

## บทที่ 4

### การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้ จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ได้ในขั้นต้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ภายใต้สถานะคงตัวมาตรวจสอบความถูกต้องกับการไหลแบบราบเรียบอย่างง่ายที่มีผลการทดลองหรือผลการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยระเบียบเชิงตัวเลขอื่นๆ ทั้งนี้เพื่อแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้มีความถูกต้องในระดับที่น่าพอใจ ก่อนนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปพัฒนาต่อไป

กรณีศึกษาที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องมีดังต่อไปนี้

- 1) ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Backward-facing step
- 2) ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยว
  - สิ่งกีดขวางมีลักษณะเป็นบล็อก (Block)
  - สิ่งกีดขวางมีลักษณะเป็นรั้วบาง (Fence)

#### 4.1 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Backward-facing step

ปัญหาการไหลผ่านแบบราบเรียบผ่าน Backward-facing step ในส่วนนี้จะทำการคำนวณทั้งในสถานะคงตัว โดยทำการเปรียบเทียบกับ Melaaen (1990) ซึ่งมีทั้งผลการทดลองและผลการคำนวณเชิงตัวเลข โดยรูปที่ 4.1 แสดงรูปร่างของปัญหาการไหล Backward-facing step ซึ่งมีความกว้างทางเข้าช่องทางไหล  $h$  เท่ากับ 1 ความยาวก่อนถึงขั้นบันได เท่ากับ 3 ความกว้างของช่องทางไหลส่วนขยาย  $H$  เท่ากับ 1.5 และความยาวของช่องทางไหลทั้งหมด  $L$  เท่ากับ 22 โดยกำหนดให้ความเร็วทางเข้ามีรูปร่างเป็น Fully-developed laminar flow ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50, 150 และ 500 ซึ่งค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์หาได้จากสมการ

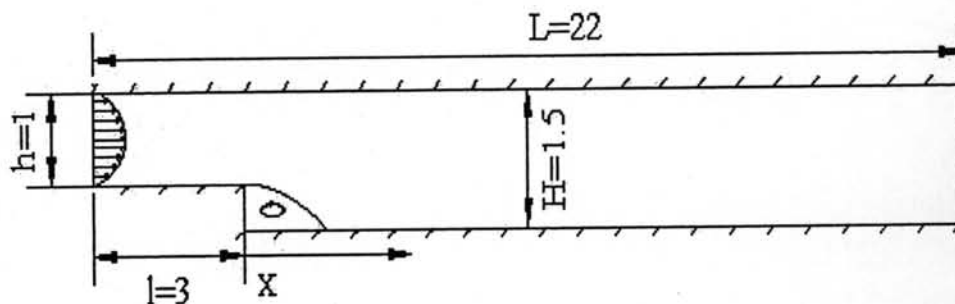
$$Re = \frac{U_{\max}(H-h)\rho}{\mu} \quad (4.1)$$

ความยาวไร้มิติ คือ

$$X = \frac{x}{H-h} \quad Y = \frac{y}{H-h} \quad (4.2)$$

และความดันไร้มิติ คือ

$$P = \frac{P}{U_{\max}^2 \rho} \quad (4.3)$$



รูปที่ 4.1 รูปแบบของปัญหาแบบ Backward-facing step (Melaaen, 1990)

ตารางที่ 4.1 ความยาวบริเวณการหมุนวน (Reattachment length),  $X_r/(H-h)$

ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์, Re	50	150	500
ผลการทดลองของ Westphal	3	6	-
GAMM, interval	1.56-3.4	4.70-7.25	8.48-16.0
Durst, hybrid, 40x30 to 50x40	2.77	5.81	10.62
Durst, QUICK, 40x30 to 50x40	2.79	6.19	14.92
Kueny, TEACH, 1100 nodes	2.70	5.80	-
Kueny, Leonard, 3000 nodes	3.12	6.70	-
Schkalla, 297x49	2.95	6.41	-
Melaaen, non-staggered, POW, 62x50	2.95	6.19	10.01
Melaaen, non-staggered, SOU, 62x50	2.95	6.52	15.53
Staggered, Upwind,	3.19	6.69	14.74
Staggered, Power-law,	3.27	6.96	15.68
Staggered, Hybrid,	3.27	6.96	15.80

ตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบความยาวบริเวณการหมุนวน,  $X_r/(H-h)$  จากผลการทดลองของ Westphal และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ GAMM-workshop, Durst, Kueny, Schkalla (Cited in Melaaen, 1990) และ Melaaen (1990) โดยสามารถแจกแจงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ ดังนี้

- ผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ GAMM-workshop ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้งระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite difference method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) ในกริดแบบหยาบ และกริดละเอียด ตามลำดับ

- ผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Durst, Kueny และ Schkalla ที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite difference method)

- ส่วนผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Melaaen ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume method) โดยใช้ Numerical scheme สองลักษณะคือ แบบ Second-order upwind (SOU) และแบบ Power-law (POW) ซึ่งทำการทดสอบคุณสมบัติความเป็น Grid-independent กับพารามิเตอร์ค่าความยาวบริเวณการหมุนวน ด้วยขนาดกริดแตกต่างกัน 4 แบบ คือ 62x26, 62x36, 82x36 และ 62x50 ซึ่งเลือกกริดขนาด 62x50 ในการแสดงผล และการทำนายการไหลในปัญหา Backward-facing step โดย Numerical scheme ทั้งสองแบบ พบว่าที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 150 และ 500 Numerical scheme แบบ SOU ให้ผลค่าความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังชั้นบันได มากกว่าแบบ POW และเมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง พบว่า แบบ POW มีผลใกล้เคียงมากที่สุดที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 150 ดังแสดงในตารางที่ 4.1 เมื่อพิจารณาการคำนวณค่าความเค้นเฉือนที่ผนังชั้นบันไดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง พบว่าที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50 ทั้ง SOU และ POW มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเท่ากัน และใกล้เคียงกับผลการทดลอง ยกเว้นที่ค่าต่ำสุดของความเค้นเฉือนที่ผนัง ซึ่งแตกต่างกับผลการทดลองมาก ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 150 SOU ให้ผลค่าความเค้นเฉือนที่ผนังใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่า POW โดย POW มีการหมุนวนกลับเร็วกว่า และมีค่าต่ำสุดของความเค้นเฉือนที่ผนังสูงกว่าทั้งผลการทดลอง และแบบ SOU แม้ว่าผลของค่าความเค้นเฉือนที่ผนังของทั้งสอง Numerical scheme จะมีความแตกต่างกับผลการทดลอง แต่การคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน (Axial velocity) ที่ตำแหน่ง  $X = 1.6, 4.0, 8.0$  และ 24 สำหรับ  $Re = 150$  ให้ผลเป็นที่น่าพอใจ โดย SOU ให้ผลของค่าความเร็วตามแนวแกนดีที่สุดใน การแสดงผลการเปรียบเทียบต่อไปจึงนำ Numerical scheme แบบ SOU มาแสดงผลเปรียบเทียบ

ผลการศึกษาการไหลในปัญหา Backward-facing step โดยการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งมีลักษณะกริดเป็นแบบเยื้อง (Staggered Grid) และใช้ Numerical scheme 3 แบบ คือ Upwind, Power-law และ Hybrid ซึ่งมีกริดขนาด 112x77 โดยแต่ละปริมาตรควบคุมมีขนาดกว้าง  $dy$  เท่ากับ 0.02 และยาว  $dx$  เท่ากับ 0.2 โดยสามารถคำนวณค่า Aspect ratio ได้เท่ากับ 10 ถึงแม้ว่าค่า Aspect ratio ที่ได้จะมีค่าสูงก็ตาม แต่ผลการลู่เข้า พบว่ามีการลู่เข้าของ residual อย่างคงตัว ส่วนการทดสอบคุณสมบัติความเป็น Grid independent ในงานวิจัยของ Melaaen พบว่ากริดขนาด 62x50 มีคุณสมบัติความเป็น Grid independent ดังนั้นกริดขนาด 117x77 ที่ Aspect ratio เท่ากับ 10 นี้ จึงมีความน่าเชื่อถือในการคำนวณหาผลลัพธ์ต่อไป ซึ่งพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ทำการศึกษามีดังนี้

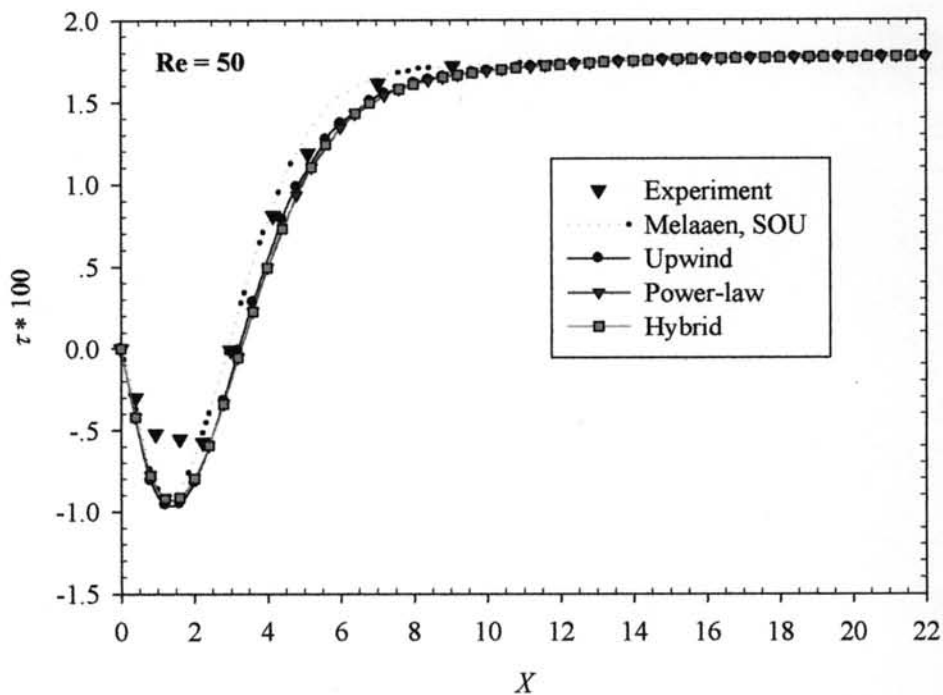
#### 4.1.1 ความยาวบริเวณการหมุนวน (Reattachment length)

แบบ Upwind มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re = 50$  และ 150 ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุด และทั้งแบบ Power-law และ Hybrid มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนเท่ากัน โดยที่  $Re = 500$  Numerical scheme ทั้งสามแบบมีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนอยู่ในช่วงของ GAMM-workshop ดังแสดงในตารางที่ 4.1

