประการนั่นคือ จากการสั่นจากการจุดระเบิด (The firing pulse) ในกระบอกสูบทำให้เกิดแรงบิดที่ที่ตัวเครื่องซึ่งมีทิศทางขนานกับข้อเหวี่ยง สาเหตุการสั่นที่เกิดขึ้นต่อมาเกิดจากแรงเฉื่อย (Inertia force) และแรงบิดจากการหมุนของชิ้นส่วนที่มีการเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมา (The rotating and reciprocating part) เช่น ลูกสูบ ส่วนที่ติดต่อกับเพลาข้อเหวี่ยง เป็นต้น ทิศทางของแรงเฉื่อยที่เกิดขึ้นจะมีทิศทางที่ขนานกับแกนลูกสูบและตั้งฉากกับกับข้อเหวี่ยงส่วนแกนลูกสูบค่า ส่วนแรงบิดมีทิศทางรอบแกนของเพลาข้อเหวี่ยง สำหรับเครื่องยนต์ที่รูปแบบต่าง ๆก็จะมีรูปแบบของการเกิดภาวะของความไม่สมดุลแตกต่างกันออกไปโดยจะขึ้นอยู่กับจำนวนลูกสูบเป็นหลัก ได้แก่ เครื่องยนต์สี่สูบจะเกิด Inertia force ในแนวดิ่งกระทำกับเสื้อสูบและเกิดแรงบิดจากเพลาข้อเหวี่ยงแตกต่างจากในเครื่องยนต์หกและแปดสูบ Inertia force จะเกิดขึ้นน้อยกว่าแรงบิด [4] ในการศึกษาการสั่นสะเทือนที่ความถี่ต่ำ เพื่อที่จะลดอัตราการส่งผ่านการสั่นสะเทือน (The transmission of vibration) ในเครื่องยนต์จะพิจารณาการเกิดการกระตุ้นขึ้นลงของลูกสูบกระทำต่อจุดศูนย์กลางมวลแล้วทำให้เกิดการ Coupling of vibration นั่นคือจากการกระตุ้น 1 mode หรือ 1 ระดับขั้นเสรีในการสั่นนำไปสู่การสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ซึ่งพิจารณาได้ว่ามีระดับขั้นเสรีในการสั่นเท่ากับ 6 (6 Degree of freedom) จากการศึกษาพบว่าการกระตุ้นที่อยู่ในช่วง 0-20 Hz ซึ่งเหมือนการกระตุ้นที่เกิดจากถนนจริง โครงสร้างทางกลของเครื่องยนต์จะมีพฤติกรรมเป็น Rigid mass บน Flexible mounting [5]

ในเครื่องยนต์ประเภทสี่สูบจะเกิดแรงกระทำในลักษณะเป็นรอบและเกิดโมเมนต์บนเครื่องยนต์ซึ่งจะส่งผ่านไปยังโครงสร้างของรถ พบว่าความถี่มูลฐานของการรบกวน (Frequency of fundamental disturbance) ที่เกิดขึ้นพบที่ความเร็วรอบเครื่องยนต์ลำดับสอง (The second order of engine speed) นั่นคือจะเกิดขึ้นที่บนความถี่อยู่ในช่วง 20–200 Hz หรือที่ความเร็วรอบ

ที่ 600 – 6000 รอบต่อนาที แต่ในเครื่องยนต์หกสูบเกิดที่ประมาณความเร็วเครื่องยนต์ลำดับสี่ (The forth order of the engine speed) ในช่วงความถี่ 40 – 400 Hz

ที่ความถี่การทำงานต่ำมักจะมีปัญหาจากระดับของการสั่นสะเทือนแต่ที่ความถี่ของการทำงานสูงๆก็จะเกิดเสียงรบกวนเกิดขึ้นในส่วนของห้องผู้โดยสาร มีความพยายามเพื่อที่จะศึกษาและออกแบบระบบรองรับแท่นเครื่องของรถยนต์โดยมีการศึกษาถึงในเรื่องของความถี่ธรรมชาติและรูปร่างของการสั่น (Vibration mode) ของเครื่องยนต์ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการออกแบบเพื่อไม่ทำให้เกิดแรงบิดและระดับของการสั่นสะเทือนในเครื่องยนต์ที่มากเกินไป

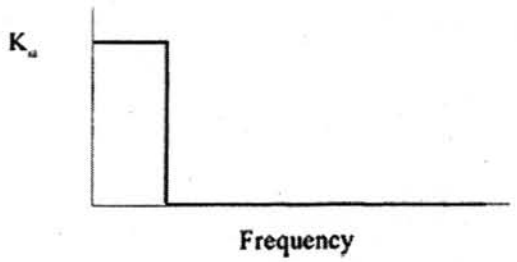
2.1.3 คุณสมบัติวัสดุของแท่นเครื่อง

ในการเลือกใช้งานวัสดุแท่นเครื่องในระบบรองรับจะต้องคำนึงถึงการใช้งานที่แตกต่างกันในช่วงความถี่ต่างๆและตามขนาดของการกระตุ้นที่เกิดขึ้น ความต้องการดังกล่าวอยู่ในแนวคิดที่เรียกว่า Frequency and Amplitude–Dependent properties โดยแยกได้ใน 2 กรณี [4] คือ

- Frequency–Dependent properties เป็นลักษณะของความสัมพันธ์ของความต้องการคุณสมบัติของระบบรองรับกับความถี่ที่ทำงานของเครื่องยนต์เพื่อที่จะลดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนของเครื่องยนต์ พบว่าที่รอบการทำงานของเครื่องยนต์สูงระบบรองรับแท่นเครื่องควรจะมีคุณสมบัติอ่อน (Low elastic stiffness and low damping) ซึ่งทำให้อัตราการส่งผ่านแรงไปยังจุดรองรับน้อยลง

