

การประยุกต์ของแอลทีดีอาร์เอ็มในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการไอโตหนึ่งมิติ



นางสาวพิริยา ปรงเลิศบัวทอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2556

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR) are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

APPLICATION OF THE LTDRM IN PARAMETER ESTIMATION OF ONE-DIMENSIONAL  
ITÔ PROCESS



Miss Piriya Prunglerdbuathong

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2013

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประยุกต์ของแอลทีดีอาร์เอ็มในการประมาณ
	ค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการอิโตหนึ่งมิติ
โดย	นางสาวพิริยา ประงเลิศบัวทอง
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนห์ รุจิวรรณ

---

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง  
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบริหารธุรกิจ

.....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ  
(อาจารย์ ดร.กิตติพัฒน์ ว่อง)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนห์ รุจิวรรณ)

.....กรรมการ  
(อาจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มนตรี มาลีวงศ์)

พริยา ปรงเลิศบัวทอง : การประยุกต์ของแอลทีดีอาร์เอ็มในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการไอโตนึงมิติ. (APPLICATION OF THE LTDRM IN PARAMETER ESTIMATION OF ONE-DIMENSIONAL ITO PROCESS) อ.ที่ปริภาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร.คำรณ เมฆฉาย, อ.ที่ปริภาวิทยานิพนธ์ร่วม: ผศ. ดร.เสนห์ รุจิวรรณ, 43 หน้า.

กระบวนการไอโตเป็นกระบวนการที่นิยมนำมาใช้เป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในหลายด้าน เพื่อที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าของกระบวนการไอโตตามวิธี maximum likelihood นั้นจำเป็นต้องทราบค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการไอโต โดยแท้จริงแล้วฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการไอโตเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย Fokker-Planck ที่มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย (Dirac delta function) ในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการเชิงตัวเลข คือเทคนิคแอลทีดีอาร์เอ็มเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย Fokker-Planck หนึ่งมิติดังกล่าว จุดเด่นของเทคนิคนี้คือการแปลงฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยไปยังปริภูมิลาปลาซแล้วใช้เทคนิคดีอาร์เอ็มเพื่อหาผลเฉลยของสมการที่เป็นผลการแปลงลาปลาซโดยไม่มีการประมาณค่าฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย จากนั้นใช้วิธีการทางตัวเลขในการแปลงลาปลาซผกผัน คือ Stehfest's algorithm แปลงค่าผลเฉลยที่ได้กลับไปเป็นค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการไอโต จากการทดสอบกับตัวแบบ OU และ CIR โดยการเปรียบเทียบกับค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่แท้จริง ผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่า ผลที่ได้จากวิธี LTDRM ให้ค่าประมาณของค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่มีความแม่นยำมากและสามารถใช้ค่าประมาณดังกล่าวไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ชื่อว่า maximum likelihood ในกรณีที่ทราบค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่แท้จริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ลายมือชื่อ อ.ที่ปริภาวิทยานิพนธ์หลัก .....

ปีการศึกษา 2556

ลายมือชื่อ อ.ที่ปริภาวิทยานิพนธ์ร่วม .....

# # 5472056823 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: ITÔ PROCESS / FOKKER-PLANCK EQUATION / TRANSITIONAL PROBABILITY DENSITY FUNCTION / LTDRM / MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE

PIRIYA PRUNGLERDBUATHONG: APPLICATION OF THE LTDRM IN PARAMETER ESTIMATION OF ONE-DIMENSIONAL ITÔ PROCESS. ADVISOR: ASST. PROF. KHAMRON MEKCHAY, Ph.D.,ASST. PROF. DR. SANAE RUJIVAN, 43 pp.

Itô processes are processes commonly used as a mathematical model in many fields. In order to estimate the unknown parameters of an Itô process based on the maximum likelihood method, the transitional probability density function (PDF) of the Itô process is needed. In fact, the transitional PDF is the solution of a Fokker-Planck equation subject to an initial condition in which the transitional PDF is set to be coincided with the Dirac delta function at the initial time. In this research, we applied the numerical method called the Laplace transform dual reciprocity method (LTDRM) to approximate the solution of the Fokker-Planck equations, corresponding to a one-dimensional Itô process. The key idea of the LTDRM for solving this type of problems is to transform the Dirac delta function into the Laplace space and then use the dual reciprocity method (DRM) to solve the transformed equation without approximating the Dirac delta function. The Stehfest's algorithm is used to convert the solutions back into the transitional PDF. We tested and ran experiments on the OU and CIR models by comparing with exact transitional PDF. The tests show that our results using LTDRM give a very accurate approximation and can be used in the maximum likelihood estimation (MLE) when the exact transitional PDF is not known.



Department: Mathematics and Computer  
Science

Field of Study: Mathematics

Academic Year: 2013

Student's Signature .....

Advisor's Signature .....

Co-Advisor's Signature .....

## กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ผศ. ดร.คำรณ เมฆฉาย และอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผศ. ดร.เสนห์ รุจิวรรณ ที่ได้เสียสละเวลาและช่วยเหลือในการให้คำแนะนำ คำอธิบายและข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จ ลุล่วงไปได้ด้วยดี และขอบคุณคณาจารย์ทุกท่านที่อบรมสั่งสอนและให้ความรู้แก่ข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาการศึกษา

ข้าพเจ้าขอขอบคุณคณะกรรมการสอบ อ. ดร.กิตติพัฒน์ วอง อ. ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ และ ผศ. ดร.มนตรี มาลีวงศ์ ที่ให้คำแนะนำ ข้อเสนอแนะ ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ข้าพเจ้าขอขอบคุณโครงการ พสวท. ที่สนับสนุนเงินทุนในการเรียนระดับปริญญาโทและจัดทำวิทยานิพนธ์

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณเพื่อนๆ และครอบครัวสำหรับกำลังใจที่ดีตลอดการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

## สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ซ
สารบัญรูป.....	ฅ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
บทที่ 2 ระเบียบวิธีการ.....	4
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่มีสัมประสิทธิ์การแพร่เท่ากับหนึ่ง.....	4
2.2 Laplace Transform Dual Reciprocity Method (LTDRM).....	6
บทที่ 3 การทดสอบและการประมาณค่าพารามิเตอร์.....	18
3.1 ตัวแบบ Ornstein-Uhlenbeck (OU).....	18
3.2 ตัวแบบ Cox, Ingersoll and Ross (CIR).....	23
3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์.....	28
3.3.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ 1 ตัว.....	28
3.3.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว.....	29
บทที่ 4 บทสรุปและข้อเสนอแนะ.....	31
รายการอ้างอิง.....	33
ภาคผนวก.....	34
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	43

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 1 แสดงค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้จากวิธี MLE ทำการทดลอง 10 ครั้ง โดย ที่ $n=60, X_k=0.5, t=1/12$ .....	29
ตารางที่ 2 แสดงค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้จากวิธี MLE ทำการทดลอง 3 ครั้ง โดยที่ $n=60, X_k=0.6, t=1/12$ .....	29



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY



## สารบัญญรูป

หน้า

รูปที่ 1 รูปประกอบการอธิบายการแบ่งช่วงย่อยของช่วง $[a,b]$ .....	8
รูปที่ 2 แผนภาพแสดงวิธีการหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ $f_Y$ .....	16
รูปที่ 3 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ $f_Y^{DRM}$ เปรียบเทียบกับค่าจริง $f_Y$ ของตัวแบบ OU ณ. $t=0.05,0.15,0.25,0.35,0.45$ บนช่วง $[-1.3,1]$ , $L+2=41$ สำหรับ $\theta_1^{OU}=(\alpha,\beta,\sigma)=(0.5,0.9,0.6)$ , และ $X_k=-0.5$ .....	19
รูปที่ 4 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM ณ. $t=0.15,0.25,0.35$ ตามลำดับ สำหรับ $\theta_1^{OU}=(\alpha,\beta,\sigma)=(0.5,0.9,0.6)$ , และ $X_k=-0.5$ .....	20
รูปที่ 5 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ $f_Y^{DRM}$ เปรียบเทียบกับค่าจริง $f_Y$ ของตัวแบบ OU ณ. $t=0.05,0.15,0.25,0.35,0.45$ บนช่วง $[-0.9,3]$ , $L+2=66$ สำหรับ $\theta_2^{OU}=(\alpha,\beta,\sigma)=(0.3,2.0,1.2)$ , และ $X_k=0.9$ .....	21
รูปที่ 6 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM ณ. $t=0.15,0.25,0.35$ ตามลำดับ สำหรับ $\theta_2^{OU}=(\alpha,\beta,\sigma)=(0.3,2.0,1.2)$ , และ $X_k=0.9$ ....	22
รูปที่ 7 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ $f_Y^{DRM}, f_Y^{Shoji}$ เปรียบเทียบกับ $f_Y$ ที่แท้จริงของตัวแบบ CIR ณ. $t=0.05,0.1,0.2$ บนช่วง $[0,3.2]$ , $L+2=181$ สำหรับ $\theta_1^{CIR}=(\alpha,\beta,\sigma)=(1,3,0.7)$ และ $Y_k=0.8$ .....	24
รูปที่ 8 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM และที่ได้จาก Shoji และ Ozaki ณ. $t=0.05,0.1,0.2$ ตามลำดับ สำหรับ $\theta_1^{CIR}=(\alpha,\beta,\sigma)=(1,3,0.7)$ .....	25
รูปที่ 9 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ $f_Y^{DRM}, f_Y^{Shoji}$ เปรียบเทียบกับ $f_Y$ ที่แท้จริงของตัวแบบ CIR ณ. $t=0.05,0.1,0.2$ บนช่วง $[0,2.5]$ , $L+2=141$ สำหรับ $\theta_2^{CIR}=(\alpha,\beta,\sigma)=(0.7,3.5,1.3)$ และ $Y_k=1.0$ .....	26

รูปที่ 10 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM และที่ได้จาก Shoji และ Ozaki ณ.  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  ตามลำดับ สำหรับ

$\theta_2^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.7, 3.5, 1.3)$  และ  $Y_k = 1.0$  ..... 27



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

# บทที่ 1

## บทนำ

กระบวนการอิโต (Itô process) เป็นกระบวนการสโตแคสติกที่นิยมใช้สำหรับสร้างตัวแบบของระบบพลวัตที่มีการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นกับเวลาเพื่อใช้ประโยชน์ในหลายสาขาวิชา เช่น การเงิน การแพทย์, ฟิสิกส์, ชีววิทยา, วิศวกรรม เป็นต้น งานวิจัยนี้ได้พิจารณากระบวนการสโตแคสติก  $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  ที่สอดคล้องกับ

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s; \theta) ds + \int_0^t g(X_s; \theta) dW_s$$

หรือสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกหนึ่งมิติ

$$dX_t = \mu(X_t; \theta) dt + g(X_t; \theta) dW_t \quad (1.1)$$

โดยที่  $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$  คือ กระบวนการวีเนอร์หนึ่งมิติ (one-dimensional Wiener process)

$\mu: \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  คือ สัมประสิทธิ์ความโน้มเอียง (drift coefficient)

$g: \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient)

และ  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r, r \geq 1$  คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

เราเรียกกระบวนการ  $X$  ว่ากระบวนการอิโตหนึ่งมิติแบบ time homogeneous เนื่องจากแต่ละกระบวนการอิโตอาจจะมีพารามิเตอร์อยู่ด้วย การจะนำไปประยุกต์ใช้จะต้องมีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับแต่ละข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ก่อนจึงสามารถที่จะนำมาใช้ได้จริง ดังนั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์จึงเป็นสิ่งสำคัญ

ในงานวิจัยนี้เราพิจารณาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับกระบวนการอิโตที่ชื่อว่าวิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimation: MLE) ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่เป็นมาตรฐานและนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลสังเกตวิฤตจำกัด ให้  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  เป็นกระบวนการอิโตที่มีข้อมูลสังเกต  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  ที่เวลา  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  โดยที่  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  ให้ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ (transitional probability density function: PDF) ของ  $X$  ซึ่งกำหนดสัญลักษณ์เป็น  $f_X \equiv f_X(t, x, t_0, x_0; \theta)$  แล้วฟังก์ชันลอการิทึมควรจะเป็น (log likelihood function) นิยามได้จาก

$$l_n(\theta) := \log f_X(X_0; \theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \log f_X(t_{k+1}, X_{k+1}, t_k, X_k; \theta) \quad (1.2)$$

โดยที่  $\theta$  คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์,  $f_X(X_0; \theta)$  คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของสถานะเริ่มต้น  $X_0$  ที่เวลาเริ่มต้น  $t_0$  และในที่นี้  $f_X(t_{k+1}, X_{k+1}, t_k, X_k; \theta)$  หรือเขียนโดยย่อ  $f_X(X_{k+1}, X_k; \theta)$  คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการที่เริ่มต้นจากสถานะ  $(X_k, t_k)$  ไปยังสถานะ  $(X_{k+1}, t_{k+1})$  โดยหลักการของวิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด จะได้ว่า เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุด (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์เป็น  $\theta_n$ ) คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ให้ค่าฟังก์ชันลอการิทึมควรจะเป็นมากที่สุด และกระบวนการอิโตที่มีเวกเตอร์ของพารามิเตอร์  $\theta_n$  จะเป็นตัวแทนของข้อมูลสังเกตที่ดีที่สุด จากหลักการดังกล่าว หากเราต้องประมาณค่าพารามิเตอร์  $\theta_n$  ของกระบวนการอิโต จำเป็นต้องทราบค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการอิโต และโดยสมบัติของกระบวนการอิโตเป็นที่ทราบกันดีว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการอิโตหนึ่งมิติเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยฟอกเกอร์-พลังก์ (Fokker-Planck equation) [1,2,3,4,8]

$$\frac{\partial f_X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial (g^2(x; \theta) f_X)}{\partial x} - \mu(x; \theta) f_X \right) \quad (1.3)$$