#### 4.1.2 ความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณชั้นบันได

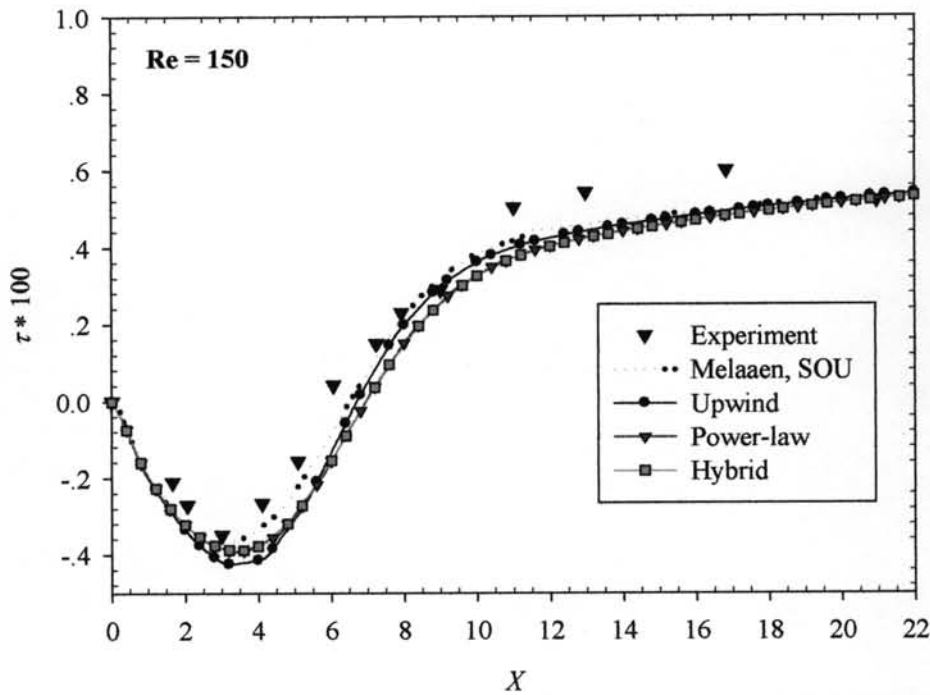
เมื่อพิจารณาที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50 พบว่า Numerical scheme ทั้งสามแบบมีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณชั้นบันไดใกล้เคียงกับผลการทดลองอย่างน่าพอใจ โดยแบบ Power-law และ Hybrid มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเท่ากัน แต่ค่าต่ำสุดของความเค้นเฉือนที่ผนังของทั้งสามแบบมีความแตกต่างกับผลการทดลองค่อนข้างมาก ดังแสดงในรูปที่ 4.2

$Re$  เท่ากับ 150 พบว่าในช่วงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเป็นลบ ทั้งแบบ Power-law และแบบ Hybrid มีค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าแบบ Upwind แต่ในช่วงค่าความเค้นเฉือนเป็นบวก แบบ Upwind มีความใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าแบบอื่น นอกจากนั้นแบบ Upwind ยังมีค่าความเค้นเฉือนที่ผนัง ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.2 ความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณชั้นบันไดของปัญหาแบบ Backward-facing

$$\text{step, } \tau = (H - h) / Re U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, } Re \text{ เท่ากับ } 50$$



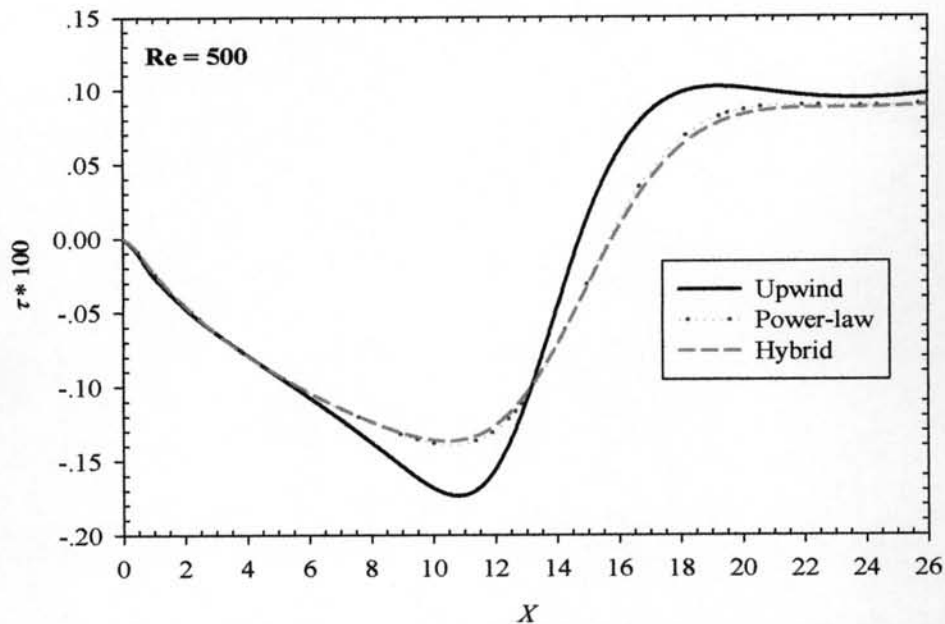
รูปที่ 4.3 ความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณขั้นบันไดของปัญหาแบบ Backward-facing

step,  $\tau = (H - h) / Re U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$  ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 150

Re เท่ากับ 500 พบว่าที่ความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณขั้นบันได Numerical scheme แบบ Upwind มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนสั้นกว่าแบบอื่น และมีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังต่ำที่สุด โดยทั้งแบบ Power-law และ Hybrid มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเท่ากัน และมีความยาวบริเวณการหมุนวนกว้างกว่าแบบ Upwind เมื่อพิจารณาค่าความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบน พบว่าแบบ Upwind เท่านั้น ที่มีบริเวณการหมุนวน แต่มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเป็นลบเล็กน้อย โดยทั้งแบบ Power-law และ Hybrid ไม่พบบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 4.4 และ 4.5

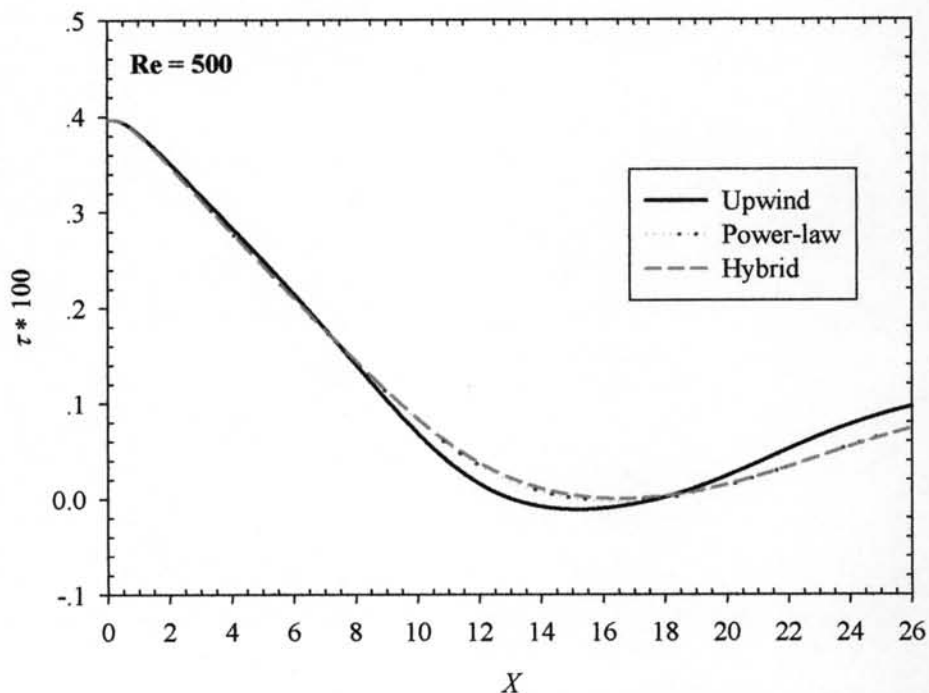
#### 4.1.3 ความเร็วตามแนวแกน (Axial velocity)

รูปที่ 4.6 แสดงรูปร่างความเร็วตามแนวแกนที่ตำแหน่ง  $X = 1.6, 4.0, 8.0$  และ 24 ตามลำดับที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ Re เท่ากับ 150 ซึ่ง Numerical scheme ทั้งสามแบบสามารถทำนายรูปร่างความเร็วของของไหลตามแนวแกนได้คล้ายคลึงกับค่าความเร็วตามแนวแกนจากผลการทดลองของ Westphal (Cited in Melaaen, 1990) โดยแบบ Power-law และ Hybrid มีรูปร่างลักษณะความเร็วตามแนวแกนเหมือนกัน โดยแตกต่างกับแบบ Upwind เพียงเล็กน้อย ยกเว้นที่ตำแหน่ง  $X = 8.0$  ค่าความเร็วตามแนวแกนในแบบ Power-law และ Hybrid แตกต่างกับแบบ Upwind มากที่สุด



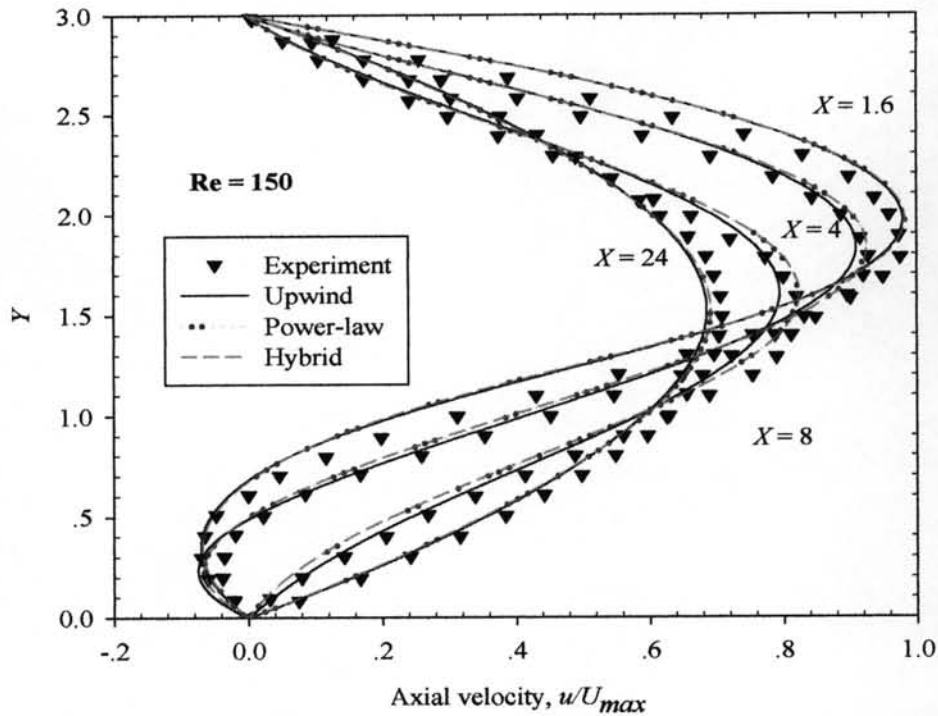
รูปที่ 4.4 ความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณขั้นบันไดของปัญหาแบบ Backward-facing

step,  $\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$  ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 500