- Amplitude–Dependent properties จะพิจารณาระดับการสั่นที่เกิดขึ้นจากการทำงานของเครื่องยนต์ที่ความเร็วรอบต่างๆ จากการศึกษาพบว่าที่ความเร็วรอบการทำงานหรือความถี่ในการกระตุ้นจากการทำงานของเครื่องยนต์ต่ำ จะทำให้เกิดการระดับการสั่นที่ค่อนข้างสูง (Large amplitude of displacement) ในทางกลับกันที่ความเร็วรอบการทำงานหรือความถี่ของแรงกระตุ้นสูงขึ้นจะทำให้เกิดระดับการสั่นที่น้อยลง (Small amplitude of displacement) เพื่อปกป้องเครื่องยนต์จากการกระดอนที่ความถี่ต่ำระบบรองรับควรจะแข็ง (High elastic stiffness and high damping)

สรุปได้ว่าในการเลือกใช้วัสดุเพื่อเป็นฐานรองรับเครื่องยนต์เบื้องต้นควรพิจารณาถึงผลที่เกิดขึ้นทั้ง 2 กรณีข้างต้น กล่าวคือการกระตุ้นบนเครื่องยนต์ที่ความถี่ต่ำ ค่าความแข็งเกร็งของแท่นเครื่องควรมีค่าสูงเพื่อรองรับระดับการสั่นที่สูงเพื่อไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนที่สูงเกินไป ขณะเดียวกันที่ความถี่ของแรงกระตุ้นจากการทำงานของเครื่องยนต์สูง คุณสมบัติของแท่นเครื่องควรจะอ่อนหรือมีค่าความแข็งเกร็งต่ำเพื่อที่ส่งผ่านแรงไปยังจุดรองรับให้น้อยที่สุด ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของแท่นเครื่องตามอุดมคติควรมีลักษณะดังนี้

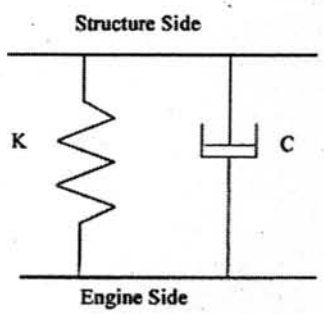


รูปที่ 2.1 คุณสมบัติในอุดมคติของค่าความแข็งของระบบรองรับแท่นเครื่อง [4]

จากที่กล่าวโดยทั่วเป็นการพิจารณาประกอบเพื่อออกแบบการติดตั้งระบบรองรับของแท่นเครื่องยนต์ในลักษณะของการกระตุ้นแบบพลศาสตร์ (Dynamic excitation) ที่เกิดจากเครื่องยนต์แต่ยังมีข้อพิจารณาอื่นๆเข้ามาเกี่ยวข้องกับการออกแบบระบบรองรับ เช่น การกระตุ้นที่เกิดจากการเคลื่อนที่บนถนนที่ขรุขระ หรือการเกิดแรงบิดมากๆในภาวะที่ใช้เกียร์ต่ำ การใช้ความเร็วสูง การเบรก การเข้าโค้งเป็นต้น ซึ่งเป็นส่วนประกอบที่ต้องนำมาพิจารณา ดังนั้นการเลือกใช้ระบบไฮโดรริกมาแทนในระบบรองรับแบบเดิมจึงเริ่มมีบทบาทมากขึ้นในรถยนต์รุ่นใหม่ แต่มีข้อจำกัดในเรื่องของราคา และรูปแบบของการใช้งาน เช่นการใช้งานในเครื่องยนต์ที่ทำงานติดต่อกันเป็นเวลานานจะทำให้เกิดอุณหภูมิที่สูงและเกิดกัดกร่อนทำให้ได้รับผลกระทบต่อระบบของเหลวที่อยู่ในแท่นเครื่อง รวมถึงราคาของระบบที่สูงมากจึงนิยมใช้กันในรถยนต์ราคาแพงที่ต้องการความสบายในการขับขี่เป็นหลัก

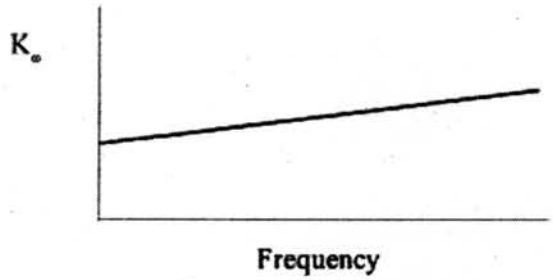
Passive elastomeric mounts

เป็นระบบรองรับที่ใช้ยางธรรมชาติรองรับแท่นเครื่องนิยมใช้ตั้งแต่ก่อนปี 1930 ถึงแม้ในปัจจุบันก็ยังมีใช้กันอยู่ในรถยนต์ขนาดเล็กหรือรถที่มีการขับเคลื่อนโดยใช้ล้อหน้าที่มีรอบการทำงานต่ำ (Front wheel drive vehicles with low idle speed) เนื่องจากพอที่จะใช้งานได้ในช่วงกว้างของค่าความแข็งพอตามความจำเป็นและราคาที่ไม่แพงรวมถึงยังไม่มีค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุง การใช้แผ่นยางในระบบรองรับแท่นเครื่อง (Elastomeric system) ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบ Voigt model แบบจำลองของยางจะเหมือนกับ สปริงเชิงเส้นกับตัวหน่วงแบบวิสคัส



รูปที่ 2.2 Mechanical model ของระบบโดยใช้แผ่นยาง [4]

ในการใช้งานของระบบรองรับของเครื่องยนต์พบว่าค่า Dynamic stiffness ของยาง จะเปลี่ยนแปลงตามความถี่ที่ใช้งาน รูปที่ 2.3 จะแสดงผลดังกล่าวจะทำให้ประสิทธิภาพของการใช้ยางรองมีค่าต่ำลงจากการที่มีการใช้งานที่รอบสูงซึ่งจะทำให้ค่าความแข็งของยางจะมีค่าสูงขึ้น ประสิทธิภาพในการส่งผ่านแรงไปยังจุดรองรับก็จะน้อยลง



รูปที่ 2.3 Dynamic Stiffness ของระบบติดตั้งโดยใช้แผ่นยาง [4]