โดยที่  $x$  เป็นสมาชิกของปริภูมิสถานะ  $S$  และฟังก์ชัน  $g$  และ  $\mu$  คือสัมประสิทธิ์การแพร่และสัมประสิทธิ์ความโน้มเอียงของสมการ (1.1) ตามลำดับ สมมติให้กระบวนการอิโต  $X$  เริ่มต้นที่สถานะ  $(X_k, t_k)$  และ  $f_X(t_{k+1}, x, t_k, X_k; \theta)$  เขียนโดยย่อเป็น  $f_X(x, X_k; \theta)$  คือฟังก์ชันของเวลา  $t_{k+1}$  และ  $x$  ที่ขึ้นกับเวกเตอร์ของพารามิเตอร์  $\theta$  ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย (Dirac delta function)

$$f_X(x, X_k; \theta) = \delta(x - X_k) \quad (1.4)$$

ในกรณีที่โดเมนที่พิจารณา คือ  $S \in [A, B]$  จะมีเงื่อนไขค่าขอบของปัญหานี้ คือ

$$\lim_{x \rightarrow A^+} \left( \mu f_X - \frac{1}{2} \frac{\partial (g^2 f_X)}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow B^-} \left( \mu f_X - \frac{1}{2} \frac{\partial (g^2 f_X)}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.5)$$

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยฟอกเกอร์-พลังก์ (1.3) - (1.5) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยนั้นจะมีปัญหาในการแทนค่าที่แท้จริง ดังนั้นการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จึงมีความยุ่งยากด้วยเหตุนี้ในทางปฏิบัติจึงเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ การหาค่า

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะเพื่อใช้สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุดโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผู้ที่เริ่มศึกษาเป็นคนแรก คือ Lo [4] หลังจากนั้น Hurn และ Lindsay [1] ได้ใช้การประมาณเชิงสเปกตรัมเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าว ต่อมาในปีค.ศ. 2002 Jensen และ Poulsen [3] ได้นำวิธีผลต่างอันตะ (finite difference method) มาแก้ปัญหาดังกล่าวโดยที่มีการประมาณค่าฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยด้วยการแจกแจงปกติและล่าสุด Hurn, Jeisman และ Lindsay [2] ได้ใช้วิธีผลต่างอันตะมาแก้ปัญหาดังกล่าวโดยไม่มีการประมาณค่าฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย โดยมองเป็นปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเปลี่ยนสถานะ (transitional cumulative distribution function) แทน ทำให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นของปัญหาเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันขั้นบันได

สำหรับงานวิจัยนี้ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่า Laplace transform dual reciprocity method (LTDRM) ซึ่งมีขั้นตอนวิธีการ ดังนี้

1. ใช้การแปลงลาปลาซเปลี่ยนปัญหาของสมการพอคเกอร์พลังค์ (1.3) - (1.5) ให้เป็นปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) (2.8) - (2.9)
2. ใช้วิธีการ DRM ประมาณค่าของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ
3. ใช้ขั้นตอนวิธีการของ Stehfest ในแปลงลาปลาซผกผัน เพื่อให้ได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ

ซึ่งจากผลการทดลองตรวจสอบในบทที่ 3 จะเห็นได้ว่า LTDRM เป็นวิธีที่มีความแม่นยำสูงและเหมาะสมสำหรับปัญหานี้ เนื่องจากมีการใช้สมบัติของฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยที่เรียกว่าสมบัติ sifting ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงการประมาณค่าแท้จริงของฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยซึ่งเป็นเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของปัญหาดังกล่าว

รายงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้มีทั้งหมด 4 บท คือ บทที่ 1 บทนำ ซึ่งได้กล่าวมาแล้ว บทที่ 2 จะนำเสนอเกี่ยวกับระเบียบวิธีหรือเทคนิคทั้งหมดในการประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ นั่นคือ การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกหนึ่งมิติใดๆ ไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่มีสัมประสิทธิ์ diffusion เท่ากับหนึ่ง, วิธี LTDRM และ Stehfest's algorithm สำหรับแปลงลาปลาซผกผัน หลังจากนั้นในบทที่ 3 ได้แสดงผลการตรวจสอบของการใช้ระเบียบวิธีในบทที่ผ่านมากับตัวแบบสองตัวแบบ คือ Ornstein-Uhlenbeck (OU) และ Cox, Ingersoll and Rose (CIR) ซึ่งมีการเปรียบเทียบผลที่ได้กับวิธีการของ Shoji และ Ozaki [8] ด้วย และสำหรับบทสุดท้าย บทที่ 4 เป็นบทสรุปของงานวิจัยนี้

## บทที่ 2

### ระเบียบวิธีการ

จากบทที่ 1 เราทราบว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimation) จำเป็นต้องทราบค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ (transitional PDF) ดังนั้นในบทนี้เราจะอธิบายระเบียบวิธีการทั้งหมดที่ใช้ในงานวิจัยนี้เพื่อประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 1.) แปลงสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (1.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่มีสัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient) เท่ากับหนึ่ง ซึ่งในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์เป็นกระบวนการอิโต  $Y$
- 2.) หาผลการแปลงลาปลาซสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยฟอคเกอร์-พลังค์ (Fokker-Planck equation) สำหรับกระบวนการอิโต  $Y$
- 3.) หาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบที่ได้จากการแปลงลาปลาซในขั้นตอนที่ 2 โดยใช้ DRM
- 4.) หาผลการแปลงลาปลาซผกผันกับผลเฉลยที่ได้จาก DRM เป็นค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y$  โดยใช้ Stehfest's algorithm
- 5.) หาค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_X$

#### 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่มีสัมประสิทธิ์การแพร่เท่ากับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (1.1) สามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่มีสัมประสิทธิ์การแพร่เท่ากับหนึ่งได้โดยการแปลง (เนื่องจาก  $g \in \mathbb{R}^+$ )

$$Y := h(t, X) = \int_0^X \frac{1}{g(u; \theta)} du \quad (2.1)$$

โดยที่ ขอบเขตล่างของการปริพันธ์สามารถเลือกเป็นจุดใดๆ ในโดเมนของ  $X$  ได้ ทำให้ได้ว่า กระบวนการอิโต  $X$  ในสมการ (1.1) สามารถแปลงเป็นกระบวนการอิโต  $Y$  โดยบทตั้งอิโต (Itô's Lemma)

$$dY = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X) dt + \frac{\partial h}{\partial X}(t, X) dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2}(t, X) \cdot (dX)^2$$

เมื่อ  $(dX)^2 = (dX) \cdot (dX)$ ,  $dt \cdot dt = dt \cdot dW = dW \cdot dt = 0$  และ  $dW \cdot dW = dt$

โดยที่  $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$  จะได้

$$dY = \left( \mu(X; \theta) \frac{dY}{dX} + \frac{g^2(X; \theta)}{2} \frac{d^2Y}{dX^2} \right) dt + g(X; \theta) dW$$

จากสมการ (2.1) จะได้ว่า  $\frac{dY}{dX} = \frac{1}{g(X; \theta)}$ ,  $\frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{1}{g^2(X; \theta)} \frac{dg}{dX}(X; \theta)$

กระบวนการอิตโต  $Y$  สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dY = \hat{\mu}(Y; \theta) dt + dW \quad (2.2)$$

โดยที่

$$\hat{\mu}(Y; \theta) = \frac{\mu(X; \theta)}{g(X; \theta)} - \frac{1}{2} \frac{dg}{dX}(X; \theta)$$

บนโดเมนของ  $Y$

**ตัวอย่างที่ 1** ตัวแบบ Cox, Ingersoll and Ross (CIR) เป็นตัวแบบที่นิยมใช้แทนการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$dX = \alpha(\beta - X) dt + \sigma\sqrt{X} dW \quad (2.3)$$

โดยที่  $\alpha > 0$  คือความเร็วของการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ,  $\beta > 0$  คือค่าเฉลี่ยของกระบวนการ,  $\sigma > 0$  คือความผันผวนของกระบวนการและมีเงื่อนไข  $2\alpha\beta \geq \sigma^2$  แล้วโดเมนของกระบวนการนี้คือ  $\mathbb{R}^+$

จากสมการ (2.3) จะได้ว่า  $\mu(X; \theta) = \alpha(\beta - X)$  และ  $g(X; \theta) = \sigma\sqrt{X}$  ซึ่งมี

$$\frac{dg}{dX}(X; \theta) = \frac{\sigma}{2\sqrt{X}}$$

จากการแปลงในสมการ (2.1) จะได้

$$Y = \int_0^X \frac{dX}{\sigma\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{\sigma} \text{ หรือ } \sqrt{X} = \frac{\sigma Y}{2}$$

และสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูปของกระบวนการอิตโต  $Y$

$$dY = \hat{\mu}(Y; \theta) dt + dW$$

มีสัมประสิทธิ์ความโน้มเอียง  $\hat{\mu}$  เป็น

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(Y; \theta) &= \frac{\alpha(\beta - X)}{\sigma\sqrt{X}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{X}} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\sigma\sqrt{X}} - \frac{\alpha\sqrt{X}}{\sigma} - \frac{\sigma}{4\sqrt{X}} \\ &= \left(\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{Y} - \frac{\alpha}{2}Y\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$dY = \left[ \left( \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{Y} - \frac{\alpha}{2} Y \right] dt + dW \quad (2.4)$$

□

ดังนั้นจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพอคเกอร์พลังค์สำหรับกระบวนการอิโต  $Y$  ดังนี้

$$\frac{\partial f_Y}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_Y}{\partial y^2} - \hat{\mu} \frac{\partial f_Y}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} f_Y \quad (2.5)$$

ให้กระบวนการอิโต  $Y$  เริ่มต้นที่สถานะ  $Y_k$  ที่เวลา  $t_k$  ดังสมการ (1.4) และ  $t = t_{k+1} - t_k$  จะมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบของสมการ (2.5) เป็นดังนี้

$$f_Y(y, Y_k; \theta) = \delta(y - Y_k) \quad (2.6)$$

$$\lim_{y \rightarrow a^+} \left( \hat{\mu} f_Y - \frac{1}{2} \frac{\partial f_Y}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{y \rightarrow b^-} \left( \hat{\mu} f_Y - \frac{1}{2} \frac{\partial f_Y}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{for } t \geq 0 \quad (2.7)$$

โดยที่ กระบวนการอิโต  $Y_k$  เป็นผลการแปลงของกระบวนการอิโต  $X_k$  ตามสมการ (2.1) ดังนั้นจะเห็นว่าปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพอคเกอร์พลังค์สมการ (2.5) – (2.7) จะไม่ซับซ้อนเหมือนสมการ (1.3) – (1.5) ซึ่งจะทำให้ง่ายในการนำไปประมาณผลเฉลยต่อไปด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

## 2.2 Laplace Transform Dual Reciprocity Method (LTDRM)

ในหัวข้อนี้ได้แสดงวิธีการแก้สมการ (2.5) – (2.7) โดยเราจะใช้วิธี Laplace transform dual reciprocity method (LTDRM) ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่สามารถใช้ประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยมีขั้นตอนวิธีการ ดังนี้

**ขั้นตอนที่ 1** แปลงลาปลาซสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพอคเกอร์พลังค์ (2.5) – (2.7) เทียบกับเวลา



ให้  $F(s, y; \theta)$  เป็นผลการแปลงลาปลาซของ  $f_Y(t_{k+1}, y, t_k, Y_k; \theta)$  ในที่นี้จะเขียนย่อเป็น  $f_Y(t, y; \theta)$

$$F(s, y; \theta) = \mathcal{L}(f_Y(t, y; \theta)) := \int_0^{\infty} f_Y(t, y; \theta) e^{-ts} dt$$

จากสมการ (2.5) จะได้

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f_Y}{\partial t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_Y}{\partial y^2} - \hat{\mu} \frac{\partial f_Y}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} f_Y\right\}$$

$$sF - f_Y(y, Y_k; \theta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \hat{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} F$$

จากเงื่อนไข (2.6) จะได้

$$sF - \delta(y - Y_k) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \hat{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} F$$

เมื่อจัดรูปสมการและรวมกับการแปลงลาปลาซของค่าขอบ (2.7) จะได้ปัญหาค่าขอบ

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \delta(y - Y_k) = \hat{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} + \left(s + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y}\right) F \quad (2.8)$$

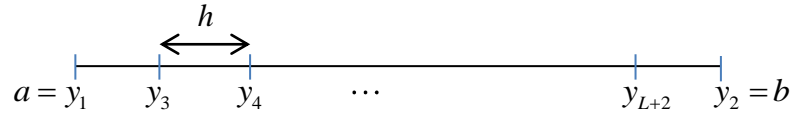
$$\lim_{y \rightarrow a^+} \left(\hat{\mu} F - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{y \rightarrow b^-} \left(\hat{\mu} F - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.9)$$

ซึ่งมีพจน์ของฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยปรากฏอยู่ และวิธี Dual reciprocity method (DRM) เป็นวิธีที่เหมาะสมที่จะใช้ประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบในลักษณะนี้โดยไม่มีการประมาณค่าฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย

**ขั้นตอนที่ 2** หาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (2.8) - (2.9) โดยใช้วิธี DRM ซึ่งเป็นวิธีที่มีพื้นฐานมาจากวิธีขึ้นประกอบขอบ (Boundary element method: BEM) [6, 7] ซึ่งมีขั้นตอนวิธีการดังนี้

ทำการแบ่งช่วง  $[a, b]$  เป็นช่วงย่อยๆ เท่าๆ กัน<sup>1</sup>ขนาด  $h$  โดยให้มีจุดภายใน (interior node)  $L$  จุด และ ให้  $y_1 = a$ ,  $y_2 = b$  และ  $a = y_1 < y_3 < y_4 < \dots < y_{L+2} < y_2 = b$

<sup>1</sup>จริงๆ แล้วไม่จำเป็นต้องเท่ากัน แต่เพื่อความง่ายในการเขียนโปรแกรมจึงควรแบ่งให้เท่ากัน



