การกำหนดราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองภายใต้การมรณะของประชากรไทย

นางสาวอุษา อินทร์เมือง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการประกันภัย ภาควิชาสถิติ
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2557

PRICING OF GUARANTEED ANNUITY OPTIONS UNDER THAI POPULATION MORTALITY

Miss Usa Oinmueng

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Insurance
Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University
Academic Year 2014

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การกำหนดราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองภายใต้การมรณะของประชากรไทย
โดย	นางสาวอุษา อินทร์เมือง
สาขาวิชา	การประกันภัย
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.สุวาณี สุรเสียงสังข์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

--คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

(รองศาสตราจารย์ ดร.พสุ เดชะรินทร์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

--ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วัลภา ประกอบผล)

--อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุวาณี สุรเสียงสังข์)

--กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ เสาวรส ใหญ่สว่าง)

--กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.ทศพร แถลงธรรม)

อุษา อินทร์เมือง : การกำหนดราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองภายใต้การมรณะของประชากรไทย (PRICING OF GUARANTEED ANNUITY OPTIONS UNDER THAI POPULATION MORTALITY) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ. ดร.สุวาณี สุรเสียงสังข์, 80 หน้า.

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอการกำหนดราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองภายใต้การประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าและการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบวาซิเซก (Vasicek model) ชุดของข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยนี้มีดังนี้คือ 1) จำนวนประชากรจำแนกตามอายุและเพศระหว่างปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553 จากกระทรวงมหาดไทย 2) จำนวนตายจำแนกตามอายุและเพศ ระหว่างปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553 จากกระทรวงสาธารณสุข และ 3) ราคาพันธบัตรรัฐบาลระหว่างปี พ.ศ. 2544 - พ.ศ. 2557 ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปี และเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปี จนถึง 30 ปี จากสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย

ผลการศึกษาพบว่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพของผู้รับเงินรายปีสูงขึ้นมากกว่าเมื่ออยู่ถึงวันครบกำหนด ราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยของการลงทุนระยะสั้นมีค่าต่ำกว่าการลงทุนระยะยาว ส่งผลให้ราคาและมูลค่าของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองมีค่าลดลงเมื่อผู้เอาประกันภัยมีอายุเข้าใกล้วัยเกษียณอายุ

ภาควิชา	สถิติ	ลายมือชื่อนิสิต	....
สาขาวิชา	การประกันภัย	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....
ปีการศึกษา	2557		

5481734026 : MAJOR INSURANCE
KEYWORDS: MORTALITY RATE / INTEREST RATE / OPTIONS / GUARANTEED ANNUITY

USA OINMUENG: PRICING OF GUARANTEED ANNUITY OPTIONS UNDER THAI POPULATION MORTALITY. ADVISOR: ASSOC. PROF. SUWANEE SURASIENGSUNK, Ph.D., 80 pp.

This research is presented the pricing of guaranteed annuity options under estimation of mortality rates by forward mortality factor models and estimation of interest rates by Vasicek models. Data sets used in this research are as follows: i) the number of population classified by age and gender between year 1972 - 2010 from the Ministry of Interior, ii) the number of death by age and gender between year 1972 - 2010 from the Ministry of Public Health, and iii) the government bonds prices during year 2001 - 2014 with remain of 1 year 2 year and 1 year increments until 30 years from Thai Bond Market Association.

The results show that the survival probability of annuitant is much higher when living to the maturity date. The price of zero-coupon bonds in short term is lower than those in long term. Then the prices of guaranteed annuity options and their value have decreased as the insured approaches to retirement age.

Department:	Statistics	Student's Signature	....
Field of Study:	Insurance	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2014		

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยความมานะพยายามและความตั้งใจของผู้วิจัย รวมถึงความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากรองศาสตราจารย์ดร.สุวาณี สุรเสียงสังข์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่มอบทั้งวิชาความรู้คำแนะนำเกี่ยวกับการแก้ไขปัญหาต่างๆ รวมถึงความดูแลเอาใจใส่ให้ผู้วิจัยได้มีกำลังใจในการศึกษาค้นคว้า ทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยจึงขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์วัลภา ประกอบผล รองศาสตราจารย์เสาวรส ใหญ่สว่าง และอาจารย์ ดร.ทศพร แถลงธรรม ที่สละเวลาอันมีค่าของท่านมาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์รวมทั้งให้คำชี้แนะในการปรับปรุงแก้ไขงานวิจัยฉบับนี้ให้มีความครบถ้วนสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย สำนักงานปลัดกระทรวงสาธารณสุขและกระทรวงมหาดไทย ที่สนับสนุนการทำวิจัยนี้โดยให้ข้อมูลเพื่อนำมาศึกษาอย่างครบถ้วนทำให้งานวิจัยดำเนินไปอย่างราบรื่น

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติๆ ที่ให้การสนับสนุนการศึกษาในทุกๆ ด้านอีกทั้งคอยให้กำลังใจ ให้ข้อคิด ชี้แนะแนวทางการปฏิบัติเพื่อนำไปสู่ความสำเร็จและขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ภาควิชาสถิติ สาขาการประกันภัยทุกๆ ท่านที่คอยช่วยเหลือให้คำปรึกษามอบความหวังดีกับผู้วิจัยเสมอมา

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูปภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ประเทศไทยเป็นประเทศหนึ่งที่กำลังประสบปัญหาการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของประชากร เนื่องจากอัตราการเกิดลดลงในขณะที่อายุขัยของประชากรเพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นผลจากความก้าวหน้าทางการแพทย์และการดูแลสุขภาพของตนเองมากขึ้น (วิพรรณ ประจวบเหมาะ และ ชลธิชา อัศวนิรันดร, 2556) ประชากรที่กำลังจะเข้าสู่วัยผู้สูงอายุ จึงต้องเตรียมความพร้อมเพื่อให้ตนเองมีสวัสดิการและสามารถดำรงชีวิตด้วยความเป็นอยู่ที่ดี เช่นเดียวกับก่อนเกษียณอายุด้วยการวางแผนทางการเงินให้กับตนเอง ปัจจุบันบริษัทประกันชีวิตต่างๆ ได้เห็นความสำคัญในด้านนี้เป็นอันมากจึงมีการออกแบบประกันชีวิตหลายแบบด้วยกัน แบบประกันชีวิตที่เหมาะกับวัยเกษียณอายุ คือ แบบเงินรายปี (Annuity) โดยบริษัทตกลงจ่ายเงินจำนวนหนึ่งเท่ากันอย่างสม่ำเสมอให้แก่ผู้เอาประกันภัยเป็นรายงวด นับตั้งแต่ผู้เอาประกันภัยเกษียณอายุ ปัญหาคือ บริษัทได้คำนวณอัตราเบี้ยประกันภัย และเงินสำรอง โดยกำหนดข้อตกลงเบื้องต้น (assumption) ที่สำคัญคือ อัตรามรณะ (Mortality Rate) และอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate) ซึ่งอัตราดอกเบี้ยในที่นี้จะไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา แม้ว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเปลี่ยนแปลงหรืออัตรามรณะจะเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลา ทำให้บริษัทประกันภัยต้องวางแผนการลงทุนอย่างระมัดระวังเพื่อให้มีสินทรัพย์เพียงพอที่จะจ่ายให้แก่ผู้เอาประกันภัย

ตราสารอนุพันธ์ (Derivatives) เป็นเครื่องมือทางการเงินชนิดหนึ่งที่นิยมใช้เพื่อการบริหารความเสี่ยงที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงที่ไม่แน่นอนเรื่องต่างๆ ของกิจการหรือกลุ่มการลงทุน เช่น การเปลี่ยนของอัตราดอกเบี้ย หรืออัตราแลกเปลี่ยนซึ่งส่งผลกระทบต่อกระแสเงินสดรับและกระแสเงินสดจ่ายของกิจการ เป็นต้น อนุพันธ์ประเภทหนึ่งที่ได้รับความนิยม คือ อนุพันธ์ออปชัน หรือตราสารสิทธิ (Options) ซึ่งเป็นอนุพันธ์ที่มีลักษณะของการให้สิทธิแก่ผู้ถือครองในการเลือกตัดสินใจที่จะซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying Assets) หรือไม่ก็ได้เมื่อครบกำหนดอายุของสัญญา (พรอนงค์ บุษราตระกูล, 2547) ทำให้ตราสารสิทธิสามารถสร้างกระแสเงินให้กับผู้ลงทุนได้ โดยขึ้นกับทิศทางของราคาหลักทรัพย์อ้างอิงที่ผู้ลงทุนคาดว่าจะเกิดขึ้นจริงในอนาคต นักคณิตศาสตร์ประกันภัยซึ่งมีหน้าที่กำหนดราคาหรือคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่คาดว่าจะมีการจ่ายในอนาคตจากแบบประกันชีวิตต่างๆ โดยเฉพาะสัญญาประกันภัยแบบเงินรายปี (Annuity) ที่จะให้กระแสเงิน

สดหลังเกษียณอายุ ซึ่งเป็นกระแสเงินที่ยากต่อการกำหนดมูลค่าหรือราคา สามารถเทียบเคียงกับเครื่องมือทางการเงินที่มีการซื้อขายในตลาดคือตราสารสิทธิ (Options) การลงทุนในตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) เป็นการบริหารความเสี่ยงวิธีหนึ่งสำหรับบริษัทประกันชีวิตต่างๆ ในประเทศอังกฤษ โดยปัจจัยที่อาจมีผลให้การกำหนดราคา (Pricing) ของกระแสเงินที่จะได้รับจากการลงทุนไม่เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้คือ อาจเกิดการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะและความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest rate risk) การเลือกวิธีคำนวณอัตรามรณะและอัตราดอกเบี้ยจึงควรสอดคล้องและมีค่าใกล้เคียงกับเหตุการณ์ที่อาจเกิดขึ้นในอนาคตเพื่อป้องกันความเสี่ยงที่จะเกิดขึ้นกับบริษัทประกันภัยให้มากที่สุด

ในต่างประเทศได้มีการสร้างและนำตัวแบบทางคณิตศาสตร์ตัวแบบหนึ่งมาประยุกต์ใช้ในการหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง นั่นคือ ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) โดยตัวแบบนี้จะคำนวณอัตรามรณะ ณ อายุครบกำหนดการรับเงินรายปีของผู้เอาประกันภัยแทนอายุปัจจุบันที่ผู้เอาประกันภัยเริ่มทำประกันภัย และสำหรับอัตราดอกเบี้ยที่ใช้ในการหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองนั้น โดยทั่วไปแล้วจะใช้อัตราดอกเบี้ยที่มีค่ากำหนดแน่นอนชัดเจน แต่อัตราดอกเบี้ยที่ผู้รับประกันภัยคาดว่าจะได้รับจากการนำสินทรัพย์ไปลงทุนนั้นในความเป็นจริงจะมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา จึงได้มีการสร้างตัวแบบในการคำนวณอัตราดอกเบี้ยหลายตัวแบบด้วยกัน เช่น ตัวแบบของฮัลล์ ไวท์ (Hull-White Model) ตัวแบบของค็อกซ์ อินเกอร์ซอลล์ รอสส์ (Cox-Ingersoll-Ross Model) ตัวแบบของวาซิเซก (Vasicek Model) และตัวแบบของ แบล็คคาราซินส์กี (Black-Karasinski Model) เป็นต้น ซึ่งตัวแบบเหล่านี้เป็นตัวแบบที่ใช้คำนวณการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยอย่างแพร่หลาย ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาตัวแบบที่ใช้ในการคำนวณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) และการหาอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของวาซิเซก (Vasicek Model) มาใช้ในการหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อคาดประมาณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) สำหรับประชากรไทย

2. เพื่อคำนวณหาอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของวาซิเซก (Vasicek Model)

3. เพื่อคำนวณหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองโดยใช้อัตรามรณะจากกตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) และอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของวาซิเซก

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. ข้อมูลสำหรับการหาอัตรามรณะใช้ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีและจำนวนประชากรที่ตายระหว่างปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553

2. ข้อมูลสำหรับการประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยใช้ข้อมูลพันธบัตรที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยระหว่างปี พ.ศ. 2544 - พ.ศ. 2557 ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปีและเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปีจนถึง 30 ปี

3. ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum-Likelihood Estimation: MLE)

4. การคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองจะทำการคำนวณสำหรับคนอายุ 30 ปี 35 ปี 40ปี 45 ปี 50 ปี และ 55 ปี

5. แบบประกันชีวิตเงินรายปีรับรองจะครบกำหนดการจ่ายเงินรายปีเมื่อคนอายุ 60 ปี

1.4 ข้อกำหนดเบื้องต้น

1. การคำนวณค่าต่างๆ อยู่ภายใต้ความเสี่ยงที่เป็นกลาง (Risk-neutral)

2. ตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) อยู่ในสถานะที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying Asset) ณ ขณะนั้นเท่ากับราคาใช้สิทธิ (Exercise Price)

1.5 ข้อจำกัดของการวิจัย

1. การประมาณค่าอัตรามรณะใช้ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) สำหรับประชากรไทย

2. การประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยใช้ตัวแบบของวาซิเซก

3. ข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลไทยที่นำมาศึกษาระหว่างปี พ.ศ. 2544 - พ.ศ. 2557 ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปีและเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปีจนถึง 30 ปี จากสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย (The Thai Bond Market Association)

4. ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีจากสำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทยและจำนวนตายของประชากรระหว่างปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553 มาจากสถิติสาธารณสุข สำนักนโยบายและยุทธศาสตร์ สำนักงานปลัดกระทรวงสาธารณสุข

1.6 คำจำกัดความของงานวิจัย

อัตรามรณะ (Mortality rate) หมายถึง ความน่าจะเป็นของการตายหรือความน่าจะเป็นที่คนเมื่อครบอายุหนึ่งจะเสียชีวิตไปก่อนที่จะครบอายุถัดไป

อัตราดอกเบี้ย (Interest rate) หมายถึง อัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจากการลงทุน

เงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity) หมายถึง การประกันชีวิตแบบเงินรายปีที่มีเงื่อนไขว่าจะจ่ายเงินได้ประจำให้แก่ผู้รับเงินรายปีเป็นเวลาไม่ต่ำกว่าระยะเวลาที่ตกลงกันไว้ โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้รับเงินรายปีจะมีชีวิตอยู่หรือไม่

ตราสารสิทธิ (Options) หมายถึง อนุพันธ์ทางการเงินที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือครองในการตัดสินใจซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงเมื่อถึงวันครบกำหนดสัญญาตามราคาที่ระบุไว้

อัตราตายกลางปี (Central death rate) หมายถึง จำนวนตายของประชากรแต่ละอายุต่อจำนวนประชากรกลางปี

ราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Price of Guaranteed Annuity Options) หมายถึง ราคาของตราสารสิทธิที่นักลงทุนจ่ายเพื่อซื้อสิทธิในการถือครองสิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง

มูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Valuation of Guaranteed Annuity Options) หมายถึง มูลค่าของตราสารสิทธิในอนาคตที่นักลงทุนจะได้รับหากมีการถือครองสิทธินั้นจนถึงวันครบกำหนดกรใช้สิทธิ

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบแนวโน้มของอัตรามรณะที่คาดประมาณด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models)

2. ทราบรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยที่คำนวณด้วยตัวแบบของวาซิเซก

3. ทราบราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) ที่คำนวณด้วยอัตรามรณะจากตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) และหาอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของวาซิเซก

1.8 วิธีการดำเนินงานวิจัยโดยย่อ

1. ศึกษาความหมาย โครงสร้างและวิธีการคำนวณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models)
2. ศึกษาความหมาย โครงสร้างและวิธีการคำนวณอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของวาซิเซก
3. ศึกษาความหมาย โครงสร้างและวิธีการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง
4. เก็บรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องและปรับเปลี่ยนข้อมูลให้เหมาะสม
5. ประมาณค่าพารามิเตอร์และประมาณอัตรามรณะของตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) สำหรับประชากรไทย
6. ประมาณค่าพารามิเตอร์และคำนวณอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบของวาซิเซก
7. คำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options)
8. วิเคราะห์และสังเคราะห์ผลงานวิจัย
9. เขียนรายงานผลการวิจัย

1.9 สัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัย

x	แทน อายุ
t	แทน เวลา
N	แทน จำนวนปีทั้งหมดที่เก็บรวบรวมข้อมูล
$m_{x,t}$	แทน อัตรามรณะกลางปีรายอายุ x ในปีที่ t
a_x	แทน ค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีรายอายุ x
b_x	แทน ดัชนีเวลาของระดับอัตรามรณะกลางปี
$\varepsilon_{x,t}$	แทน ความคลาดเคลื่อนของตัวแบบ

T_1 แทน วันครบกำหนด (Maturity) ของการรับเงินรายปี

τ แทน ช่วงเวลาระหว่าง $T_1 - t$

$\mu_t(\tau, x)$ แทน พลังมรณะไปข้างหน้า

${}_{\tau}p_x(t, t+\tau)$ แทน ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี

$\alpha_t(\tau, x)$ แทน ฟังก์ชันการดริฟท์แบบมีเงื่อนไขของการรอดชีพไปข้างหน้า

G แทน ฟังก์ชันกำหนด (Deterministic Function)

Z_t แทน ตัวแปรสุ่มมิติจำกัดที่มีการแจกแจงแบบปกติ

$\sigma_t(\tau, x)$ แทน ความผันผวนของความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้า

W แทน การเคลื่อนไหวแบบบราวเนียน

$F_l\left(t_j, t_{j+1}, (\tau, x)\right)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการรอดชีพไปข้างหน้า

$\bar{F}_l^{obs}(t_j, t_{j+1})$ แทน เวคเตอร์ค่าสังเกต

$\bar{F}_l^{\mathrm{mod}}(t_j, t_{j+1})$ แทน เวคเตอร์หลัก

$\mathrm{g}_{\mathrm{x_0,T_1}}^{\mathrm{GAO}}$ แทน อัตราเงินรายปีรับรองของคนอายุ x_0 ปี ณ เวลา T_1

Q_x แทน กระบวนการเทียบเท่าแบบ Martingale

B_{T_2} แทน สินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (Risk-free Asset)

$S(t, k, x_0)$ แทน ความผันผวนของการรอดชีพของคนอายุ x_0 ปีจะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x_0 + t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก k ปี

$\upsilon(t, k)$ แทน ความผันผวนของราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond) ณ เวลา t ที่จะครบกำหนด ณ เวลา $t+k$

$\gamma(t, T_1, x_0)$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักแบบสุ่มของค่าปัจจุบัน (current value) โดยกำหนดให้มีค่าชัดเจนแน่นอน

$w_t(k)$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักที่เป็นจริงแบบเฟ้นสุ่ม (fact stochastic)

$\Phi(.)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$C_{T_1}^{GAO}$ แทน ราคาของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ณ เวลา T_1

$V_{T_1}^{GAO}$ แทน มูลค่าของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ณ เวลา T_1

$\mathrm{g}_{\mathrm{x}_0,\mathrm{T}_1}^{\mathrm{GAO}}$ แทน อัตราเงินรายปีรับรองของคนอายุ x_0 ปี ณ เวลา T_1

$\ddot{a}_{x_0+T_1}\left(T_1\right)$ แทน ค่าปัจจุบันของการจ่ายเงินรายงวดทุกต้นงวดให้กับคนอายุ x_0+T_1 ปี

$P\left(0,T_2\right)$ แทน ราคาพันธบัตรที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond) ณ ปัจจุบันที่จะครบกำหนดไถ่ถอน ณ เวลา T_2

$R\left(0,T_2\right)$ แทน อัตราดอกเบี้ย ณ วันครบกำหนดไถ่ถอน

T_2 แทน อายุที่ครบกำหนดไถ่ถอน

r_t แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

r_0 แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ณ จุดเวลาปัจจุบัน

a แทน อัตราการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย

b แทน ค่าเฉลี่ยอัตราดอกเบี้ยระยะยาว

σ_r แทน ระดับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

$P_{i,j}$ แทน สัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี ในปีที่ j

$N_{i,j}$ แทน จำนวนตายของประชากรที่อายุ i ปี ในปีที่ j

$\bar{P}_i$ แทน ค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี

$\hat{Y}_t$ แทน ค่าประมาณอัตราส่วนรายอายุ x ปีที่ t

a_1 แทน จุดตัดบนแกน Y

b_1 แทน ความชันของเส้นตรง

n แทน จำนวนช่วงเวลาทั้งหมด

$l_{x,t}$ แทน จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ทั้งหมดจนถึงอายุ x ปี ณ ปีที่ t