จากคุณสมบัติดังกล่าวทำให้ยากที่จะออกแบบให้ระบบรองรับโดยใช้ยางธรรมชาตินำไปใช้แทนความต้องการของการใช้งานในระบบรองรับทั้งหมด สำหรับการศึกษานี้จะเป็นการศึกษาในช่วงความถี่ที่กระตุ้นบนเครื่องยนต์ที่ไม่สูงมากดังนั้นคุณสมบัติดังกล่าวจึงไม่ส่งผลต่องานวิจัยมากนัก

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 ระบบรองรับแท่นเครื่องของรถยนต์ (Automotive vehicle engine mounting system)

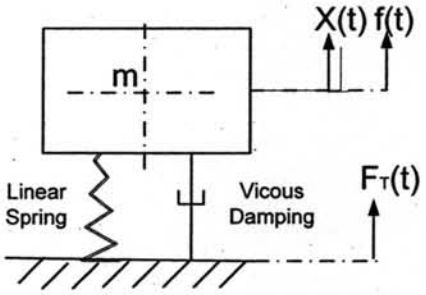
ระบบรองรับแท่นเครื่องในรถยนต์เป็นระบบสำหรับปกป้องรถยนต์จากเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการขับขี่รถยนต์ ไม่ว่าจะเกิดเหตุการณ์ที่ไม่คาดคิด ภาวการณ์ทำงานหนักของเครื่องยนต์ สภาพของท้องถนนต่างๆ ทำให้การทำงานของระบบเพื่อส่งผ่านแรงกระตุ้นที่มากระทำอาจจะมีขนาดสูงถึง 2 เท่าของน้ำหนักเครื่องยนต์ [1] ดังนั้นจึงให้ความสำคัญอย่างมากที่ต้องมีการออกแบบระบบรองรับที่ดี

ทฤษฎีพื้นฐานของการส่งผ่านแรง (Basic transmissibility of forces)

โดยทั่วไประบบรองรับเป็นระบบที่ถูกออกแบบมาเพื่อจุดประสงค์ต่าง ๆ แตกต่างกันตามแหล่งกำเนิดของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นทั้ง Steady vibration หรือ Shock ที่ส่งผ่านไปยังฐานรองรับ ระบบดังกล่าวจะไปป้องกันและลดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนที่ไปยังฐานแท่นเครื่องโดยมีความจำเป็นที่ต้องมีการออกแบบมาเพื่อให้มีการส่งผ่านแรงทั้งจากการทำงานของเครื่องยนต์และจากการขับขี่ ในระบบพื้นฐานจะประกอบด้วยส่วนต่างๆ 3 ส่วนด้วยกันคือ มวล ส่วนของ Flexible connector และ มวลฐานรองรับ (Foundation) ในระบบอย่างง่ายจะมีการเคลื่อนที่ใน

1 ทิศทาง พลังงานในการสั่นจะสลายตัวไปในส่วนของ Flexible element คุณสมบัติดังกล่าวอาจจะอธิบายได้จากคุณลักษณะของสัดส่วน Absolute transmissibility ของระบบ

Absolute transmissibility เป็นสัดส่วนที่แสดงถึงอัตราการส่งผ่านการสั่นสะเทือนหรือแรงของระบบ โดยเมื่อมองในแง่ของ Dynamic force จะเป็นสัดส่วนของแรงที่กระทำที่จุดรองรับกับแรงที่กระทำกับระบบ



รูปที่ 2.4 การส่งผ่านจากวัตถุมายังฐานรองรับ

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้จะศึกษาในช่วงความถี่ต่ำ ใช้ Rubber isolator ไม่คิดมวลของสปริงและส่วนของเครื่องยนต์เป็นวัตถุแข็งเกร็ง รองรับด้วย flexible mounting ที่เป็นเชิงเส้น [5]

การคำนวณอัตราการส่งผ่านแรงด้วยสปริงเชิงเส้นกับตัวหน่วงแบบวิสคัส

เป็นการออกแบบระบบรองรับอย่างง่ายที่ เมื่อพิจารณาให้ฐานรองรับไม่มีการเคลื่อนที่สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้คือ

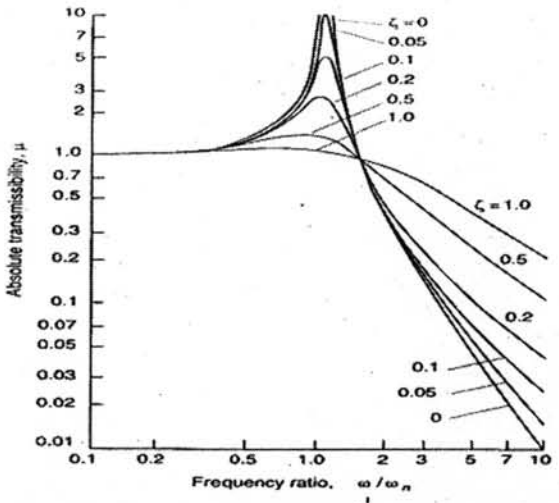
$$F_T = kx + c\dot{x} \tag{2.1}$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}) + k(x) = f(t) \tag{2.2}$$

กำหนดให้ $f(t) = F_o \sin \omega t$ หรือเขียนในรูปของ $F = F_0 e^{j\omega t}$
สามารถเขียนสมการของ Absolute force transmissibility, TR ได้ดังนี้

$$TR = \frac{[F_T]}{[F_0]} = \sqrt{\frac{1+(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2})^2+(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \tag{2.3}$$

จากสมการที่ 3.3 เมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 Absolute transmissibility ที่ Frequency ratio ต่างๆ [7]

จากลักษณะแบบจำลองดังกล่าวสามารถพิจารณาถึงความพันธ์ของค่าความแข็งและค่าความหน่วงของฐานรองรับกับการส่งผ่านของแรงที่ความเร็วรอบการทำงานของเครื่องยนต์ ผลของการหน่วงมีผลต่อการส่งผ่านแรงไปยังฐานรองรับ โดยการส่งผ่านของแรงจากระบบรองรับไปยังฐานจะมีค่าสูงเมื่อระบบมี Frequency ratio เป็น 1 ($\omega = \omega_n$) ระบบรองรับที่ดีควรมีค่าอัตราการส่งผ่านแรงไปยังฐานน้อย (Low transmissibility) นั้นหมายความว่าควรมีความหน่วงที่น้อยและมีค่าความแข็งต่ำ (Low elastic stiffness & Low damping) แต่การเลือกระบบรองรับแบบใดควรจะคำนึง ถึงค่าความถี่ธรรมชาติของระบบและควรมีความสัมพันธ์กับรอบการทำงานปกติของการใช้งานรถยนต์ด้วยเพื่อป้องกันการสั่นพ้องที่จะเกิดขึ้น [6]