รูปที่ 1 รูปประกอบการอธิบายการแบ่งช่วงย่อยของช่วง  $[a, b]$

- 1.) ให้  $w_l$  คือ ฟังก์ชันทดสอบ (test function) เมื่อ  $l = 1, 2, 3, \dots, L+2$  และทำการคูณสมการ (2.8) ด้วย  $w_l$  แล้วหาปริพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับตัวแปร  $y$  บนช่วง  $[a, b]$  จะได้

$$\int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} w_l(y) dy + \int_a^b \delta(y - Y_k) w_l(y) dy = \int_a^b \hat{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} w_l(y) dy + \int_a^b \left( s + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} \right) F w_l(y) dy \quad (2.10)$$

- 2.) หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนกับ  $\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} w_l(y) dy$  สองครั้ง จะได้

$$\frac{1}{2} \left[ \int_a^b \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} F dy - \left[ F w_l' \right]_a^b + \left[ F' w_l \right]_a^b \right] + \int_a^b \delta(y - Y_k) w_l(y) dy = \int_a^b w_l \left[ \hat{\mu} F' + \left( s + \hat{\mu}' \right) F \right] dy \quad (2.11)$$

โดยที่จะเขียน  $u'$  แทนอนุพันธ์ของ  $u$  เทียบกับ  $y$  เมื่อ  $u$  คือ  $w_l, \hat{\mu}$  และ  $F$

และเลือกฟังก์ชันทดสอบ  $w_l(y) := w(y; y_l)$  ให้สอดคล้อง

$$\frac{\partial^2 w(y; y_l)}{\partial y^2} = \delta(y - y_l) \quad (2.12)$$

โดยในที่นี้ สำหรับวิธีการ DRM จะใช้ [6]

$$w(y; y_l) = \frac{|y - y_l|}{2}, \quad \frac{dw}{dy}(y; y_l) = \frac{1}{2} [H(y - y_l) - H(y_l - y)]$$

ซึ่งจะสอดคล้องกับ (2.12) โดยที่  $H$  คือ ฟังก์ชันเฮวิไซด์ (Heaviside function) ซึ่งจะได้

$$H(y - y_l) - H(y_l - y) = \begin{cases} -1, & y < y_l \\ 0, & y = y_l \\ 1, & y > y_l \end{cases}$$

- 3.) ใช้สมบัติ sifting ของฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย ที่กล่าวว่า ถ้า  $F$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  แล้ว สำหรับทุก  $y_l \in [a, b]$  จะได้ว่า

$$\int_a^b F(y) \delta(y - y_l) dy = c_l F(y_l)$$

โดยที่

$$c_l = \begin{cases} 1 & , y_l \in (a, b) \\ \frac{1}{2} & , y_l = a \vee y_l = b \end{cases}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.11) และ (2.12) จะได้

$$c_l F(y_l) - \left[ F w_l' \right]_a^b + \left[ F' w_l \right]_a^b + 2w_l(y_0) = 2 \int_a^b w_l \left[ \hat{\mu} F' + (s + \hat{\mu}') F \right] dy \quad (2.13)$$

โดยที่  $y_0 = Y_k$

- 4.) ประมาณค่าพจน์ทางขวามือของสมการ (2.13) ด้วยฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง (interpolation function) ดังนี้

$$\hat{\mu} F' + (s + \hat{\mu}') F = \sum_{j=1}^{L+2} \alpha_j f_j \quad (2.14)$$

โดยที่  $f_j$  คือ ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงที่ขึ้นอยู่กับจุด  $j$  และ  $\alpha_j$  คือ สัมประสิทธิ์ของ  $f_j$  ซึ่งไม่ทราบค่า

หมายเหตุ ที่ต้องประมาณพจน์ขวามือของสมการ (2.13) ด้วยฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงคือ

เพราะว่าในบางกรณีไม่สามารถหาค่าของ  $\int_a^b w_l \left[ \hat{\mu} F' + (s + \hat{\mu}') F \right] dy$  ได้โดยตรง

จากสมการ (2.13) และ (2.14) จะได้

$$c_l F(y_l) - \left[ F w_l' \right]_a^b + \left[ F' w_l \right]_a^b + 2w_l(y_0) = 2 \sum_{j=1}^{L+2} \alpha_j \left( \int_a^b f_j w_l dy \right) \quad (2.15)$$

- 5.) เลือกฟังก์ชัน  $F_j$  ให้สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{d^2 F_j}{dy^2} = f_j, \quad j=1,2,3,\dots,L+2$$

เมื่อแทนลงในสมการ (2.15) และหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนกับ  $\int_a^b \frac{d^2 F_j}{dy^2} w_l dy$  สองครั้ง จาก (2.15)

จะได้

$$\begin{aligned} c_l F(y) - [F(y) w_l'(y)]_a^b + [q(y) w_l(y)]_a^b + 2w_l(y_0) \\ = 2 \sum_{j=1}^{L+2} \alpha_j \left( c_l F_j(y_l) - [F_j(y) w_l'(y)]_a^b + [q_j(y) w_l(y)]_a^b \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

โดยที่  $q = F'$  และ  $q_j = F_j'$  ในงานวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง  $f_j$  ในรูปอนุกรมกำลังจำกัดของฟังก์ชันระยะทาง (finite power series of distance function) ซึ่งอยู่ในรูป

$$f_j(y) = 1 + \sum_{i=1}^r |y - y_j|^i, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

โดยในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ในกรณีที่  $r = 1$  ซึ่งให้ความแม่นยำในระดับเชิงเส้น ซึ่งเพียงพอที่จะนำไปใช้งานได้ แต่สามารถทำให้มีความแม่นยำมากขึ้นโดยการเลือกใช้  $r = 1, 2, 3$  แต่จะมีความซับซ้อนและใช้เวลาในการประมาณมากขึ้น

$$f_j(y) = 1 + |y - y_j|, \quad j = 1, 2, 3, \dots, L+2$$

โดยสามารถเลือก  $F_j$  ได้ ดังนี้

$$F_j(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - y_j)^2 + \frac{1}{6}(y - y_j)^3, & y \geq y_j \\ \frac{1}{2}(y_j - y)^2 + \frac{1}{6}(y_j - y)^3, & y < y_j \end{cases}$$

และ

$$F_j'(y) = \begin{cases} (y - y_j) + \frac{1}{2}(y - y_j)^2, & y \geq y_j \\ -(y_j - y) + \frac{1}{2}(y_j - y)^2, & y < y_j \end{cases}$$

จากสมการ (2.16) เมื่อแทนค่า  $y = y_i$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,L+2$  จะได้สมการทั้งหมด  $L+2$  สมการแต่มีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด  $2(L+2)+2$  ตัวแปร คือ

1.  $F(y_i)$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,L+2$
2.  $q(a)$  และ  $q(b)$
3.  $\alpha_j$  สำหรับ  $j=1,2,3,\dots,L+2$

ซึ่งสามารถลดให้เหลือ  $L+2$  สมการ ของ  $L+2$  ตัวแปรได้ โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบ 2 เงื่อนไข และค่าของ  $\alpha_j$  สำหรับ  $j=1,2,3,\dots,L+2$  จากสมการ (2.16) เพื่อความสะดวกในการแก้ระบบสมการดังกล่าวจะเขียนสมการ (2.16) ที่ได้ทั้ง  $L+2$  สมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$H\hat{F} - G\hat{Q} + 2\bar{W} = 2(H\bar{F} - G\bar{Q})\bar{\alpha} \quad (2.17)$$

โดยที่  $H, G, \bar{F}$  และ  $\bar{Q}$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $L+2$  และ  $\hat{F}, \hat{Q}, \bar{W}$  และ  $\bar{\alpha}$  เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาด  $L+2$  ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$H = \begin{bmatrix} c_1 - w_1'(a) & -w_1'(b) & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ w_2'(a) & c_2 - w_2'(b) & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ w_3'(a) & -w_3'(b) & c_3 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ w_4'(a) & -w_4'(b) & 0 & c_4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{L+2}'(a) & -w_{L+2}'(b) & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{L+2} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} w_1(a) & -w_1(b) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_2(a) & -w_2(b) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_3(a) & -w_3(b) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_4(a) & -w_4(b) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{L+2}(a) & -w_{L+2}(b) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_1(a) & F_2(a) & F_3(a) & \dots & F_{L+2}(a) \\ F_1(b) & F_2(b) & F_3(b) & \dots & F_{L+2}(b) \\ F_1(y_3) & F_2(y_3) & F_3(y_3) & \dots & F_{L+2}(y_3) \\ F_1(y_4) & F_2(y_4) & F_3(y_4) & \dots & F_{L+2}(y_4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_1(y_{L+2}) & F_2(y_{L+2}) & F_3(y_{L+2}) & \dots & F_{L+2}(y_{L+2}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} q_1(a) & q_2(a) & q_3(a) & \dots & q_{L+2}(a) \\ q_1(b) & q_2(b) & q_3(b) & \dots & q_{L+2}(b) \\ q_1(y_3) & q_2(y_3) & q_3(y_3) & \dots & q_{L+2}(y_3) \\ q_1(y_4) & q_2(y_4) & q_3(y_4) & \dots & q_{L+2}(y_4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_1(y_{L+2}) & q_2(y_{L+2}) & q_3(y_{L+2}) & \dots & q_{L+2}(y_{L+2}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} F(a) \\ F(b) \\ F(y_3) \\ F(y_4) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F(y_{L+2}) \end{bmatrix}, \hat{Q} = \begin{bmatrix} q(a) \\ q(b) \\ q(y_3) \\ q(y_4) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q(y_{L+2}) \end{bmatrix}, \bar{W} = \begin{bmatrix} w(y_0, a) \\ w(y_0, b) \\ w(y_0, y_3) \\ w(y_0, y_4) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w(y_0, y_{L+2}) \end{bmatrix}, \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{L+2} \end{bmatrix}$$

ค่าของเวกเตอร์  $\bar{\alpha}$  หาได้จากความสัมพันธ์ของ  $\alpha_j$  ในสมการที่ (2.14) โดยแทนค่า  $y = y_i$  สำหรับ  $i = 1, 2, 3, \dots, L+2$  จะได้ระบบสมการ

$$\left( s + \hat{\mu}'(y_i) \right) F(y_i) + \hat{\mu}(y_i) q(y_i) = \sum_{j=1}^{L+2} \alpha_j f_j(y_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, L+2 \quad (2.18)$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์

$$\tilde{t}\hat{F} + \tilde{r}\hat{Q} = \bar{f}\bar{\alpha} \quad (2.19)$$

โดยที่  $\tilde{t}, \tilde{r}$  และ  $\bar{f}$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $L+2$

$$\tilde{t} = \begin{bmatrix} s + \hat{\mu}'(y_1) & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & s + \hat{\mu}'(y_2) & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s + \hat{\mu}'(y_3) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + \hat{\mu}'(y_4) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s + \hat{\mu}'(y_i) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & s + \hat{\mu}'(y_{L+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & s + \hat{\mu}'(y_{L+2}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}(y_1) & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mu}(y_2) & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu}(y_3) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mu}(y_4) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\mu}(y_i) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\mu}(y_{L+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \hat{\mu}(y_{L+2}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1(y_1) & f_2(y_1) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{L+2}(y_1) \\ f_1(y_2) & f_2(y_2) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{L+2}(y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(y_{L+2}) & f_2(y_{L+2}) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{L+2}(y_{L+2}) \end{bmatrix}$$

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงในรูป  $f_j(y) = 1 + \sum_{i=1}^r |y - y_j|^i$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  ได้มีการศึกษา  
มาแล้วว่า  $\bar{f}^{-1}$  หาค่าได้ [5] ดังนั้นจากสมการ (2.19) จะได้

$$\bar{\alpha} = \bar{f}^{-1}(\tilde{t}\hat{F} + \tilde{r}\hat{Q}) \quad (2.20)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (2.20) ลงในสมการที่ (2.17) จะได้

$$H\hat{F} - G\hat{Q} + 2\bar{W} = 2(H\bar{F} - G\bar{Q})\bar{f}^{-1}(\tilde{t}\hat{F} + \tilde{r}\hat{Q}) \quad (2.21)$$

เพื่อความสะดวก ให้  $T = (H\bar{F} - G\bar{Q})\bar{f}^{-1}\tilde{t}$  และ  $R = (H\bar{F} - G\bar{Q})\bar{f}^{-1}\tilde{r}$  ซึ่งหาค่าได้จาก  $H, G, \bar{F}, \bar{G}, \bar{f}^{-1}, \tilde{t}, \tilde{r}$  จะได้ว่าเมื่อแทนค่าของ  $T$  และ  $R$  ลงในสมการที่ (2.21) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$(H - 2T)\hat{F} - (G + 2R)\hat{Q} = -2\bar{W} \quad (2.22)$$

จากสมการ (2.22) จะเห็นว่าเมทริกซ์  $\hat{Q}$  ยังมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า  $L+2$  ตัวแปร คือ  $q(y_i)$  สำหรับ  $i=1, 2, 3, \dots, L+2$  ซึ่งสามารถกำจัดตัวแปรเหล่านี้ลงได้โดยใช้ผลต่างกลาง (central difference) และจากเงื่อนไขค่าขอบเพื่อแทนค่า  $q$  ในรูปของ  $F$  ดังนี้  
ที่ขอบ  $y \rightarrow a^+$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}F - \frac{1}{2}q &= 0 \\ q(a) &= 2\hat{\mu}(a)F(a), \end{aligned}$$

ที่ขอบ  $y \rightarrow b^+$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}F - \frac{1}{2}q &= 0 \\ q(b) &= 2\hat{\mu}(b)F(b), \end{aligned}$$

สำหรับ  $y \in (a, b)$ ,

$$q(y_i) \approx \frac{F(y_i + h) - F(y_i - h)}{2h}$$

ทำให้ได้

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 2\hat{\mu}(a)F(a) \\ 2\hat{\mu}(b)F(b) \\ \frac{F(y_4) - F(a)}{2h} \\ \frac{F(y_5) - F(y_3)}{2h} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{F(b) - F(y_{L+1})}{2h} \end{bmatrix}$$