$d_{x,t}$ แทน จำนวนตายของคนอายุ x ปี ที่ตายภายในอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t

$L_{x,t}$ แทน จำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ x ปี ที่มีชีวิตอยู่ถึงอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t

$w_{x,t}$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักเชิงบวกของคนอายุ x ปี ในปีที่ t

$m^{*}_{x,t}$ แทน อัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้ของคนอายุ x ปี ในปีที่ t

n^{*} แทน อายุสูงสุดของข้อมูลอัตรามรณะกลางปี

h แทน ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่เป็นลบ

Δ_w แทน ผลต่างอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้ระหว่างคนอายุ x ปี กับ $x-1$ ปี ในปีที่ t

z แทน จำนวนครั้งที่หาผลต่างอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้

1.10 ลำดับขั้นตอนในการเสนอผลการวิจัย

สำหรับลำดับการเสนอผลการวิจัยในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บท โดยบทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์และข้อตกลงเบื้องต้นต่างๆ เกี่ยวกับงานวิจัยในครั้งนี้ ต่อมาในบทที่ 2 จะอธิบายถึงรายละเอียดของทฤษฎี วิธีการในการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในบทที่ 3 กล่าวถึง วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลจำนวนตายของประชากรและจำนวนประชากรกลางปี รวมถึงขั้นตอนในการปรับข้อมูลดังกล่าวให้มีความสมบูรณ์มากขึ้น บทที่ 4 กล่าวถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์และคาดประมาณอัตรามรณะด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์ และตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า ในบทที่ 5 แสดงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อนำไปใช้ในการประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของตัวแบบวาซิเซก จากนั้นจึงประมาณราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย และนำมาคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองในบทที่ 6 ลำดับสุดท้ายในบทที่ 7 จะเป็นการสรุปผลการวิจัย อภิปรายผลและข้อเสนอแนะของงานวิจัยนี้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การกำหนดราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Option) ซึ่งเป็นการลงทุนเพื่อบริหารความเสี่ยงทางหนึ่งของบริษัทผู้รับประกันภัย ปัจจัยที่อาจมีผลให้การกำหนดราคา (Pricing) ของกระแสเงินที่จะได้รับจากการลงทุนไม่เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้คือ อาจเกิดการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะและความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest rate risk) สำหรับวิธีการหาอัตราดอกเบี้ยจะต้องคำนึงถึงลักษณะที่พึงประสงค์ของตัวแบบด้วยนั้น ตัวแบบของวาซิเซก (The Vasicek Model) เป็นตัวแบบหนึ่งที่ให้สูตรในการคำนวณราคาของตราสารสิทธิที่เรียบง่าย ส่วนวิธีการคำนวณอัตรามรณะวิธีหนึ่งที่ได้มีการเสนอคือตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Model) โดยในปี 2010 แดเนียล เบเออร์ และคณะ ได้แสดงแนวคิดพื้นฐานของตัวแบบนี้ว่ามาจากการกำหนดสมการมิติอนันต์ของรูปแบบการตาย (Infinite - dimensional formulation of mortality mode) และเหมาะที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณมูลค่าและวิเคราะห์กรณีที่อัตรามรณะมีตราสารสิทธิแฝงอยู่ (Mortality - contingent embedded options) (D. Bauer, F.E. Benth, & R. Kiesel, 2010) โดยในปี 2011 นาน ชู และแดเนียล เบเออร์ ก็ได้นำตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้านี้มาประยุกต์ใช้กับการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) (N. Zhu & D. Bauer, 2011b) ดังนั้นในบทที่ 2 นี้จะแสดงรายละเอียดของทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยในครั้งนี้

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การประกันชีวิตแบบเงินรายปี (Annuity Insurance)

การวางแผนทางการเงินให้แก่ตนเองเพื่อตอบสนองการใช้จ่ายในการดำรงชีพเมื่อเกษียณอายุ หรือเพื่อให้แน่ใจว่าหากเกิดเหตุการณ์ที่ไม่คาดคิดเกิดขึ้นจะไม่ทำให้ใครเดือดร้อนนั้นสามารถทำได้หลายวิธี วิธีหนึ่งคือ การประกันชีวิตโดยรูปแบบที่เหมาะกับวัยเกษียณอายุคือ แบบเงินรายปี (Annuity Insurance) ซึ่งเป็นแบบประกันชีวิตที่ผู้รับประกันภัยจะจ่ายเงินผลประโยชน์ตามที่ระบุไว้ในสัญญาประกันภัยเป็นรายปีหรือรายเดือนให้แก่ผู้เอาประกันภัย โดยจะเริ่มจ่ายเงินรายปีตั้งแต่วันที่ได้ตกลงไว้ในสัญญาไปจนกว่าผู้เอาประกันภัยจะเสียชีวิต และผู้เอาประกันภัยต้องชำระเบี้ยประกันภัยที่สามารถชำระเบี้ยประกันภัยครั้งเดียว (Single Premium) หรือชำระเป็นรายงวด เช่น

งวดรายปี (Annual Premium) เป็นต้น สำหรับการประกันชีวิตแบบเงินรายปี สามารถแบ่งได้ 4 แบบ ดังนี้

2.1.1.1 แบบเงินรายปีตลอดชีพ (Life Annuity) ผู้รับประกันภัยจะจ่ายเงินรายปีให้แก่ผู้เอาประกันภัยตามการทรงชีพ ถ้าผู้เอาประกันภัยเสียชีวิตผู้รับประกันภัยจะหยุดการจ่ายเงินรายปีทันที

2.1.1.2 แบบเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity) เป็นแบบประกันชีวิตที่มีการรับประกันจำนวนปีขั้นต่ำที่ผู้รับประกันภัยจะต้องจ่ายเงินรายปีให้ผู้เอาประกันภัยตามการทรงชีพ แต่หากผู้เอาประกันภัยเสียชีวิตก่อนการรับเงินรายปี ผู้รับประกันภัยจะต้องจ่ายเงินรายปีให้แก่ผู้รับประโยชน์ต่อไปจนครบจำนวนปีขั้นต่ำที่ได้ระบุไว้ในสัญญาประกันชีวิต

2.1.1.3 แบบเงินรายปีตามกำหนด (Annuity Certain) ผู้รับประกันภัยจะจ่ายเงินรายปีให้แก่ผู้เอาประกันภัย โดยกำหนดการจ่ายเงินรายปีเป็นจำนวนปีที่แน่นอนไม่ว่าผู้เอาประกันภัยจะมีชีวิตอยู่หรือเสียชีวิต กรณีที่ผู้เอาประกันภัยเสียชีวิตก่อนการรับเงินครบจำนวนปีที่ได้ระบุไว้ในสัญญาผู้รับประกันภัยจะจ่ายเงินรายปีให้แก่ผู้รับประโยชน์จนครบตามที่ระบุไว้ในสัญญานั้น

2.1.1.4 แบบเงินรายปีชั่วคราว (Temporary Life Annuity) ผู้รับประกันภัยจะจ่ายเงินรายปีให้แก่ผู้เอาประกันภัย โดยกำหนดการจ่ายเงินรายปีตามจำนวนปีที่ระบุไว้ในสัญญาเท่านั้นกรณีที่ผู้เอาประกันภัยเสียชีวิตระหว่างเวลาการจ่ายเงินรายปีก็ถือว่าสัญญานั้นเป็นอันสิ้นสุดลง และถ้าผู้เอาประกันภัยมีชีวิตอยู่จนรับเงินครบตามจำนวนปีที่ระบุไว้ในสัญญาก็ถือว่าสัญญานั้นสิ้นสุดลงเช่นกัน

สำหรับประเทศไทยนั้นการประกันชีวิตแบบเงินรายปียังไม่เป็นที่แพร่หลายมากนัก โดยสำนักงานคณะกรรมการกำกับและส่งเสริมการประกอบธุรกิจประกันภัย (คปภ.) ได้กำหนดหลักเกณฑ์สำหรับกรมธรรม์ประกันภัยแบบเงินรายปีเมื่อปี พ.ศ. 2552 ในช่วงแรกนั้นมีบริษัทเมืองไทยประกันชีวิต จำกัด (มหาชน) เพียงบริษัทเดียวเท่านั้นที่เปิดตัวกรมธรรม์นี้อย่างเป็นทางการ ปัจจุบันผลิตภัณฑ์ประเภทนี้ได้พัฒนาออกมาหลายรูปแบบโดยลักษณะทั่วไปคือ จะจ่ายผลประโยชน์เงินรายปีเป็นรายงวดตามการทรงชีพอย่างสม่ำเสมอ และบางบริษัทประกันชีวิตก็จะมีการรับรองจำนวนงวดในการจ่ายที่แน่นอนด้วย ซึ่งกรมธรรม์เงินรายปีกำลังได้รับความนิยมมากขึ้นเนื่องจากผู้เอาประกันภัยเห็นความสำคัญของการประกันชีวิตและการวางแผนทางการเงินมากขึ้น

2.1.2 ตราสารสิทธิ (Options)

ตราสารสิทธิ (Options) เป็นอนุพันธ์ทางการเงินที่สามารถใช้เป็นเครื่องมือในการบริหารความเสี่ยง การเก็งกำไร และการลงทุน ซึ่งจะให้สิทธิแก่ผู้ถือครองในการเลือกตัดสินใจที่จะซื้อ

หรือขายสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying Assets) ตามระยะเวลาที่กำหนดในราคาที่ระบุไว้ในสัญญา (Exerccise Price) ในประเทศไทยมีการซื้อขายตราสารสิทธิที่มีสินทรัพย์อ้างอิงคือ SET50 Index ซึ่งเป็นดัชนีราคาหุ้นที่ใช้แสดงระดับและความเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ 50 อันดับแรกโดยจะคำนวณแบบถ่วงน้ำหนักด้วยมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด (Market Capitalization) ประเภทของตราสารสิทธิ (Type of Options) สามารถแบ่งตามลักษณะต่างๆ ได้ดังนี้

2.1.2.1 การแบ่งตราสารสิทธิตามลักษณะการใช้สิทธิ สามารถแบ่งได้เป็น

2.1.2.1.1 สิทธิในการซื้อ (Call Option) คือการที่นักลงทุนจ่ายค่าพรีเมียม (Premium) เพื่อซื้อสัญญาที่จะให้สิทธิในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งเมื่อผู้ถือครองสิทธิใช้สิทธิในการซื้อ ผู้ถือครองสิทธิจะต้องจ่ายราคาใช้สิทธิ (Exercise Price) เพื่อแลกกับการได้สินทรัพย์อ้างอิงมาครอบครอง โดยผู้ถือครองสิทธิไม่จำเป็นต้องใช้สิทธิในการซื้อ ถ้าการซื้อนั้นไม่เกิดประโยชน์แก่ตน

2.1.2.1.2 สิทธิในการขาย (Put Option) คือการที่นักลงทุนจ่ายค่าพรีเมียม (Premium) เพื่อซื้อสัญญาที่จะให้สิทธิในการขายสินทรัพย์อ้างอิงในระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งเมื่อผู้ถือครองสิทธิใช้สิทธิในการขาย ผู้ถือครองสิทธิจะต้องส่งมอบสินทรัพย์อ้างอิงแลกกับการรับชำระเงินราคาของสินทรัพย์อ้างอิงนั้นด้วยราคาใช้สิทธิ (Exercise Price)

2.1.2.2 การแบ่งตราสารสิทธิตามข้อกำหนดการให้ใช้สิทธิ

ผู้ถือครองสิทธิสามารถใช้สิทธิในการซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงนั้นหรือไม่ก็ได้ ระยะเวลาที่เปิดให้ใช้สิทธินั้นได้กำหนดไว้ล่วงหน้าเมื่อซื้อตราสารสิทธินั้น โดยตราสารสิทธิที่สามารถใช้สิทธิได้ ณ วันหมดอายุของสัญญาเท่านั้น เรียกว่า ตราสารสิทธิแบบยุโรป (European Option) และหากตราสารสิทธินั้นสามารถเลือกใช้สิทธิได้ตั้งแต่เริ่มต้นสัญญา หรือ ณ เวลาใดเวลาหนึ่งได้ภายในอายุของสัญญา เรียกว่า ตราสารสิทธิแบบอเมริกา (American Option) ตราสารสิทธิแบบเบอร์มิวดา (Bermudan Option) จะให้ผู้ถือครองสิทธิสามารถใช้สิทธิเฉพาะในวันที่กำหนดก่อน หรือภายในวันสิ้นสิทธิ และอีกประเภทหนึ่งคือ ตราสารสิทธิแบบระดับราคา (Barrier Option) ที่มีเงื่อนไขว่าราคาของหลักทรัพย์ที่เกี่ยวข้องต้องผ่านระดับราคาที่กำหนดจึงจะสามารถใช้สิทธิได้ โดยทั่วไปแล้วตราสารสิทธิแบบอเมริกา จะมีราคาที่สูงกว่าประเภทอื่นเนื่องจากเปิดโอกาสให้ผู้ถือครองสิทธิสามารถใช้สิทธิได้ตลอดเวลา

2.1.2.3 การแบ่งตราสารสิทธิตามมูลค่าหากมีการใช้สิทธิ สามารถแบ่งได้ดังนี้

2.1.2.3.1 สถานะที่ได้ประโยชน์ (In-the-Money)

สถานะที่เกิดประโยชน์แก่ผู้ถือสิทธิซื้อโดยจะเกิดขึ้นเมื่อราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ ขณะนั้นมากกว่าราคาใช้สิทธิ (Exercise Price) เมื่อเป็นเช่นนั้นผู้ถือสิทธิอาจใช้สิทธิทันที ถ้าสิทธินั้นเป็นแบบอเมริกา และสถานะที่เกิดประโยชน์แก่ผู้ถือสิทธิขาย จะเกิดขึ้นเมื่อราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ ขณะนั้นต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ (Exercise Price)

2.1.2.3.2 สถานะเสียประโยชน์ (Out of-the-Money)

สถานะเสียประโยชน์แก่ผู้ถือสิทธิซื้อเกิดเมื่อราคาใช้สิทธิต่ำกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง ส่วนกรณีผู้ถือสิทธิขายจะเสียประโยชน์จากการที่ราคาใช้สิทธิสูงกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง ดังนั้นเมื่ออยู่ในสถานะที่เสียประโยชน์ ถ้าครบกำหนดการใช้สิทธินักลงทุนจึงปล่อยให้สิทธินั้นหมดอายุไปโดยไม่มีการใช้สิทธินั่นเอง

2.1.3 ตัวแบบลี - คาร์เตอร์ (Lee - Carter Model)

ลีและคาร์เตอร์ได้เผยแพร่วิธีการทางสถิติสำหรับการคาดการณ์อัตรามรณะในปี ค.ศ. 1992 บนพื้นฐานของการรวมกันระหว่างรูปแบบการมรณะของประชากรกับอนุกรมเวลาโดยอาศัยข้อมูลการมรณะรายอายุในอดีต ซึ่งมีรูปแบบดังสมการที่ (2.1)

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

หรือ

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}} \quad (2.1)$$

เมื่อ $m_{x,t}$ แทน อัตรามรณะกลางปีรายอายุ x ในปีที่ t

a_x แทน ค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีรายอายุ x

b_x แทน อัตราเสื่อมของดัชนีเวลารายอายุ x

k_t แทน ดัชนีเวลาของระดับอัตรามรณะกลางปี

$\varepsilon_{x,t}$ แทน ความคลาดเคลื่อนของตัวแบบ $\left(\varepsilon_{x,t} \sim N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)\right)$

โดยการเปลี่ยนแปลงของดัชนีเวลาของระดับอัตรามรณะกลางปี k_t จะขึ้นอยู่กับ b_x ซึ่งในทางทฤษฎีสามารถมีค่าเป็นลบได้ และจะส่งผลให้อัตรามรณะกลางปีที่อายุ x มีแนวโน้มที่จะเพิ่มขึ้น เมื่อ b_x มีค่าลดลง แต่ในทางปฏิบัติเหตุการณ์ในลักษณะนี้จะไม่เกิดขึ้นในระยะยาว

จากสมการที่ (2.1) ตัวแบบนี้ไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์จากการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นได้ ดังนั้นลีและคาร์เตอร์จึงได้ใช้ประยุกต์ใช้วิธีการแยกด้วยค่าเจาะจง (Singular Value Decomposition : SVD) กับเมตริกซ์ของ $\left\{\ln\left(m_{x,t}\right)-a_{x,t}\right\}$ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ b_x และ k_t โดยกำหนดให้ $\sum_t k_t = 0, \sum_x b_x^2 = 1$ และสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของเวกเตอร์ a_x ได้จาก

$$\hat{a}_x = \frac{1}{N}\sum_t \ln\left(m_{x,t}\right)$$

เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์ $Z_{x,t} = \ln\left(m_{x,t}\right) - \hat{a}_{x,t}$

จากการประยุกต์ใช้วิธีการแยกด้วยค่าเจาะจงของเมตริกซ์ $Z_{x,t}$ จะได้ว่า

$$ULV' = SVD\left(Z_{x,t}\right) = L_1 U_{x1} V_{t1} + \ldots + L_X U_{xX} V_{tX}$$

เมื่อ U แทน เมตริกซ์องค์ประกอบของอายุ

L แทน เมตริกซ์ Singular Value

V แทน เมตริกซ์องค์ประกอบของเวลา

โดยค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{b}_x$ ได้มาจากคอลัมน์แรกของเมตริกซ์องค์ประกอบของอายุ $(\hat{b}_x = U_{x1})$ และค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{k}_t$ ได้มาจากผลคูณระหว่างคอลัมน์แรกของเมตริกซ์ *Singular Value* กับเมตริกซ์องค์ประกอบของเวลา $(\hat{k}_t = L_1 V_{t1})$ ดังนั้น สามารถแสดงเมตริกซ์ $\hat{Z}_{x,t} = \hat{b}_x \hat{k}_t$ ได้ดังนี้

$$\hat{Z}_{x,t} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{x_1,t_1} & \hat{Z}_{x_1,t_2} & \cdots & \hat{Z}_{x_1,t_n} \\ \hat{Z}_{x_2,t_1} & \hat{Z}_{x_2,t_2} & \cdots & \hat{Z}_{x_2,t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Z}_{x_A,t_1} & \hat{Z}_{x_A,t_2} & \cdots & \hat{Z}_{x_A,t_n} \end{bmatrix}$$

2.1.4 ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models)

2.1.4.1 ทฤษฎีตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า

สำหรับการพิจารณาความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้า ณ เวลา $t \geq 0$ จะพิจารณาขอบเขตที่เป็นไปได้ของข้อมูลที่กว้างที่สุด โดยกำหนดให้ $\tau = T_1 - t$, $x_t = x + t \in [0,\infty)$ ดังนั้นความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี จะหาได้จากค่าคาดหวังของช่วงเวลาการมีชีวิตรอดในอนาคตของคนอายุ $x-t$ ปี

มีค่ามากกว่า $t+\tau$ หรือช่วงเวลาการมีชีวิตรอดในอนาคตของคนอายุ $x-t$ ปี มีค่ามากกว่า t ดังแสดงในสมการที่ (2.2)

$$_{t}p_{x}\left(t,t+\tau\right)=\mathrm{E}^{P}\left[\mathrm{E}^{P}\left[1_{\{\Upsilon_{x-t}>t+\tau\}}\mid F_{t+\tau}\vee\left\{\Upsilon_{x-t}>t\right\}\right]\mid F_{t}\right] \tag{2.2}$$

$$;x\geq t\geq 0,\tau\geq 0$$

เมื่อ $_{\tau}p_{x}\left(t,t+\tau\right)$ แทน ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี

Υ_{x_0} เป็นตัวแปรสุ่มแทนช่วงเวลาการมีชีวิตรอดในอนาคต (future lifetime) ของคนอายุ x_0 ปี ณ เวลา 0

T_1 แทน วันครบกำหนด (Maturity) ของการรับเงินรายปี

และพลังมรณะไปข้างหน้า (Forward Force of Mortality) แทนด้วย $\mu_t\left(\tau,x\right)$

$$\mu_{t}\left(\tau,x\right)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\log\left(_{\tau}p_{x}\left(t,t+\tau\right)\right) \tag{2.3}$$

จะได้ว่า

$$_{\tau}p_{x}\left(t,t+\tau\right)=\exp\left\{-\int_{0}^{\tau}\mu_{t}\left(s,x\right)ds\right\} \tag{2.4}$$

ในปี ค.ศ. 2010 นาน ชู และแดเนียล เบเออร์ (N. Zhu & D. Bauer, 2010) ได้เสนอรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของเวลาที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน (Time - homogenous) คือ

$$d\mu_{t}=\left(A\mu_{t}+\alpha\right)dt+\sigma dW_{t},\mu_{0}\left(.,.\right)>0 \tag{2.5}$$

เมื่อ α และ $\sigma=\left(\sigma^{(1)},...,\sigma^{(d)}\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous functions)

โดยที่ $\alpha,\sigma^{(i)}:\left[0,\infty\right)^{2}\rightarrow R,1<i<d$

$W=(W^{(1)}),...,W^{(d)})'$ คือการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียนที่มี d มิติ

และจากบทแทรกที่ 3.1 ของแดเนียล เบอเออร์ และคณะ ในปี ค.ศ. 2010 เมื่อ A คือ infinitesimal generator โดยที่ $A=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\int_{0}^{\tau}\alpha_{t}\left(s,x\right)ds\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_{0}^{\tau}\alpha_{t}\left(s,x\right)ds\right]$ บนโดเมนของ A อยู่ในขอบเขตของ Hilbert space และ S_t คือ continuous semigroup มีค่าเท่ากับ $\exp\{tA\}$ โดยที่ $\{S_t\}_{t\geq 0}$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (uniformly continuous) ดังนั้นถ้าสมการที่ (2.5) อยู่ภายใต้ความน่าจะเป็นของความเสี่ยงที่เป็นกลาง (P : Risk-neutral Probability) จะได้ว่า

$$\alpha_t(\tau,x)=\sigma_t(\tau,x)\bullet\int_0^{\tau}\sigma_t'(\tau,x)ds \tag{2.6}$$

เนื่องจากสมการที่ (2.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบสุ่มที่มีมิติอนันต์ (Infinite-Dimensional) ซึ่งมีความซับซ้อนและทำให้ยากแก่การคำนวณ จึงได้มีการเสนอตัวแบบปัจจัยที่เกิดขึ้นจริงแบบมิติจำกัด (Finite - Dimensional Realization) ดังนี้

$$\mu_t(\tau,x)=G(\tau,x,Z_t) \tag{2.7}$$

เมื่อ G แทน ฟังก์ชันกำหนด (Deterministic Function)

Z_t แทน ตัวแปรสุ่มมิติจำกัดที่มีการแจกแจงแบบปกติ

จากบทเสริมที่ 4.1 ของแดเนียล เบเออร์ และคณะ ในปี ค.ศ. 2010 ซึ่งสามารถดูได้จากภาคผนวก ข ถ้า $G(\tau,x,.)$ เป็นฟังก์ชันที่เกิดขึ้นจริงในรูปแบบของ Gaussian (Gaussian realizations) และ Z_t มีการแจกแจงแบบปกติ จะได้ว่าโครงสร้างความผันผวน (volatility structure) มีรูปแบบดังนี้

$$\sigma(\tau,x)=C(x+\tau)\times exp\{M\tau\}\times N \tag{2.8}$$

เมื่อ $N\in R^{m\times d}, M\in R^{m\times m}$ และ $C'\in C^1([0,\infty),R^m)$ และบทเสริมที่ 3.1 ของนาน ชู และแดเนียล เบเออร์ ในปี ค.ศ. 2011 เมื่อ $\sigma(\tau,x)=(\sigma_1(\tau,x),\ldots,\ \sigma_d(\tau,x))$ ดังนั้นแต่ละฟังก์ชันของ $\sigma_i(\tau,x)$ มีลักษณะดังนี้

$$\sigma_i(\tau,x)=C_i(x+\tau)\times exp\{M_i\tau\}\times N_i$$

โดยที่ $C_i'(x)\in\mathbb{R}^{m_i}, M_i\in\mathbb{R}^{m_i\times m_i}, N=\mathbb{R}^{m_i\times 1}, m_i\in\mathbb{N}$ และ $i=\{1,2,\ldots,d\}$ นอกจากนี้จะได้ว่า $\sigma(\tau,x)$ เป็นฟังก์ชันที่เกิดขึ้นจริงในรูปแบบของ Gaussian (Gaussian realizations) เช่นกัน เมื่อ $C(x)=[C_1(x),\ldots,C_d(x)],\ M=diag\{M_1,\ldots,M_d\},\ N=diag\{N_1,\ldots,N_d\}$ ซึ่งสามารถดูการพิสูจน์ได้จากภาคผนวก ข

จะได้ว่า
$$\mu_t(\tau,x)=\mu_0(\tau+t,x-t)+\int_0^t\alpha(\tau+t-s,x-t+s)ds$$
$$+C(x+\tau)\exp\{M\tau\}\int_0^t\exp\{M(t-s)\}dW_s \tag{2.9}$$

และจากสมการที่ (26) ของแดเนียล เบเออร์ และคณะ ในปี ค.ศ. 2010 จะได้ว่า

$$\mu_0(\tau+t,x-t)=C(x+\tau)\left[1-e^{-\mathrm{M}(t+\tau)}\right]-\frac{N^2}{2\left[(-\mathrm{M})\text{-}\frac{\ln(C(x+\tau))}{x+\tau}\right](-\mathrm{M})}C(x+\tau)^2$$

$$+\frac{N^2}{\left((-\mathrm{M})^2\text{-}\left(\frac{\ln(C(x+\tau))}{x+\tau}\right)^2\right)}C(x+\tau)^2 e^{\left(\mathrm{M}\text{-}\frac{\ln(C(x+\tau))}{x+\tau}\right)(\tau+t)}-\frac{N^2}{2\left(-\mathrm{M}\text{-}\frac{\ln(C(x+\tau))}{x+\tau}\right)}C(x+\tau)^2 e^{2\mathrm{M}(\tau+t)} \quad (2.10)$$

2.1.4.2 การประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation)

กำหนดให้ข้อมูลการตายโดยทั่วไปมีรูปแบบความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้า ${}_{\tau}p_x(t_j)$ ณ เวลา t_j ที่แตกต่างกัน โดย $j=1,2,...,N$ และ C คือเซตของข้อมูลของระยะเวลาและอายุที่รวบรวมได้ ให้ l คือ lag time และเมื่อ $\tilde{C}\subset \mathrm{C}, |\tilde{C}|=\mathrm{K}$ จะได้ว่า $(\tau,x)\in\tilde{C}$ นั่นคือ $(\tau+l,x),\ (\tau+t_{j+1}-t_j, x-t_{j+1}+t_j),\ (\tau+l+t_{j+1}-t_j, x-t_{j+1}+t_j)\in \mathrm{C}$ และ $\forall_j\in\{1,2,\ldots,N-1\}$ ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ x ปีในช่วงเวลา $\left[t_{j+1}+\tau, t_{j+1}+\tau+l\right)$ คือ

$$F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)\right)=-log\left\{\frac{{}_{\tau+l}p_x(t_{j+1})}{{}_{\tau}p_x(t_{j+1})}\Big/\frac{{}_{\tau+l+t_{j+1}-t_j}p_{x-t_{j+1}+t_j}(t_j)}{{}_{\tau+t_{j+1}-t_j}p_{x-t_{j+1}+t_j}(t_j)}\right\}$$

$$F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)\right)=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^l \alpha\left(\upsilon+\tau+t_{j+1}-s, x-t_{j+1}+s\right)d\upsilon ds+$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^l \sigma\left(\upsilon+\tau+t_{j+1}-s, x-t_{j+1}+s\right)d\upsilon ds \quad (2.11)$$

และหากข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงในระยะเวลาที่เท่ากันคือ $t_{j+1}-t_j=\Delta$ ซึ่งมีค่าคงที่ จะได้เวกเตอร์ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้าที่แต่ละฟังก์ชันเป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน ดังนี้

$$\bar{F}_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)\right)=\left(\frac{F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)\right)}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}\right)_{(\tau,x)\in\tilde{C}}$$

$$=\left(\frac{F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau_1,x_1)\right)}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}},\frac{F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau_2,x_2)\right)}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}},\ldots,\frac{F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau_K,x_K)\right)}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}\right)$$

โดยที่ $j=1,2,...,N-1$ และ $F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)\right)$ มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าคาดหวังคือ

$$E[F_l(t_j,t_{j+1},(\tau,x))]=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^l \sigma\left(\upsilon+\tau+t_{j+1}-s,x-t_{j+1}-s\right)\int_0^{\upsilon+\tau+t_{j+1}-s}\sigma'\left(u,x-t_{j+1}-s\right)du\,d\upsilon\, ds$$

และค่าความแปรปรวนร่วมคือ

$$Cov\left[F_l\left(t_j,t_{j+1},(\tau_1,x_1)\right),F_l\left(t_k,t_{k+1},(\tau_2,x_2)\right)\right]$$

$$=\delta_{jk}\times\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^l \sigma\left(\upsilon+\tau_1+t_{j+1}-s,x_1-t_{j+1}+s\right)d\upsilon\int_0^l\sigma'\left(\upsilon+\tau_2+t_{j+1}-s,x_2-t_{j+1}+s\right)d\upsilon ds$$

เมื่อนำผลคูณของอีโต้ $(Itô's\ product)$ มาประยุกต์ใช้ในสมการจะได้ว่า $\delta_{jk}=1$ ถ้า $j=k$ และ $\delta_{jk}=0$ สำหรับในกรณีอื่นๆ

และเมื่อกำหนดให้ $t_{j+1}-t_j=\Delta$ และเวคเตอร์$F_L\left(t_j,t_{j+1},(\tau,x)_i\right)_{1\le i\le K}$ มีคุณสมบัติของแต่ละฟังก์ชันที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน ดังนั้นจะหาค่าคาดหวังได้จาก

$$\bar{\mu}=\left(\int_0^\Delta\left\{\frac{1}{2}\int_{\tau+\Delta-s}^{l+\tau+\Delta-s}\sigma\left(u,x-\Delta+s\right)du\int_{\tau+\Delta-s}^{l+\tau+\Delta-s}\sigma'\left(u,x-\Delta+s\right)du+\int_{\tau+\Delta-s}^{l+\tau+\Delta-s}\sigma\left(u,x-\Delta+s\right)du\int_0^{l+\tau+\Delta-s}\sigma'\left(u,x-\Delta+s\right)du\right\}ds\right)_{(\tau,x)\in\tilde{C}} \tag{2.12}$$

และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\Sigma=\left(\Sigma_{ij}\right)_{1\le ij\le K}$ ได้จาก

$$\Sigma_{ij}=\int_0^\Delta\int_0^l\sigma\left(\upsilon+\tau_i+\Delta-s,x_i-\Delta+s\right)d\upsilon\int_0^l\sigma'\left(\upsilon+\tau_j+\Delta-s,x_j-\Delta+s\right)d\upsilon ds \tag{2.13}$$

การประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุดถูกนำมาใช้ในปี ค.ศ. 2008 โดยแดเนียล เบเออร์ และคณะ (D. Bauer, M. Borger., J. Ruß, & H.J. Zwiesler, 2008) และในปี ค.ศ. 2009 แดเนียล เบเออร์ (D. Bauer, 2009) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการพิจารณาข้อมูลของระยะเวลาและอายุ (τ_i,x_i) ที่มีขนาดข้อมูลทั้งหมด K น้อยนั้นทำให้เกิดการเบี่ยงเบนที่ไม่เป็นระบบซึ่งยอมรับไม่ได้ จึงแก้ปัญหานี้โดยเพิ่มการเบี่ยงเบนที่ไม่เป็นระบบ $:\in_j$ เข้าไปในเวคเตอร์ค่าสังเกต $:\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_j,t_{j+1}\right)$ โดยพิจารณาร่วมกับเวคเตอร์หลัก $:\bar{F}_l^{\text{mod}}\left(t_j,t_{j+1}\right)$ ดังนี้

$$\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_j,t_{j+1}\right)=\bar{F}_l^{\text{mod}}\left(t_j,t_{j+1}\right)+\in_j \tag{2.14}$$

เมื่อ $\in_j$ เป็นอิสระซึ่งกันและกันจาก $\bar{F}_l^{\text{mod}}\left(t_j,t_{j+1}\right)$ โดย $\in_j\sim N\left(0,\sigma_e\cdot I\right),\ j=1,\ldots,N-1$

I แทน เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $K\times K$ จะได้ว่า

$$\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_j,t_{j+1}\right)\sim N\left(\bar{\mu},\tilde{\Sigma}\right) \tag{2.15}$$

เมื่อ $\tilde{\Sigma}=\Sigma+\sigma_e\cdot I$ ดังนั้นฟังก์ชัน log-likelihood จะหาได้จาก

$$L\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_1,t_2\right),\ldots,\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{N-1},t_N\right);C,M,N,\sigma_e\right)$$

$$=log\underbrace{\left\{\prod_{j=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^K det\left(\tilde{\Sigma}\right)}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{j-1},t_j\right)-\bar{\mu}\ \right)\tilde{\Sigma}^{-1}\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{j-1},t_j\right)-\bar{\mu}\right)'\right\}\right\}}_{\equiv \tilde{L}}$$

$$L\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_1,t_2\right),\ldots,\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{N-1},t_N\right);C,M,N,\sigma_e\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=2}^{N}-log\left\{det\left(\tilde{\Sigma}\right)\right\}-\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{j-1},t_j\right)-\bar{\mu}\right)\tilde{\Sigma}^{-1}\left(\bar{F}_l^{\text{obs}}\left(t_{j-1},t_j\right)-\bar{\mu}\right)'\right] \tag{2.16}$$

2.1.5 ตัวแบบของ Vasicek (The Vasicek Model)

อัตราดอกเบี้ย (Interest Rate) เป็นผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจากการลงทุนซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดปัจจัยหนึ่งในการคำนวณเบี้ยประกันชีวิต โดยทั่วไปผู้รับประกันภัยจะกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่แน่นอนเพื่อใช้ในการคำนวณเบี้ยประกันชีวิต ซึ่งอัตราดอกเบี้ยนี้เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ผู้รับประกันภัยคาดว่าจะได้รับในอนาคตจากการนำเบี้ยประกันภัยไปลงทุน ซึ่งอัตราดอกเบี้ยที่ได้รับกลับมาเป็นผลตอบแทนแก่ผู้รับประกันภัยนั้นอาจจะไม่เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้ ผู้รับประกันภัยจึงต้องมีการป้องกันความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นด้วยการเลือกวิธีคำนวณอัตราดอกเบี้ยที่เหมาะสม ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้อัตราดอกเบี้ยแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic) เพื่อประมาณค่าอัตราดอกเบี้ย

กำหนดให้กระบวนการหาอัตราดอกเบี้ยภายใต้ตัวแบบ Generalized Black-Scholes โดยในปี ค.ศ. 1977 วาซิเซก (O. Vasicek, 1977) ได้เสนอตัวแบบในการคำนวณอัตราดอกเบี้ยแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic) ภายใต้ความเสี่ยงที่เป็นกลางดังสมการที่ (2.17)

$$dr\left(t\right)=a\left[b-r\left(t\right)\right]dt+\sigma_r dW_t \tag{2.17}$$

เมื่อ $r\left(t\right)$ แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

a แทน อัตราการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย

b แทน ค่าเฉลี่ยอัตราดอกเบี้ยระยะยาว

σ_r แทน ระดับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

W_t แทน การเคลื่อนไหวแบบบราวเนียน

โดยที่ a , b และ $\sigma_r > 0$ และสามารถประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยได้จากสมการที่ (2.18)

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1-e^{-a(t-s)}\right) + \sigma_r \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u) \tag{2.18}$$

โดยที่ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนดังนี้

$$E\{r(t)\} = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1-e^{-a(t-s)}\right)$$

$$Var\{r(t)\} = \frac{\sigma_r^2}{2a}\left[1-e^{-2a(t-s)}\right]$$

ภายใต้ตัวแบบจำลองของวาซิเซก การคำนวณราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond) และมีอายุคงเหลือ T_2 ปี มีค่าดังนี้

$$P(0,T_2) = e^{A(0,T_2)-B(0,T_2)r_0} \tag{2.19}$$

โดยที่ $P(0,T_2)$ แทน ราคาพันธบัตรที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond) ณ ปัจจุบันที่จะครบกำหนดไถ่ถอน ณ เวลา T_2

r_0 แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ณ จุดเวลาปัจจุบัน

T_2 แทน อายุที่ครบกำหนดไถ่ถอน

$$B(0,\mathrm{T}_2) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-aT_2}\right) \tag{2.20}$$

$$A(0,T_2) = \left(B(0,T_2)-T_2\right)\left\{b-\frac{{\sigma_r}^2}{2a^2}\right\} - \frac{{\sigma_r}^2 B^2(0,T_2)}{4a} \tag{2.21}$$

และจากความสัมพันธ์ระหว่างราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond) กับอัตราดอกเบี้ย ณ วันครบกำหนดไถ่ถอน จะได้ว่า

$$P(0,T_2) = e^{-R(0,T_2)T_2}$$

ดังนั้น $$R(0, T_2) = \frac{-\ln\left(P(0,T_2)\right)}{T_2} \tag{2.22}$$

เมื่อ $R\left(0,T_2\right)$ แทน อัตราดอกเบี้ย ณ วันครบกำหนดไถ่ถอน

2.1.6 ตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options)

สำหรับกรมธรรม์ประกันชีวิตแบบเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity) ที่ผู้รับประกันภัยสัญญาจะจ่ายเงินรายปีเมื่อเกษียณอายุให้แก่ผู้เอาประกันภัยในอัตราคงที่จนกว่าผู้เอาประกันภัยจะเสียชีวิต ด้วยความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นกับผู้รับประกันภัย เนื่องจากต้องมีเงินไว้จ่ายอย่างเพียงพอในอนาคต จึงทำให้ผู้รับประกันภัยต้องนำเงินส่วนนี้ไปลงทุนเพื่อให้ได้รับผลตอบแทนกลับมาตามที่ได้คาดการณ์ไว้ การลงทุนในตราสารสิทธิ (Options) จึงเป็นทางเลือกหนึ่งสำหรับผู้รับประกันภัย เนื่องจากตราสารสิทธิจะให้สิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงหรือไม่ก็ได้ตามที่ผู้ถือสิทธิตัดสินใจ ซึ่งทำให้ผู้ถือสิทธิมีโอกาสเสียประโยชน์น้อยมาก ตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) จึงเป็นการบริหารความเสี่ยงของผู้รับประกันภัยได้อีกทางหนึ่ง การหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองสามารถหาได้ดังนี้

การหามูลค่าของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (The Valuation of Simple Guaranteed Annuity Options : $V_{T_1}^{GAO}$) ในกรณีที่มีการจ่ายอัตราผลตอบแทน ณ เวลา T_1 โดยมีข้อตกลงว่าผู้เอาประกันภัยยังมีชีวิตอยู่ จะได้ว่า

$$\mathrm{V}_{T_1}^{GAO} = \max\left\{1, \mathrm{g}_{\mathrm{x}_0,\mathrm{T}_1}^{\mathrm{GAO}} \ddot{a}_{x_0+T_1}\left(T_1\right)\right\}$$

$$\mathrm{V}_{T_1}^{GAO} = 1 + \ddot{a}_{x_0+T_1}\left(T_1\right) \max\left\{\mathrm{g}_{\mathrm{x}_0,\mathrm{T}_1}^{\mathrm{GAO}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x_0+T_2}\left(T_1\right)}, 0\right\} \tag{2.23}$$