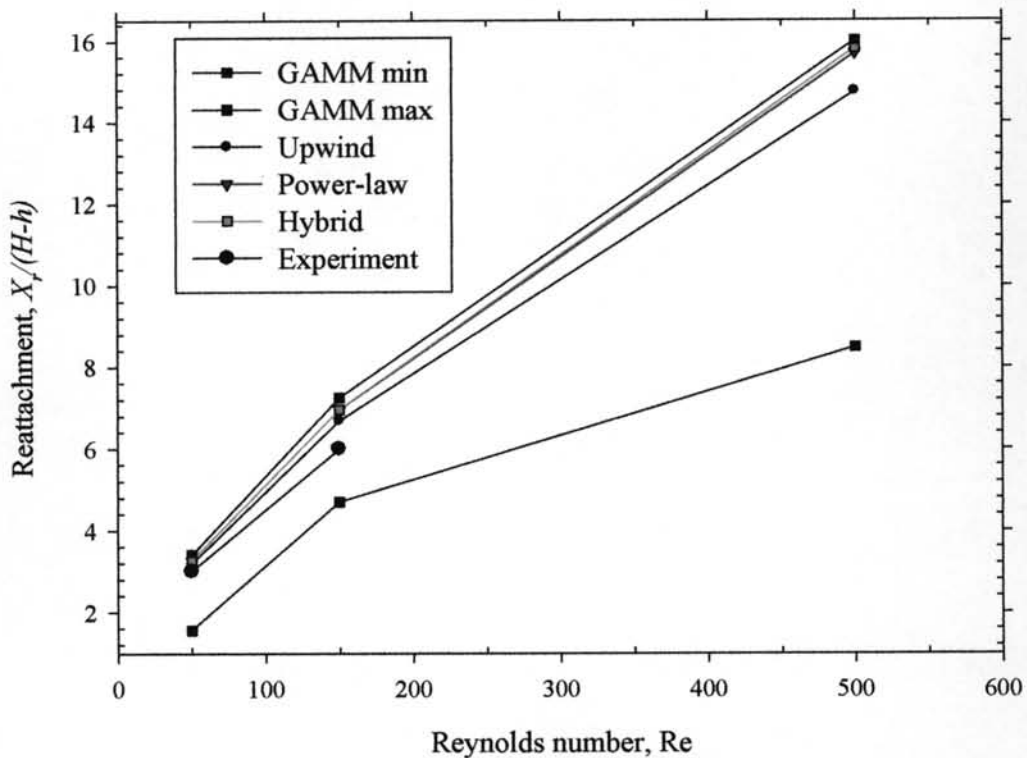
รูปที่ 4.5 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนของปัญหาแบบ Backward-facing step,

$\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$  ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 500



รูปที่ 4.6 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของปัญหาแบบ Backward-facing step ที่ ตำแหน่ง  $X = 1.6, 4.0, 8.0$  และ  $24$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ  $150$

เมื่อพิจารณาค่าความยาวบริเวณการหมุนวนดังแสดงในรูปที่ 4.7 ของ Numerical scheme ทั้งสามแบบกับผลการทดลองและผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ GAMM-workshop สำหรับ  $Re$  เท่ากับ  $50, 150$  และ  $500$  ซึ่งพบว่า Numerical scheme ทั้งสามแบบมีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนอยู่ในช่วงของ GAMM-workshop ทั้งหมด โดยเรียงจากมากไปน้อยได้เป็น Hybrid, Power-law, Upwind และผลการทดลอง ตามลำดับ ซึ่งค่าความยาวบริเวณการหมุนวนของแบบ Power-law และ Hybrid มีความใกล้เคียงกันมาก ส่วนแบบ Upwind มีค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุดที่  $Re$  เท่ากับ  $50$  และ  $150$  เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า Numerical scheme แบบ Upwind สามารถทำนายการไหลในปัญหาลักษณะ Backward-facing step ได้ดีกว่าทั้ง Power-law และ Hybrid ซึ่งจะพิจารณา Numerical scheme แบบ Upwind ในการวิเคราะห์พารามิเตอร์ต่างๆต่อไป

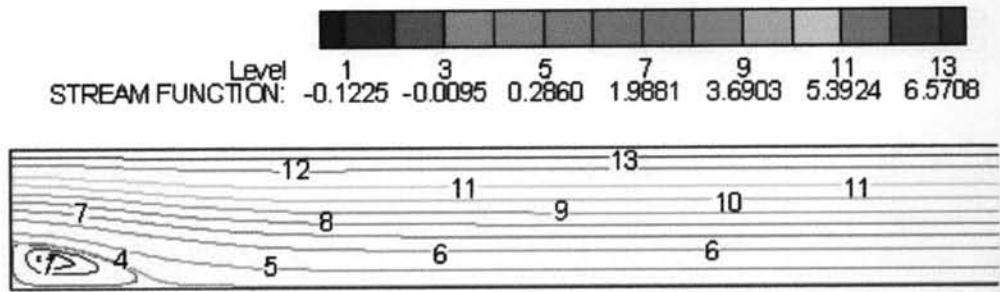


รูปที่ 4.7 ความยาวบริเวณการหมุนวน ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ 50, 150 และ 500

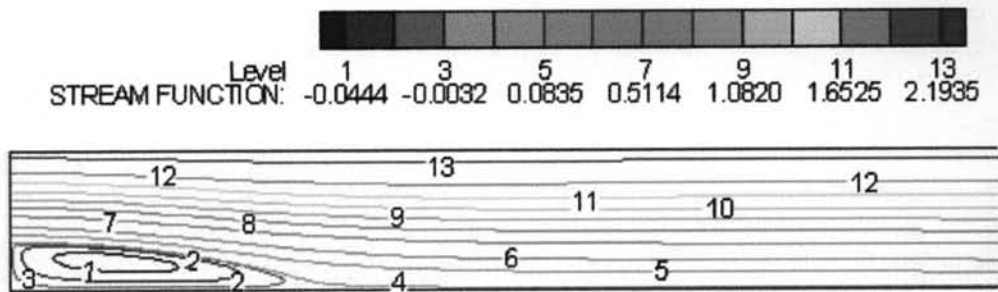
Streamline ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50 ดังแสดงในรูปที่ 4.8 พบบริเวณการหมุนวนเกิดขึ้นที่ผนังบริเวณชั้นบันได ซึ่งสอดคล้องกับค่าความเค้นเฉือนที่ผนังบริเวณชั้นบันได ดังแสดงในรูปที่ 4.2 และเมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นเป็น 150 ดังแสดงในรูปที่ 4.9 พบว่ามีบริเวณการหมุนวนเกิดขึ้นที่ผนังบริเวณชั้นบันไดเช่นกัน ซึ่งค่ามีความยาวบริเวณการหมุนวนมีแนวโน้มยาวมากขึ้น เมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์มากขึ้น

การกระจายของความดัน (Pressure contour)  $pRe/\rho U_{\max}^2$  ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 50 และ 150 ดังแสดงในรูปที่ 4.10 และ 4.11 พบว่าความดันหน้าตัดบริเวณผนังชั้นบันได มีค่าน้อยกว่าความดันที่บริเวณถัดไป ซึ่งทำให้เกิดการไหลย้อนกลับขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับบริเวณการหมุนวนที่เกิดขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.8 และ 4.9

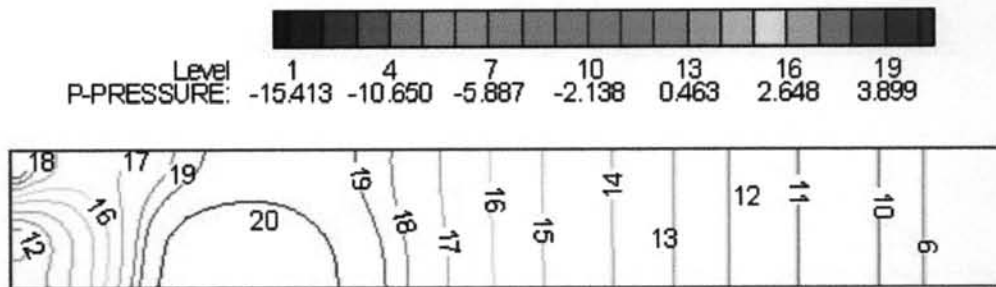




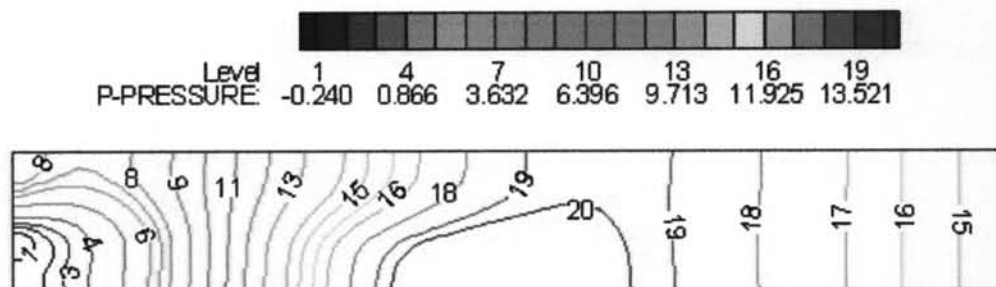
รูปที่ 4.8 Streamline  $\psi / (H - h)U_{\max}$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 50$  (Not to scale)



รูปที่ 4.9 Streamline  $\psi / (H - h)U_{\max}$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 150$  (Not to scale)