สามารถจัดรูปสมการ (2.22) ในรูป



$$M\hat{F} = -2\bar{W} \quad (2.23)$$

โดยที่  $M$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $L+2$

$$M = (H - 2T) - (G + 2R)D$$

โดยที่  $D$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $L+2$

$$D = \begin{bmatrix} 2\hat{\mu}(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\hat{\mu}(b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการได้โดยตรง

**ขั้นตอนที่ 3** ใช้ขั้นตอนวิธีการของ Stehfest แปลงลาปลาซผกผันผลเฉลยที่ได้จาก DRM เป็นค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y$

ให้  $F(s)$  เป็นผลการแปลงลาปลาซที่ได้มาจากการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ (2.8) – (2.9) ด้วยวิธีการ DRM ของ  $f(t)$  ซึ่งสามารถประมาณค่า  $f(t)$  ได้ ดังนี้ [9]

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{v=1}^{N_p} W_v F(p_v) \quad (2.24)$$

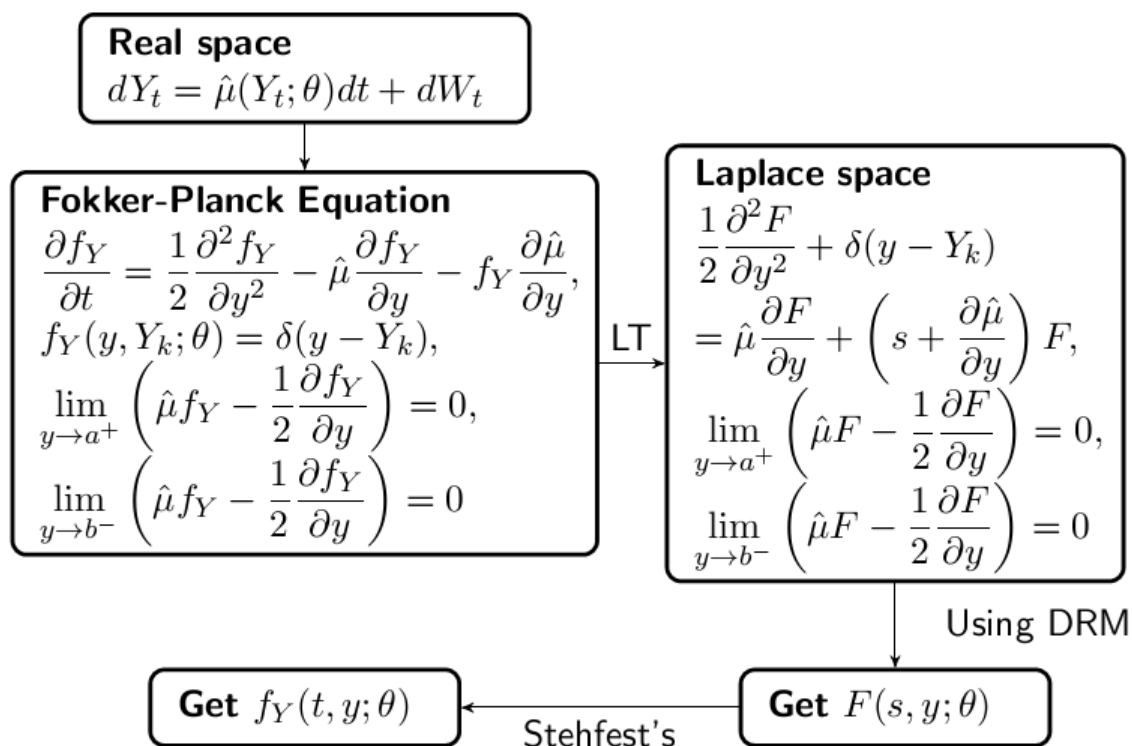
โดยที่  $N_p$  เป็นจำนวนคู่ (ในที่นี้จะใช้  $N_p = 16$  ซึ่งจะได้ความแม่นยำที่ดีที่สุดสำหรับการคำนวณโดย

ใช้ double precision, [9])  $p_v = \frac{\ln 2}{t} v$  และ

$$W_v = (-1)^{(\sigma+v)} \sum_{k=K}^M \frac{k^\sigma (2k)!}{(\sigma-k)! k! (k-1)! (v-k)! (2k-v)!}$$

โดยที่  $\sigma = \frac{N_p}{2}$ ,  $K = \lfloor 0.5(v+1) \rfloor$  และ  $M = \min\{\sigma, v\}$

จากขั้นตอนที่ได้อธิบายการหาค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y$  สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ ดังนี้



รูปที่ 2 แผนภาพแสดงวิธีการหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y$

หมายเหตุ ในการคำนวณแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้วิธี DRM ในขั้นตอนที่ 2 และการหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะในขั้นตอนที่ 3 นั้น ได้พัฒนาขั้นตอนวิธี (algorithm) บนโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB เพื่อช่วยในการคำนวณซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมจะอยู่ในภาคผนวก

ขั้นตอนที่ 4 หาค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_X$  ของกระบวนการอิโตเริ่มต้น  $X$  โดยใช้ความสัมพันธ์

$$f_X(t_{k+1}, X_{k+1}, t_k, X_k; \theta) = f_Y \frac{dY}{dX} = \frac{f_Y(t_{k+1}, h(X_{k+1}), t_k, h(X_k); \theta)}{g(X_{k+1}; \theta)} \quad (2.25)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$f_X(X_{k+1}, X_k; \theta) = \frac{f_Y(h(X_{k+1}), h(X_k); \theta)}{g(X_{k+1}; \theta)}$$

ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_X$  ของกระบวนการ CIR ในตัวอย่างที่ 1 สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ (2.25)

จากตัวอย่างที่ 1 มีการแปลงกระบวนการ CIR เป็นกระบวนการอิโต  $Y$  ซึ่ง  $Y := h(t, X) = \frac{2\sqrt{X}}{\sigma}$

ดังนั้นจะได้  $dY = \frac{1}{\sigma\sqrt{X}} dX$  นั่นคือ  $\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sigma\sqrt{X}}$

จากความสัมพันธ์ (2.25) จะได้

$$f_X(X_{k+1}, X_k; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{X}} f_Y(Y_{k+1}, Y_k; \theta)$$

หรือ

$$\begin{aligned} f_Y(Y_{k+1}, Y_k; \theta) &= f_X \frac{dX}{dY} \\ &= \sigma\sqrt{X} f_X(X_{k+1}, X_k; \theta) \\ &= \frac{\sigma^2 Y}{2} f_X(X_{k+1}, X_k; \theta) \end{aligned}$$

□

### บทที่ 3

#### การทดสอบและการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในบทนี้ได้แนะนำระเบียบวิธีการในบทที่ 2 มาทดสอบ โดยการหาค่าประมาณของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ (transitional PDF) ของกระบวนการไอโตของตัวแบบ 2 ตัวแบบ คือ ตัวแบบ Ornstein-Uhlenbeck (OU) และ ตัวแบบ Cox, Ingersoll and Ross (CIR) ซึ่งเป็นตัวแบบที่ทราบค่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะอยู่แล้ว (มีสูตรของฟังก์ชัน  $f_X$  มาให้) เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของผลที่ได้จากการประมาณค่าของฟังก์ชัน  $f_X$  ด้วยวิธี LTDRM นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบผลของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี maximum likelihood estimation (MLE) โดยใช้  $f_X$  จากวิธีการ LTDRM กับการใช้  $f_X$  จริงๆ ที่ทราบค่าแน่นอน

#### 3.1 ตัวแบบ Ornstein-Uhlenbeck (OU)

ตัวแบบ OU เป็นตัวแบบที่ใช้แทนอัตราดอกเบี้ย, อัตราแลกเปลี่ยนค่าเงิน และราคาสินค้าโภคภัณฑ์ เป็นต้น มีสมการดังนี้

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.1)$$

โดยที่  $\alpha > 0$  เป็นความเร็วของการเปลี่ยนแปลงกระบวนการ,  $\beta > 0$  เป็นค่าเฉลี่ยของกระบวนการ และ  $\sigma > 0$  เป็น ความผันผวนของกระบวนการ ดังนั้นตัวแบบนี้จะมี  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$  เป็น เวกเตอร์ของพารามิเตอร์และมีโดเมนของกระบวนการเป็น  $\mathbb{R}$  ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ

$$f_X(x, X_k; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2V}} \quad (3.2)$$

$$\text{โดยที่ } V = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha(t_{k+1} - t_k)})}{2\alpha} \quad \text{และ} \quad \bar{x} = \beta + (X_k - \beta)e^{-\alpha(t_{k+1} - t_k)}$$

ด้วยการแปลง (2.1) ให้มีสัมประสิทธิ์การแพร่เป็นหนึ่ง จากสมการ (3.1) มี  $\mu(X_t; \theta) = \alpha(\beta - X_t)$

และ  $g(X_t; \theta) = \sigma$  และ  $\frac{dg(X_t; \theta)}{dX_t} = 0$  จะได้

$$Y_t = \int_0^t \frac{dX}{\sigma} = \frac{X_t}{\sigma} \quad \text{หรือ} \quad X_t = \sigma Y_t$$

และมีสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูปของกระบวนการไอโต  $Y_t$

$$dY_t = \alpha\left(\frac{\beta}{\sigma} - Y_t\right)dt + dW_t \quad (3.3)$$

โดยวิธีการ LTDRM จากบทที่แล้ว จะได้ค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}(y|Y_k; \theta)$  ของกระบวนการอิตโต  $Y_t$  โดยที่  $Y_t = \frac{X_t}{\sigma}$

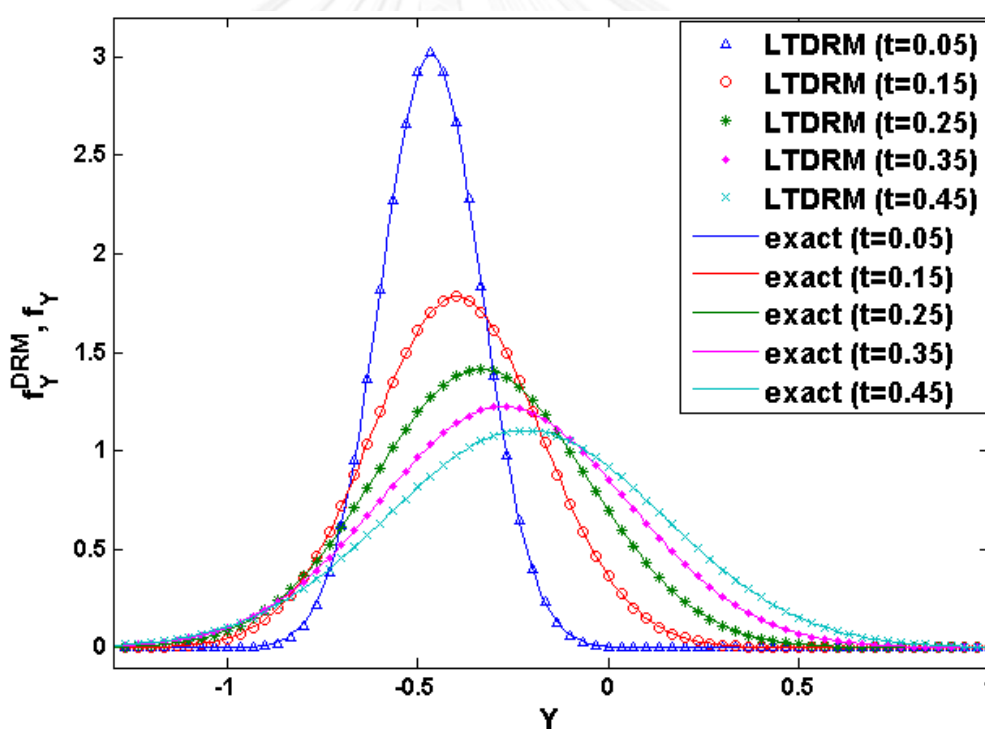
ในการเปรียบเทียบความแม่นยำของการประมาณค่า จะเลือกพารามิเตอร์  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$  มาแบบสุ่ม และทำการประมาณค่าผลเฉลยตามบทที่ 2 ด้วยวิธี LTDRM จะได้  $f_Y^{DRM}(y, Y_k; \theta)$  แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าจริง  $f_Y(y, Y_k; \theta)$  โดยจะได้มาจากการแปลง (2.25)

$$f_Y(y, Y_k; \theta) = f_X \frac{dX}{dY} = \sigma f_X(\sigma y, \sigma Y_k; \theta)$$

โดยที่  $f_X$  คำนวณได้จากสูตร (3.2) ซึ่งได้ผลการเปรียบเทียบ ดังนี้

**ชุดที่ 1** สำหรับ  $\theta_1^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.5, 0.9, 0.6)$ ,  $Y_k = -0.5$  โดยที่  $t = t_{k+1} - t_k$