2.2.2 การวิเคราะห์และทดสอบโมดัล (Modal analysis and testing)

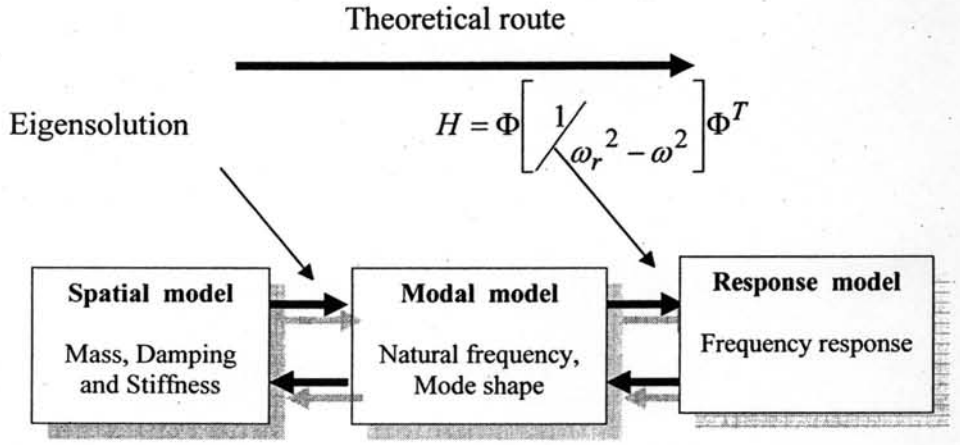
อุปกรณ์ เครื่องจักรหรือโครงสร้างทางกล เช่น โครงสร้างอาคาร รถยนต์ นอกจากจะใช้สำหรับรองรับน้ำหนักบรรทุกแล้วยังต้องพิจารณาถึงการสั่นสะเทือนซึ่งเป็นภาระพลศาสตร์ ภาระดังกล่าวถือได้ว่าเป็นปัจจัยสำคัญอย่างหนึ่งที่จะทำให้เกิดความเสียหายต่อโครงสร้างทางกลที่สร้างขึ้นมา

การวิเคราะห์โมดัลจะใช้เพื่อหาตัวแปรทางโมดัล (Modal parameter) จะนำไปใช้อธิบายคุณลักษณะของโครงสร้างทางกลที่มีต่อการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้น โดยที่รูปร่างหรือโหมดของการสั่นสะเทือนหนึ่งจะประกอบด้วยตัวแปรต่าง ๆ ได้แก่ ความถี่ธรรมชาติ (Modal frequency) อัตราส่วนความหน่วง (Modal damping) และรูปร่างการสั่นสะเทือน (Mode shape) ในแต่ละโครงสร้างทางกลจะประกอบด้วยหลายโหมดของการสั่นสะเทือนประกอบกันอยู่ จึงใช้การทดสอบโมดัล (Modal testing) เพื่อที่จะนำมาคำนวณและวิเคราะห์ข้อมูลของตัวแปรทางโมดัล ซึ่งจะนำมาใช้เป็นส่วนประกอบสำหรับวิเคราะห์ปัญหาของความสั่นสะเทือนในโครงสร้างทางกล โดย

สามารถนำข้อมูลเหล่านี้เข้ามามีส่วนสำคัญในการนำมาใช้แก้ไขโครงสร้างในขั้นตอนการออกแบบเพื่อไม่ให้โครงสร้างที่ออกแบบเผชิญกับการสั่นสะเทือนที่มากเกินไป [7]

1) ทฤษฎีพื้นฐาน (Theoretical basic)

โครงสร้างของส่วนทฤษฎีสำหรับการวิเคราะห์โมดัลจะเป็นการวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานของการสั่นสะเทือนที่มีคุณสมบัติเชิงเส้นเพื่อที่จะนำไปสู่ขั้นตอนของการทดสอบโมดัล (Modal testing or Experimental Modal Analysis , EMA) มีขั้นตอนหลักๆสำหรับการวิเคราะห์โมดัลสามารถแสดงดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 2.6 ขั้นตอนเชิงทฤษฎี และการทดสอบของการวิเคราะห์โมดัล [7]

ขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์คือการสร้างแบบจำลองทางกายภาพซึ่งเป็นแบบจำลองที่สามารถอธิบายโครงสร้างทางกลของวัตถุและจะอยู่ในรูปของ มวล ค่าความแข็งของสปริง และคุณสมบัติความหน่วง (Mass, Stiffness and Damping) เรียกรวมกันว่า Spatial Model

ขั้นตอนที่สองจะใช้ Theoretical modal analysis เปลี่ยนรูปแบบของ Spatial Model ไปเพื่อที่จะนำมาอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้าง (Structure behavior) แบบจำลองนี้เรียกว่า Modal Model ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรทางโมดัล (Modal parameter) ได้แก่ ความถี่ธรรมชาติ (Modal frequency) และรูปแบบการสั่นสะเทือน (Mode shape) บางครั้งอาจรวมอัตราส่วนความหน่วง (Modal damping)เข้าไปด้วย สิ่งที่ได้ในขั้นตอนนี้คือผลเฉลยซึ่งแสดงในรูปของการสั่นตามธรรมชาติ (Vibration naturally) ซึ่งเกิดขึ้นจากภาวะที่ไม่มีแรงหรือการกระตุ้นมากระทำกับโครง สร้างทางกล หรืออาจจะเรียกรูปร่างการสั่นแบบนี้ว่า Natural mode หรือ Normal mode [8]