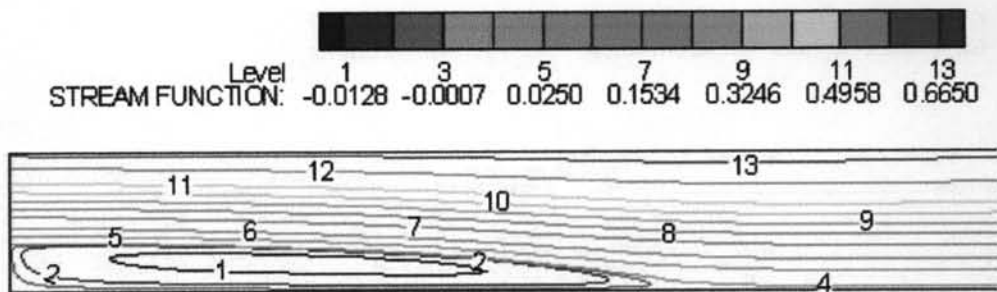
รูปที่ 4.10 การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p Re / \rho U_{\max}^2$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 50$  (Not to scale)



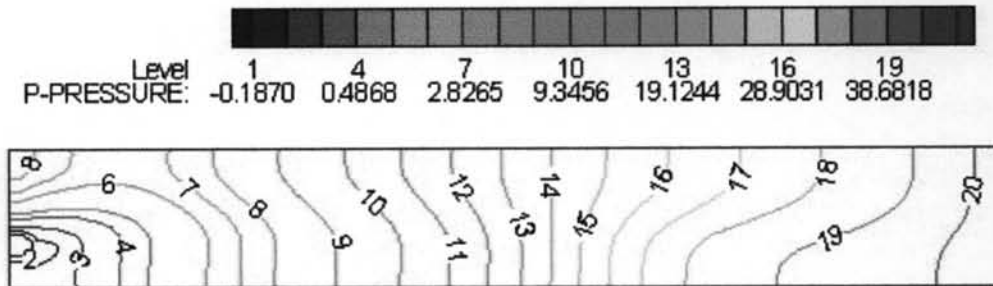
รูปที่ 4.11 การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p Re / \rho U_{\max}^2$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 150$  (Not to scale)

Streamline,  $\psi / (H - h)U_{\max}$  ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 500 สำหรับ Numerical scheme แบบ Upwind ดังแสดงในรูปที่ 4.12 พบว่าความยาวบริเวณการหมุนวนเพิ่มขึ้นจากที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50 และ 150 ตามลำดับ

การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p Re / \rho U_{\max}^2$ , แบบ Upwind ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 500 ผลการกระจายของความดันจะคล้ายคลึงกับที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 50 และ 150 คือที่บริเวณผนังชั้นบันไดมีค่าความดันน้อยกว่าบริเวณถัดไป จึงทำให้เกิดการไหลย้อนกลับของของไหล



รูปที่ 4.12 Streamline  $\psi / (H - h)U_{\max}$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 500$  (Not to scale)

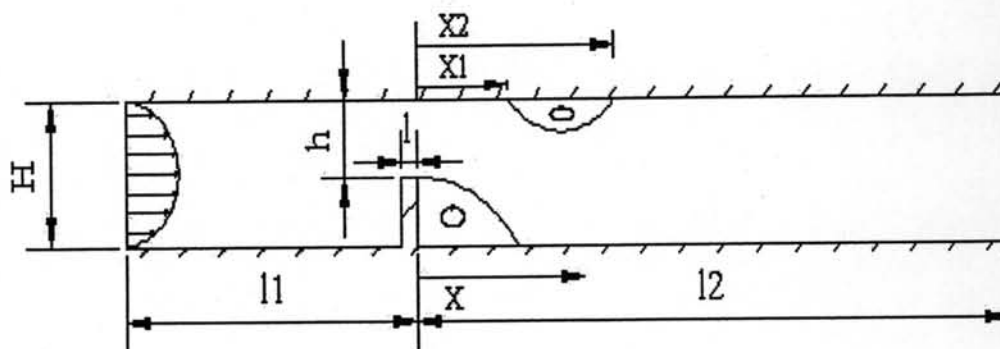


รูปที่ 4.13 การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p Re / \rho U_{\max}^2$  ของการไหลผ่าน Backward-facing step,  $Re = 500$  (Not to Scale)

การคำนวณเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Backward-facing step พบว่าบริเวณการหมุนวนจะเกิดขึ้นบริเวณผนังชั้นบันได และค่าความยาวของบริเวณการหมุนวนจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นในช่วงการไหลแบบราบเรียบ อีกทั้งเมื่อค่าความเค้นเฉือนที่บริเวณผนังมีค่าต่ำ หรือเกิดการไหลย้อนกลับของของไหลมาก พบว่าจะเกิดบริเวณการหมุนวนสั้นลงดังแสดงในรูปที่ 4.5 และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มซึ่งมี Numerical scheme แบบ Power-law และ Hybrid มีผลการคำนวณเชิงตัวเลขคล้ายคลึงกัน โดยแบบ Upwind ให้ผลการคำนวณเชิงตัวเลขใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าทั้งสองแบบ

## 4.2 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยว

ผลการทดลองและผลการคำนวณเชิงตัวเลขของปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยว ได้ทำการศึกษาการไหลผ่านช่องทางไหลที่มีสิ่งกีดขวางที่ผนังด้านล่างทั้งแบบบล็อก (Block) และรั้วบาง (Fence) ซึ่งมีรูปร่างปัญหา ดังแสดงในรูปที่ 4.14 และตารางที่ 4.2 แสดงลักษณะปัญหาของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยวซึ่งมีลักษณะเป็นบล็อก และรั้วบาง สำหรับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 144 และ 217.5 ตามลำดับ



รูปที่ 4.14 รูปแบบของปัญหาแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยว

รูปร่างความเร็วของของไหลบริเวณทางเข้าเป็นแบบ Fully-developed ที่ทางออก กำหนดเงื่อนไขขอบเป็นฟลักซ์เท่ากับศูนย์ และที่ผนังทั้งด้านบนและล่างมีความเร็วทั้งทิศทาง  $x$  และ  $y$  เป็นศูนย์

ตารางที่ 4.2 ลักษณะปัญหาของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางเดี่ยว

ลักษณะ (Geometry)	$H$ (mm)	$l$ (mm)	$h$ (mm)	$l/(H-h)$	$l_1/(H-h)$	$l_2/(H-h)$	$Re$
บล็อก (Block)	10	20	5	4	12	24	144
รั้วบาง (fence)	10	1	5	0.2	8.2	37.8	217.5

#### 4.2.1 ปัญหาการไหลผ่านบล็อก (Block)

การศึกษางานวิจัยของ Melaaen (1990) สำหรับปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านบล็อก โดยใช้ Numerical scheme สองแบบ คือ SOU และ POW ซึ่งเหมือนกับปัญหาการไหลผ่าน Backward-facing step โดยมีกริดขนาดต่างกัน สามขนาด คือ 72x36, 72x50 และ 72x60 ซึ่งเลือกใช้กริดขนาด 72x60 ในการแสดงผลของปัญหานี้ เมื่อพิจารณาบริเวณการหมุนวนที่บริเวณผนังด้านบนนั้น ผลจากการทดลองไม่พบการหมุนวนที่ผนังด้านบน ซึ่งแบบ POW พบการหมุนวนที่ผนังด้านบนเล็กน้อย แต่แบบ SOU มีผลคล้ายคลึงกับผลการทดลอง คือไม่พบบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบน

ค่าความยาวบริเวณการหมุนวนของ Melaaen ดังแสดงในตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบความยาวการหมุนวน  $X_r$  จากผลการทดลองของ Tropea (1985) และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Michelassi (Cited in Melaaen, 1990) และ Melaaen แม้ว่าค่าความยาวบริเวณการหมุนวนของแบบ SOU มีค่าสูงกว่าผลการทดลอง แต่มีค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่า แบบ POW ที่มีค่าต่ำกว่าผลการทดลอง

ตารางที่ 4.3 ความยาวบริเวณการหมุนวน (Reattachment length) ของการไหลผ่านบล็อก (Block)

โมเดลการคำนวณ	Reattachment, $X_r$
ผลการทดลองของ Tropea	7.1
Michelassi, 70x25	6.1
Melaaen, POW	6.2
Melaaen, SOU	7.9
Staggered, Upwind	7.49
Staggered, Power-law	7.84
Staggered, Hybrid	7.84

เมื่อพิจารณาความเร็วตามแนวแกน พบว่า Numerical scheme แบบ SOU มีค่าความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าแบบ POW ถึงแม้ว่าที่  $X = 8$  บริเวณผนังด้านล่างจะมีความเร็วตามแนวแกนแตกต่างกับผลการทดลองมากกว่าแบบ POW แต่ที่บริเวณผนังด้านบนยังคงให้ผลความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกับผลการทดลองเช่นเดิม ซึ่งสามารถสังเกต Numerical scheme แบบ SOU ได้ดังรูปที่ 4.17 ถึง 4.21 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า SOU ให้ผลการคำนวณเชิงตัวเลขได้ใกล้เคียงผลการทดลองมากกว่า POW ซึ่งการ

เปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลข จะทำการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ต่างๆกับ Numerical scheme แบบ SOU ต่อไป

ผลการศึกษาเชิงตัวเลขของพารามิเตอร์ต่างๆในปัญหาการไหลผ่านบล็อก (Block) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 144 ซึ่งใช้กริดเยื้องขนาด  $102 \times 102$  ด้วย Numerical scheme สามแบบ คือ Upwind, Power-law และ Hybrid

#### 4.2.1.1 ความยาวบริเวณการหมุนวน (Reattachment length)

Numerical scheme แบบ Upwind มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนใกล้เคียงกับผลการทดลองของ Tropea มากกว่าทั้งแบบ Power-law และ Hybrid ดังแสดงในตารางที่ 4.3 โดย Power-law และ Hybrid มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนเท่ากัน

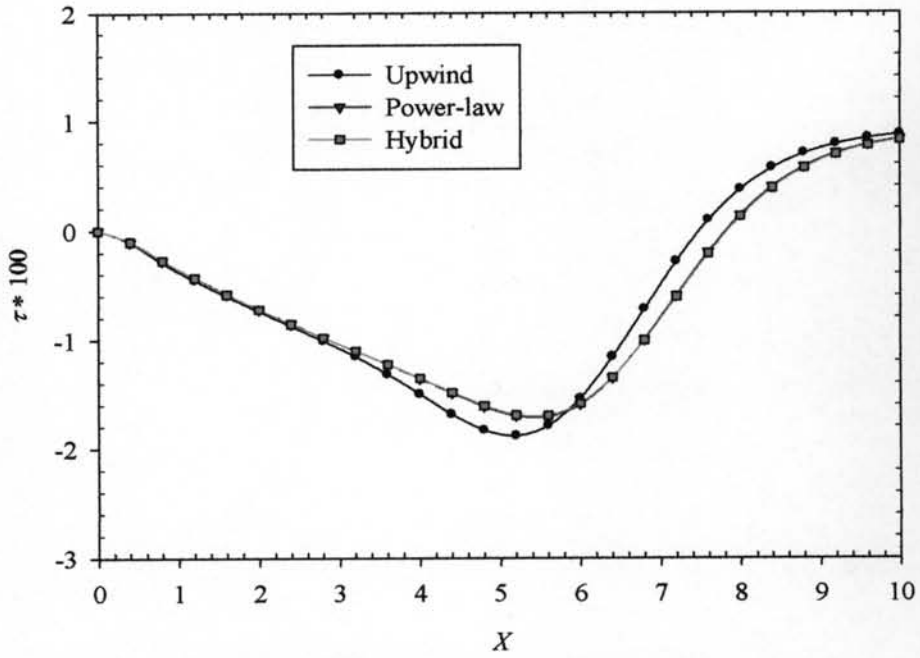
#### 4.2.1.2 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนและล่าง