เมื่อ $\mathrm{g}_{\mathrm{x}_0,\mathrm{T}_1}^{\mathrm{GAO}}$ แทนอัตราเงินรายปีรับรองของคนอายุ x_0 ปี ณ เวลา T_1

$\ddot{a}_{x_0+T_1}\left(T_1\right)$ แทนค่าปัจจุบันของการจ่ายเงินรายงวดทุกต้นงวดให้กับคนอายุ x_0+T_1 ปี

กำหนดให้ $\mathrm{X} = \left(\mathrm{X}_{\mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}\geq 0}$

$$X_t = \sum_{k=T}^{\infty} P(t, k-t)_k \, p_{x_0}\left(t, k\right) \tag{2.24}$$

และ $P(t,k-t)$ แทน ราคาของพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond) ณ เวลา t ที่จะครบกำหนด ณ เวลา $k-t$

${}_k p_{x_0}(t,k)$ แทน ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x_0 ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอาย x_0+t ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก k ปี

สำหรับราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองคำนวณได้จาก

$$C_0^{GAO} = E^Q\left[\frac{e^{-\int_0^{T_1}\mu_s(0,x_0+s)ds}}{B_{T_2}} \bullet \ddot{a}_{x_0+T_1}(T_1) \bullet \left(g_{x_0,T}^{GAO} - \frac{e^{-\int_0^{T_1}\mu_s(0,x_0+s)ds}}{e^{-\int_0^{T_1}\mu_s(0,x_0+s)ds} \bullet \ddot{a}_{x_0+T}(T_1)}\right)^+\right]$$

$$= E^Q\left[\frac{X_{T_1}}{B_{T_2}} \bullet \left(g_{x_0,T_1}^{GAO} - \frac{e^{-\int_0^{T_1}\mu_s(0,x_0+s)ds}}{X_{T_1}}\right)^+\right]$$

$$= X_0 \bullet E^{Q_x}\left[\left(g_{x_0,T_1}^{GAO} - \frac{{}_{T_1}p_{x_0}(T_1,T_1)}{X_{T_1}}\right)^+\right] \qquad (2.25)$$

เมื่อ Q_x แทน กระบวนการเทียบเท่าแบบ Martingale (Equivalent Martingale Measure) ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของ X_t

B_{T_2} แทน สินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (Risk-free Asset) หาได้จาก $B_{T_2} = e^{-\int_0^{T_2} r_s ds}$

ในสมการที่ (2.25) เราต้องการทำให้ค่าความผันผวนอยู่ในรูปของ $\dfrac{P(t,T_2-t) \bullet {}_{T_1}p_{x_0}(t,T_1)}{X_{T_1}}$ ดังนั้น จากบทเสริมที่ 20.5 ของโทมัส บีโจกค์ ในปี ค.ศ. 1999 (T. Bjork, 1999) สามารถดูได้จากภาคผนวก ข ภายใต้ความเสี่ยงที่เป็นกลาง (Q: Risk - neutral) จะได้

$$dX_t = \sum_{k=T}^{\infty} P(t,k-t) \bullet {}_k p_{x_0}(t,k) \bullet \left(S(t,k,x_0) + \upsilon(t,k-t)\right) dW_t$$

เมื่อ $S(t,k,x_0)$ แทน ความผันผวนของการรอดชีพของคนอายุ x_0 ปีจะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ x_0+t ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก k ปี

$$S(t,k,x_0) = -\int_0^{k-t} \sigma(s,x_0+t)ds \qquad (2.26)$$

$\upsilon(t,k)$ แทน ความผันผวนของราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero-coupon Bond)

ณ เวลา t ที่จะครบกำหนด ณ เวลา $t+k$

$$\upsilon(t,k) = -\sigma_r \int_0^k e^{(-as)} ds \qquad (2.27)$$

ดังนั้น ความผันผวนของ X คือ $\sum_{k=T}^{\infty} P(t,k-t) \bullet {}_k p_{x_0}(t,k) \bullet (\mathrm{S}(t,k,x_0) + \upsilon(t,k-t))$

$$= X_t \sum_{k=T}^{\infty} \frac{P(t,k-t) \bullet {}_k p_{x_0}(t,k)}{\sum_{k=T}^{\infty} P(t,k-t) \bullet {}_k p_{x_0}(t,k)} \bullet (\mathrm{S}(t,k,x_0) + \upsilon(t,k-t))$$

และจากบทแทรกของอีโต้ $(\text{Itô's } Lemma)$ กับความผันผวนของ $\frac{P(t,T_2-t) \bullet {}_{T_1} p_{x_0}(t,T_1)}{X_{T_1}}$ จะได้ว่า

$$C_0^{GAO} \approx X_0 \bullet (g_{(x_0,T_1)}^{GAO} \bullet \Phi(-d_2^{GAO}) - \frac{P(0,T_2) \bullet {}_{T_1} p_{x_0}(0,T_1)}{X_0} \bullet \Phi(-d_1^{GAo})) \qquad (2.28)$$

เมื่อ
$$d_1^{GAO} = \frac{\log\left(\frac{P(0,T_2) \bullet {}_{T_1} p_{x_0}(0,T_1)}{X_0 \bullet g_{x_0,T_1}^{GAO}}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{GAO}^2}{\sigma_{GAO}}$$

$$d_2^{GAO} = d_1^{GAO} - \sigma_{GAO}$$

$$\sigma_{GAO}^2 = \int_0^{T_1} \gamma(u,T_1,x_0)^2 \, du$$

$\gamma(t,T_1,x_0)$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักแบบสุ่มของค่าปัจจุบัน (current value) โดยกำหนดให้มีค่าชัดเจนแน่นอน

$$\gamma(t,T_1,x_0) \approx \sum_{k=T_1}^{\infty} w_0(k) \bullet ((S(t,T_1,x_0) + \upsilon(t,T_2-t)) - (S(t,k,x_0) + \upsilon(t,k-t))) \qquad (2.29)$$

$w_t(k)$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักที่เป็นจริงแบบเฟ้นสุ่ม (fact stochastic)

$$w_t\left(k\right)=\frac{P\left(t,k-t\right)\bullet_k p_{x_0}\left(t,k\right)}{\sum_{k=T}^{\infty}P\left(t,k-t\right)\bullet_k p_{x_0}\left(t,k\right)}$$

$\Phi(.)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

และอัตราเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Rate) คำนวณได้จาก

$$g_{x_0,T_1}^{GAO}=\frac{P\left(0,T_2\right)\bullet_{T_1} p_{x_0}\left(0,T_1\right)}{\ddot{a}_{x_0+T_2}\left(T_2\right)} \tag{2.30}$$

$$\ddot{a}_{x_0+T_2}\left(T_2\right)=\ddot{a}_{x_0}\left(0\right)-\ddot{a}_{x_0:\overline{T_2|}}\left(0\right) \tag{2.31}$$

เมื่อกำหนดให้ตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) อยู่ในสถานะที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying Asset) เท่ากับราคาใช้สิทธิ (Exercise Price)

จะได้ว่า
$$\frac{P\left(0,T_2\right)\bullet_{T_1} p_{x_0}\left(0,T_1\right)}{X_0\bullet g_{x_0,T_1}^{GAO}}=1$$

$$d_1^{GAO}=-d_2^{GAO}=\frac{1}{2}\sigma_{GAO}^2$$

ดังนั้น
$$C_0^{GAO}\approx X_0\left(g_{x_0,T_1}^{GAO}\Phi\left(\frac{1}{2}\sigma_{GAO}^2\right)-g_{x_0,T_1}^{GAO}\Phi\left(-\frac{1}{2}\sigma_{GAO}^2\right)\right)$$

$$C_0^{GAO}=P\left(0,T_2\right)_{T_1} p_{x_0}\left(0,T_1\right)\left(2\Phi\left(\frac{1}{2}\sigma_{GAO}^2\right)-1\right) \tag{2.32}$$

และมูลค่าของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ณ เวลา 0 : V_0^{GAO} หาได้จาก

$$V_0^{GAO}=E^Q\left[1_{\left\{\Upsilon_{x_0}>T\right\}}e^{-\int_0^{T_2} r_s ds}V_{T_1}^{GAO}\right]$$

$$V_0^{GAO}=P\left(0,T_2\right)_{T_1} p_{x_0}\left(0,T_1\right)+C_0^{GAO} \tag{2.33}$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการรวบรวม ค้นคว้า และทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง เพื่อใช้ในการบริหารความเสี่ยงสำหรับบริษัทประกันภัยเป็นประเด็นสำคัญที่มีผู้เสนอวิธีการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองด้วยตัวแบบการมรณะ (Mortality Model)

และตัวแบบอัตราดอกเบี้ย (Interest rate Model) ที่แตกต่างกันคือ ในปี ค.ศ. 2003 แอนทูน เพล์สเซอร์ ได้เสนอวิธีการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองโดยใช้ Martingale Modeling Techniques และสร้างแบบจำลองของการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย (Swaption) แบบคงที่ รวมทั้งยังทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนว่ามีผลกระทบต่อการป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนในตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองหรือไม่ ซึ่งเขาพบว่าวิธีนี้มีประสิทธิภาพในการป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนได้ (A. Pelsser, 2003) แต่ในปี ค.ศ. 2001 โมเช่ เมลเลฟส์กี และเดวิด โพมิสโลว์ ได้เสนอรูปแบบที่แตกต่างออกไปโดยใช้กระบวนการเฟ้นสุ่ม (Stochastic Process) ในการคำนวณราคาตราสารสิทธิแบบเงินรายปี (Annuity) และแบบสะสมทรัพย์แท้จริง (Pure Endowments) ด้วยตัวแบบที่เวลาเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete - Time Model) และตัวแบบที่เวลาเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous - Time Model) โดยพิจารณาตัวแบบอัตราดอกเบี้ยอยู่ในสภาวะเสี่ยงภัย (Hazard - plus - Interest rate Model) ด้วยรูปแบบของ Cox - Ingersoll - Ross (M. A. Milevsky & S. D. Promislow, 2001) เช่นเดียวกันกับ เฟลิม บอยล์ และแมรี่ ฮาร์ดี ในปี ค. ศ.2003 ที่คำนวณราคาของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง โดยใช้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Hull - White และใช้ตารางมรณะที่แตกต่างกันคือ ตารางมรณะแบบทั่วไป และตารางมรณะแบบบำนาญ พบว่าเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบอัตราดอกเบี้ย Hull - White จะทำให้ราคาของตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ดังนั้นเพื่อให้การประมาณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองแม่นยำมากขึ้น จึงต้องหาวิธีคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองที่สอดคล้องกับความเสี่ยงของราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองที่อาจเกิดขึ้น โดยพิจารณา 2 ปัจจัยหลักคืออัตราดอกเบี้ยในอนาคต (Future Interest Rates) และอัตรามรณะในอนาคต (Future Mortality Rates) (P. Boyle & M. Hardy, 2003)

การคำนวณอัตรามรณะแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic Mortality) ให้ความสำคัญกับการคาดการณ์ความไม่แน่นอนที่อาจเกิดขึ้นในอนาคตกับอัตรามรณะซึ่งมีหลายวิธีด้วยกันโดยในปี ค.ศ. 2006 แอนดรู แครนส์ ได้เสนอความแตกต่างของวิธีคำนวณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) ตัวแบบอัตรามรณะแบบบวก (Positive - mortality Models) ตัวแบบอัตรามรณะของตลาด (Mortality Market Models) และตัวแบบการคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (Short - rate Models) อีกทั้งยังเสนอตัวแบบเงินรายปีในตลาด (Annual Market Model) ที่นำไปใช้ในการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองไว้ด้วยเช่นกัน (A. J. G. Cairns et al., 2006) ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 แดเนียล เบเออร์ และคณะ ได้กล่าวถึงตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) ว่าเป็นตัวแบบการหาอัตรามรณะ

ที่มีมิติแบบอนันต์ (Infinite - Dimensional) นั่นคือจะพิจารณาอายุเมื่อครบกำหนดการรับเงินรายปีของผู้เอาประกันภัย (x_T : Age at Maturity) แทนอายุปัจจุบันที่ผู้เอาประกันภัยเริ่มทำประกันภัย (x_t :Current Age) โดย $x_T \in (\tau, \infty)$ เมื่อ $\tau = T - t$ ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าจึงเหมาะที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณมูลค่าและวิเคราะห์กรณีที่อัตรามรณะมีตราสารสิทธิแฝงอยู่ (Mortality-Contingent embedded Options) รวมทั้งการบริหารความเสี่ยงสินทรัพย์และหนี้สินของบริษัทประกันชีวิต (D. Bauer et al., 2010) และในปี ค.ศ. 2011 นาน ซู และแดเนียล เบเออร์ ได้เปรียบเทียบวิธีคำนวณอัตรามรณะ 3 วิธีคือ วิธี ลี - คาร์เตอร์ วิธี CBD - Perks และวิธี P - Spline ด้วยปัจจัยที่แตกต่างกันคือ ตัวแบบปัจจัยอย่างง่าย (Simple Factor Models) ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) และตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า ภายใต้สภาวะความสอดคล้องภายใน เมื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย (Mean) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) พบว่า การคำนวณอัตรามรณะด้วยวิธี ลี-คาร์เตอร์ โดยใช้ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าภายใต้สภาวะความสอดคล้องภายในเป็นวิธีที่ดีสุด (N. Zhu & D Bauer, 2011a) ในปีเดียวกันนี้ นาน ซู และแดเนียล เบเออร์ จึงได้นำตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้ามาประยุกต์ใช้กับการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) และการคำนวณเงินผลประโยชน์ขั้นต่ำของเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Minimum Income Benefits) ภายใต้การคำนวณอัตรามรณะด้วยวิธี ลี - คาร์เตอร์ นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อเปรียบเทียบราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองระหว่างการคำนวณด้วยอัตรามรณะแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic Mortality) และอัตรามรณะแบบแน่นอนชัดเจน (Deterministic Mortality) พบว่า ราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองจะเพิ่มขึ้นเมื่อคำนวณด้วยอัตรามรณะแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic Mortality) แสดงว่าวิธีคำนวณอัตรามรณะที่แตกต่างกันมีผลต่อการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (N. Zhu & D. Bauer, 2011b)

ผู้วิจัยได้เห็นความสำคัญของอัตรามรณะที่อาจไม่เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้และความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest rate risk) ที่ได้รับจากการลงทุนในอนาคต งานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาตัวแบบที่ใช้ในการคำนวณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) สำหรับประชากรไทย และคำนวณอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของ Vasicek เพื่อไปคำนวณหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 การเก็บรวบรวมข้อมูล

ข้อมูลที่ใช้สำหรับงานวิจัยครั้งนี้คือข้อมูลจำนวนประชากรกลางปี จำนวนตายของประชากร และอัตราดอกเบี้ยของพันธบัตรรัฐบาล โดยมีรายละเอียดของการเก็บรวบรวมข้อมูลดังนี้

3.1.1 ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีตั้งแต่ปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553 ประกอบด้วยจำนวนประชากรกลางปีจำแนกเพศกลุ่มอายุ 5 ปี สำหรับปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2536 และจำนวนประชากรจำแนกเพศรายอายุ ณ วันที่ 31 เดือนธันวาคม ปี พ.ศ. 2537 - พ.ศ. 2553 จากสำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทย

3.1.2 ข้อมูลจำนวนตายตั้งแต่ปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2554 ประกอบด้วยจำนวนตายจำแนกเพศกลุ่มอายุ 5 ปี สำหรับปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2538 และจำนวนตายจำแนกเพศรายอายุในปี พ.ศ. 2539 - พ.ศ.2554 โดยรวบรวมข้อมูลจากสถิติสาธารณสุข สำนักงานนโยบายและยุทธศาสตร์ กระทรวงสาธารณสุข

3.1.3 ข้อมูลราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond) ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปีและเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปี จนถึง 30 ปี ข้อมูลเริ่มต้นตั้งแต่วันที่ 2 เดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2544 ถึงวันที่ 3 เดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2557 จากสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย (The Thai Bond Market Association)

3.2 การเตรียมข้อมูลจำนวนตายและจำนวนประชากรกลางปี

เนื่องจากข้อมูลที่ได้รวบรวมมานั้นมีรูปแบบของการจัดเก็บข้อมูลไม่สอดคล้องกับการนำไปใช้ในงานวิจัยและมีข้อมูลบางส่วนที่สูญหายไป จึงต้องมีการปรับข้อมูลให้สมบูรณ์มากขึ้นเพื่อลดความคลาดเคลื่อนของงานวิจัย ดังนี้

3.2.1 ข้อมูลจำนวนตายของประชากรที่ไม่ทราบอายุ

เนื่องจากมีข้อมูลจำนวนตายของประชากรที่ไม่ทราบอายุจึงต้องกระจายข้อมูลส่วนนี้ไปยังอายุต่างๆ ในแต่ละปี โดยสามารถคำนวณได้จาก

$$\text{น้ำหนักของแต่ละกลุ่มอายุ} = \frac{\text{จำนวนตายของแต่ละกลุ่มอายุ}}{\text{จำนวนตายรวมของทุกกลุ่มอายุ}} \tag{3.1}$$

และ จำนวนตายที่ปรับใหม่ = จำนวนตายเดิม + (น้ำหนักของแต่ละกลุ่มอายุ × จำนวนตายที่ไม่ทราบอายุ) (3.2)

โดยจำนวนตายของประชากรที่ปรับใหม่นั้นเป็นจำนวนเต็ม หากจำนวนตายของประชากรที่คำนวณได้มีจุดทศนิยมที่น้อยกว่า 0.5 จะปัดเศษลงเป็นจำนวนเต็ม และหากจำนวนตายของประชากรที่คำนวณได้มีจุดทศนิยมที่มากกว่า 0.5 จะปัดเศษขึ้นเป็นจำนวนเต็ม โดยการปรับข้อมูลจำนวนตายของประชากรที่ไม่ทราบอายุจำแนกเพศแสดงตัวอย่างการคำนวณไว้ในภาคผนวก ก

3.2.2 การแบ่งข้อมูลเป็นรายอายุ

ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีและข้อมูลจำนวนตายจำแนกเพศนั้น มีการรวบรวมข้อมูลเป็นกลุ่มอายุ 5 ปี ซึ่งในงานวิจัยครั้งนี้จะใช้ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีและข้อมูลจำนวนตายจำแนกเพศรายอายุ ดังนั้นจึงต้องแยกข้อมูลดังกล่าวเป็นรายอายุ ดังนี้

3.2.2.1 การแบ่งข้อมูลรายอายุของจำนวนตาย

ข้อมูลจำนวนตายของประชากรในปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2538 มีข้อมูลกลุ่มอายุ 5 - 9 ปี 10 - 14 ปี ... 60 - 64 ปี 65 - 69 ปี และ 70 ปีขึ้นไป เป็นข้อมูลจำแนกเพศกลุ่มอายุ 5 ปี จึงต้องมีการแบ่งข้อมูลเป็นรายอายุ โดยใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรโดยอาศัยข้อมูลจำนวนตายของประชากรรายอายุ ปี พ.ศ. 2550 - พ.ศ. 2554 เพื่อนำมาหาค่าประมาณจำนวนตายของประชากรรายอายุในปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2538 ดังนี้

กำหนดให้ $P_{i,j}$ แทน สัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี ในปีที่ j

$N_{i,j}$ แทน จำนวนตายของประชากรที่อายุ i ปี ในปีที่ j

i แทน อายุของประชากรที่ตาย เมื่อ i =5, 6, 7, ..., 99, 100, 100 ปีขึ้นไป

j แทน ปีที่ประชากรตาย เมื่อปีที่ 1 คือ พ.ศ. 2550 ; $j = 1, 2, 3, 4, 5$

จะได้ว่า สัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี ในปีที่ j สามารถคำนวณได้จากสมการตัวอย่าง