ขั้นตอนที่สามเป็นขั้นตอนที่น่าสนใจที่สุดที่ทำให้สามารถวิเคราะห์ผลตอบสนองของโครงสร้างทางกลภายใต้การถูกกระตุ้น ซึ่งจะได้กลุ่มของฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Functions, FRFs)

ในการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีสามารถแสดงได้เป็นสมการคณิตศาสตร์ทั่วไปได้ดังนี้ [8]

กรณี 1 Undamped Multi – Degree – Of – Freedom (MDOF) system

สมการทั่วไปของการสั่นสะเทือนสำหรับ N dof คือ

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=f(t) \tag{2.4}$$

เบื้องต้นพิจารณาระบบ Free vibration ภายใต้เงื่อนไข $f(t)=0$

เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับการวิเคราะห์คุณสมบัติโมดัล โดยกำหนดให้คำตอบของสมการคือ $\{x(t)\}=\{X\}e^{i\omega t}$ แทนค่าในสมการหลักจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\left([K]-\omega_r{}^2[M]\right)\{x\}e^{i\omega t}=0 \tag{2.5}$$

หรือ $$\det\left([K]-\omega_r{}^2[M]\right)=0 \tag{2.6}$$

ω_r ได้จากสมการข้างต้นถูกเรียกว่า The undamp system's natural frequencies ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ N ตัว ซึ่งเป็นตัวแปรทางโมดัล (Modal parameter) จากนั้นนำค่ากลุ่มของ ω_r ที่ได้แทนในสมการหลัก (2.4) จะได้ความสัมพันธ์ของ $\{x\}$ ซึ่งแสดงในรูปแบบของ Mode shape แทนด้วยสัญลักษณ์, $\{\varphi\}_r$ ซึ่งแสดงถึงการตอบสนองของรูปร่างการสั่นจากความถี่ธรรมชาติ

เห็นได้ว่า [M] และ [K] ซึ่งเป็น Spatial Model ได้ถูกเปลี่ยนเป็น 2 Eigenmatrices คือ $\{\varphi\}_r$,$[\omega_r]$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของ Modal Model เมื่อมาพิจารณาในแต่ละตัวคือใน Eigenvalue matrix หรือ $[\omega_r]$ จะมีคุณสมบัติเป็น Unique โดยที่ Eigenvector matrix หรือ $\{\varphi\}_r$ ที่ได้จะมีคุณสมบัติไม่ Unique นั่นคือค่าความถี่ธรรมชาติจะที่มีค่าคงที่แต่รูปร่างของการสั่นจะมีค่าเหมือนเดิมแต่ค่าขนาดของการสั่นจะมีค่าเปลี่ยนแปลงเป็นสัดส่วนตามกัน เพื่อให้ค่าของคำตอบอยู่ในรูปแบบเดียวกันจึงใช้คุณสมบัติของ Orthogonality เพื่อที่จะทำ Normalized ส่วนของ Eigenvector ซึ่งจะทำให้คุณสมบัติของ Eigenvector เป็น Unique ทำได้โดยกำหนดให้คุณสมบัติ Modal Model ของ Mass และ Stiffness มีความสัมพันธ์ในรูปแบบดังนี้

$[\Psi]^T[M][\Psi]=[m]_r$ เป็น Modal mass $\quad$ $[\Psi]^T[K][\Psi]=[k]_r$ เป็น Modal stiffness

และ $[\Phi]$ = Mass – normalized eigenvector ซึ่งมีคุณสมบัติคือ

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I] \quad \text{และ} \quad [\Phi]^T[K][\Phi]=\left[\omega_r^2\right]$$

ความสัมพันธ์ของ $\{\phi\}_r$ และ $\{\varphi\}_r$ คือ

$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}}\{\varphi\}_r$ และ $m_r = \{\varphi\}_r^T[M]\{\varphi\}_r$ หรือเขียนใหม่อยู่ในรูปของ

สมการได้ดังนี้ $[\Phi] = [\Psi]\left[m_r^{-1/2}\right]$ และ $\omega_r^2 = k_r / m_r$

กรณีที่ 2 ระบบที่มีแรงมากระตุ้นหรือ Force vibration $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ และมีผลตอบสนองของระบบ คือ $\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$ จะได้สมการของการสั่นสะเทือนคือ

$$\left([K] - \omega^2[M]\right)\{x\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \tag{2.7}$$

จัดรูปใหม่คือ $\{x\} = \left([k] - \omega^2[M]\right)^{-1}\{F\}$

$$\{x\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \tag{2.8}$$

$[\alpha(\omega)]$ = มีขนาด N x N เป็น Frequency Response Function matrix

= Response Model

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left(\frac{X_j}{F_k}\right) \tag{2.9}$$

แทนค่า $[\Phi]$ และ $[\Phi]^T$ ทั้ง 2 ข้างของสมการการสั่นสะเทือน จะได้ดังนี้

$$[\Phi]^T\left([K] - \omega^2[M]\right)[\Phi] = [\Phi][\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi]^T$$

จัดรูปใหม่โดยใช้คุณสมบัติของ Mass – normalized eigenvector จะได้

$$\left[\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)\right] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \text{ หรือ } [\alpha(\omega)] = [\Phi]\left[\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)\right]^{-1}[\Phi]^T$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left(\frac{x_j}{F_k}\right) = \alpha_{kj} = \left(\frac{x_k}{F_j}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\frac{(\phi)_{jr}(\phi)_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^{N}\frac{(\varphi)_{jr}(\varphi)_{kr}}{m_r\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)} \tag{2.10}$$

เขียนใหม่ให้ดูง่ายขึ้น $\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N}\frac{{}_rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2}$ เรียก ${}_rA_{jk}$ = Modal constant

กรณีที่ 3 Multi – Degree – Of – Freedom (MDOF) With Viscous damping System

สมการทั่วไปของการสั่นสะเทือนสำหรับ N DOF คือ

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C\{\dot{x}(t)\}]+[K]\{x(t)\}=f(t) \tag{2.11}$$