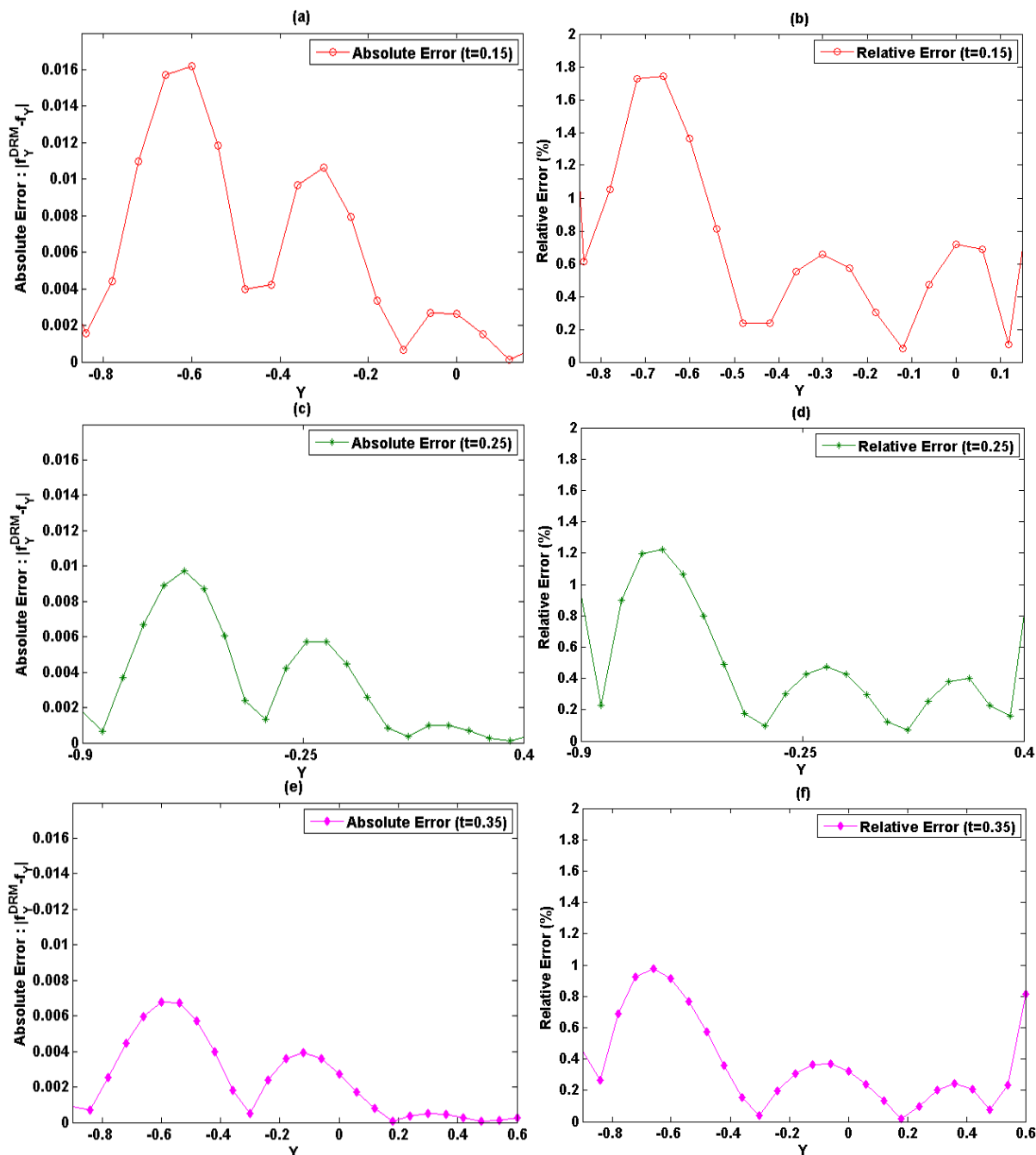
ผลการเปรียบเทียบค่าของ  $f_Y^{DRM}$  และ  $f_Y$  มีแสดงดังรูปที่ 3 และค่าความคลาดเคลื่อนในรูป 4



รูปที่ 3 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  เปรียบเทียบกับค่าจริง  $f_Y$  ของตัวแบบ OU ณ.  $t = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$  บนช่วง  $[-1.3, 1]$ ,  $L+2 = 41$  สำหรับ  $\theta_1^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.5, 0.9, 0.6)$ , และ  $Y_k = -0.5$

จากรูปที่ 3 จะได้ว่า กราฟของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  ด้วยวิธี LTDRM มีความใกล้เคียงกับกราฟของค่าจริง  $f_Y$  ณ.  $t = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$

ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อน  $|f_Y^{DRM} - f_Y|$  และค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%)  $(|f_Y^{DRM} - f_Y| \times 100) / f_Y$  ที่  $t = 0.15, 0.25, 0.35$  แสดงในรูปที่ 4

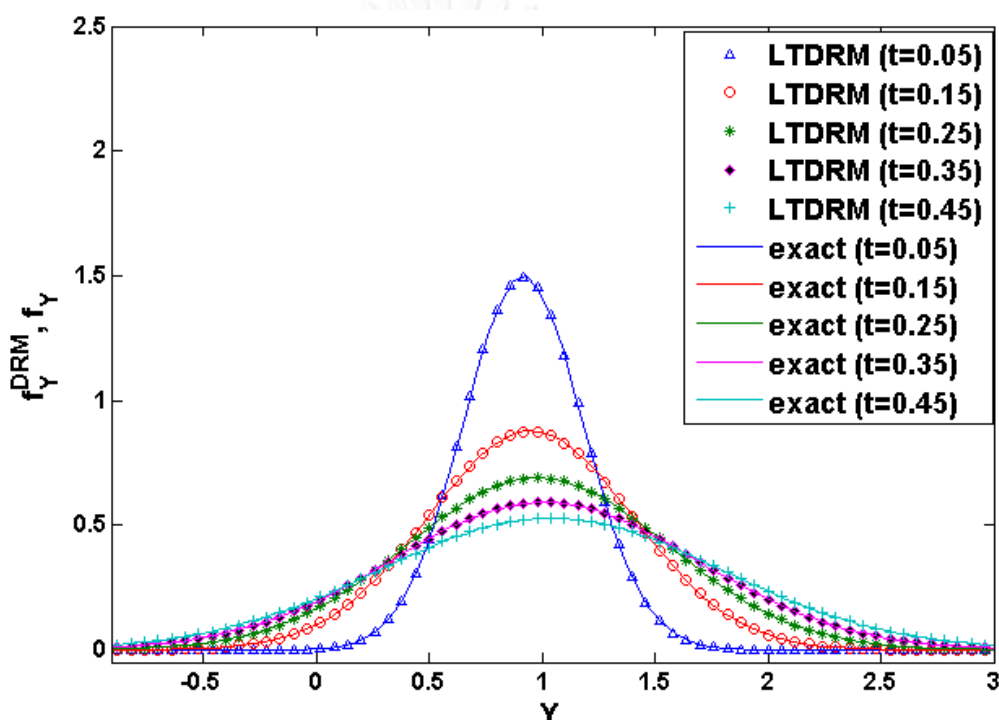


รูปที่ 4 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM ณ  $t = 0.15, 0.25, 0.35$  ตามลำดับ สำหรับ  $\theta_1^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.5, 0.9, 0.6)$ , และ  $Y_k = -0.5$

จากรูปที่ 4 จะเห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย แสดงถึงความแม่นยำของวิธี LTDRM นอกจากนี้ เมื่อช่วงห่างของเวลามากขึ้นหรือ  $t$  มากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าลดลง ตามลำดับ

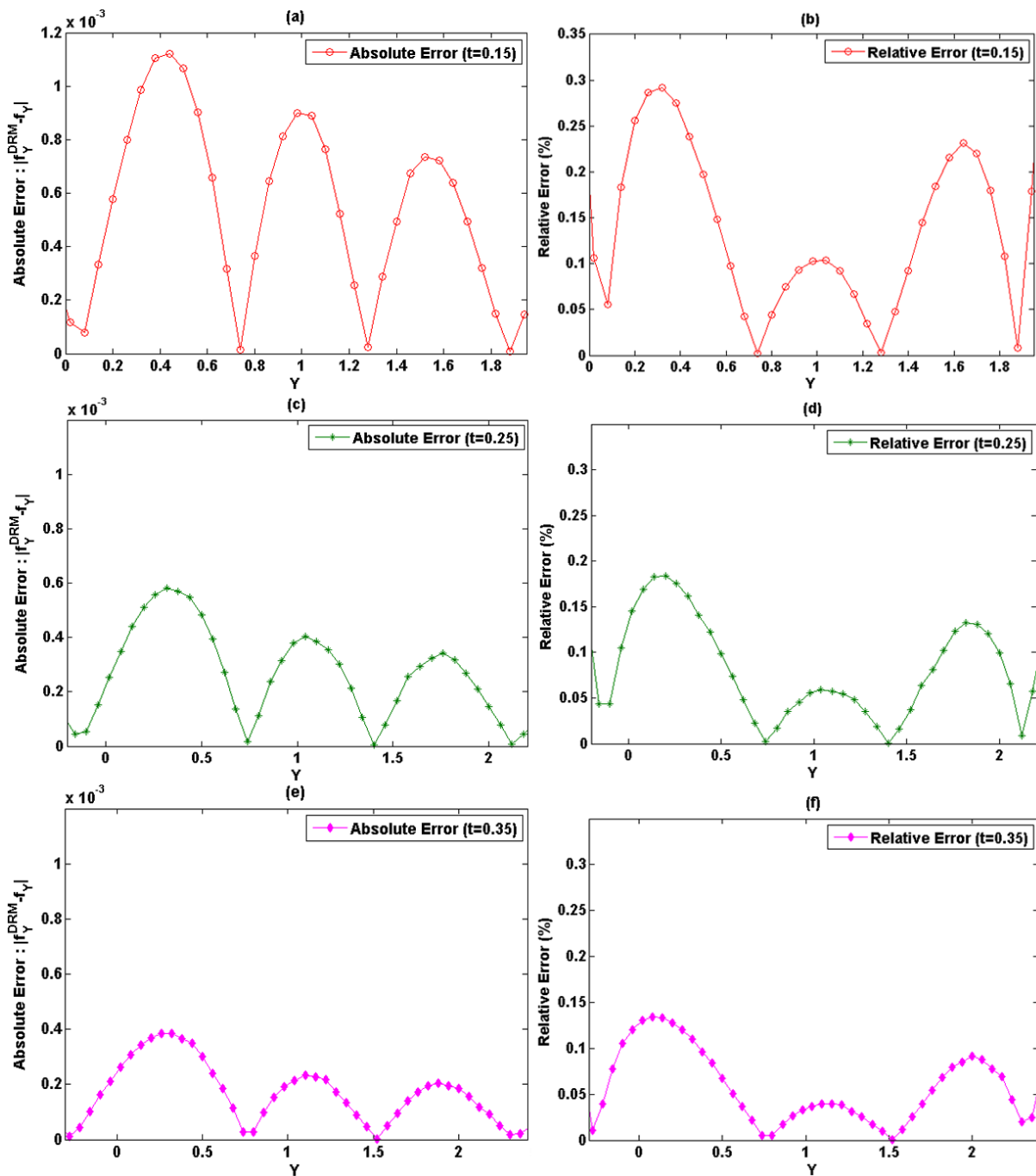
**ชุดที่ 2** สำหรับ  $\theta_2^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.3, 2.0, 1.2)$ ,  $Y_k = 0.9$  โดยที่  $t = t_{k+1} - t_k$

ผลการเปรียบเทียบค่าของ  $f_Y^{DRM}$  และ  $f_Y$  มีแสดงดังรูปที่ 5 และค่าความคลาดเคลื่อนในรูปที่ 6



รูปที่ 5 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  เปรียบเทียบกับค่าจริง  $f_Y$  ของตัวแบบ OU ณ.  $t = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$  บนช่วง  $[-0.9, 3]$ ,  $L+2 = 66$  สำหรับ  $\theta_2^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.3, 2.0, 1.2)$ , และ  $Y_k = 0.9$

สำหรับชุดที่ 2 จากรูปที่ 5 จะได้ว่า ค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  ใกล้เคียงกับค่าจริง  $f_Y$  ณ.  $t = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$  ซึ่งให้ผลเหมือนกับชุดที่ 1 โดยค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ที่  $t = 0.15, 0.25, 0.35$  แสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM ณ  $t=0.15, 0.25, 0.35$  ตามลำดับ สำหรับ  $\theta_2^{OU} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.3, 2.0, 1.2)$ , และ  $Y_k = 0.9$

จากรูปที่ 6 จะได้ผลคล้ายกับการทดสอบชุดที่ 1 (รูปที่ 4) คือ ค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยแสดงถึงความแม่นยำของวิธีการในการประมาณค่า



จากการทดสอบในชุดที่ 1 และชุดที่ 2 จะเห็นได้ว่า วิธี LTDRM เป็นวิธีการที่สามารถประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของกระบวนการ OU ได้อย่างแม่นยำใกล้เคียงกับค่าจริง

### 3.2 ตัวแบบ Cox, Ingersoll and Ross (CIR)

ตัวแบบ CIR เป็นตัวแบบที่ได้กล่าวมาแล้วในตัวอย่างที่ 1 ของบทที่ 2 มีสมการดังนี้

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \quad (3.4)$$

โดยที่  $\alpha > 0$  เป็นความเร็วของการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ,  $\beta > 0$  เป็นค่าเฉลี่ยของกระบวนการ,  $\sigma > 0$  เป็นความผันผวนของกระบวนการและมีเงื่อนไข  $2\alpha\beta \geq \sigma^2$  แล้วโดเมนของกระบวนการนี้ คือ  $\mathbb{R}^+$  ให้  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$  เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ สำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะมีสูตรเป็น

$$f_X(x, X_k; \theta) = c \left( \frac{v}{u} \right)^{q/2} e^{(-u-v)I_q(2\sqrt{uv})} \quad (3.5)$$

โดยที่  $c = \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t_{k+1} - t_k)})}$ ,  $u = cX_k e^{-\alpha(t_{k+1} - t_k)}$ ,  $v = cx$ ,  $q = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - 1$  และ  $I_q(x)$  คือฟังก์ชัน

เบสเซลชนิดที่ 1 แบบปรับปรุงอันดับ  $q$  (modified Bessel function of the first kind of order  $q$ ) ด้วยการแปลง (2.1) เพื่อให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์การแพร่เป็นหนึ่งตามตัวอย่างที่ 1 ของบทที่ 2 (สมการ (2.4)) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกของ  $Y_t$

$$dY_t = \left[ \left( \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{Y_t} - \frac{\alpha}{2} Y_t \right] dt + dW_t$$

ในทำนองเดียวกันกับหัวข้อ 3.1 โดยวิธี LTDRM จะได้ค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}(y, Y_k; \theta)$  ของกระบวนการอิตโต  $Y_t$  โดยที่  $Y_t = \frac{2\sqrt{X_t}}{\sigma}$