เช่น สัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี ในปีที่ 1 คำนวณได้จาก

$$P_{5,1} = \frac{N_{5,1}}{N_{5,1}+N_{6,1}+N_{7,1}+N_{8,1}+N_{9,1}} \qquad P_{6,1} = \frac{N_{6,1}}{N_{5,1}+N_{6,1}+N_{7,1}+N_{8,1}+N_{9,1}}$$

$$P_{7,1} = \frac{N_{7,1}}{N_{5,1}+N_{6,1}+N_{7,1}+N_{8,1}+N_{9,1}} \qquad P_{8,1} = \frac{N_{8,1}}{N_{5,1}+N_{6,1}+N_{7,1}+N_{8,1}+N_{9,1}}$$

$$P_{9,1} = \frac{N_{9,1}}{N_{5,1}+N_{6,1}+N_{7,1}+N_{8,1}+N_{9,1}}$$

ค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี คำนวณได้จาก

$$\bar{P}_i = \frac{P_{i,1}+P_{i,2}+P_{i,3}+P_{i,4}+P_{i,5}}{5} \tag{3.3}$$

เมื่อ $\bar{P}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรอายุ i ปี

ดังนั้น

จำนวนตายของประชากรอายุ i ปี $= \bar{P}_i \bullet$ จำนวนตายของประชากรกลุ่มอายุที่ i อยู่ (3.4)

เช่น จำนวนตายของประชากรอายุ i ปี ของเพศชายปี พ.ศ. 2525 จะได้ว่า

จำนวนตายของประชากรอายุ 5 ปี = $0.22163 \bullet 3{,}831 \approx 849$ คน

จำนวนตายของประชากรอายุ 10 ปี = $0.13165 \bullet 2{,}962 \approx 390$ คน

สำหรับค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรและจำนวนตายของประชากรอายุอื่นๆ จำแนกเพศในปีอื่นๆ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันนี้ แสดงตัวอย่างการคำนวณไว้ในภาคผนวก ก

3.2.2.2 การแบ่งข้อมูลรายอายุของจำนวนประชากรกลางปี

ข้อมูลประชากรกลางปีในปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2536 เป็นข้อมูลจำแนกเพศรายกลุ่มอายุ 5 ปี จึงต้องมีการแบ่งข้อมูลเป็นรายอายุ โดยการแบ่งข้อมูลกลุ่มอายุ 5 ปี เป็นข้อมูลรายอายุ 1 ปีจะใช้วิธีการประมาณค่าแบบช่วง ออสคูลาทอรี (Osculatory Interpolation) ที่มีรูปแบบของสมการเป็นผลรวมเชิงเส้น (Linear Compound) ในเทอมของค่าสัมประสิทธิ์หรือตัวคูณ ซึ่งตัวคูณนี้มี 5 สูตรด้วยกัน โดยในงานวิจัยนี้เลือกใช้ตัวคูณพื้นฐานของเบียร์ (Beer Ordinary Formula) (D. Swanson, J. S. Siegel, & H. S. Shryock, 1976)

ตัวคูณพื้นฐานของเบียร์ แบ่งการประมาณค่าเป็น 5 กลุ่ม คือ กลุ่มอายุแรก (First panel) กลุ่มที่อยู่ถัดจากกลุ่มอายุแรก (Next - to - first panel) กลุ่มอายุกลาง (Middle panel) กลุ่มที่อยู่

ก่อนกลุ่มอายุสุดท้าย (Next - to - last panel) และกลุ่มอายุสุดท้าย (Last panel) โดยแต่ละกลุ่มสามารถแบ่งกลุ่มอายุได้ดังนี้

กลุ่มอายุแรก คือ จำนวนประชากรในกลุ่มอายุ 0 - 4 ปี

กลุ่มที่อยู่ถัดจากกลุ่มอายุแรก คือ จำนวนประชากรในกลุ่มอายุ 5 - 9 ปี

กลุ่มอายุกลาง คือ จำนวนประชากรในกลุ่มอายุ 10 - 14 ปี 15 - 19 ปี 20 - 24 ปี 25 - 29 ปี 30 - 34 ปี 35 - 39 ปี 40 - 44 ปี 45 - 49 ปี 50 - 54 ปี และ 55 - 59 ปี

กลุ่มที่อยู่ก่อนกลุ่มอายุสุดท้าย คือ จำนวนประชากรในกลุ่มอายุ 60 - 64 ปี

กลุ่มอายุสุดท้าย คือ จำนวนประชากรในกลุ่มอายุ 65 - 69 ปี

และในแต่ละกลุ่มจะมีค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการแบ่งข้อมูลเป็นรายอายุที่แตกต่างกันซึ่งจะแสดงไว้ในภาคผนวก ก

ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการทราบจำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ 9 ปี ในปี พ.ศ. 2525 จะสามารถหาได้ดังนี้

กลุ่มอายุ (ปี)	จำนวนประชากรกลางปี (คน)
0 - 4	3,206,000
5 - 9	3,192,000
10 - 14	3,143,000
15 - 19	2,895,000
20 - 24	2,435,000

สำหรับคนอายุ 9 ปี อยู่ในลำดับที่ 5 (Last fifth of G2) ของกลุ่มอายุ 5 - 9 โดยกลุ่มอายุ 5 - 9 เป็นกลุ่มอายุที่อยู่ในกลุ่มที่อยู่ถัดจากกลุ่มอายุแรก (Next - to - first panel) จากตารางค่าสัมประสิทธิ์ของเบียร์จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

Interpolated subgroup	Coefficients to be applied to:				
	Next-to first panel				
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
Last fifth of G2	-0.0191	0.1468	0.0822	-0.0084	-0.0015

ดังนั้น จำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ 9 ปี ในปี พ.ศ. 2525

= -0.0191 (3,206,000) + 0.1468 (3,192,000) + 0.0822 (3,143,000) - 0.0084 (2,895,000) - 0.0015 (2,435,000)

= 637,735 คน

หรือ ถ้าต้องการทราบจำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ 36 ปี ในปี พ.ศ. 2525 จะสามารถหาได้ดังนี้

กลุ่มอายุ (ปี)	จำนวนประชากรกลางปี (คน)
25 - 29	2,036,000
30 - 34	1,614,000
35 - 39	1,265,000
40 - 44	1,086,000
45 - 49	954,000

สำหรับคนอายุ 36 ปี อยู่ในลำดับที่ 2 (second fifth of G3) ของกลุ่มอายุ 35 - 39 โดยกลุ่มอายุ 35 - 39 เป็นกลุ่มอายุที่อยู่ในกลุ่มอายุกลาง (Middle panel) จากตารางค่าสัมประสิทธิ์ของของเบียร์จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

Interpolated subgroup	Coefficients to be applied to:				
	Middle panel				
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
Second fifth of G3	-0.002	0.016	0.22	-0.04	0.006

ดังนั้น จำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ 36 ปี ในปี พ.ศ. 2525

= -0.002 (2,036,000) + 0.016 (1,614,000) + 0.22 (1,265,000) – 0.04 (1,086,000) +0.006 (954,000)

= 262,336 คน

3.2.3 ข้อมูลที่ตกจดทะเบียนการตาย

ข้อมูลจำนวนตายของประชากรที่ใช้ในงานวิจัยนั้น อาจมีความไม่ครบถ้วนของการจดทะเบียนการตาย เนื่องมาจากการไม่ไปแจ้งตายของประชากร ซึ่งจะเห็นได้จากร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายที่ได้จากการสำรวจการเปลี่ยนแปลงของประชากรของทุกๆ 10 ปี โดยเริ่มจัดทำเมื่อปี พ.ศ. 2507 – พ.ศ. 2508 จนถึงปัจจุบันจัดทำเมื่อปี พ.ศ. 2548 – พ.ศ. 2549 แนวโน้มของการไปแจ้งตายของประชากรมีความครบถ้วนสมบูรณ์มากขึ้นกว่าในอดีต ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ต้องมีการปรับข้อมูลจำนวนตาย ดังนี้

ตารางที่ 3.1 ร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายจำแนกเพศ

พ.ศ.	เพศ	อายุ			
		ต่ำกว่า 1 ปี	1 - 9 ปี	10 - 59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2507 – 2508	ชาย	50.20	69.40	79.10	76.70
	หญิง	47.30	59.10	69.10	68.60
2518 – 2519	ชาย	29.00	62.00	61.70	75.90
	หญิง	29.90	47.9	68.70	70.10

ตารางที่ 3.1 (ต่อ)

พ.ศ.	เพศ	อายุ			
		ต่ำกว่า 1 ปี	1 - 9 ปี	10 - 59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2528 - 2529	ชาย	55.30	74.10	74.50	82.40
	หญิง	52.30	73.5	86.00	76.40
2538 - 2539	ชาย	67.60	80.00	96.50	98.80
	หญิง	62.30	76.20	99.7	97.20
2548 - 2549	ชาย	65.22	50.76	87.29	93.47
	หญิง	91.67	60.32	84.67	92.78

จากตารางที่ 3.1 จะเห็นได้ว่ามีการจัดทำร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายทุกๆ 10 ปี จึงต้องมีการประมาณค่าร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายจำแนกเพศในปีอื่นๆ และเนื่องจากข้อมูลเป็นข้อมูลอนุกรมเวลาจึงประมาณค่าโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method)

สมการแนวโน้มเชิงเส้นตรง คือ $\hat{Y}_t = a_1 + b_1 t$

เมื่อ $\hat{Y}_t$ แทน ค่าประมาณอัตราส่วนรายอายุ x ปีที่ t

a_1 แทน จุดตัดบนแกน Y

b_1 แทน ความชันของเส้นตรง

t แทน เวลา

n แทน จำนวนช่วงเวลาทั้งหมด

โดยที่ $b_1 = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} t_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}$ และ $a_1 = \bar{Y} - b\bar{t}$

จากสมการแนวโน้มเชิงเส้นตรงในตารางที่ 3.2 เมื่อแทนค่า t ที่เวลาต่างๆจะได้ค่าประมาณร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายปีที่ t

ดังนั้น จำนวนตายรายอายุที่ปรับใหม่ = ((1 - ค่าประมาณร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตาย)• จำนวนตายรายอายุเดิม) + จำนวนตายรายอายุเดิม (3.5)

สำหรับค่าประมาณร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายจำแนกเพศ และจำนวนตายรายอายุที่ปรับใหม่แสดงไว้ในภาคผนวก ก

ตารางที่ 3.2 สมการแนวโน้มเชิงเส้นตรงของแต่ละกลุ่มอายุจำแนกเพศ

กลุ่มอายุ	เพศ			
	ชาย	R^2	หญิง	R^2
ต่ำกว่า 1 ปี	$\hat{Y}_t$ = 0.662t + 39.01	49.57	$\hat{Y}_t$ = 1.172t + 31.12	70.54
1 - 9 ปี	$\hat{Y}_t$ = -0.187t + 71.33	72.40	$\hat{Y}_t$ = 0.299t + 56.87	47.68
10 - 59 ปี	$\hat{Y}_t$ = 0.492t + 69.08	47.90	$\hat{Y}_t$ = 0.609t + 68.35	56.87
60 ปีขึ้นไป	$\hat{Y}_t$ = 0.55t + 73.44	75.92	$\hat{Y}_t$ = 0.736t + 64.05	81.94

3.2.4 การประมาณค่าอัตรามรณะกลางปี และอัตรามรณะ

จากข้อมูลจำนวนตายของประชากรและจำนวนประชากรกลางปีที่รวบรวมและปรับข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันแล้วนั้น จะสามารถนำมาคำนวณหาอัตรามรณะกลางปี (central - death - rate) และอัตรามรณะของปีต่างๆได้ดังนี้

อัตราตายกลางปีของคนอายุ x ปี ที่ตายภายในอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t สามารถหาได้จาก

$$m_{x,t} = \frac{l_{x,t} - l_{x,t+1}}{L_{x,t}} = \frac{d_{x,t}}{L_{x,t}} \tag{3.6}$$

เมื่อ $m_{x,t}$ แทน อัตรามรณะกลางปีของคนอายุ x ปี ที่ตายภายในอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t

$l_{x,t}$ แทน จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ทั้งหมดจนถึงอายุ x ปี ณ ปีที่ t

$d_{x,t}$ แทน จำนวนตายของคนอายุ x ปี ที่ตายภายในอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t โดยที่

$$d_{x,t} = l_{x,t} - l_{x,t+1}$$

$L_{x,t}$ แทน จำนวนประชากรกลางปีของคนอายุ x ปี ที่มีชีวิตอยู่ถึงอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t

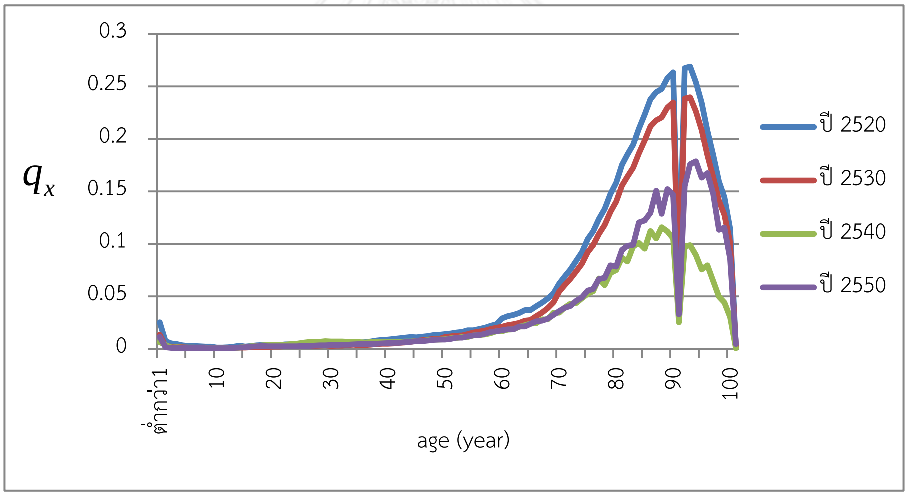
สำหรับการหาความน่าจะเป็นของคนอายุ x ปี จะตายภายในอายุ $x+1$ ปี เมื่อกำหนดให้การแจกแจงการเสียชีวิตเป็นแบบสม่ำเสมอนั่นคือการตายระหว่างปีใดๆ ของแต่ละอายุจะเกิดขึ้น

อย่างสม่ำเสมอตลอดปี (Uniform Distribution of Deaths) และจากความสัมพันธ์ของ $m_{x,t}$ กับ $q_{x,t}$ จะได้ว่า

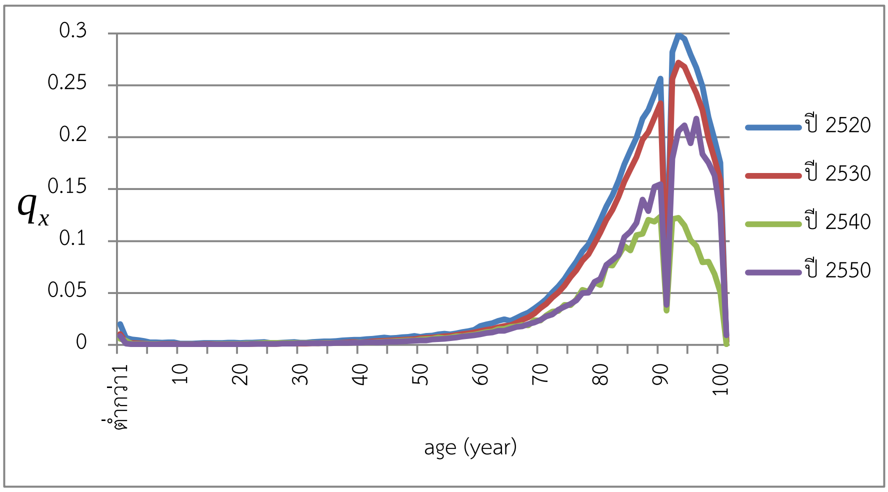
$$q_{x,t} = \frac{m_{x,t}}{1+\frac{1}{2}m_{x,t}} \tag{3.7}$$

เมื่อ $q_{x,t}$ แทน ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายภายในอายุ $x+1$ ปี ณ ปีที่ t

จากรูปที่ 3.1 และรูปที่ 3.2 พบว่าอัตรามรณะของเพศชายและเพศหญิงมีการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะที่คล้ายคลึงกัน คืออายุต่ำกว่า 1 ปี จะมีอัตรามรณะลดลงเรื่อยๆ และเพิ่มขึ้นสลับกับลดลงตั้งแต่อายุ 5 - 69 ปี จากนั้นค่าอัตรามรณะจะเพิ่มขึ้นในลักษณะเอ็กโพเนนเชียลแล้วลดลงอย่างรวดเร็วที่อายุประมาณ 92 ปี จากลักษณะดังกล่าวค่าอัตรามรณะจึงไม่สอดคล้องกับกฎการมรณะ (Law of mortality) คืออัตรามรณะจะลู่เข้าสู่ 1 และที่ช่วงอายุสุดท้ายจะมีอัตรามรณะเท่ากับ 1 ดังนั้นจึงต้องมีการปรับแก้และประมาณค่าอัตรามรณะให้มีความสอดคล้องกับกฎการมรณะดังนี้



รูปที่ 3.1 ค่าอัตรามรณะก่อนปรับแก้ให้ถูกต้องตามกฎการมรณะของเพศชายในปี พ.ศ. 2520 พ.ศ. 2530 พ.ศ. 2540 และ พ.ศ. 2550



รูปที่ 3.2 ค่าอัตรามรณะก่อนปรับแก้ให้ถูกต้องตามกฎการมรณะของเพศหญิงในปี พ.ศ. 2520 พ.ศ. 2530 พ.ศ. 2540 และ พ.ศ. 2550

3.2.4.1 การปรับแก้อัตรามรณะช่วงอายุ 0 - 69 ปี

เนื่องจากอัตรามรณะช่วงอายุ 0 - 69 ปีมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่คล้ายคลึงกัน คือเพิ่มขึ้นสลับกับลดลงในลักษณะเชิงเส้นตรง การปรับแก้ (Graduation) ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่นำมาใช้แก้ปัญหาความไม่ราบเรียบของอัตรามรณะที่คำนวณมาจากข้อมูลจำนวนตายที่รวบรวมมาได้ โดยการปรับแก้มี 2 ประเภทคือ การปรับแก้แบบใช้พารามิเตอร์ซึ่งจะดำเนินการโดยการปรับแก้พารามิเตอร์ในทุกช่วงอายุ เช่น วิธีของแฮลิคแมน และพอลลาร์ด (Heligman and Pollard) และการปรับแก้แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ เช่น วิธีการปรับแก้ด้วยค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (Moving weighted average graduation) และวิธีการปรับแก้ของวิดเทเกอร์ (Whittaker graduation methods) ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีการปรับแก้ของวิดเทเกอร์มาใช้ในการปรับแก้ เนื่องจากมีรูปแบบที่เรียบง่าย โดยวิธีดังกล่าวมีจุดมุ่งหมายเพื่อหาค่าต่ำสุดของ $m^*_{x,t}$ ซึ่งคำนวณดังสมการที่ (3.8)

$$J = \sum_{x=0}^{n^*} w_{x,t}\left(m^*_{x,t} - m_{x,t}\right)^2 + h\sum_{x=0}^{n^*-z}\left(\Delta_w{}^z m^*_{x,t}\right)^2 \qquad (3.8)$$

เมื่อ $w_{x,t}$ แทน ค่าถ่วงน้ำหนักเชิงบวกของคนอายุ x ปี ในปีที่ t

$m^*_{x,t}$ แทน อัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้ของคนอายุ x ปี ในปีที่ t

n^* แทน อายุสูงสุดของข้อมูลอัตรามรณะกลางปี

h แทน ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่เป็นลบ

Δ_w แทน ผลต่างอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้ระหว่างคนอายุ x ปีกับ $x-1$ ปี ในปีที่ t

z แทน จำนวนครั้งที่หาผลต่างอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้

กำหนดให้ $w_{x,t} = 1$ $z = 2$ และ $h = 0.5$ ในกระบวนการหาค่าอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้และจัดรูปแบบของสมการที่ (3.8) ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ (3.9)

$$J = \left(m^*_{x,t} - m_{x,t}\right)'\left(m^*_{x,t} - m_{x,t}\right) + \frac{1}{2} m^*_{x,t}{}' k_2' k_2 m^*_{x,t} \tag{3.9}$$