สำหรับกรณีการสั่นสะเทือนแบบอิสระหรือ Free vibration กำหนดให้คำตอบของแต่ละชุดสมการคือ $\{x\}=\{X\}e^{st}$ และแทนค่าในสมการทั่วไปจะได้

$$\left(s^2[M]+s[C]+[K]\right)\{X\}=0 \tag{2.12}$$

สามารถแสดงคำตอบที่ได้ของปัญหาค่าเจาะจงเชิงซ้อน (Complex Eigen problem) ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบของ คู่สังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate pairs) เป็นผลเฉลยค่าเจาะจง (Eigen solution) ได้ดังนี้

$$s_r, s_r^* \quad \text{และ} \quad \{\varphi\}_r, \{\varphi\}_r^* \quad ; \ \mathrm{r} = 1,\mathrm{N}$$

รูปแบบทั่วไปของ Eigenvalue ของ s_r คือ $s_r = \omega_r\left(-\xi_r + i\sqrt{1-\xi_r^2}\right)$

ในการวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนจากกลุ่มของฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้แบบจำลองปริภูมิเสตทแบบต่อเนื่อง (Continuous state space model) ในระบบที่เป็นเชิงเส้นและตัวแปรของระบบไม่ขึ้นกับเวลา (Linear time invariant system) และไม่มีสัญญาณรบกวนซึ่งมีรูปแบบดังนี้ [2]

$$\{x\}=A\{x\}+B\{u\} \tag{2.13}$$
$$\{y\}=C\{x\}+D\{u\} \tag{2.14}$$

โดย $\{x\}$ = ตัวแปรเสตรท (n x 1)

$\{u\}$ = สัญญาณอินพุท (r x 1)

$\{y\}$ = สัญญาณเอาท์พุท (m x 1)

A = เมทริกซ์ระบบ

B = เมทริกซ์สัญญาณอินพุท

C = เมทริกซ์สัญญาณเอาท์พุท

D = เมทริกซ์สัญญาณป้อนไปข้างหน้า

n = อันดับของระบบ

m = จำนวนสัญญาณเอาท์พุท

r = จำนวนสัญญาณอินพุท

จากสมการหลัก $[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C\{\dot{x}(t)\}]+[K]\{x(t)\}=f(t)$

คูณตลอดด้วย $[M]^{-1}$ แล้วจัดรูปจะได้

$$\{\ddot{x}\}=-[M]^{-1}[C]\{\dot{x}\}-[M]^{-1}[K]\{x\}+[M]^{-1}\{f(t)\} \qquad (2.15)$$

กำหนดตัวแปรเสตท $\{X\}=\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\}\\ \{x\}\end{Bmatrix}$ และให้อินพุท $\{u\}=\{f(t)\}$

จะได้สมการ

$$\left\{\dot{X}\right\}=\begin{bmatrix}-[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K]\\ I_3 & 0_{3x3}\end{bmatrix}\{X\}+\begin{bmatrix}[M]^{-1}\\ 0_{3x1}\end{bmatrix}\{u\} \qquad (2.16)$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบปริภูมิเสตทจะได้

$$A=\begin{bmatrix}-[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K]\\ I_3 & 0_{3x3}\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}[M]^{-1}\\ 0_{3x1}\end{bmatrix}$$

ไม่มีสัญญาณป้อนกลับ $C=[0_{3x3} \quad I_{3x3}]$ และ $D=0_{3x3}$

ทำการแปลงลาปลาซ (Laplace transformation) โดยกำหนดอินพุทเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นโดยไม่มีแรงภายนอกกระทำ

$$\left\{Y(s)=C[SI-A]^{-1}\{x(0)\}\right\} \qquad (2.17)$$

จะได้ $[H(s)]=C[SI-A]^{-1}$ เป็นเมทริกซ์ชุดฟังก์ชันถ่ายโอน

2) การทดสอบโมดัล (Modal testing or Experimental Modal Analysis, EMA)

EMA เป็นกลุ่มของผลการทดลองซึ่งนำไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematic model) และสามารถใช้อธิบาย Dynamic behavior ของวัตถุทดสอบได้ มีประโยชน์หลายด้านที่จะนำไปใช้งานได้แก่ [9]

1) จากรูปร่างการสั่นสะเทือน (The mode of vibration) ของวัตถุทดสอบ จะทำให้เห็นรูปแบบทางกายภาพและทำให้เข้าใจถึงคุณลักษณะทางพลศาสตร์ที่ซับซ้อนของวัตถุจริง

2) ทำให้สามารถเปรียบเทียบ Actual (measure) vibration behavior ของวัตถุจริงกับที่ได้ทางทฤษฎี และสามารถนำไปปรับปรุงใน Theoretical model ได้

3) ทำนายผลกระทบของการประยุกต์หรือทำนายสิ่งที่จะเกิดขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนคุณลักษณะของโครงสร้าง ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายและเวลาโดยไม่ต้องสร้างโครงสร้างจริงเพียงแต่ใช้แบบจำลอง

4) มีประโยชน์ในการซ่อมบำรุงเครื่องจักรโดยนำไปใช้เพื่อวิเคราะห์ป้องกันความเสียหายของเครื่องจักรจากการเปลี่ยนชิ้นส่วนหรือส่วนประกอบ

ขั้นตอนพื้นฐานในการวิเคราะห์ผลทดสอบโมดัล [9] ได้แก่

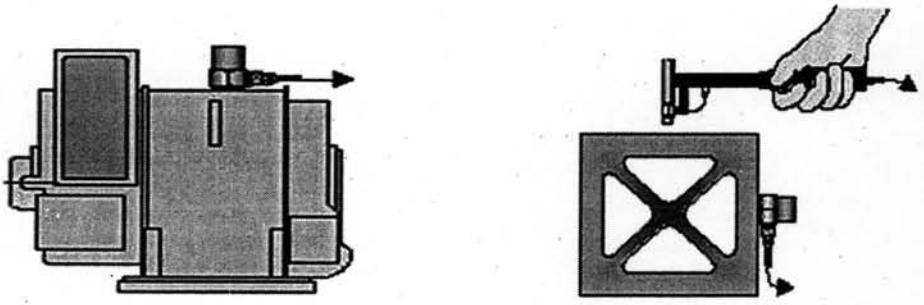
1) ทำการวัดค่าผลตอบสนองการสั่นสะเทือนของวัตถุทดสอบ โดยจำเป็นต้องทราบขนาดของแรงและลักษณะสัญญาณที่กระตุ้นต่อระบบ