เมื่อเปรียบเทียบความเค้นเฉือนที่ผนังด้านล่างของ Numerical scheme ทั้งสามแบบ พบว่า Upwind มีค่าความเค้นเฉือนเป็นลบมากที่สุด ในขณะที่ Power-law และ Hybrid มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 4.15 หากสังเกตความยาวแกน  $X$  ในช่วงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเปลี่ยนจากลบเป็นบวก ซึ่งก็คือค่าความยาวบริเวณการหมุนวน พบว่า Upwind มีความยาวใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าแบบอื่น

ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 4.16 ไม่พบค่าความเค้นเฉือนที่ผนังเป็นลบ หรือของไหลไม่เกิดการหมุนวนกลับ ซึ่ง Numerical scheme ทั้งสามแบบ ให้ผลสอดคล้องกับผลการทดลอง ก็คือไม่มีการหมุนวนบริเวณผนังด้านบน นอกจากนั้น Numerical scheme ทั้งสามแบบมีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนใกล้เคียงกัน อีกด้วย

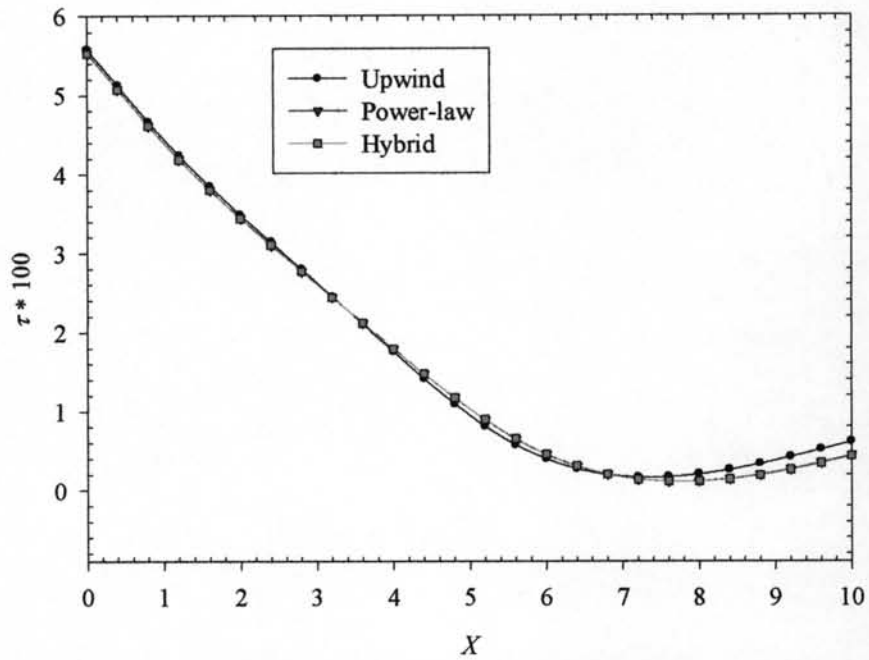
#### 4.2.1.3 ความเร็วตามแนวแกน (Axial velocity)

ผลการเปรียบเทียบรูปร่างความเร็วตามแนวแกนของปัญหาการไหลผ่านบล็อก ที่ตำแหน่ง  $X$  เท่ากับ 1.6, 4.0, 6.0, 8.0 และ 10 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.17 ถึง 4.21 กับผลการทดลองและผลการคำนวณเชิงตัวเลขอื่น พบว่า Numerical scheme ทั้งสามแบบมีความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกัน โดย Upwind มีความเร็วช่วงกลางของช่องทางไหลต่ำกว่าอีกสองแบบเล็กน้อย และทั้งสามแบบมีความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกับผลการทดลอง โดยมีแนวโน้มในทิศทางเดียวกันกับผลการทดลองในทุกตำแหน่งของการเปรียบเทียบ ซึ่งตำแหน่ง  $X$  เท่ากับ 8.0 ไม่พบการหมุนวนของความเร็ว ซึ่งสอดคล้องกับความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 4.20



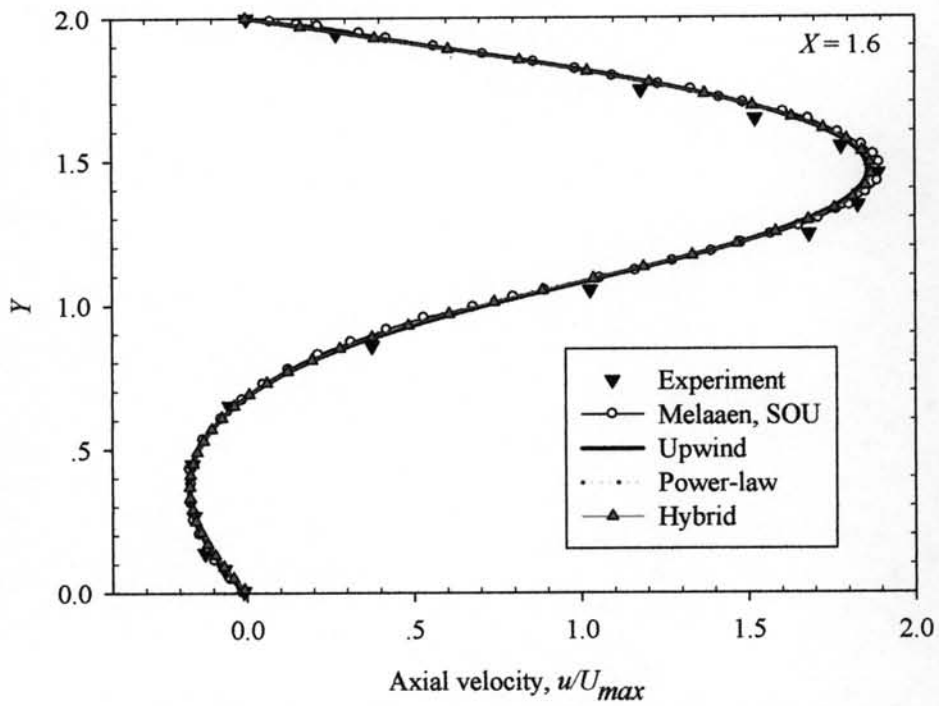
รูปที่ 4.15 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านล่างของการไหลผ่านบล็อก (Block),

$$\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 144}$$

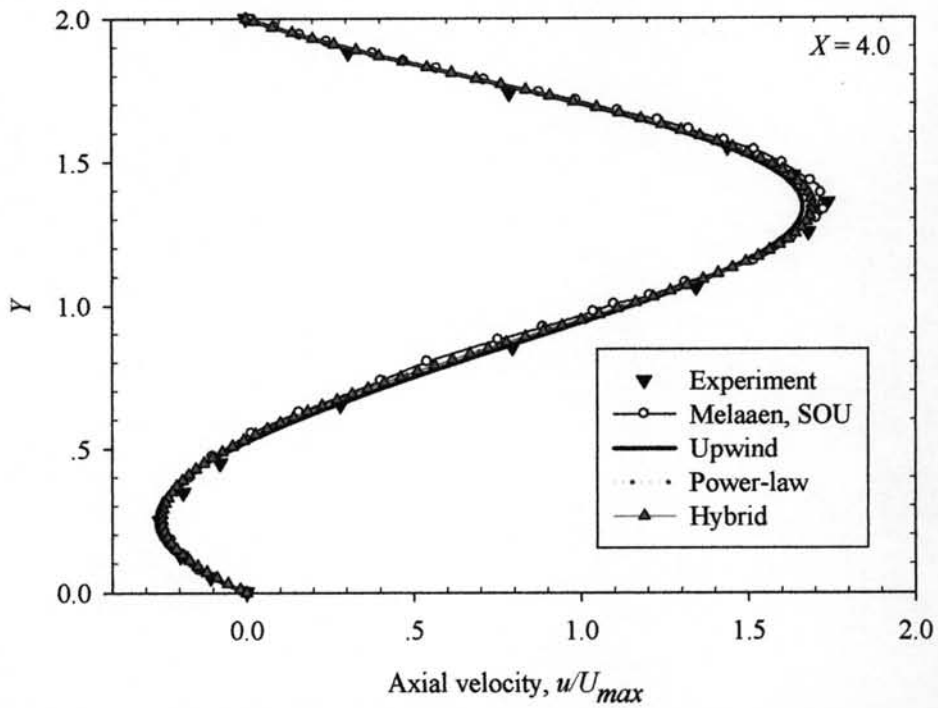


รูปที่ 4.16 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนของการไหลผ่านบล็อก (Block),

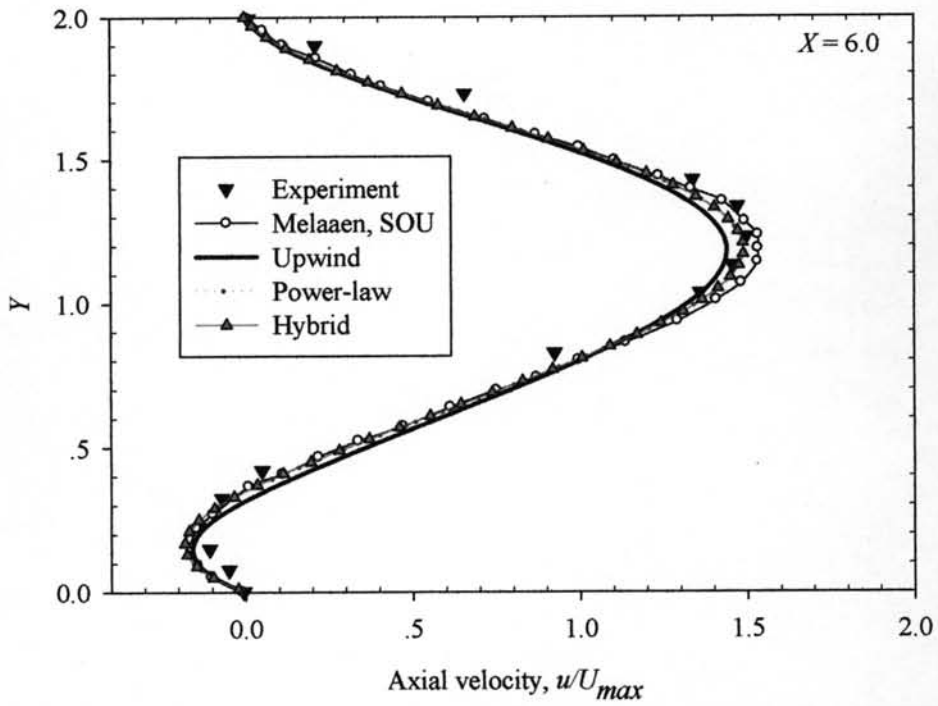
$$\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 144}$$