เมื่อ $m^*_{x,t} = \left(m^*_{1,t}, \ldots, m^*_{n,t}\right)', m_{x,t} = \left(m_{1,t}, \ldots, m_{n^*,t}\right)'$ และ k_2 เป็นเมตริกซ์ขนาด $(n-2) \times n$

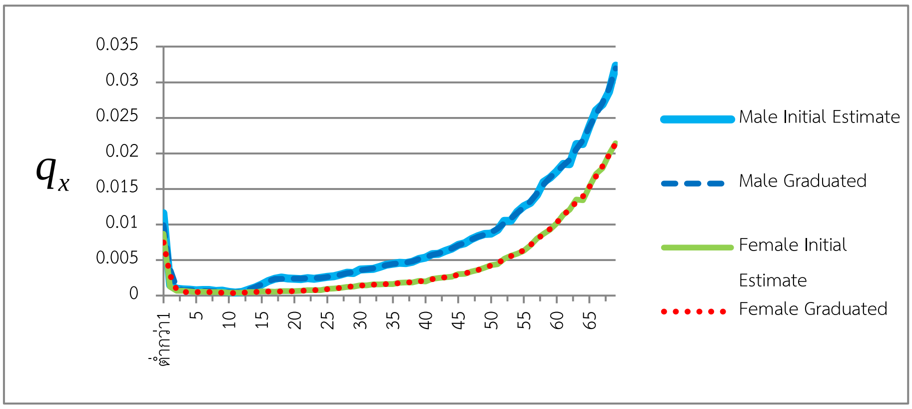
สามารถคำนวณได้จาก $k_2(i,j) = (-1)^{2+i-j}\left[\dfrac{2!}{(j-i)!(2-j+i)!}\right]$ (3.10)

โดยที่ $i = 1, \ldots, n^* - 2$, $j = 1, \ldots, n^*$ และ $k_2(i,j) = 0$ กรณีที่ $j < i$ หรือ $j > 2+i$

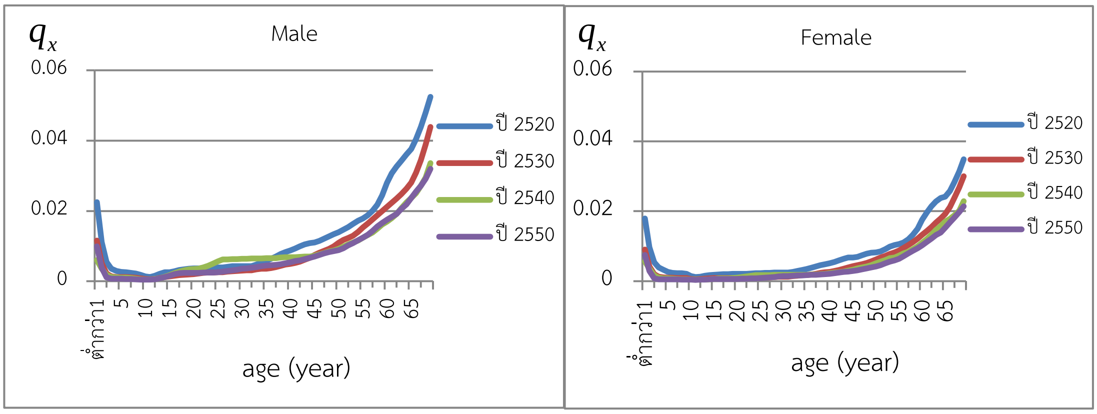
ดังนั้น ค่าอัตรามรณะกลางปีที่ปรับแก้ หาได้จากสมการที่ (3.11)

$$m^*_{x,t} = \left(I + 0.5 k_2' k_2\right)^{-1} m_{x,t} \tag{3.11}$$

เมื่อ I แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n^* \times n^*$



รูปที่ 3.3 ค่าอัตรามรณะก่อนและหลังปรับแก้ให้ถูกต้องตามกฎการมรณะของเพศชายและเพศหญิง อายุ 0 - 69 ปี พ.ศ. 2550



รูปที่ 3.4 ค่าอัตรามรณะหลังปรับแก้ให้ถูกต้องตามกฎการมรณะของเพศชายและเพศหญิงอายุ 0 - 69 ในปี พ.ศ. 2520 พ.ศ. 2530 พ.ศ. 2540 และพ.ศ. 2550

จากรูปที่ 3.3 แสดงอัตรามรณะก่อนและหลังปรับแก้ระหว่างเพศชายและเพศหญิงช่วงอายุ 0 - 69 ปี พ.ศ. 2550 พบว่าลักษณะการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะแตกต่างจากอัตรามรณะก่อนปรับแก้เล็กน้อย ทำให้อัตรามรณะมีความราบเรียบและเพิ่มขึ้นเรื่อยๆสอดคล้องตามกฎการมรณะ และอัตรามรณะแต่ละอายุของเพศชายมีแนวโน้มการตายสูงกว่าเพศหญิง สำหรับรูปที่ 3.4 แสดงการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะแต่ละปีของเพศชายและเพศหญิง พบว่าการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะตั้งแต่ปี พ.ศ. 2515 ถึง พ.ศ. 2520 มีรูปแบบไม่แน่นอน หลังจากนั้นจนถึง พ.ศ. 2553 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะมีรูปแบบคล้ายคลึงกันคือเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในอัตราที่ใกล้เคียงกันซึ่งอาจเป็นผลเนื่องจากการพัฒนาระบบการจัดเก็บข้อมูลทางสถิติของกระทรวงสาธารณสุขที่มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น

3.2.4.2 การปรับแก้อัตรามรณะสำหรับผู้สูงอายุ

สำหรับอัตรามรณะตั้งแต่อายุ 70 ปีขึ้นไปที่มีลักษณะเพิ่มขึ้นในแบบเอ็กโพเนนเชียลและลดลงอย่างรวดเร็วเมื่ออายุ 90 ปี การปรับแก้และประมาณค่าอัตรามรณะของผู้สูงอายุนั้น โคลและกิสเกอร์ (A. Coale & E. Kisker, 1990) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าดังสมการที่ (3.12)

$$m_{x,t} = m_{89,t} \exp(\sum_{i=90}^{x_{\max}} k_{i,t}), \quad 90 \le x \le x_{\max} \tag{3.12}$$

เมื่อ $k_{x,t}$ แทน อัตราการเพิ่มของอัตรามรณะกลางปี โดยการประมาณค่า $k_{x,t}$ มี 2 ขั้นตอน คือ

1.คำนวณหาค่า $\hat{k}_{x,t}$ ตั้งแต่อายุ 70 ปี ถึง 90 โดย $\hat{k}_{x,t} = \ln(m_{x,t}/m_{x-1,t})$

2.คำนวณค่าเฉลี่ย 5 ปี โดยให้ $k_{x,t}$ ที่สนใจเป็นค่าที่อยู่ตรงกลางนั่นคือ

$$k_{x,t} = \left(k_{x-2,t} + k_{x-1,t} + k_{x,t} + k_{x+1,t} + k_{x+2,t}\right)/5$$

และสมมติว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของอัตรามรณะกลางปีหลังจากอายุหนึ่งไปแล้วมีลักษณะเป็นเส้นตรง ในที่นี้กำหนดให้เป็น 90 ปี และกำหนดอายุสูงสุดที่เป็นไปได้คือ 110 ปี แสดงดังสมการที่ (3.13)

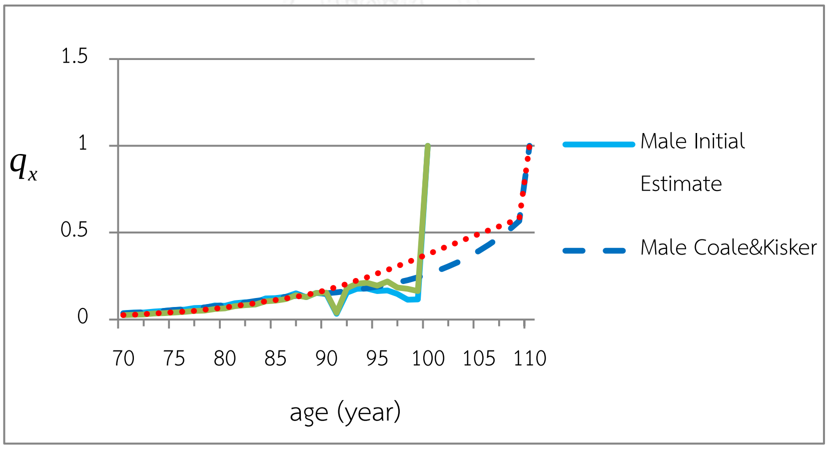
$$k_{x,t} = k_{90,t} + (x-90)\cdot s,\ \ x \geq 90 \tag{3.13}$$

เมื่อ s คือ ค่าความชัน โดยกำหนดให้ $m_{110} = 1.0$ สำหรับเพศชายและ $m_{110} = 0.8$ สำหรับเพศหญิง นำสมการที่ (3.13) แทนในสมการที่ (3.12) เพื่อหาค่า s จะได้ว่า

$$s = -\frac{\ln(m_{89,t} / m_{110,t}) + 21k_{90}}{231} \tag{3.14}$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณอัตรามรณะกลางปีตั้งแต่อายุ 90 ปี ได้ดังสมการที่ (3.15)

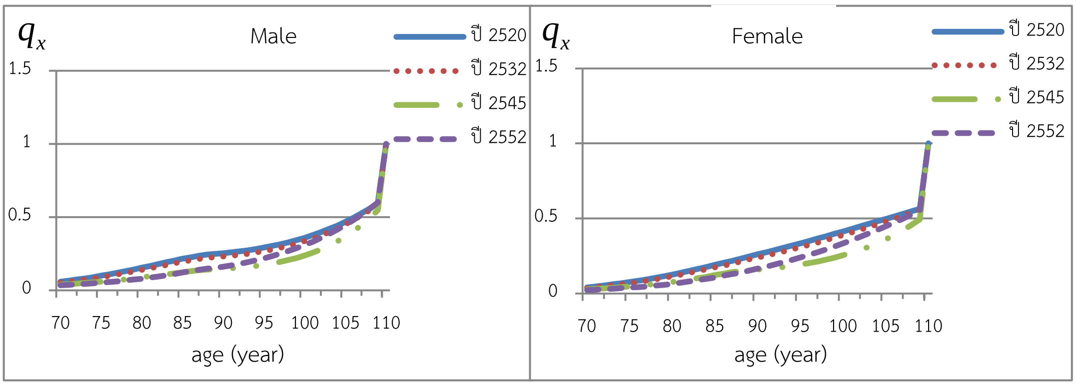
$$m_{x,t} = m_{x-1,t} \exp\left[k_{90} + (x-90) * S\right]\ ; x = 70, 71, ..., 110 \tag{3.15}$$



รูปที่ 3.5 ค่าอัตรามรณะก่อนและหลังปรับแก้สำหรับผู้สูงอายุของเพศชายและเพศหญิงช่วงอายุ 70 - 110 ในปี พ.ศ. 2550

จากรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 เมื่อนำข้อมูลอัตรามรณะตั้งแต่อายุ 70 ปีเป็นต้นไปมาปรับแก้และประมาณค่าใหม่ด้วยวิธีของโคลและกิสเกอร์ พบว่าอัตรามรณะหลังจากอายุ 70 ปีมีความราบเรียบกว่าอัตรามรณะก่อนปรับแก้และสามารถประมาณค่าอัตรามรณะได้ถึงอายุ 110 ปี ทั้งเพศชายและเพศหญิง สำหรับการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะผู้สูงอายุแต่ละปีมีอัตราการเพิ่มขึ้นที่

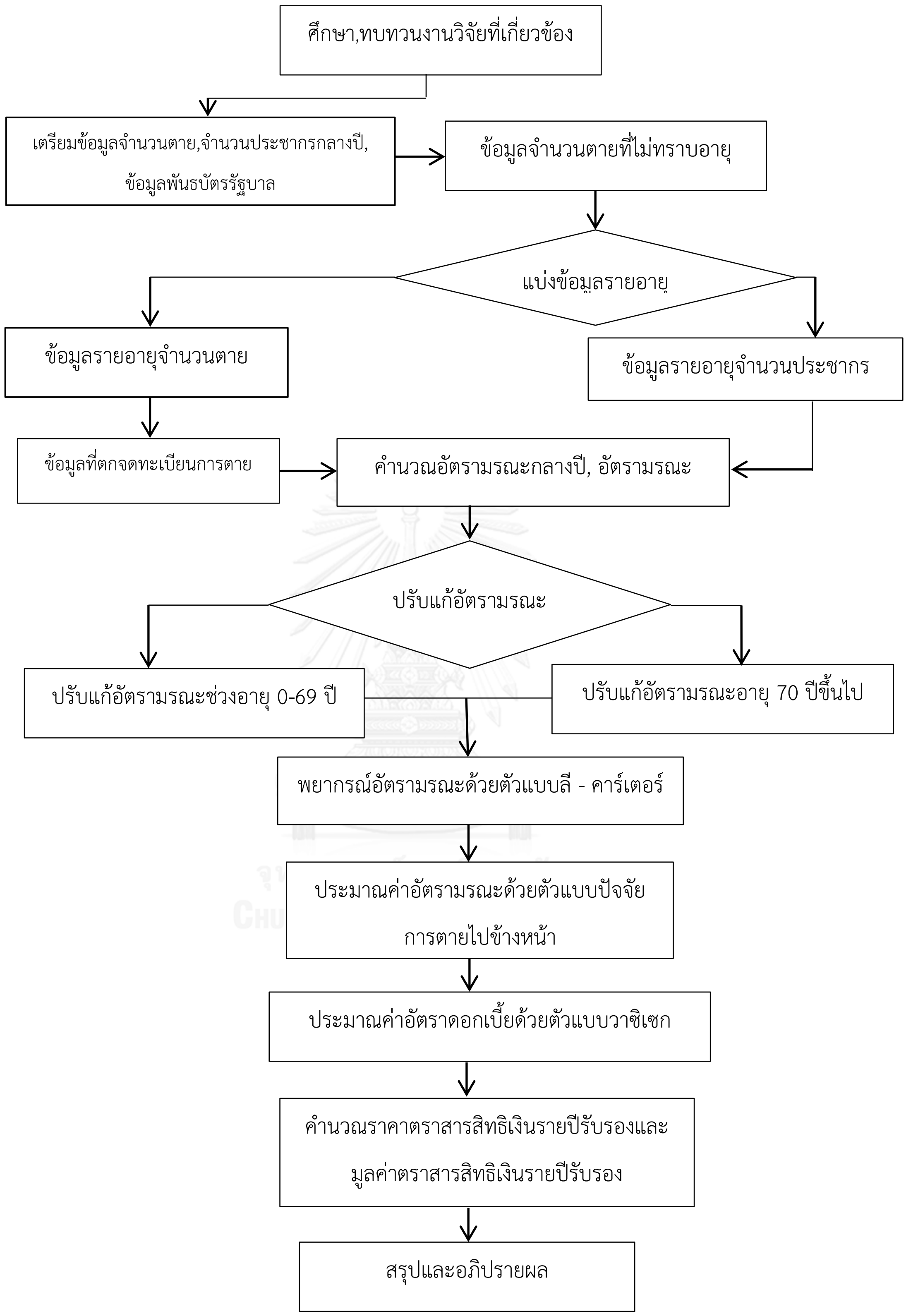
ใกล้เคียงกันตั้งแต่อายุ 70 ปี ถึง 90 ปี หลังจากนั้นอัตรามรณะของเพศหญิงมีการเพิ่มขึ้นสูงกว่าเพศชาย



รูปที่ 3.6 ค่าอัตรามรณะหลังปรับแก้สำหรับผู้สูงอายุของเพศชายและหญิงช่วงอายุ 70 - 110 ในปี พ.ศ. 2520 พ.ศ. 2532 พ.ศ. 2545 และพ.ศ. 2552

3.3 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

สำหรับขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยของงานวิจัยครั้งนี้ เริ่มจากการศึกษาและทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากนั้นจึงทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจำนวนตายของประชากร จำนวนประชากรกลางปีและข้อมูลพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยต่อมานำข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้มาปรับแก้ให้เหมาะสมตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัยโดยเริ่มจากการกระจายข้อมูลจำนวนตายที่ไม่ทราบอายุ การแบ่งข้อมูลรายอายุของจำนวนตาย จำนวนประชากรกลางปี และกระจายข้อมูลที่ตกจดทะเบียนการตายแก่ข้อมูลจำนวนตายของประชากรที่แบ่งข้อมูลรายอายุเรียบร้อยแล้ว เมื่อได้จำนวนตายของประชากรรายอายุและจำนวนประชากรกลางปีรายอายุจึงคำนวณค่าอัตรามรณะกลางปีและอัตรามรณะ แต่เนื่องจากค่าอัตรามรณะที่คำนวณได้ไม่เป็นไปตามกฎการมรณะจึงทำการปรับแก้อัตรามรณะ โดยปรับแก้อัตรามรณะในช่วงอายุ 0 - 69 ปี และปรับแก้อัตรามรณะช่วงอายุ 70 ปี ขึ้นไป เมื่อข้อมูลที่เก็บรวบรวมมีลักษณะสอดคล้องตามกฎการมรณะแล้วจะนำมาพยากรณ์อัตรามรณะด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์ จากนั้นประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า คำนวณอัตราดอกเบี้ยและราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยด้วยตัวแบบวาซิเซก แล้วคำนวณราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและมูลค่าสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง สุดท้ายจึงวิเคราะห์ สรุปผลและอภิปรายผลการวิจัย ดังแสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3. 7 แผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

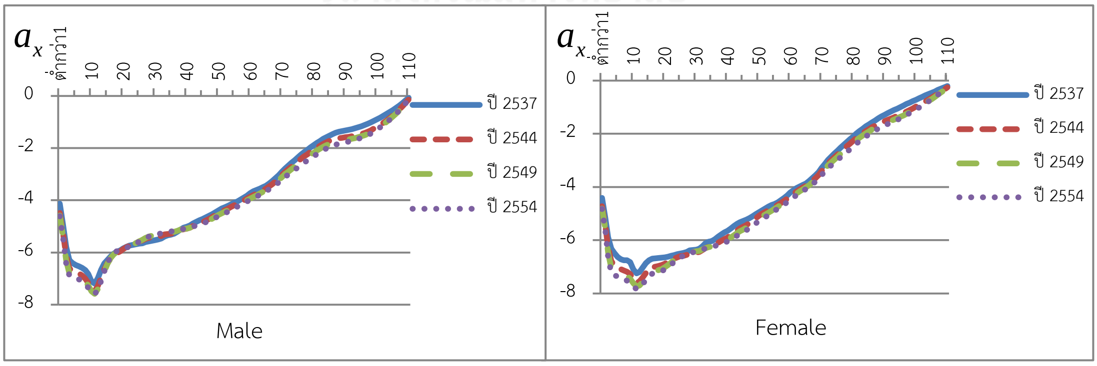
บทที่ 4

การประมาณและพยากรณ์อัตรามรณะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการเตรียมชุดข้อมูลของระยะเวลาและอายุที่รวบรวมได้จากนั้นจึงนำชุดข้อมูลที่ได้ไปประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) แล้วนำค่าที่ได้ไปแทนค่าหาความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ x ปีจะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1 การพยากรณ์อัตรามรณะโดยตัวแบบลี-คาร์เตอร์