ในการเปรียบเทียบความแม่นยำของการประมาณค่า จะเลือกพารามิเตอร์  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$  มาแบบสุ่มและทำการคำนวณด้วยวิธี LTDRM จะได้  $f_Y^{DRM}(y, Y_k; \theta)$  แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าจริง  $f_Y$  โดยจะได้มาจากการแปลง (2.25)

$$f_Y(y, Y_k; \theta) = f_X \frac{dX}{dY} = \sigma\sqrt{X} f_X(\sigma y, \sigma Y_k; \theta)$$

โดยที่  $f_X$  มีให้ตาม (3.5) สำหรับในการทดสอบนี้ นอกจากมีการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธี LTDRM  $f_Y^{DRM}$  กับค่าจริง  $f_Y$  แล้วยังมีการเปรียบเทียบผลที่ได้จาก Shoji และ Osaki [8], เขียนแทนด้วย  $f_Y^{Shoji}$  กับค่าจริง  $f_Y$  อีกด้วย

ในปีค.ศ. 1997 Shoji และ Osaki [8] ได้เสนอการหาค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะโดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) รอบสถานะ  $Y_k$  เพื่อประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความโน้มเอียง (drift coefficient) จากสมการ (2.4) มีรูปแบบดังนี้

$$dY_t = \left( \hat{\mu}(Y_k; \theta) + \hat{\mu}'(Y_k; \theta)(Y_t - Y_k) + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mu}''(Y_k; \theta) \right) dt + dW_t \quad (3.6)$$

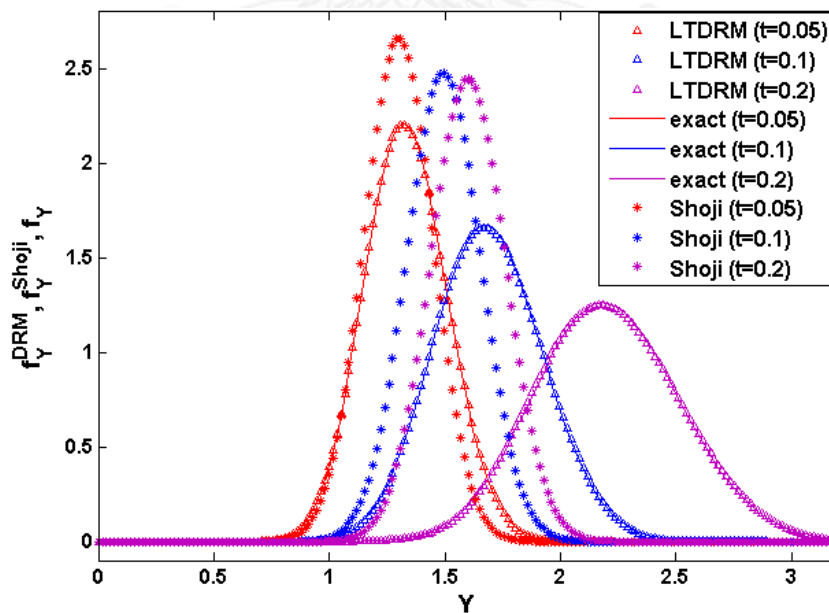
โดยที่  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  ซึ่งสมการ (3.6) สามารถจัดรูปเป็นตัวแบบ OU โดยมีพารามิเตอร์ทั้งสามเป็นดังนี้

$$\alpha = -\hat{\mu}'(Y_k; \theta), \quad \beta = Y_k - \frac{2\hat{\mu}(Y_k; \theta) + \Delta t \hat{\mu}''(Y_k; \theta)}{2\hat{\mu}'(Y_k; \theta)}, \quad \sigma = 1$$

โดยสามารถหาค่า  $f_Y^{Shoji}$  ได้จากสมการ (3.2) ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังนี้

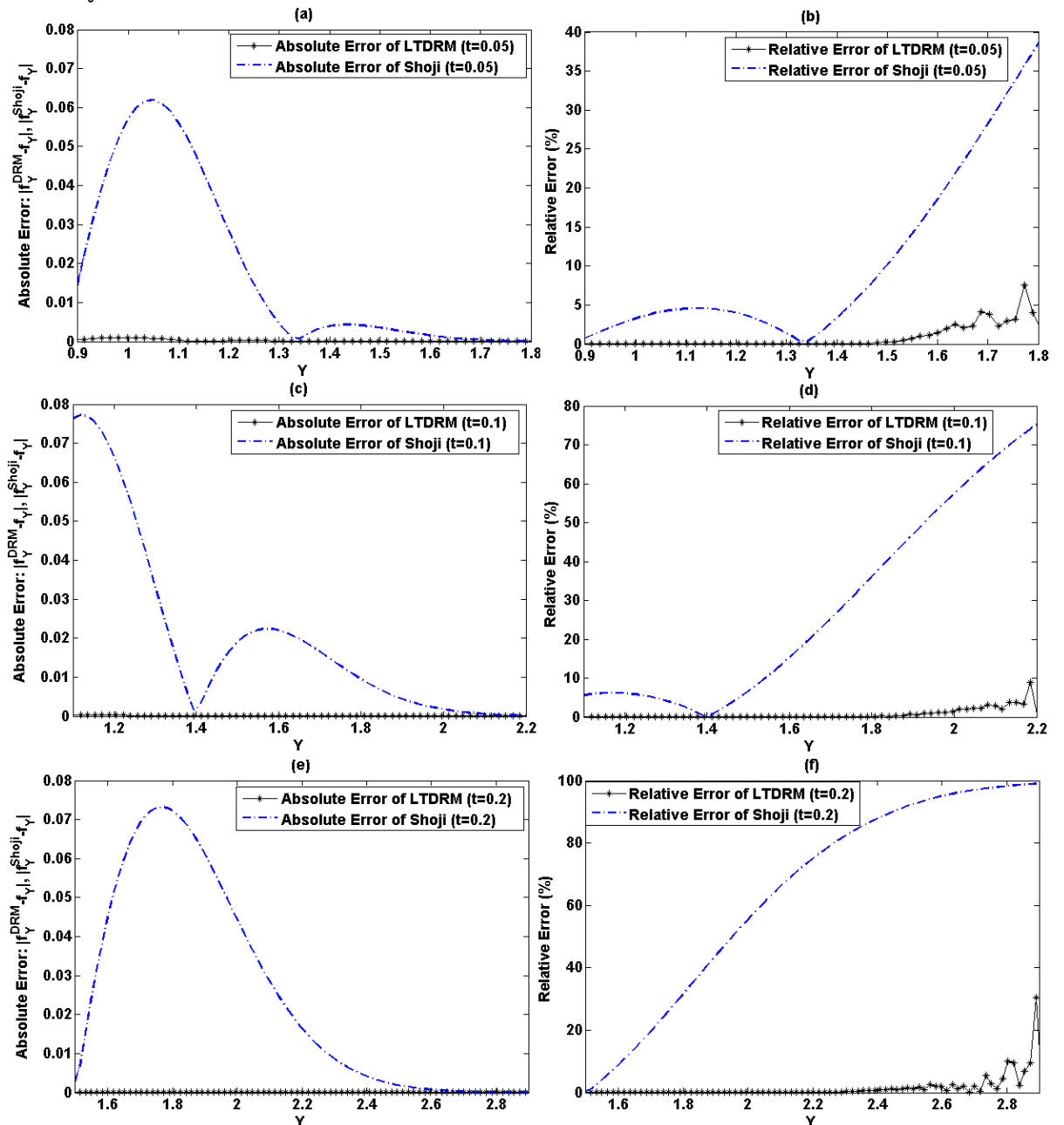
**ชุดที่ 1** สำหรับ  $\theta_1^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (1, 3, 0.7), Y_k = 0.8$  โดยที่  $t = t_{k+1} - t_k$

ผลการเปรียบเทียบค่าของ  $f_Y^{DRM}$ ,  $f_Y$  และ  $f_Y^{Shoji}$  มีแสดงในรูปที่ 7 โดยที่การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของ LTDRM และ Shoji เป็นดังรูปที่ 8



รูปที่ 7 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}, f_Y^{Shoji}$  เปรียบเทียบกับ  $f_Y$  ที่แท้จริงของตัวแบบ CIR ณ  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  บนช่วง  $[0, 3.2]$ ,  $L+2=181$  สำหรับ  $\theta_1^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (1, 3, 0.7)$  และ  $Y_k = 0.8$

จากรูปที่ 7 จะเห็นได้ว่า กราฟของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น เปลี่ยนสถานะด้วยวิธี LTDRM  $f_Y^{DRM}$  ใกล้เคียงกับกราฟของค่าจริง  $f_Y$  แต่กราฟของค่าประมาณของ Shoji และ Osaki  $f_Y^{Shoji}$  ไม่ใกล้เคียงกับกราฟของค่าจริงเลย สำหรับทั้งสามช่วงเวลาที่ทำการศึกษา ( $t = 0.05, 0.1, 0.2$ ) โดยค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  แสดงในรูปที่ 8

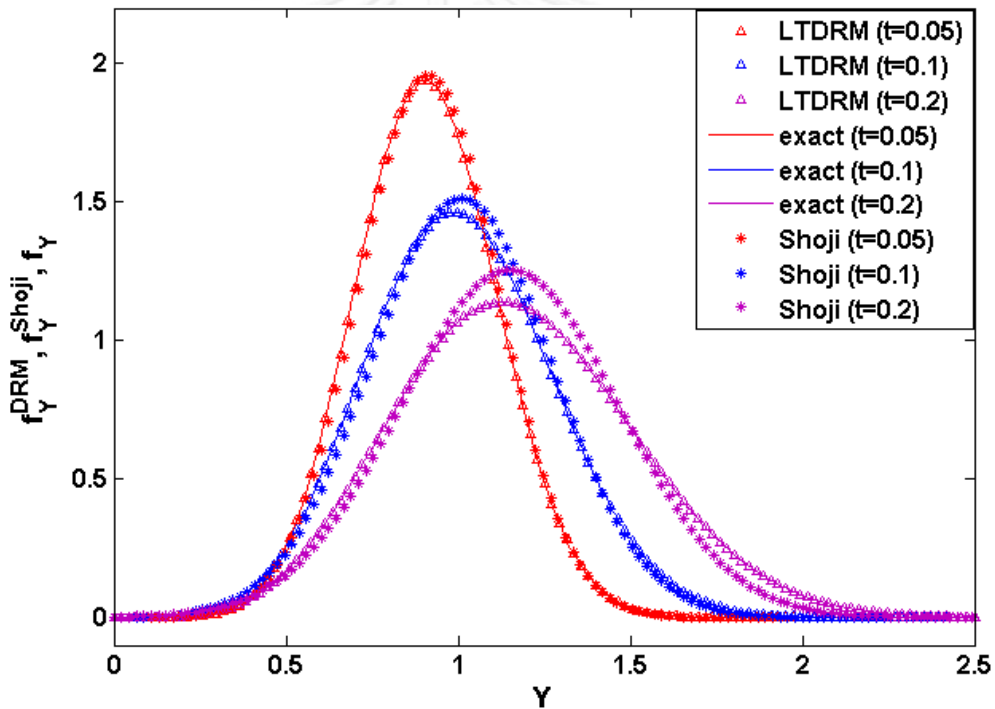


รูปที่ 8 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM และที่ได้จาก Shoji และ Ozaki ณ.  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  ตามลำดับ สำหรับ  $\theta_1^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (1, 3, 0.7)$  และ  $Y_k = 0.8$

จากรูปที่ 8 จะเห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จากการประมาณค่าด้วยวิธี LTDRM มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยวิธีที่ได้จาก Shoji และ Osaki แสดงถึงความแม่นยำของวิธี LTDRM ที่มีมากกว่าของวิธีที่ได้จาก Shoji และ Osaki นอกจากนี้ เมื่อช่วงห่างของเวลามากขึ้นหรือ  $t$  มากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จาก Shoji และ Osaki จะมีค่ามากขึ้น ตามลำดับ