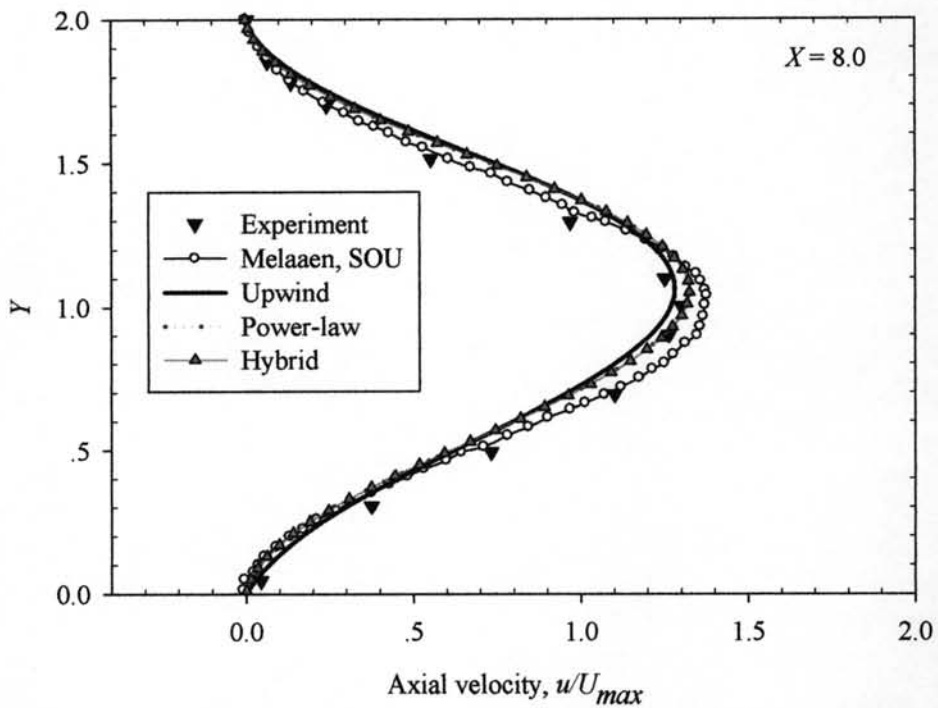
รูปที่ 4.17 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านบล็อกรูปสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง  $X = 1.6$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 144



รูปที่ 4.18 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านบล็อกรูปสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง  $x = 4.0$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 144

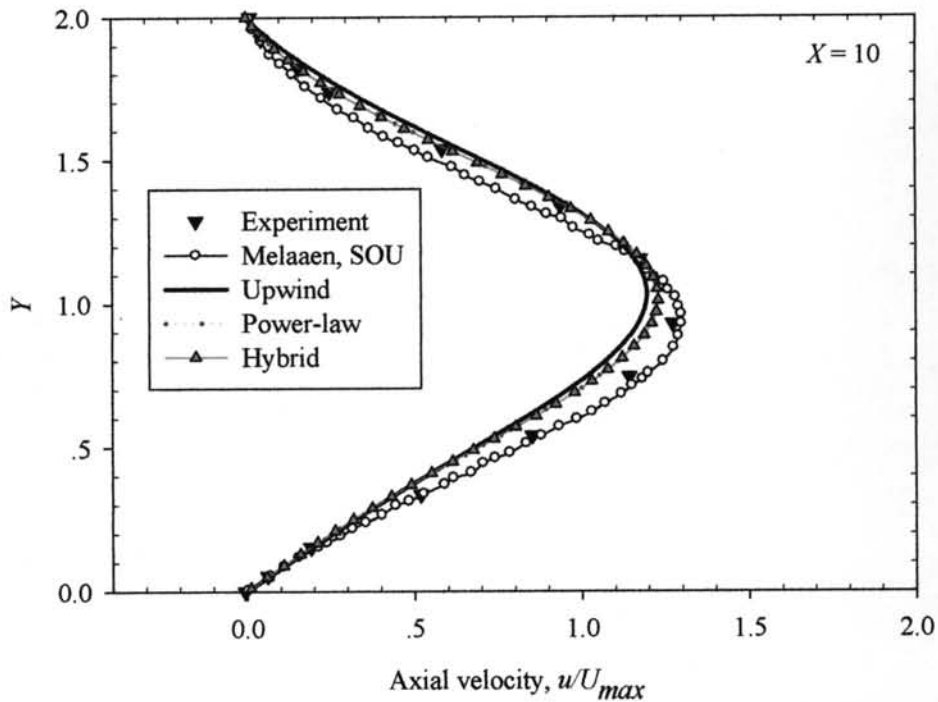


รูปที่ 4.19 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านบล็อกที่ตำแหน่ง  $X = 6.0$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 144



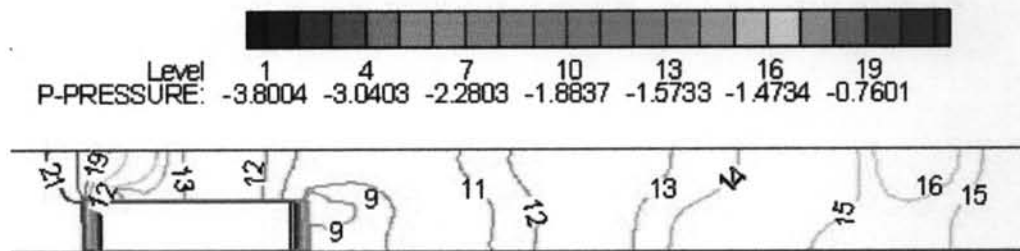
รูปที่ 4.20 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านบล็อกที่ตำแหน่ง  $X = 8.0$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 144





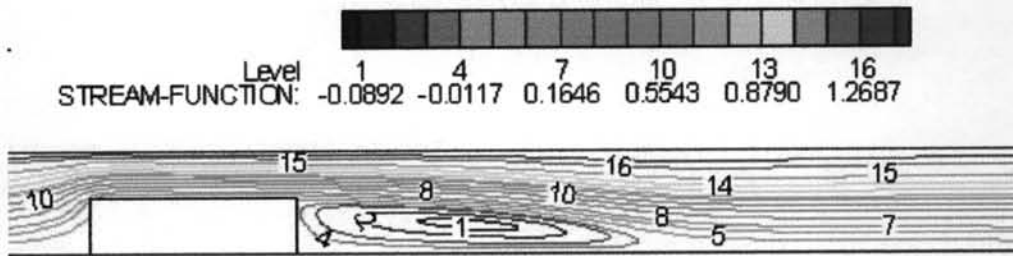
รูปที่ 4.21 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านบล็อกที่ตำแหน่ง  $X=10$  ที่ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 144

ผลการกระจายความดัน ด้วย Numerical scheme แบบ Upwind ดังแสดงในรูปที่ 4.22 จะเห็นได้ว่าเมื่อความดันลดลง ความเร็วจะเพิ่มขึ้น และที่บริเวณมุมด้านขวาของบล็อกเกิดความดันลดลงอย่างมาก เนื่องจากบริเวณนั้นมีความเร็วของของไหล ส่วนบริเวณหนึ่งด้านล่างใกล้กับบล็อกนั้น พบว่าค่าความดันน้อยกว่าความดันบริเวณถัดไป ทำให้เกิดการไหลย้อนกลับของของไหล ซึ่งผลการกระจายความดันให้ผลสอดคล้องกับเวกเตอร์ความเร็ว (Velocity vector) ดังแสดงในรูปที่ 4.24

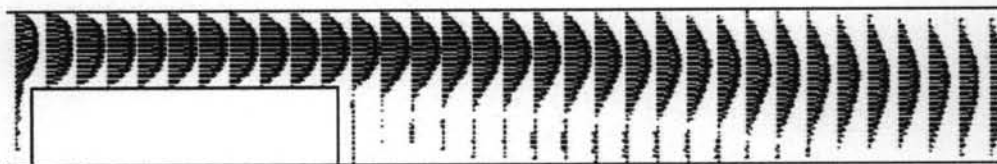


รูปที่ 4.22 การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p / \rho U_{max}^2$  ของการไหลผ่านบล็อก (Block),  $Re = 144$  (Not to scale)

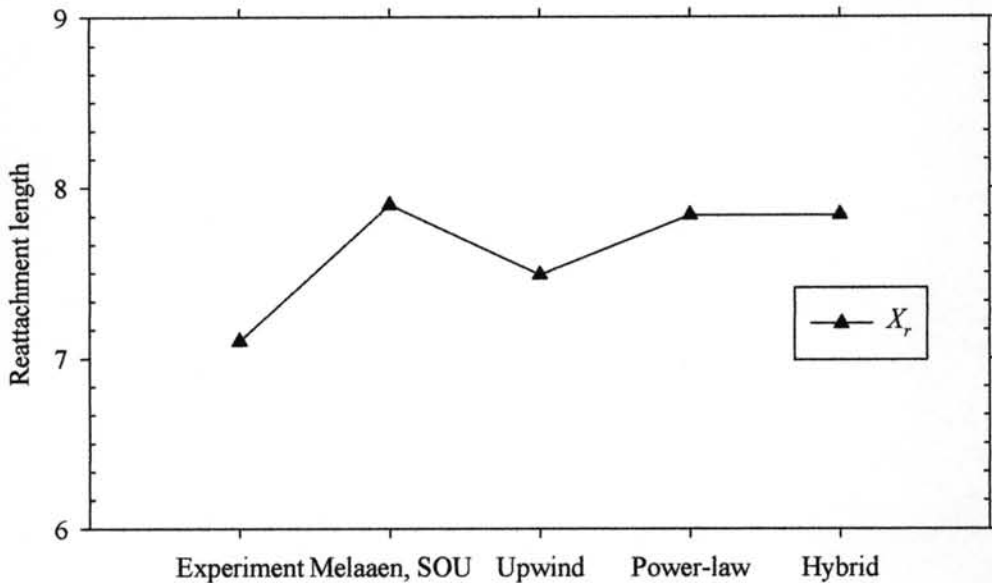
เมื่อพิจารณา Streamline พบว่ามีการหมุนวนของการไหลที่ผนังด้านล่าง ซึ่งสอดคล้องกับความเค้นเฉือนที่ผนัง และเวกเตอร์ความเร็ว โดยไม่พบบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 4.23 และ 4.24