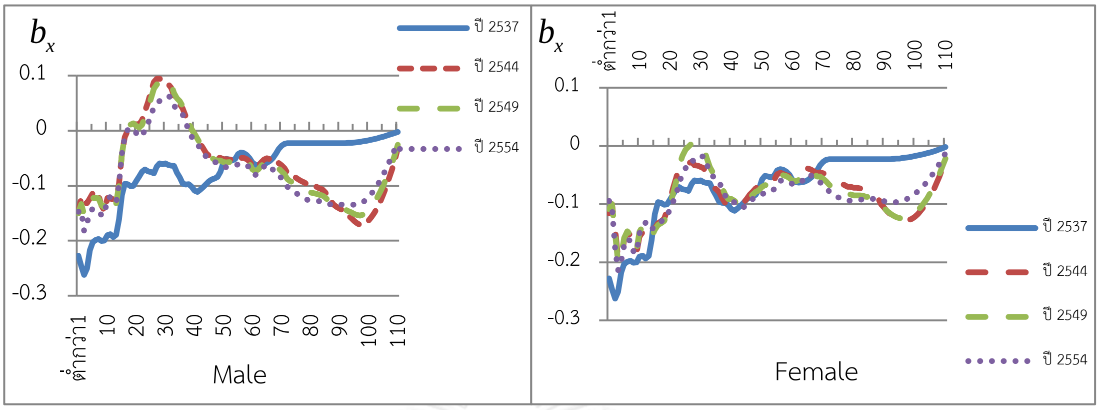
สำหรับการพยากรณ์อัตรามรณะตั้งแต่ปี พ.ศ. 2535 - พ.ศ. 2554 ด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์ แต่ละปีจะนำข้อมูลในอดีต 20 ปีมาใช้ในการพยากรณ์อัตรามรณะเช่น พยากรณ์อัตรามรณะในปี พ.ศ. 2535 ใช้ข้อมูลตั้งแต่ปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2534 พยากรณ์อัตรามรณะในปี พ.ศ. 2536 ใช้ข้อมูลตั้งแต่ปี พ.ศ. 2516 - พ.ศ. 2535 เป็นต้น การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลี - คาร์เตอร์ประยุกต์ใช้วิธีการแยกด้วยค่าเจาะจง (Singular Value Decomposition : SVD) กับเมตริกซ์ของ $\{\ln(m_{x,t})-a_{x,t}\}$ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ b_x และ k_t สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางเศรษฐศาสตร์ โดยที่ a_x ประมาณค่าได้จากสมการที่ 2.5



รูปที่ 4.1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีของเพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2544 พ.ศ. 2549 และ พ.ศ. 2554

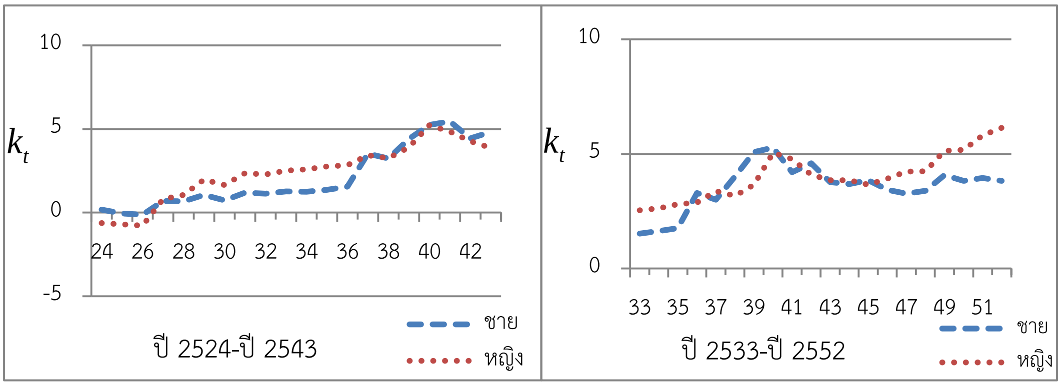
จากรูปที่ 4.1 แสดงค่าประมาณพารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีรายอายุ x ของเพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2544 พ.ศ. 2549 และพ.ศ. 2554 พบว่าค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีตั้งแต่อายุต่ำกว่า 1 ปี ลดลงเรื่อยๆ และค่อยๆ เพิ่มขึ้น

ในช่วงอายุ 12 - 88 ปี โดยค่าเฉลี่ยลอการิทึมของอัตรามรณะกลางปีเพศชายมีค่ามากกว่าเพศหญิง หลังจากนั้นจนถึงอายุ 110 ปี จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่ใกล้เคียงกัน

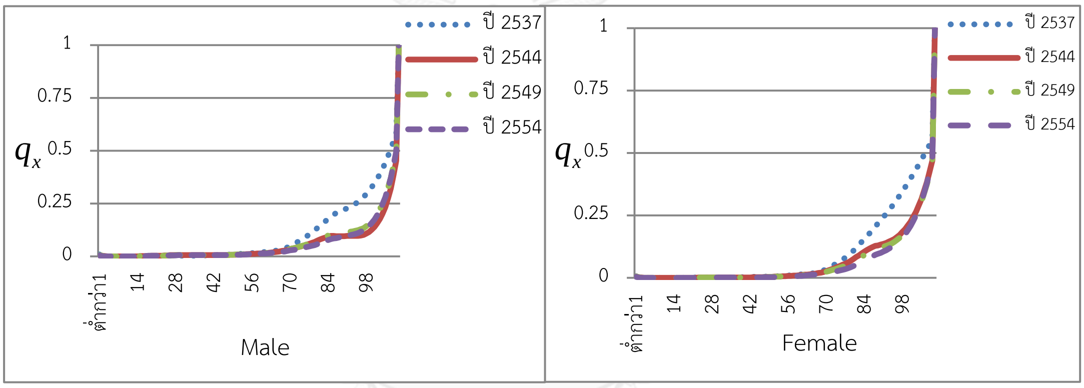


รูปที่ 4.2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของอัตราเสื่อมของดัชนีเวลาของเพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2544 พ.ศ. 2549 และ พ.ศ. 2554

จากรูปที่ 4.2 แสดงค่าประมาณพารามิเตอร์ของอัตราเสื่อมของดัชนีเวลารายอายุ x เพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2544 พ.ศ. 2549 และพ.ศ. 2554 พบว่าอัตราเสื่อมของดัชนีเวลาลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วตั้งแต่อายุต่ำกว่า 1 ปี จนถึงอายุ 30 ปี หลังจากนั้นจะลดลงเรื่อยๆ และเพิ่มขึ้นเมื่ออายุ 100 ปีขึ้นไป โดยอัตราการเสื่อมของดัชนีเวลาเพศชายมีความรวดเร็วในการเปลี่ยนแปลงมากกว่าเพศหญิง และเมื่อพิจารณาดัชนีเวลาของอัตรามรณะกลางปีจากรูปที่ 4.3 พบว่าเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปดัชนีเวลามีค่าเพิ่มขึ้นสลับกับลดลงในลักษณะเชิงเส้นตรง ดังนั้นงานวิจัยครั้งนี้จึงพยากรณ์ดัชนีเวลาในปีถัดไปด้วยสมการถดถอยเชิงเส้นตรงโดยกำหนดให้ตัวแปรต้นคือดัชนีเวลาก่อนหน้า แล้วนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ทั้ง a_x b_x และ k_t มาพยากรณ์อัตรามรณะด้วยตัวแบบลี – คาร์เตอร์ ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2535 - พ.ศ. 2554 จะได้ผลการพยากรณ์อัตรามรณะแสดงในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.3 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของดัชนีเวลาของระดับอัตรามรณะกลางปีของเพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2524 - พ.ศ. 2543 และปี พ.ศ. 2533 - พ.ศ. 2552



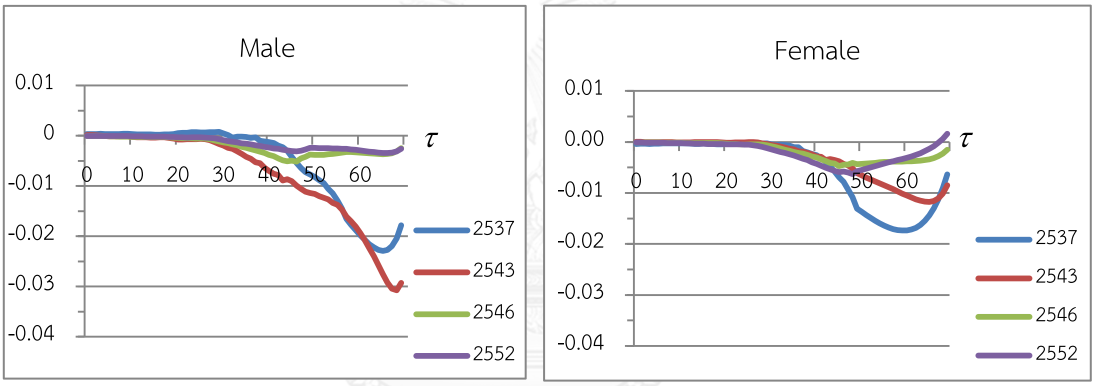
รูปที่ 4.4 ค่าพยากรณ์อัตรามรณะของเพศชายและเพศหญิงในปี พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2544 พ.ศ. 2549 และปี พ.ศ. 2554

จากรูปที่ 4.4 ค่าพยากรณ์อัตรามรณะของเพศชายและเพศหญิงมีการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะที่คล้ายคลึงกัน คือตั้งแต่อายุต่ำกว่า 1 ปี จะมีอัตรามรณะลดลงเรื่อยๆ และค่อยๆเพิ่มขึ้นตั้งแต่อายุ 12 จนถึงอายุ 69 ปี ค่าอัตรามรณะจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและมีค่าเท่ากับ 1 เมื่ออายุ 110 ปี ซึ่งลักษณะดังกล่าวสอดคล้องกับกฎการมรณะ (Law of mortality) คืออัตรามรณะจะลู่เข้าสู่ 1 และที่ช่วงอายุสุดท้ายจะมีอัตรามรณะเท่ากับ 1

4.2 การประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า

4.2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้า $\left({}_{\tau}p_x\left(t_j\right)\right)_{(\tau,x)\in C}$ ณ เวลา t_j ที่แตกต่างกัน เมื่อ t_1 = พ.ศ.2535 $l = lag\ \ time = 1$ $\Delta = t_{j+1} - t_j = 1$, N คือชุดข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาทั้งหมด 20 ชุด โดยที่ชุดข้อมูลของระยะเวลาและอายุที่รวบรวมได้คือ $0 \le \tau \le 80, 30 \le x \le 110$ และ $30 \le x + \tau \le 110$ จะได้จำนวนข้อมูลแต่ละชุดเท่ากับ K = 3,240 ค่า ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ x ปีที่เปลี่ยนแปลงไปในช่วงเวลา $\left[t_{j+1} + \tau,\ t_{j+1} + \tau + l\right)$ ดังแสดงในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ค่าฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ 40 ปี ของเพศชายและหญิง พ.ศ. 2537 พ.ศ. 2543 พ.ศ. 2549 และพ.ศ. 2552

จากรูปที่ 4.5 จะเห็นว่าค่าฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ 40 ปีทั้งเพศชายและเพศหญิงที่มีค่า τ ตั้งแต่ 0 - 30 อัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างปีของความน่าจะเป็นในการรอดชีพมีความแตกต่างกันเล็กน้อยหลังจากนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงค่อยๆลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อ τ มีค่าเพิ่มมากขึ้น แสดงให้เห็นว่าในช่วงอายุ 40 - 70 ปี อัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างปีของความน่าจะเป็นในการรอดชีพมีความแตกต่างค่อนข้างมาก ซึ่งสอดคล้องกับในปัจจุบันที่พบว่า อายุขัยของประชากรไทยเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดยเป็นผลจากความก้าวหน้าทางการแพทย์และการดูแลสุขภาพของตนเองมากขึ้นและในช่วงเวลาอื่นๆ ก็มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงคล้ายคลึงกับที่กล่าวข้างต้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดภายใต้ค่าสังเกตของประชากรเพศชายและเพศหญิงด้วยค่า $\sigma_{e,1} = 0.0005$ และ $\sigma_{e,2} = 0.00001$ เพื่อเปรียบเทียบลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของการประมาณค่าพารามิเตอร์จาก นาน ชู และแดเนียล เบเออร์ ในปี ค.ศ. 2010 และผลจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ ดังแสดงในตารางที่ 4.1

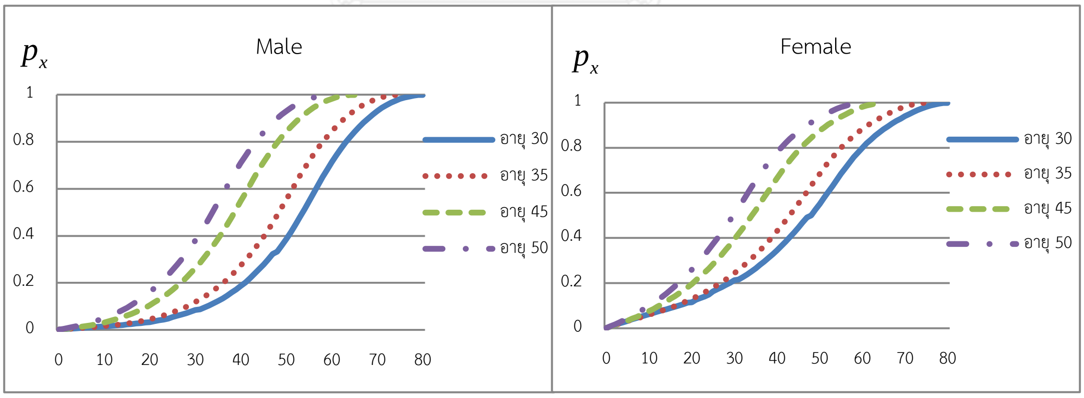
ตารางที่ 4.1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเพศชายและเพศหญิง

พารามิเตอร์	ค่าเริ่มต้น	ค่าประมาณเมื่อ $\sigma_{e,1} = 0.0005$	ค่าประมาณเมื่อ $\sigma_{e,2} = 0.00001$
เพศชาย			
$C(x)$	0.1	0.1132	0.1021
M	-0.0037	-0.005	-0.0118
N	0.15	0.9885	0.5827
$\tilde{L}$		48824.28	36744.1
เพศหญิง			
$C(x)$	0.1	0.1511	0.079
M	-0.002	-0.043	-0.054
N	0.25	0.9892	0.6335
$\tilde{L}$		49877.45	44693.59

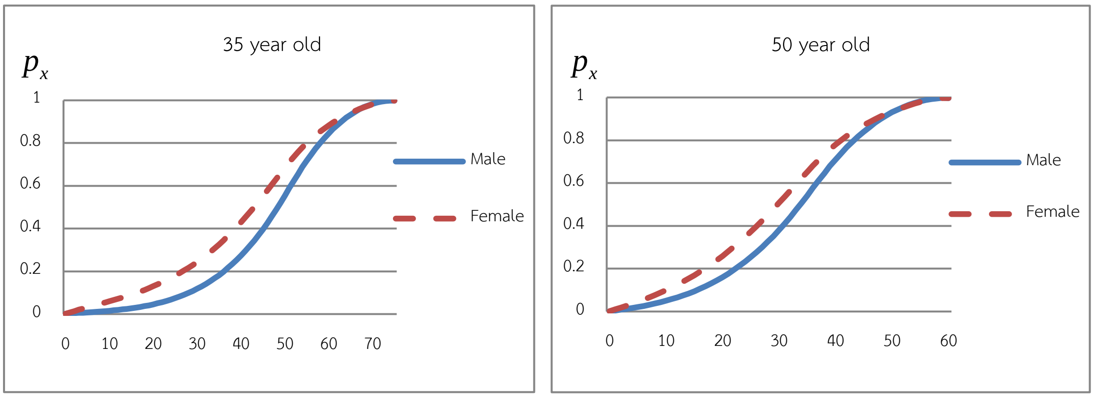
จากตารางที่ 4.1 เมื่อเปรียบค่า log-likelihood ระหว่างค่าประมาณพารามิเตอร์ที่คำนวณภายใต้ $\sigma_{e,1} = 0.0005$ และ $\sigma_{e,2} = 0.00001$ พบว่าค่า log-likelihood เมื่อ $\sigma_{e,1} = 0.0005$ มีค่าสูงกว่าทั้งเพศชายและหญิง ดังนั้น งานวิจัยครั้งนี้จึงนำค่าประมาณพารามิเตอร์ภายใต้ $\sigma_{e,1} = 0.0005$ ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้าเป็นลำดับต่อไป

4.2.2 การประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models)

ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าจะพิจารณาขอบเขตที่เป็นไปได้ของความน่าจะเป็นของการรอดชีพที่กว้างที่สุด โดยคำนวณค่าพลังมรณะของคนอายุ x ปี ที่มีการเปลี่ยนแปลงช่วงเวลาต่างๆ แล้วใช้ความสัมพันธ์ระหว่างพลังมรณะและความน่าจะเป็นในการรอดชีพในสมการที่ (2.4) เพื่อประมาณค่าความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี ดังแสดงในรูปที่ 4.6 เมื่อกำหนดให้อายุสุดท้ายคือ 110 ปี จากการศึกษาพบว่าเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปความน่าจะเป็นในการรอดชีพของคนอายุ x ปี ที่คาดว่าจะมีชีวิตรอดไปอีก τ ปีจะมีค่าต่ำในช่วงแรกเนื่องจากระยะเวลาจากจุดเริ่มต้นไปจนถึงช่วงอายุสุดท้ายมีขอบเขตกว้างกว่าเมื่อคนอายุสูงขึ้น หลังจากนั้นความน่าจะเป็นในการรอดชีพจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนมีค่าเข้าใกล้ 1 และเมื่อเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพของคนแต่ละอายุพบว่าคนอายุสูงกว่าจะมีความน่าจะเป็นในการรอดชีพไปจนถึง 110 ปี สูงกว่าคนอายุน้อย และจากรูปที่ 4.7 เมื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นในการรอดชีพของเพศชายและเพศหญิงแต่ละอายุพบว่าเพศหญิงมีความน่าจะเป็นในการรอดชีพไปจนถึงช่วงอายุสุดท้ายสูงกว่าเพศชายในทุกช่วงอายุ



รูปที่ 4.6 ความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้าของเพศชายและเพศหญิงเมื่ออายุ 30 ปี 35 ปี45 ปี และ 50 ปี



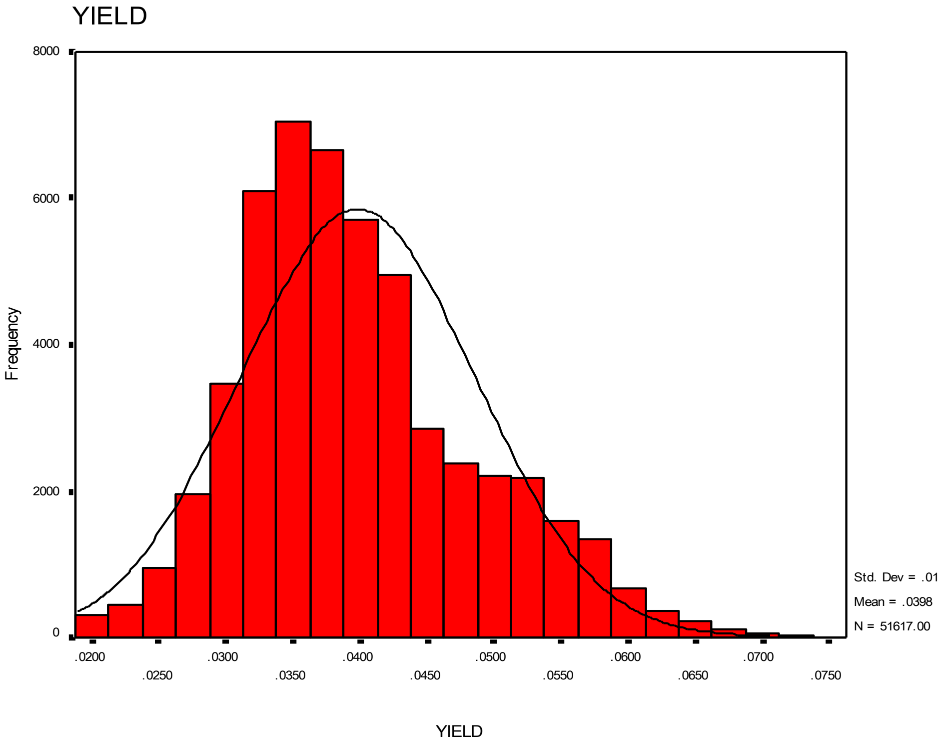
รูปที่ 4.7 ความน่าจะเป็นของการรอดชีพไปข้างหน้าของคนอายุ 35 ปี และอายุ 50 ปี