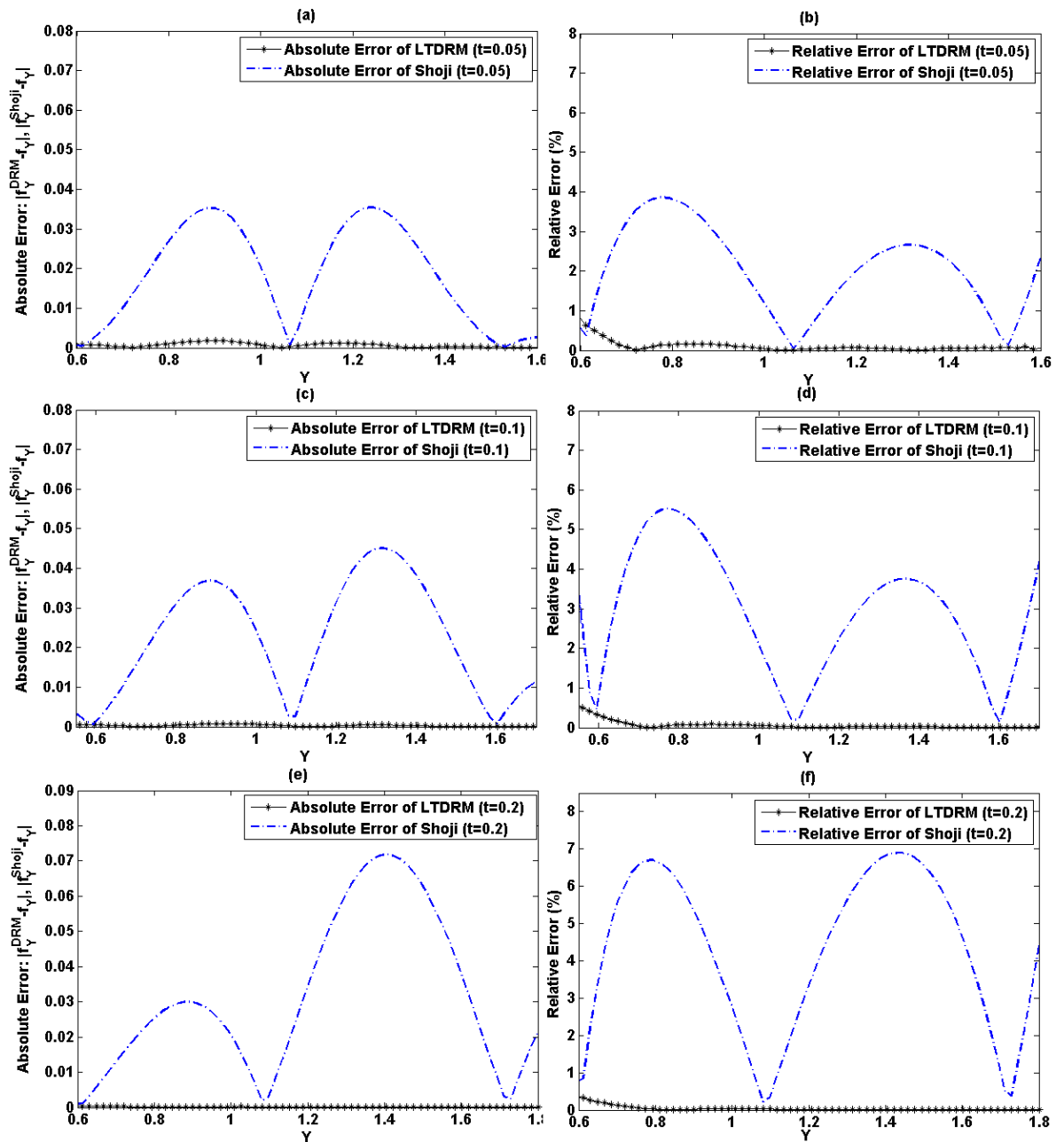
**ชุดที่ 2** สำหรับ  $\theta_2^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.7, 3.5, 1.3), Y_k = 1.0$  โดยที่  $t = t_{k+1} - t_k$

ผลการเปรียบเทียบค่าของ  $f_Y^{DRM}$ ,  $f_Y$  และ  $f_Y^{Shoji}$  มีแสดงในรูปที่ 9 โดยที่การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของ LTDRM และ Shoji มีดังรูปที่ 10



รูปที่ 9 แสดงค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$ ,  $f_Y^{Shoji}$  เปรียบเทียบกับ  $f_Y$  ที่แท้จริงของตัวแบบ CIR ณ  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  บนช่วง  $[0, 2.5]$ ,  $L+2 = 141$  สำหรับ  $\theta_2^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.7, 3.5, 1.3)$  และ  $Y_k = 1.0$

จากรูปที่ 9 จะได้ว่า กราฟของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะด้วยวิธี LTDRM  $f_Y^{DRM}$  ไม่ใกล้เคียงกับกราฟของค่าจริง  $f_Y$  และกราฟของค่าประมาณของ Shoji และ Osaki  $f_Y^{Shoji}$  ค่อนข้างใกล้เคียงกับกราฟของค่าจริงในกรณีนี้ด้วย ที่  $t = 0.05$  แต่ที่  $t = 0.1, 0.2$  ลักษณะกราฟของ  $f_Y^{Shoji}$  ไม่ใกล้เคียงกับกราฟของ  $f_Y$  โดยค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  แสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10 (a), (c), และ (e) แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (b), (d), และ (f) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (%) ของค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จาก LTDRM และที่ได้จาก Shoji และ Ozaki ณ  $t = 0.05, 0.1, 0.2$  ตามลำดับ สำหรับ  $\theta_2^{CIR} = (\alpha, \beta, \sigma) = (0.7, 3.5, 1.3)$  และ  $Y_k = 1.0$

จากรูปที่ 10 จะเห็นว่าได้ผลคล้ายกับการทดสอบชุดที่ 1 (รูปที่ 8) คือ ค่าความคลาดเคลื่อน และค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จากการประมาณค่าด้วยวิธี LTDRM มีค่าน้อยกว่าเมื่อเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยวิธีที่ได้จาก Shoji และ Ozaki แสดงถึงความแม่นยำของวิธี LTDRM ที่มีมากกว่าของวิธีที่ได้จาก Shoji และ Ozaki

จากการทดสอบด้วยชุดที่ 1 และชุดที่ 2 ข้างต้น จะเห็นว่า วิธี LTDRM จะให้ผลเหมือนกับตัวแบบ OU คือ มีความแม่นยำสำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะจริง  $f_Y$  ซึ่งจะเห็นว่าไม่ขึ้นอยู่กับชุดค่าพารามิเตอร์ที่ใช้และมีความแม่นยำมากกว่าวิธีการประมาณของ Shoji และ Osaki ซึ่งความแม่นยำอาจจะขึ้นกับชุดค่าพารามิเตอร์ด้วย (ดูผลชุดที่ 1) ซึ่งจะเห็นว่า การประมาณของ Shoji และ Osaki มีความแม่นยำมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับว่าส่วนที่หายไปในการอนุกรมเทย์เลอร์ของ  $\hat{\mu}$  มีนัยสำคัญขนาดไหน ซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ด้วย

### 3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์

ในหัวข้อนี้ จะทำการทดสอบการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการใช้ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จากวิธี LTDRM เปรียบเทียบกับค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะจริงสำหรับตัวแบบ OU ซึ่งจะใช้วิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimation: MLE) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยในที่นี้จะใช้ข้อมูลที่สร้างมาจากวิธีการของออยเลอร์-มารูยามา (Euler-Maruyama) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$x_{j+1} = x_j + \alpha(\beta - x_j)\Delta t + \sigma\varepsilon_j$$

โดยที่  $x_j$  และ  $x_{j+1}$  เป็นข้อมูลสังเกตที่อยู่ติดกันที่เกิดขึ้น ณ เวลาต่างกัน  $\Delta t$  และ  $\varepsilon_j \sim N(0, \Delta t)$  และ  $\alpha, \beta, \sigma$  เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้นมาเพื่อใช้ทดสอบ

#### 3.3.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ 1 ตัว

สมมติค่าพารามิเตอร์ 2 ตัว แล้วทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวที่เหลือ ด้วยวิธี MLE โดยที่  $n = 60$ ,  $X_k = 0.5$ ,  $t = 1/12$  โดยเราทำการเปรียบเทียบผลการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ค่าของ  $f_Y^{DRM}$  เทียบกับ  $f_Y$

ครั้งที่	$\beta=1, \sigma=1.5$ estimate $\alpha$		$\alpha=0.6, \sigma=1.5$ , estimate $\beta$		$\alpha=0.7, \beta=1.0$ , estimate $\sigma$	
	$\hat{\alpha}_{LTD RM}$	$\hat{\alpha}_{exact}$	$\hat{\beta}_{LTD RM}$	$\hat{\beta}_{exact}$	$\hat{\sigma}_{LTD RM}$	$\hat{\sigma}_{exact}$
1	1.50	1.50	0.75	0.75	1.75	1.75
2	1.25	1.25	2.00	2.00	1.25	1.25
3	0.25	0.25	0.75	0.75	1.75	1.75
4	1.25	1.25	0.50	0.50	1.50	1.50
5	0.50	0.50	0.50	0.50	1.50	1.50
6	1.25	1.25	0.50	0.50	1.50	1.50
7	0.25	0.25	0.50	0.50	1.50	1.50
8	1.50	1.50	0.50	0.50	1.25	1.25
9	0.75	0.75	1.00	1.00	2.00	2.00
10	1.25	1.25	1.00	1.00	1.75	1.75

ตารางที่ 1 แสดงค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้จากวิธี MLE ทำการทดลอง 10 ครั้ง โดยที่  $n=60$ ,  $X_k=0.5$ ,  $t=1/12$

จากตารางที่ 1 จะได้ว่า ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณด้วยวิธี MLE โดยใช้ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  คือ  $\hat{\alpha}_{LTD RM}$ ,  $\hat{\beta}_{LTD RM}$  และ  $\hat{\sigma}_{LTD RM}$  มีค่าออกมาเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการใช้  $f_Y$  จริงๆ คือ  $\hat{\alpha}_{exact}$ ,  $\hat{\beta}_{exact}$  และ  $\hat{\sigma}_{exact}$  ทุกครั้งของการทดลอง

### 3.3.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว

ประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว ด้วยวิธี MLE โดยที่  $n=60$ ,  $X_k=0.6$ ,  $t=1/12$  โดยเปรียบเทียบผลที่ได้จากการใช้  $f_Y^{DRM}$  และ  $f_Y$  จริงๆ มีผลดังตารางที่ 2

ครั้งที่	1	2	3
$\hat{\theta}_{LTD RM}$	(0.65,1.75,1.9)	(0.65,1.75,1.9)	(0.65,1.75,1.9)
$\hat{\theta}_{exact}$	(0.65,1.75,1.9)	(0.65,1.75,1.9)	(0.65,1.75,1.9)

ตารางที่ 2 แสดงค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้จากวิธี MLE ทำการทดลอง 3 ครั้ง โดยที่  $n=60$ ,  $X_k=0.6$ ,  $t=1/12$

จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่า ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ด้วยวิธี MLE โดยใช้ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  คือ  $\hat{\theta}_{LTD RM}$  จะมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการใช้  $f_Y$  ค่าจริงคือ  $\hat{\theta}_{exact}$  ทุกครั้งของการทดลอง

จากการทดสอบ 3.3.1 และ 3.3.2 เห็นได้ชัดว่า ค่าประมาณค่าพารามิเตอร์  $\hat{\theta}_{LTD\text{DRM}}$  ที่ได้มาจาก  $f_Y^{DRM}$  จะมีค่าออกมาเหมือนกันกับค่าที่ได้โดยใช้  $f_Y$  จริงๆ ทำให้เห็นว่าสามารถนำ  $f_Y^{DRM}$  ที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับกระบวนการอิโตที่ไม่ทราบค่า  $f_Y$  จริงๆ ได้ ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี MLE





## บทที่ 4

### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้สามารถนำวิธี LTDRM มาใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ โดยไม่มีการประมาณค่าฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยซึ่งเป็นค่าเริ่มต้นของปัญหา (2.5) – (2.7) เพื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการอิโตหนึ่งมิติแบบ time homogeneous ด้วยวิธี MLE ในที่นี้เราได้ทำการทดสอบเปรียบเทียบค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะจากวิธี LTDRM กับค่าแท้จริงของกระบวนการอิโตของตัวแบบ OU และ ตัวแบบ CIR แล้วนำค่าประมาณนั้นไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ OU

จากการทดสอบเปรียบเทียบผลของค่าประมาณของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะที่ได้จากวิธี LTDRM กับค่าจริงในบทที่ 3 หัวข้อ 3.1 และ 3.2 (ดูรูปที่ 3-10 ประกอบ) เพียงพอที่จะสรุปได้ว่าวิธี LTDRM สามารถนำไปใช้ประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะได้อย่างแม่นยำ และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าประมาณด้วยวิธีอื่น เช่น ของ Shoji และ Osaki [8] วิธี LTDRM จะให้ความถูกต้องที่มากกว่าสำหรับในแต่ละชุดค่าพารามิเตอร์ (ดูรูปที่ 7-10 ในบทที่ 3) นอกจากนี้ ในการทดสอบนำค่าประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f_Y^{DRM}$  จากวิธี LTDRM ไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี MLE ยังให้ผลตรงเช่นเดียวกับการใช้ค่าจริง  $f_Y$  ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ (ดูหัวข้อ 3.3 ตารางที่ 1-2) แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประมาณค่าและการนำไปใช้ได้จริงสำหรับกระบวนการอิโตในกรณีที่มีข้อมูลจริงของ  $f_Y$  หาไม่ได้

สำหรับความแม่นยำของวิธีการ LTDRM ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 จะขึ้นอยู่กับ 3 ปัจจัยหลัก คือ การเลือกฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง  $f_j$  การประมาณค่าของ  $q$  หรือ  $F'$  ในแต่ละจุด และการแปลงลาปลาซผกผันด้วยวิธีการ Stehfest's algorithm ตามหลักการ [6,7] ในกรณีของ  $f_j$  การประมาณด้วยวิธี LTDRM จะมีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อใช้จำนวนจุดมากขึ้นหรือใช้  $r = 2, 3, 4, \dots$  และในกรณีของการประมาณ  $q$  ซึ่งในที่นี้ใช้ผลต่างกลางนั้น จะมีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อจำนวนจุดที่ใช้มีมากขึ้น ส่วนในกรณีของวิธีการ Stehfest's algorithm จะขึ้นอยู่กับ  $N_p$  ซึ่งจะมีความแม่นยำที่สุดเมื่อ  $N_p = 16$  [9]

สำหรับข้อเสนอแนะของผู้จัดทำ มีดังนี้ ระเบียบวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ชิ้นนี้เหมาะสำหรับกระบวนการอิโตหนึ่งมิติแบบ time homogeneous ซึ่งในกรณีสำหรับกระบวนการอิโตหนึ่งมิติแบบ time inhomogeneous (สัมประสิทธิ์ความโน้มเอียงและการแพร่เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา) จะพบว่า

มีสิ่งที่ต้องพิจารณาเพิ่มเติม คือการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ความโน้มเอียง  $\hat{\mu}(t, Y; \theta)$  เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวขึ้นกับเวลา หากสามารถแก้ปัญหาลงในตอนนี้ได้ ผู้ที่สนใจสามารถนำวิธีการในวิทยานิพนธ์ชิ้นนี้ไปประยุกต์ใช้ต่อไปได้ นอกจากนี้ ในกรณีที่กระบวนการไอโตมีมิติมากกว่าหนึ่งหรือเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกกรมทั้งแบบ time inhomogeneous ผู้ที่สนใจสามารถนำแนวคิดนี้ไปปรับปรุงวิธีการให้เหมาะสมต่อไป



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

## รายการอ้างอิง

1. A.S. Hurn, and K.A. Lindsay, *Estimating the Parameters of Stochastic Differential Equations*. Mathematics and Computers in Simulation, 1999. **48**: p. 373-384.
2. A.S. Hurn, J. Jeisman, and K.A. Lindsay, *Seeing the Wood for the Trees: A Critical Evaluation of Methods to Estimate the Parameters of Stochastic Differential Equations*. Journal of Financial Econometrics, 2006. **5**(3): p. 390-455.
3. B. Jensen, and R. Poulsen, *Transition Densities of Diffusion Processes: Numerical Comparison of Approximation Techniques*. Journal of Derivatives, 2002. **9**: p. 18-32.
4. A.W. Lo, *Maximum Likelihood Estimation of Generalized Ito Processes with Discretely Sampled Data*. Econometric Theory, 1988. **4**: p. 231-247.
5. P.W. Partridge, and C.A. Brebbia, *Computer implementation of the BEM dual reciprocity method for solution of general field equation*. Comm. Appl. Num. Meth., 1990. **6**: p. 83-92.
6. S. Rujivan, *Solving Second-order Ordinary Linear Differential Equations with Dual Reciprocity Method*, Senior Project, Department of Mathematics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, 1997.
7. S. Rujivan, *DRM Solutions to Two-dimensional Linear Wave Equations*, Master's Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, 1999.
8. I. Shoji, and T. Ozaki, *Comparative Study of Estimation Methods for Continuous Time Stochastic Processes*. Journal of Time Series Analysis, 1997. **18**: p. 485-506.
9. H. Stehfest, *Numerical inversion of Laplace transforms*. Communications of the ACM, 1970. **13**(1): p. 47-49.