รูปที่ 4.23 Streamline  $\psi / (H - h)U_{max}$  ของการไหลผ่านบล็อก (Block),  $Re = 144$  (Not to scale)



รูปที่ 4.24 เวกเตอร์ความเร็ว (Velocity vector) ของการไหลผ่านบล็อก (Block) แบบ Upwind สำหรับ  $Re = 144$  (Not to scale)



รูปที่ 4.25 ความยาวบริเวณการหมุนวนของปัญหาการไหลผ่านบล็อก

เมื่อพิจารณาความยาวบริเวณการหมุนวนของ Numerical scheme ทั้งสามแบบกับผลการทดลองของ Tropea และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Melaaen แบบ SOU ดังแสดงในรูปที่ 4.25 พบว่าแบบ Upwind สามารถทำนายผลความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านล่างของปัญหาการไหลผ่านบล็อกได้ใกล้เคียงผลการทดลองมากที่สุด แม้ว่าค่าความเร็วตามแนวแกนบริเวณช่วงกลางของช่องทางไหลจะมีค่าน้อยกว่าผลการทดลองก็ตาม แต่ค่าความเร็วบริเวณผนังด้านบนและด้านล่างก็มีความใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าทั้งแบบ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า Upwind สามารถทำนายพารามิเตอร์ต่างๆในปัญหาการไหลผ่านบล็อก ได้ดีที่สุดใน Numerical scheme ทั้งสามแบบ

#### 4.2.2 ปัญหาการไหลผ่านรั้วบาง (Fence)

งานวิจัยของ Melaaen (1990) ในปัญหาการไหลผ่านรั้วบาง ใช้กริดขนาด  $72 \times 50$  ในการแสดงผล ซึ่งในปัญหานี้พบบริเวณการหมุนวนที่ผนังทั้งด้านบนและด้านล่าง โดย  $X_r$  คือ ความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านล่าง,  $X_l$  คือ ความยาวบริเวณการแยกตัวที่ผนังด้านบน และ  $X_2$  คือ ความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบน ซึ่งพบว่าค่าทั้งสามข้างต้นของ Numerical scheme แบบ SOU มีความใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าแบบ POW โดย SOU มีความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านล่างสั้นกว่าผลการทดลอง และที่ผนังด้านบนมีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนกว้างกว่าผลการทดลอง ดังแสดงในตารางที่ 4.4 ส่วนความเร็วตามแนวแกนของแบบ SOU มีความเร็วใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่า POW แต่ที่  $X$  เท่ากับ 8 มีความแตกต่างกับผลการทดลองเป็นอย่างมาก เนื่องมาจากผลการคำนวณค่าความยาวบริเวณการหมุนวนที่บริเวณผนังด้านบนมีค่ามากกว่า และที่บริเวณด้านล่างมีค่าน้อยกว่าผลการทดลองนั่นเอง ซึ่งสามารถสังเกตผลของ Numerical scheme แบบ SOU ได้ดังรูปที่ 4.28 ดังนั้นในการเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขอื่น จึงนำ SOU ในการเปรียบเทียบต่อไป

ตารางที่ 4.4 ความยาวการหมุนวนของการไหลผ่านรั้วบาง

โมเดลการคำนวณ	$X_r$	$X_l$	$X_2$
ผลการทดลองของCarvalho	10.5	~10.0	~15.4
Melaaen, POW	7.3	5.5	9.9
Melaaen, SOU	8.6	6.8	16.2
Staggered, Upwind	8.95	7.33	11.17
Staggered, Power-law	8.69	6.88	12.27
Staggered, Hybrid	8.59	6.76	12.41

ผลการศึกษาเชิงตัวเลขของพารามิเตอร์ต่างๆในปัญหาการไหลผ่านรั้วบาง (Fence) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์  $Re$  เท่ากับ 217.5 ซึ่งใช้กริดเยื้องขนาด  $102 \times 102$  ด้วย Numerical scheme สามแบบ คือ Upwind, Power-law และ Hybrid ดังนี้

#### 4.2.2.1 ความยาวบริเวณการหมุนวน (Reattachment length)

บริเวณผนังด้านล่าง Upwind มีค่าความยาวบริเวณการหมุนวนใกล้เคียงกับการทดลองของ Carvalho (1987) มากที่สุดทั้งความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านล่าง  $X_1$  และความยาวบริเวณการแยกตัวที่ผนังด้านบน  $X_2$  ส่วนแบบ Power-law และ Hybrid มีความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบน  $X_2$  ใกล้เคียงกับการทดลองมากกว่าแบบ Upwind และความยาวบริเวณการหมุนวนทั้งผนังด้านบนและล่างของ Numerical scheme ทั้งสามแบบมีค่าน้อยกว่าผลการทดลอง ดังแสดงในตารางที่ 4.4

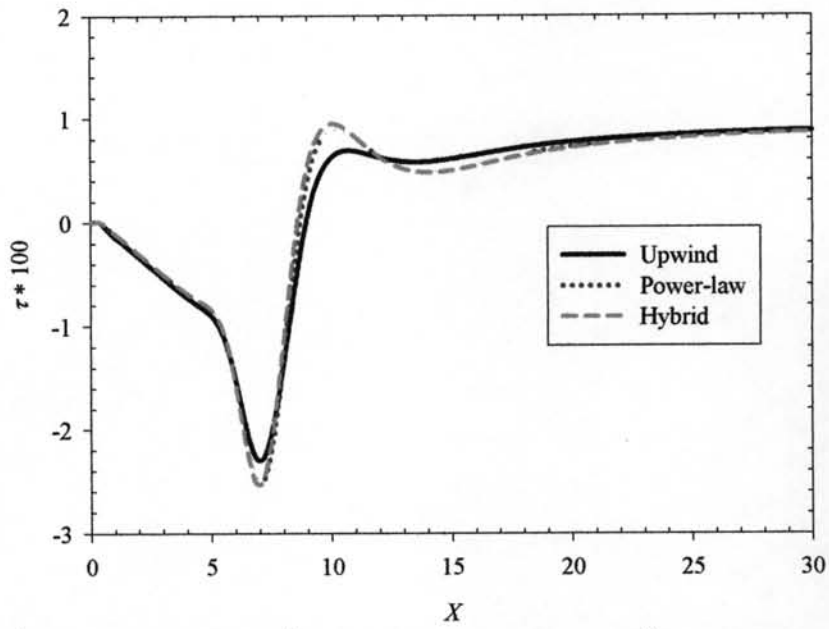
#### 4.2.2.2 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนและล่าง

Power-law และ Hybrid มีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังด้านล่างเป็นลบมากกว่า Upwind และมีความยาวช่วงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังจากบวกเป็นลบสั้นกว่า Upwind ซึ่งสอดคล้องกับความยาวบริเวณการหมุนวนข้างต้น ดังแสดงในรูปที่ 4.26

ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบน พบว่า Power-law และ Hybrid มีความยาวบริเวณการหมุนวนมากกว่า และค่าความเค้นเฉือนต่ำกว่าแบบ Upwind ดังแสดงในรูปที่ 4.27

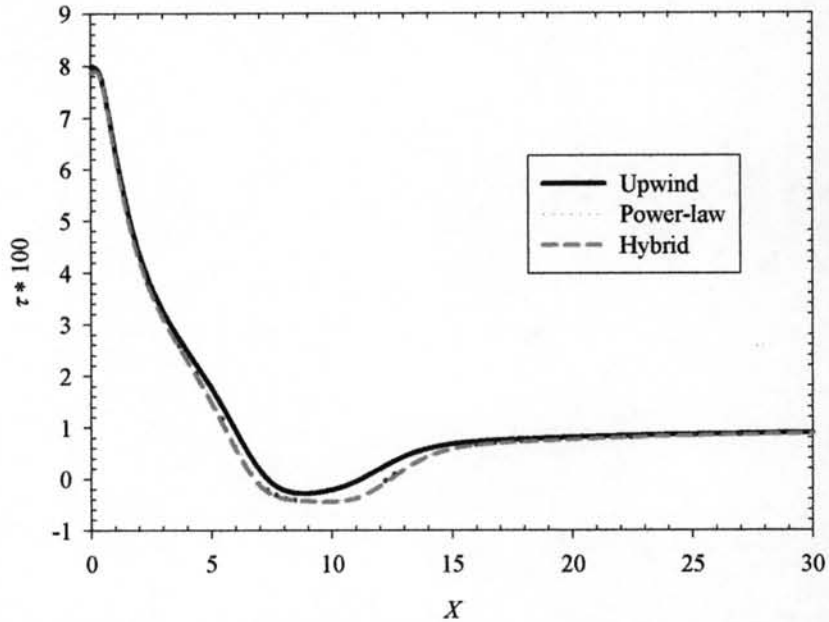
#### 4.2.2.3 ความเร็วตามแนวแกน (Axial velocity)

ผลการเปรียบเทียบรูปร่างความเร็วตามแนวแกนของปัญหาการไหลผ่านรั้วบางที่ตำแหน่ง  $X$  เท่ากับ 2.4, 4.4, 8.0, 12 และ 18 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.28 กับผลการทดลองและผลการคำนวณเชิงตัวเลขอื่น พบว่า Numerical scheme ทั้งสามแบบมีความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกัน โดยจะเห็นได้ว่าที่ตำแหน่ง  $X$  เท่ากับ 8.0 และ 12 ที่บริเวณผนังด้านบนและล่าง มีความเร็วตามแนวแกนความแตกต่างกับผลการทดลองเป็นอย่างมาก เนื่องจากผลการคำนวณค่าความยาวบริเวณการหมุนวนที่บริเวณผนังด้านล่างมีค่าน้อยกว่าผลการทดลอง และที่บริเวณผนังด้านบนเกิดบริเวณการหมุนวนขึ้นใกล้สิ่งกีดขวางเคลื่อนที่มากกว่าผลการทดลอง ดังนั้นจึงมีความแตกต่างของความเร็วตามแนวแกนที่บริเวณผนังในตำแหน่งนี้นั่นเอง