2) วิเคราะห์ผลลัพธ์ของฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่ที่เกิดขึ้นจะทำให้ได้ตัวแปรโมดัล นั่นคือ ความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนความหน่วง และ รูปร่างการสั่นของระบบที่ทดสอบ

3) วิเคราะห์ร่วมกันจากตัวแปรโมดัลและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม

การวิเคราะห์สัญญาณในการทดสอบโครงสร้างทางกล

ในการทางกลทั่วไปสามารถแบ่งเป็น 2 รูปแบบนั่นคือเป็นการทดสอบเพื่อวิเคราะห์สัญญาณการสั่นสะเทือนและวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือน (Signal analysis and System analysis) [10] แสดงได้ดังรูปที่ 2.7



(ก) (ข)

รูปที่ 2.7 (ก) การทดสอบวิเคราะห์สัญญาณ (ข) การทดสอบวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือน [10]

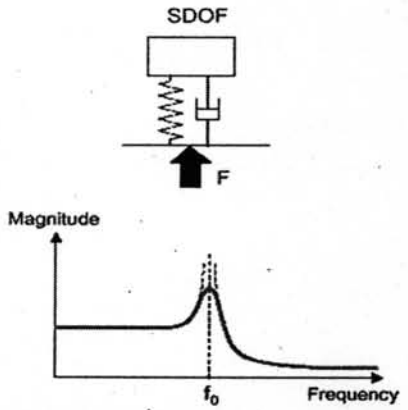
ในรูป (ก) สัญญาณการสั่นสะเทือนที่ได้จะอยู่ในรูปของ ระยะกระจัด ความเร็ว ความเร่ง จะทำการตรวจวัดขณะเครื่องจักรทำงาน โดยแรงที่กระทำกับระบบ (เช่น Imbalance, Shock ,Friction) ทำให้ตัวแปรทางโครงสร้างระบบ (Mass ,Stiffness และ Damping) เกิดสัญญาณ

การสั่นสะเทือน (Acceleration ,Velocity, Displacement) โดยการแปลงสัญญาณของการสั่นโดยใช้การแปลงฟูริเยร์ (Fourier transform) สัญญาณที่ได้สามารถนำไปใช้สำหรับการเฝ้าระวังในระบบการดูแลรักษาเครื่องจักร

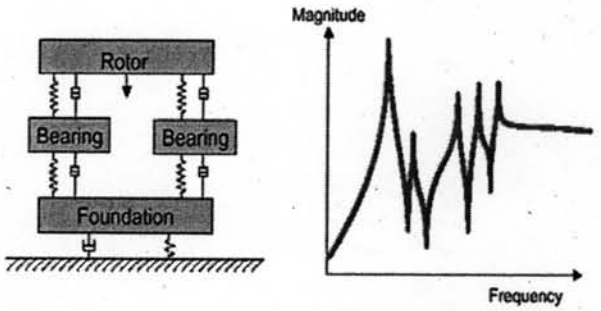
รูป (ข) เป็นตัวอย่างการติดตั้งอุปกรณ์ เพื่อวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือน โดยมีตัวกระตุ้นเพื่อให้เกิดสัญญาณเป็นแรงกระแทกและมีสัญญาณตอบสนองการสั่น การทดสอบดังกล่าวแสดงผลของข้อมูลในรูปแบบของกราฟฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Functions ,FRFs) ในงานวิจัยนี้จะมุ่งเน้นเพื่อวิเคราะห์ระบบการสั่นซึ่งจะอยู่ในรูปแบบ (ข) และการวิเคราะห์สัญญาณซึ่งจะนำมาใช้เพื่อประเมินค่าแรงที่กระทำต่อจุดรองรับเครื่องยนต์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการทดสอบโมดัล

การตอบสนองระบบโครงสร้างทางกลจริงจะสามารถแทนด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematic model) ซึ่ง แบบจำลองที่ได้อาจจะเป็นระดับขั้นเสรีในการสั่นเท่ากับ 1 (1 Degree of freedom) หรืออาจจะมีระดับขั้นเสรีในการสั่นมากกว่า (Multi degree of freedom) จากรูปต่อไปนี้แสดงลักษณะของตัวอย่างแบบจำลองและลักษณะของผลตอบสนองที่ได้จากการทดสอบโมดัล[11]



รูปที่ 2.8 แบบจำลองระดับเสรีการสั่นเท่ากับ 1 และการตอบสนองทางความถี่[9]



รูปที่ 2.9 แบบจำลองแทนระบบทางกลจริง และการตอบสนองทางความถี่ของระบบ[9]

การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความ สำคัญในการที่จะนำมาวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนของโครงสร้างทางกลเนื่องจาก

- สามารถสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรมของโครงสร้างที่สนใจภายใต้ภาระพลศาสตร์
- นำมาใช้จำลองและทำนายผลตอบสนองของระบบจากการสมมุติแรงภายนอกมากระทำต่อระบบทางกล
- ใช้แบบจำลองที่ได้มาทดสอบดัดแปลงโครงสร้างทางกายภาพเพื่อที่จะพิจารณาถึง คุณลักษณะทางพลศาสตร์ (Dynamic property) ที่เปลี่ยนไป

รูปแบบของฟังก์ชันตอบสนองความถี่

ฟังก์ชันการตอบความถี่ของระบบโครงสร้างทางกลอาจจะนิยามได้โดยอธิบายจากรูปแบบต่อไปนี้

$$H(f)=\frac{X(f)}{F(f)}$$

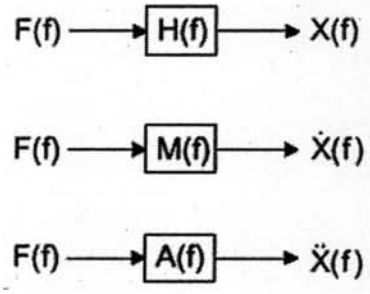
$H(f)$ เป็น ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ระบบ (Frequency Response Functions, FRFs)