## ภาคผนวก

ในบทนี้จะอธิบายโปรแกรมที่เขียนขึ้นด้วย MATLAB (R2011B) สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะด้วยวิธี LTDRM ซึ่งประกอบด้วย 2 โปรแกรมหลักๆ ที่เกี่ยวกับ DRM และ Stehfest's algorithm

### 1. DRM

DRM เป็นโปรแกรมที่เขียนเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (2.7) - (2.8) ในบทที่ 2

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \delta(y - Y_k) = \hat{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} + \left( s + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial y} \right) F$$

$$\lim_{y \rightarrow a^+} \left( \hat{\mu} F - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{y \rightarrow b^-} \left( \hat{\mu} F - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0$$

โดยที่  $F(y; s)$  คือ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f(y; t)$  มีโครงสร้าง ดังนี้

1.1. ส่วนรับข้อมูล (Input):  $s, n, a, b, x_k, \alpha, \beta, \sigma, \text{deg}$

โดยที่  $s$  แทน จุดบนช่วง  $[a, b]$

$n$  แทน จำนวนช่องที่แบ่งเพื่อใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน  $F$

$x_k$  แทน สถานะเริ่มต้นของกระบวนการ

$(\alpha, \beta, \sigma)$  แทน เวกเตอร์พารามิเตอร์

$\text{deg}$  แทน ดีกรีของฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง  $f_j$

1.2. ส่วนแสดงผล (Output): จะแสดงผล  $u1$  คือ ค่าประมาณของ  $F(y; s)$  สำหรับ  $y \in [a, b]$

1.3. ส่วนเรียกใช้ฟังก์ชันอื่น: เพื่อสร้างเมทริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณ ประกอบด้วย (ดูบทที่ 2)

1.3.1.  $H(a, b, n)$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $H$

1.3.2.  $G(a, b, n)$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $G$

1.3.3.  $UB(a, b, n, \text{deg})$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\bar{U}$

1.3.4.  $QB(a, b, n, \text{deg})$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\bar{Q}$

1.3.5.  $t(n, s, \text{ap})$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\tilde{t}$

1.3.6.  $r(a, b, n, \text{ap}, \text{bt})$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\tilde{r}$

1.3.7.  $FB1i(a, b, n, \text{deg})$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\bar{f}^{-1}$

1.3.8.  $W(a, x_k, b, n)$  ทำหน้าที่สร้างเมทริกซ์  $\bar{W}$

DRM.m (main program)

```

function u1=DRM(s,n,a,b,xk,ap,bt,sm,deg)
m=inline('ap*(bt-x)','ap','bt','x');
%m=inline('(((2*ap*bt)/(sm^2))-(1/2))*(1/x))-
((ap*x)/2)','ap','bt','sm','x');
hl=(b-a)/n;
H1=H(a,b,n);
G1=G(a,b,n);
UB1=UB(a,b,n,deg);
QB1=QB(a,b,n,deg);
t0=t(n,s,ap);
r0=r(a,b,n,ap,bt);
F1i=FB1i(a,b,n,deg);
K=((H1*UB1)-(G1*QB1))*F1i;
WB=W(a,xk,b,n);
T1=K*t0;
R1=K*r0;
HT=H1-(2/sm^2)*T1;
GR=G1+(2/sm^2)*R1;
for i=1:n+1
    S1c(i,1)=- (2/sm^2)*WB(i,1);
end
ma=m(ap,bt,a);
mb=m(ap,bt,b);
for i=1:n+1
    HT(i,1)=HT(i,1)-((2/sm^2)*ma*GR(i,1)-(GR(i,3)/(2*hl)));
    HT(i,2)=HT(i,2)-((2/sm^2)*mb*GR(i,2)+(GR(i,n+1)/(2*hl)));
    HT(i,3)=HT(i,3)+(GR(i,4)/(2*hl));
    HT(i,n+1)=HT(i,n+1)-(GR(i,n)/(2*hl));
    for j=4:n
        HT(i,j)=HT(i,j)-((GR(i,j-1)-GR(i,j+1))/(2*hl));
    end end
u=HT\S1c;
u0=zeros(1,n-1);
for k=1:n-1
    u0(k)=u(k+2);
end
u1=[u(1) u0 u(2)];

```

```

function HC=H(a,b,n)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
dw=inline('(heaviside(x-xl)-heaviside(xl-x))/2.0');
HC=zeros(n+1,n+1);
for r=1:n+1
    HC(r,1)=dw(a,xl(r));
    HC(r,2)=-dw(b,xl(r));
end
D=eye(n+1,n+1);
D(1,1)=0.5;
D(2,2)=0.5;
HC=D+HC;

```

```

function GC=G(a,b,n)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
w=inline('(abs(x-xl))/2');
GC=zeros(n+1,n+1);
for r=1:n+1
    GC(r,1)=w(a,xl(r));
    GC(r,2)=-w(b,xl(r));
end

```

```

function U=UB(a,b,n,deg)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
for c=1:n+1
    for r=1:n+1
        if deg==0
            U(r,c)=u_ATPS(xl(r),xl(c));
        elseif deg==1
            U(r,c)=u1(xl(r),xl(c));
        elseif deg==2
            U(r,c)=u2(xl(r),xl(c));
        end
    end
end

```

```

        else
            U(r,c)=u3(xl(r),xl(c));
        end
    end
end
end

```

```

function u=u_ATPS(x,xl)
if x > xl
    u = ((x-xl)^4)*((log(x-xl)/12)-(7/144));
elseif x==xl
    u=0;
else
    u = ((xl-x)^4)*((log(xl-x)/12)-(7/144));
end
function u=u1(x,xl)
if x >= xl
    u = ((x-xl)^2)/2+((x-xl)^3)/6;
else
    u = ((xl-x)^2)/2+((xl-x)^3)/6;
end
function u=u2(x,xl)
if x >= xl
    u = ((x-xl)^2)/2+((x-xl)^3)/6+((x-
xl)^4)/12;
else
    u = ((xl-x)^2)/2+((xl-x)^3)/6+((xl-
x)^4)/12;
end
function u=u3(x,xl)
if x >= xl
    u = ((x-xl)^2)/2+((x-xl)^3)/6+((x-
xl)^4)/12+((x-xl)^5)/20;
else
    u = ((xl-x)^2)/2+((xl-x)^3)/6+((xl-
x)^4)/12+((xl-x)^5)/20;
end

```

```

function Q=QB(a,b,n,deg)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
for c=1:n+1
    for r=1:n+1
        if deg==0
            Q(r,c)=q_ATPS(xl(r),xl(c));
        elseif deg==1
            Q(r,c)=q1(xl(r),xl(c));
        elseif deg==2
            Q(r,c)=q2(xl(r),xl(c));
        else
            Q(r,c)=q3(xl(r),xl(c));
        end
    end
end
end

```

```

function q=q_ATPS(x,xl)
if x > xl
    q = ((x-xl)^3)*((log(x-xl)/3)-(1/9));
elseif x==xl
    q=0;
else
    q = -((xl-x)^3)*((log(xl-x)/3)-(1/9));
end

```

```

function q=q1(x,xl)
if x >= xl
    q = ((x-xl)^2)/2+(x-xl);
else
    q = -((xl-x)^2)/2-(xl-x);
end

```



```

function q=q2(x,xl)
if x >= xl
    q = ((x-xl)^3)/3+((x-xl)^2)/2+(x-xl);
else
    q = -((xl-x)^3)/3-((xl-x)^2)/2-(xl-x);
end

function q=q3(x,xl)
if x >= xl
    q = ((x-xl)^4)/4+((x-xl)^3)/3+((x-
xl)^2)/2+(x-xl);
else
    q = -((xl-x)^4)/4-((xl-x)^3)/3-((xl-
x)^2)/2-(xl-x);
end

```

```

function tt=t(n,s,ap)
tt=zeros(n+1,n+1);
for r=1:n+1
    tt(r,r)=s-ap;
end

```

```

function rt=r(a,b,n,ap,bt)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
r0=inline('ap*(bt-x)','ap','bt','x'); %dx=ap(bt-x)dt+sm dw
rt=zeros(n+1,n+1);
for r=1:n+1
    rt(r,r)=r0(ap,bt,xl(r));
end

```

```

function f=FB1i(a,b,n,deg)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
for c=1:n+1

```

```

for r=1:n+1
    if deg==0
        fb(r,c)=f_ATPS(xl(r),xl(c));
    elseif deg==1
        fb(r,c)=1+abs(xl(r)-xl(c));
    elseif deg==2
        fb(r,c)=1+abs(xl(r)-xl(c))+(abs(xl(r)-
xl(c)))^2;
    else
        fb(r,c)=1+abs(xl(r)-xl(c))+(abs(xl(r)-
xl(c)))^2+(abs(xl(r)-xl(c)))^3;
    end
end
end
fb;
f=inv(fb);
function f=f_ATPS(x,xl)
if x == xl
    f=0;
else
    f=(abs(x-xl)^2)*log(abs(x-xl));
end

```

```

function WI=W(a,xk,b,n)
hl=(b-a)/n;
x0=a+hl:hl:b-hl;
xl=[a b x0];
w0=inline('abs(x-xl)/2');
for c=1:n+1
    WI(c)=w0(xk,xl(c));
end
WI=WI';

```

## 2. Stehfest's algorithm

Stehf.m เป็นโปรแกรมที่เขียนเพื่อหาค่าประมาณของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะโดยใช้ Stehfest's algorithm ในการแปลงลาปลาซผกผันของค่าประมาณผลเฉลยของปัญหาค่าขอบที่ได้จากโปรแกรม DRM ซึ่งโปรแกรมประกอบด้วย 3 ส่วน ดังนี้

### 2.1. ส่วนรับข้อมูล (Input): $\alpha, \beta, \sigma, x_k, n, t, a, b, \text{deg}$

เป็นพารามิเตอร์เหมือนกับที่อธิบายในโปรแกรมของ DRM ยกเว้น  $t > 0$  เป็นพารามิเตอร์ของเวลา

2.2. ส่วนแสดงผล (Output):  $f_2$  คือ ค่าประมาณของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ  $f(y;t)$  สำหรับ  $y \in [a,b]$

2.3. ส่วนเรียกใช้ฟังก์ชันอื่น: มีการเรียกใช้โปรแกรม DRM ตามที่ได้อธิบายแล้วในหัวข้อข้างบน

Stehf.m

```
function f2=Stehf(ap,bt,sm,xk,n,t,a,b,deg)
Np=16;
sig=Np/2;
for v=1:Np
    K=floor(0.5*(v+1));
    M=min(sig,v);
    W(v)=0.0;
    for i=K:M
        temp=(i^sig)*factorial(2*i)/(factorial(sig-i)*factorial(i)*factorial(i-1)*factorial(v-i)*factorial(2*i-v));
        W(v)=W(v)+temp;
    end
    W(v)=(-1)^(sig+v)*W(v);
end
ln_t=log(2.0)/t;
for v=1:Np
    s=ln_t*v;
    FL(v,:)=DRM(s,n,a,b,xk,ap,bt,sm,deg)';
end
for i=1:n+1
    WF(i)=0.0;
    for v=1:Np
        tem=W(v)*FL(v,i);
```

```
    WF(i) = WF(i) + tem;  
end  
end  
f2 = ln_t * WF;
```



### ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวพิริยา ปรงเลิศบัวทอง เกิดวันพุธที่ 19 เมษายน พ.ศ. 2532 ที่อำเภอหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ในปีการศึกษา 2553 ด้วยทุนการศึกษาของโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) และได้รับทุนต่อเนื่องจึงเลือกศึกษาต่อระดับปริญญาโทที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปี พ.ศ. 2554

สำหรับผลงานทางวิชาการในระหว่างการจัดทำวิทยานิพนธ์ ได้มีการนำเสนอผลงานและเผยแพร่ในการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2556 (Annual Pure and Applied Mathematics Conference: APAM 2013) ระหว่างวันที่ 9 – 10 พฤษภาคม 2556 ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และได้มีการนำเสนอผลงานทางวิชาการในงาน The Asian Mathematical Conference 2013 (AMC2013) ระหว่างวันที่ 30 มิถุนายน – 4 กรกฎาคม 2556 ณ ศูนย์การประชุม BEXCO เมือง Busan ประเทศสาธารณรัฐเกาหลี



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
**CHULALONGKORN UNIVERSITY**