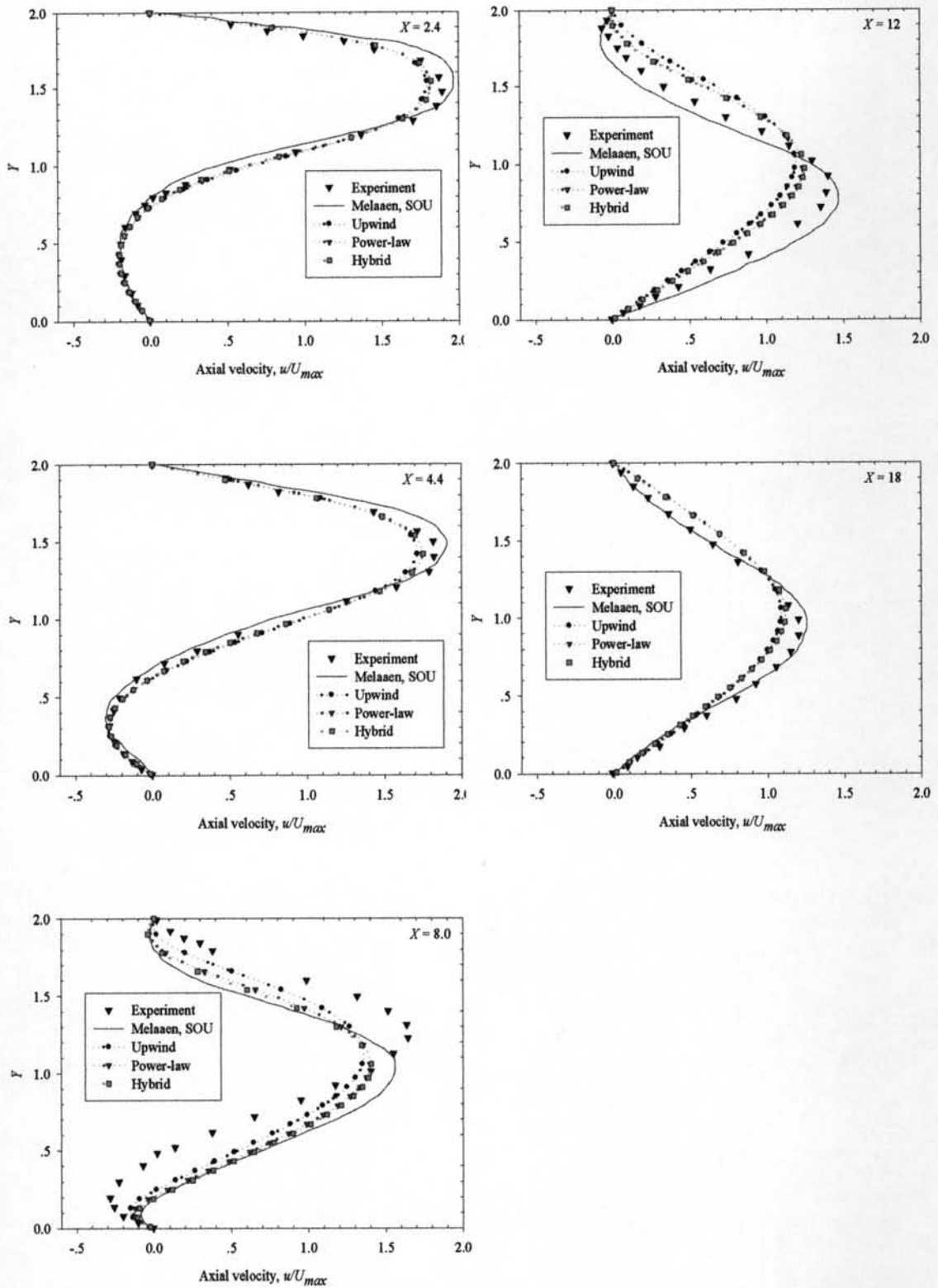
รูปที่ 4.26 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านล่างของการไหลผ่านรั้วบาง (Fence),

$$\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 217.5}$$



รูปที่ 4.27 ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนของการไหลผ่านรั้วบาง (Fence),

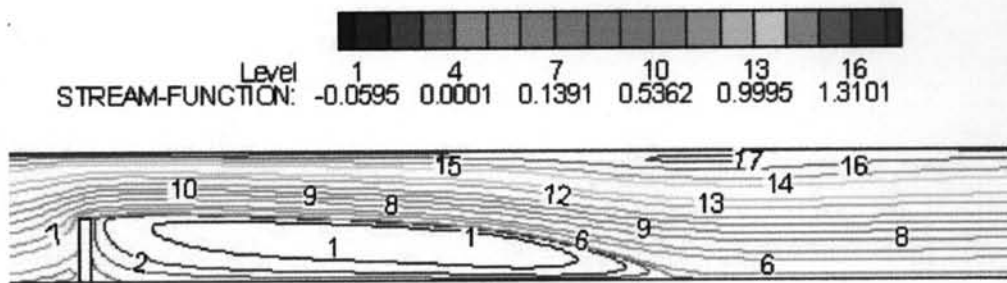
$$\tau = (H - h) / \text{Re} U_{\max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์, Re เท่ากับ 217.5}$$



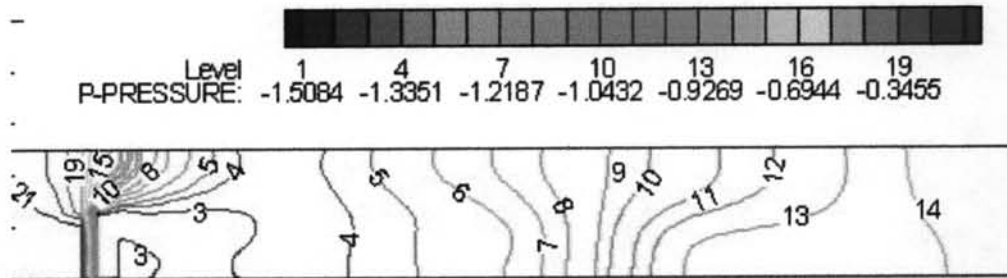
รูปที่ 4.28 รูปร่างความเร็วตามแนวแกนของการไหลผ่านรั้วบาง ที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์,  $Re$  เท่ากับ 217.5

Streamline  $\psi / (H-h)U_{\max}$  ของการไหลผ่านรั้วบาง (Fence) ด้วย Numerical scheme แบบ Upwind ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ Re เท่ากับ 217.5 ดังแสดงในรูปที่ 4.29 พบว่ามีบริเวณการหมุนวนสอดคล้องกับผลการทดลอง คือ เกิดบริเวณการหมุนวนที่บริเวณผนังด้านล่างใกล้กับรั้วบาง และที่บริเวณผนังด้านบนเล็กน้อย

เมื่อพิจารณาการกระจายความดัน (Pressure contour) ของการไหลผ่านรั้วบาง (Fence) ดังแสดงในรูปที่ 4.30 แบบ Upwind ที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ Re เท่ากับ 217.5 จะเห็นได้ว่าความดันหน้าตัดบริเวณชั้นบนใต้ใกล้รั้วบาง มีค่าความดันน้อยกว่าความดันความดันที่บริเวณถัดไป จึงทำให้เกิดการไหลย้อนกลับของของไหล ซึ่งสอดคล้องกับรูปที่ 4.26 ที่แสดง ความเค้นเฉือนที่ผนังด้านล่าง



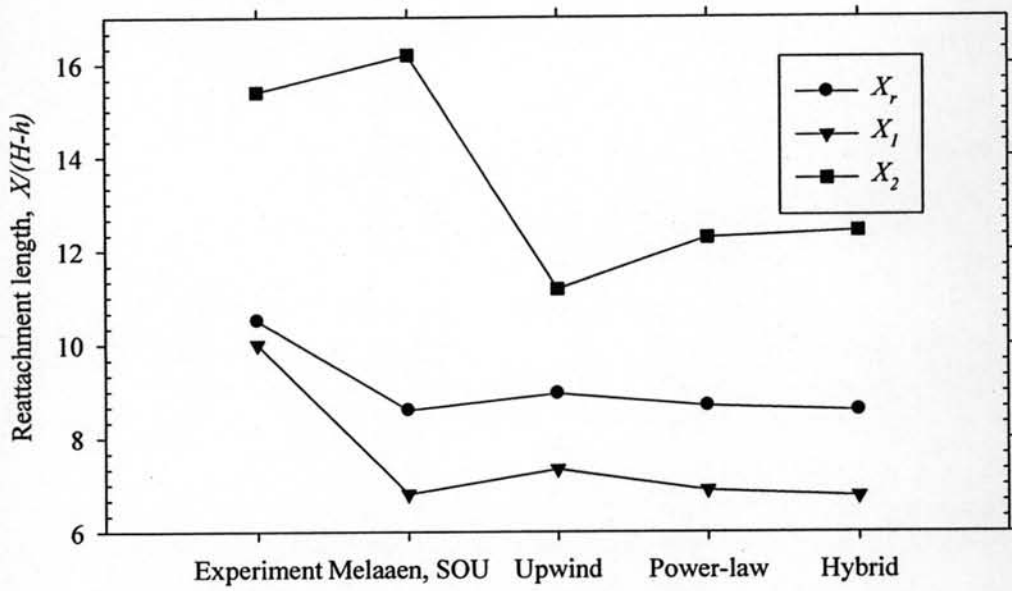
รูปที่ 4.29 Streamline  $\psi / (H-h)U_{\max}$  ของการไหลผ่านรั้วบาง (Fence),  
Re = 217.5 (Not to scale)



รูปที่ 4.30 การกระจายความดัน (Pressure contour)  $p / \rho U_{\max}^2$  ของการไหลผ่าน  
รั้วบาง (Fence), Re = 217.5 (Not to scale)

เมื่อพิจารณาความยาวบริเวณการหมุนวนของ Numerical scheme ทั้งสามแบบกับผลการทดลองของ Carvalho และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Melaaen แบบ SOU ดังแสดงในรูปที่ 4.31 พบว่าแบบ Upwind สามารถทำนายผลความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านล่างของปัญหาการไหลผ่านรั้วบางและความยาวบริเวณการแยกตัวที่ผนังด้านบนได้ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุด ถึงแม้ว่าความยาวบริเวณการหมุนวนที่ผนังด้านบนจะมีความแตกต่างมากกว่า Power-law และ Hybrid แต่ค่าความเร็วตามแนวแกนก็ให้ผลที่น่าพอใจ

ดังแสดงในรูปที่ 4.28 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า Upwind สามารถทำนายพารามิเตอร์ต่างๆในปัญหาการไหลผ่านรั้วบางได้ดีกว่าแบบ Power-law และ Hybrid



รูปที่ 4.31 ความยาวบริเวณการหมุนวนของปัญหาการไหลผ่านรั้วบาง