$F(f)$ เป็น การแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transform) ของสัญญาณแรงกระทำต่อระบบ

$X(f)$ เป็น การแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transform) ของสัญญาณการสั่นของระบบ

รูปแบบพื้นฐานของ FRFs ที่ใช้ในการวิเคราะห์ [15]

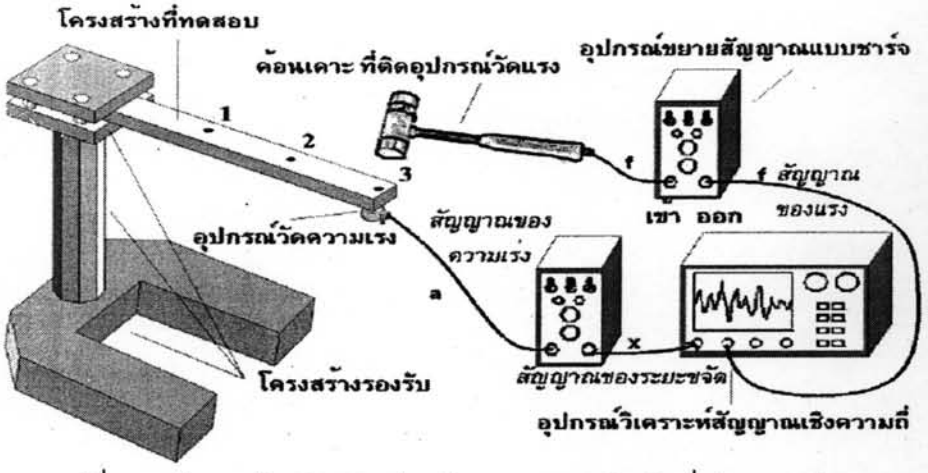
Compliance:	$H(f)=\frac{X(f)}{F(f)}$
Mobility:	$M(f)=\frac{\dot{X}(f)}{F(f)}$
Accelerance:	$A(f)=\frac{\ddot{X}(f)}{F(f)}$



รูปที่ 2.10 รูปแบบต่างๆของฟังก์ชันการตอบสนองความถี่ [11]

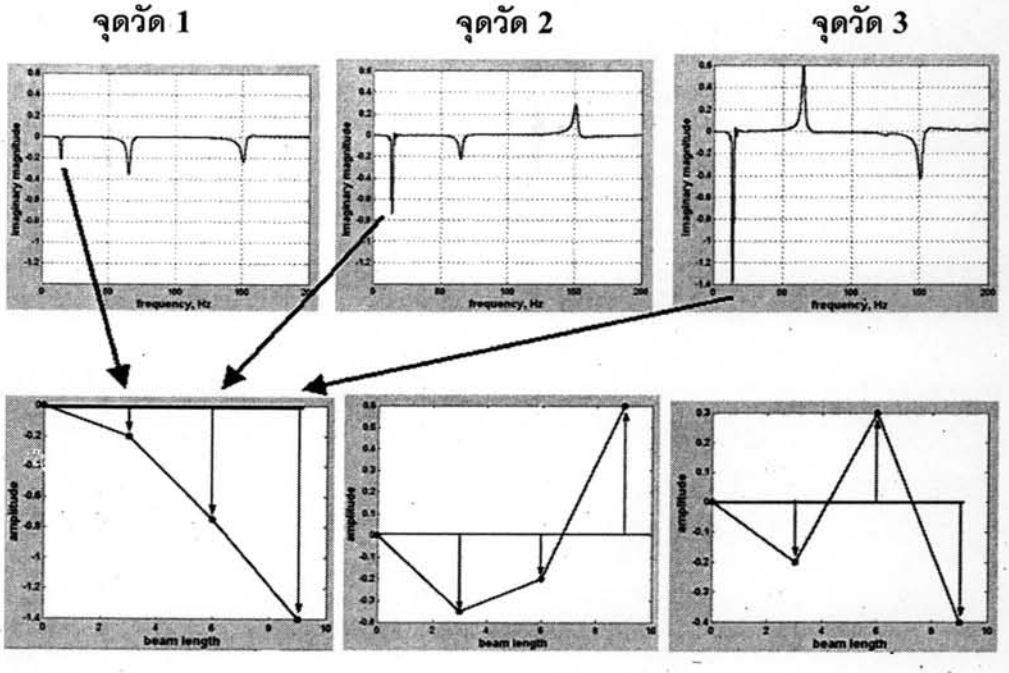
จากฟังก์ชันตอบสนองความถี่จะสามารถหาปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้องกับระบบสั่นสะเทือนได้โดยวิเคราะห์จากการเกิดการสั่นพ้อง (Resonance) ทำให้สามารถประเมินค่าของ ความถี่ธรรมชาติและจากขนาดการสั่น (Magnitude) ทำให้รู้ลักษณะของรูปร่างการดัดตัว ณ การสั่นพ้องของแต่ละรูปร่างการสั่น (Mode shape)

ตัวอย่างการทดสอบโมดัลในโครงสร้างตัวอย่าง[12]



รูปที่ 2.11 โครงสร้างตัวอย่างสำหรับการทดสอบโมดัลเพื่อวิเคราะห์ระบบ

หลังจากที่เคาะแรงกระตุ้นกับคานจะได้สัญญาณการสั่นสะเทือน นำสัญญาณการสั่นสะเทือนที่ได้ไปพล็อตกราฟเพื่อแสดงลักษณะการดัดตัวของคานที่ความถี่ธรรมชาติที่พบแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 3.12 (ก) รูปร่างการสั่นของคานที่ได้จากโมดการสั่นความถี่ธรรมชาติ 10 Hz [12]

(ข) รูปร่างการสั่นของคานที่ได้จากโมดการสั่นความถี่ธรรมชาติ 60 Hz

(ค) รูปร่างการสั่นของคานที่ได้จากโมดการสั่นความถี่ธรรมชาติ 150 Hz