บทที่ 5

การประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของตัวแบบ Vasicek

5.1 การเตรียมข้อมูลที่ใช้ศึกษา

การประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบวาซิเชก (Vasicek Model) เพื่อกำหนดราคาพันธบัตรที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยใช้ข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลจากสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย โดยข้อมูลเป็นข้อมูลรายวันตั้งแต่ปี พ.ศ. 2544 - พ.ศ. 2557 ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปีและเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปี จนถึง 30 ปี จากรูป ที่ 5.1 เมื่อนำข้อมูลอัตราดอกเบี้ยของพันธบัตรรัฐบาลที่มีอายุคงเหลือทุกช่วงเวลามาสร้างแผนภูมิฮิสโตแกรม และคำนวณค่าสถิติเบื้องต้นพบว่าอัตราดอกเบี้ยมีความเบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยเล็กน้อย ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เท่ากับ 0.677 นั่นคือลักษณะการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลเบ้ไปทางขวา มีค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง 0.15 แสดงให้เห็นว่าข้อมูลมีการกระจายค่อนข้างมาก และเมื่อทดสอบด้วย สถิติทดสอบ Kolmogorov - Smirnov พบว่าค่า $P-value = 0.162$ ซึ่งมากกว่า $\alpha = 0.01$ ลักษณะการกระจายของข้อมูลจึงเป็นแบบปกติ



รูปที่ 5.1 ฮิสโตแกรมแสดงขนาดการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยของพันธบัตรรัฐบาล

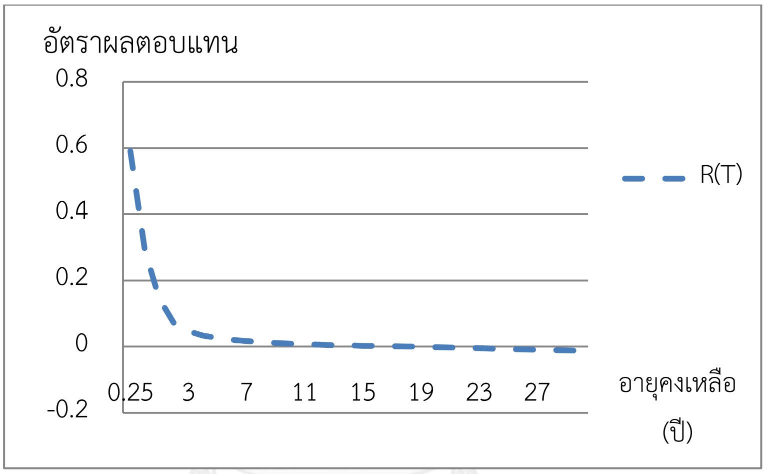
5.2 การประมาณค่าโครงสร้างอัตราดอกเบี้ย

สำหรับการประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบ Vasicek ที่อาศัยความสัมพันธ์ระหว่างราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond) กับอัตราดอกเบี้ย ณ วันครบกำหนดไถ่ถอน เริ่มจากการหาค่า r(0) จากความสัมพันธ์เชิงเส้นของอัตราผลตอบแทนในตลาดกับอายุคงเหลือของพันธบัตรรัฐบาลโดยใช้โปรแกรม SPSS พบว่าค่าประมาณ r(0) เท่ากับ 0.032 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และใช้คำสั่ง Solver ใน Microsoft Excel เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ค่าความแตกต่างระหว่างราคาที่คำนวณ จากแบบจำลองและราคาที่สังเกตได้ในตลาดต่ำที่สุด ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ a,b และ σ เท่ากับ 0.087 0.0001996 และ 0.0273 ตามลำดับ เพื่อนำไปคำนวณค่า $B(0,\mathrm{T}_2)$ และ $A(0,\mathrm{T}_2)$ ในสมการที่ (2.20) และสมการที่ (2.21) หลังจากนั้นประมาณราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยด้วยสมการที่ (2.19) แสดงผลได้ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ค่าประมาณราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond)

T_2	$P(0,T_2)$	T_2	$P(0,T_2)$	T_2	$P(0,T_2)$
0.25	0.8626	11	0.9214	23	1.1186
0.5	0.8639	12	0.9280	24	1.1563
1	0.8642	13	0.9437	25	1.1968
2	0.8680	14	0.9476	26	1.2402
3	0.8690	15	0.9698	27	1.2866
4	0.8748	16	0.9699	28	1.3361
5	0.8769	17	0.9844	29	1.3888
6	0.8843	18	0.9944	30	1.4448
7	0.8882	19	0.9921		
8	0.8963	20	1.0215		
9	0.9030	21	1.0513		
10	0.9110	22	1.0836		

จากตารางที่ 5.1 แสดงค่าประมาณราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond) ณ เวลาปัจจุบัน $(t = 0)$ ที่มีมูลค่าที่ตราไว้ 1 บาท จากการศึกษาพบว่า การเปลี่ยนแปลงของอายุคงเหลือมีผลกระทบต่อความผันผวนของราคาพันธบัตรไม่เท่ากัน โดยราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยที่มีอายุยาวกว่าจะมีราคาพันธบัตรที่สูงกว่าพันธบัตรที่มีอายุสั้น ซึ่งส่วนหนึ่งเป็นการชดเชยความเสี่ยงของการถือพันธบัตรในระยะยาว ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทน ณ วันครบกำหนดไถ่ถอน ซึ่งมีลักษณะแบบลาดลงจากซ้ายไปขวา นั่นคือ พันธบัตรที่มีอายุคงเหลือยาวจะมีอัตราผลตอบแทนต่ำกว่าพันธบัตรที่มีอายุสั้น ซึ่ง Yield Curve ลักษณะนี้จะพบเมื่อตลาดคาดการณ์ว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดมีแนวโน้มลดลง การเลือกลงทุนในพันธบัตรที่มีอายุยาวกว่าจึงอาจได้รับประโยชน์จากการเพิ่มขึ้นของราคาในอัตราที่สูงกว่าการลงทุนระยะสั้น



รูปที่ 5.2 อัตราผลตอบแทนของพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยที่มีอายุคงเหลือ 3 เดือน - 30 ปี

บทที่ 6

การประมาณค่าราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง

การลงทุนในตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองเป็นการลงทุนที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือครองในการเลือกตัดสินใจที่จะซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying Assets) หรือไม่ก็ได้เมื่อครบกำหนดอายุของสัญญา ก่อนการลงทุนบริษัทรับประกันภัยจึงต้องมีการคาดการณ์ราคา โดยปัจจัยที่อาจมีผลให้การกำหนดราคา (Pricing) ของกระแสเงินที่จะได้รับจากการลงทุนไม่เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้คืออาจเกิดความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest rate risk) และเกิดการเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะ งานวิจัยครั้งนี้จึงได้นำตัวแบบการคาดประมาณอัตรามรณะด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าและการหาอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของ Vasicek มาใช้ในการหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง โดยจะประมาณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ณ วันเริ่มรับประกันภัยและเลื่อนการจ่ายเงินรายปีรับรองไปจนถึงวันที่ผู้เอาประกันภัยเกษียณอายุ ซึ่งจะจ่ายเงินรายปีแบบครั้งเดียวโดยมีเงื่อนไขว่าผู้เอาประกันภัยยังมีชีวิตอยู่และสินทรัพย์อ้างอิงคือพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย ซึ่งขณะนั้นมีราคาเท่ากับราคาใช้สิทธิ จากสมการ (2.32) และ (2.33) จะได้ค่าประมาณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและมูลค่าของตราสารสิทธิเงินรายปีของคนอายุ x ปี ที่จะครบกำหนดสัญญา ณ เวลา T_2 โดยใช้ตัวแบบการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพที่แตกต่างกันคือตัวแบบลี - คาร์เตอร์ และตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า ดังแสดงในตารางที่ 6.1 และตารางที่ 6.2

ตารางที่ 6.1 มูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองเพศชายและหญิงเมื่อประมาณค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์

x_0, T	เพศชาย		เพศหญิง	
	C_{Male}^{GAO}	V_{Male}^{GAO}	$C_{\mathrm{Female}}^{GAO}$	$V_{\mathrm{Female}}^{GAO}$
(30,30)	1.1473	1.2121	1.3294	1.9614
(35,25)	0.9817	1.0480	1.1092	1.7457
(40,20)	0.8642	0.9325	0.9532	1.5941
(45,15)	0.8450	0.9154	0.9118	1.5577
(50,10)	0.8254	0.8935	0.8665	1.5200
(55,5)	0.8208	0.8724	0.8500	0.8985

ตารางที่ 6.2 มูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองเพศชายและเพศหญิงเมื่อประมาณค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า

x_0, T	เพศชาย		เพศหญิง	
	C^{GAO}_{Male}	V^{GAO}_{Male}	C^{GAO}_{Female}	V^{GAO}_{Female}
(30,30)	1.1482	1.8833	1.3350	1.9832
(35,25)	0.9820	1.7191	1.1240	1.8261
(40,20)	0.8644	1.5568	0.9565	1.6530
(45,15)	0.8452	1.5234	0.9224	1.6239
(50,10)	0.8255	1.5210	0.9103	1.5447
(55,5)	0.8209	1.4904	0.8755	0.9025

จากการศึกษาพบว่า ราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองที่นักลงทุนนำมาพิจารณาประกอบการตัดสินใจในการซื้อสิทธิมาถือครองโดยเปรียบเทียบความเหมาะสมของราคาตามทฤษฎีกับราคาในตลาด โดยแต่ละอายุที่ประมาณค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าทั้งเพศชายและเพศหญิงมีค่าสูงกว่าราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองที่ประมาณค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์ ซึ่งเป็นผลมาจากเมื่อคนอายุสูงขึ้นค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพจนถึงวันครบกำหนดการจ่ายเงินรายปีรับรองมีค่ามากขึ้นประกอบกับโอกาสในการได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนระยะสั้นมีค่าต่ำกว่าการลงทุนในระยะยาว ส่งผลให้ราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองของผู้เอาประกันภัยอายุน้อยกว่ามีโอกาสได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนสูงกว่า อีกทั้งเมื่อเปรียบเทียบมูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองซึ่งเป็นมูลค่าในอนาคตที่นักลงทุนคาดว่าจะได้รับหากมีการถือครองสิทธินั้นจนถึงอายุ 60 ปี โดยการประมาณความน่าจะเป็นในการรอดชีพของตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้ามีค่าสูงกว่าการประมาณค่าโดยใช้ตัวแบบตัวแบบลี - คาร์เตอร์ทุกช่วงอายุ

จากลักษณะการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวพบว่าราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองของ 2 ตัวแบบแตกต่างกันเนื่องจากการประมาณค่าอัตรามรณะภายใต้ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าได้นำอัตราการรอดชีพแต่ละช่วงปีมาประกอบการพิจารณาความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยซึ่งทำให้โอกาสของการรอดชีพที่นำมาพิจารณามีค่าสูงกว่าการประมาณค่าโดยใช้ตัวแบบลี - คาร์เตอร์

บทที่ 7

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

7.1 สรุปผลการศึกษา

การศึกษาการประมาณค่าอัตรามรณะจากตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า (Forward Mortality Factor Models) และการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยจากตัวแบบของ Vasicek เพื่อหาราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ได้ใช้ข้อมูลจำนวนประชากรกลางปีจากสำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทยและจำนวนตายของประชากรระหว่างปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553 มาจากสถิติสาธารณสุข สำนักนโยบายและยุทธศาสตร์ สำนักงานปลัดกระทรวงสาธารณสุข และข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลไทยที่นำมาศึกษาระหว่าง พ.ศ. 2544 - พ.ศ. 2557 ที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี 2 ปีและเพิ่มขึ้นขั้นละ 1 ปีจนถึง 30 ปี จากสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย (The Thai Bond Market Association) ซึ่งการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบต่างๆ ที่ได้ในการศึกษานี้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปหลายโปรแกรมคือ Microsoft Excel 2007 โปรแกรม R 3.1.0 โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ และโปรแกรมสำเร็จรูปทางเศรษฐศาสตร์

การประมาณค่าความน่าจะเป็นของการรอดชีพด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าของคนอายุ x ปี จะมีชีวิตรอดจนถึงอายุ $x+t$ ปี และคาดว่าจะรอดไปอีก τ ปี พบว่าเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปความน่าจะเป็นในการรอดชีพของคนอายุ x ปี ที่คาดว่าจะมีชีวิตรอดไปอีก τ ปีจะมีค่าต่ำในช่วงแรก หลังจากนั้นความน่าจะเป็นในการรอดชีพจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นในการรอดชีพของเพศชายและเพศหญิงแต่ละอายุพบว่าเพศชายมีความน่าจะเป็นในการรอดชีพต่ำกว่าเพศหญิงในทุกช่วงอายุ จากนั้นเมื่อประมาณค่าราคาพันธบัตรที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย (Zero - coupon Bond) ณ เวลาปัจจุบัน ($t=0$) ที่มีมูลค่าที่ตราไว้ 1 บาท พบว่าการเปลี่ยนแปลงของอายุคงเหลือมีผลกระทบต่อความผันผวนของราคาพันธบัตร โดยอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรที่มีอายุคงเหลือจนถึงวันครบกำหนดไถ่ถอนระยะสั้นมีค่าสูงกว่าอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรที่มีอายุคงเหลือจนถึงวันครบกำหนดไถ่ถอนระยะยาว และพันธบัตรที่มีการลงทุนระยะยาวจะมีราคาพันธบัตรที่สูงกว่าการลงทุนในระยะสั้นเพื่อชดเชยความเสี่ยงของการถือพันธบัตรในระยะยาว เมื่อนำค่าประมาณความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้ากับอัตราดอกเบี้ยที่ประมาณด้วยตัวแบบวาซิเชก มาคำนวณหาราคาสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและมูลค่าสำหรับตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง จากการศึกษาพบว่าเมื่อผู้เอาประกันภัยเริ่มทำประกันภัยเมื่ออายุเข้าใกล้ 60 ปี จะมีความน่าจะเป็นในการรอดชีพจนถึงวันครบกำหนดการ

จ่ายเงินรายปีรับรองมากขึ้น และอัตราผลตอบแทนจนถึงวันครบกำหนดไถ่ถอนในการลงทุนระยะสั้นให้อัตราผลตอบแทนสูงกว่าการลงทุนในระยะยาว ส่งผลให้ราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและมูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง ที่บริษัทประกันชีวิตจะได้รับหากมีการนำเบี้ยประกันภัยของผู้เอาประกันภัยที่มีอายุน้อยๆ ไปลงทุน จะมีโอกาสได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนสูงกว่าการนำเบี้ยประกันภัยของผู้เอาประกันภัยที่มีอายุเข้าใกล้อายุ 60 ปี ดังนั้นการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองด้วยการพิจารณาองค์ประกอบทั้งอัตรามรณะและการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้นจึงอาจเป็นแนวทางหนึ่งในการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองก่อนการลงทุนของบริษัทรับประกันภัย

7.2 อภิปรายผลการวิจัย

การพยากรณ์อัตรามรณะด้วยตัวแบบลี-คาร์เตอร์ โดยใช้ข้อมูลตั้งแต่ปี พ.ศ. 2534 - พ.ศ. 2553 ให้ผลการพยากรณ์อัตรามรณะของเพศชายและหญิงมีลักษณะสอดคล้องกับกฎการมรณะ (Law of Mortality) เช่นเดียวกันกับงานวิจัยเรื่องการคาดประมาณอัตรามรณะไทย: การเปรียบเทียบ 3 วิธีการ (ลี - คาร์เตอร์, ฟัซซีลี - คาร์เตอร์ และการแปลงของแวง) โดยใช้ข้อมูลการตายและจำนวนประชากรระหว่างปี พ.ศ. 2540 - พ.ศ. 2551 (ณัฐกร สุรเมธากุล, 2552) และเมื่อคำนวณความน่าจะเป็นในการรอดชีพด้วยตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าพบว่า เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปความน่าจะเป็นในการรอดชีพมีค่าเพิ่มขึ้นเข้าใกล้ 1 จากนั้นเมื่อคำนวณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลองของวาซิเซก ทำให้ได้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยตามระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนที่มีลักษณะแบบลาดลงและมีค่าน้อยกว่าศูนย์ในระยะยาว ซึ่งแตกต่างจากการศึกษาความสามารถของการพรรณนาโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบจำลองของวาซิเซก กับตัวแบบจำลองของค็อกซ์ อินเกอร์ซอลล์ รอสส์ ด้วยเทคนิคตัวกรองคาลมาน (Kalman Filtering) จากการศึกษา พบว่าตัวแบบจำลองของวาซิเซก มีความสามารถในการพรรณนาพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยที่เหนือกว่าตัวแบบจำลองของค็อกซ์ อินเกอร์ซอลล์ รอสส์ อย่างมีนัยสำคัญ และอัตราดอกเบี้ยระยะยาวของประเทศไทยอาจมีระดับสูงถึงร้อยละ 50 ต่อปี (อัญญา ขันธวิทย์ และ อนุฏฐนาช เจริญจิตรกรรม, 2551) และจากการนำอัตรามรณะกับอัตราดอกเบี้ยที่คำนวณได้ข้างต้นมาประยุกต์ใช้กับการกำหนดราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองโดยพิจารณา ณ เวลาเริ่มต้นทำประกันภัยจนถึงเวลาที่ผู้เอาประกันภัยเกษียณอายุนั้นพบว่า ถ้าผู้เอาประกันภัยมีอายุน้อยๆ ผู้รับประกันภัยสามารถนำเบี้ยประกันภัยไปลงทุนในระยะยาวได้และมีโอกาสได้รับผลตอบแทนสูงกว่าการลงทุนระยะสั้น ซึ่งต่างจากงานวิจัยในปี ค.ศ. 2011 นาน ชู และแดเนียล เบเออร์ ที่ประยุกต์ใช้ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าในการพยากรณ์ความน่าจะเป็นในการรอดชีพ ผลการคำนวณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองและมูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองพบว่าเมื่อผู้

เอาประกันภัยอายุสูงขึ้นจะมีโอกาสได้รับผลตอบแทนสูงกว่า (N. Zhu & D. Bauer, 2011b) ทั้งนี้อาจเป็นเพราะลักษณะการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนของประเทศไทยและการเก็บรวบรวมข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลที่แตกต่างกัน

7.3 การนำผลการศึกษาไปประยุกต์ใช้

1. ค่าประมาณความน่าจะเป็นในการรอดชีพโดยใช้ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าสามารถนำมาปรับใช้กับการคิดอัตราเบี้ยประกันภัยของบริษัทรับประกันภัยที่พิจารณาปัจจัยเสี่ยงเกี่ยวกับอัตรามรณะเป็นสำคัญ

2. การประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยด้วยตัวแบบวาซิเซก โดยอาศัยข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลในประเทศไทยนั้นอาจนำไปใช้ในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ประเภทอื่นๆแทนการกำหนดราคาของการลงทุนในตลาดด้วยการใช้อัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

3. การลงทุนในตราสารสิทธิเงินรายปีรับรอง (Guaranteed Annuity Options) ด้วยการกำหนดราคาตามวิธีข้างต้นสามารถเป็นแนวทางการลงทุนทางหนึ่ง ที่อาจนำมาบริหารความเสี่ยงสำหรับการลงทุนของบริษัทประกันภัยในประเทศไทย

7.4 ข้อเสนอแนะ

1. จากการเตรียมข้อมูลจำนวนตายโดยการกระจายจำนวนตายที่ไม่ทราบอายุไปยังอายุต่างๆตามสัดส่วนนั้น อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของจำนวนตายที่เกิดขึ้นจริงดังนั้นหากต้องการศึกษาครั้งต่อไปอาจต้องหาข้อมูลเพิ่มเติมหรือเปลี่ยนวิธีการปรับปรุงข้อมูลส่วนนี้

2. การแบ่งข้อมูลจากข้อมูลแบบช่วงอายุเป็นรายอายุของจำนวนตายและจำนวนประชากรกลางปีเพื่อให้สามารถนำมาใช้ในงานวิจัยครั้งนี้โดยใช้วิธีค่าเฉลี่ยสัดส่วนและวิธีตัวคูณพื้นฐานของเบียร์ตามลำดับ รวมถึงการนำข้อมูลที่ตกจดทะเบียนการตายมากระจายในทุกๆ อายุนั้น อาจเกิดความผิดพลาดในแต่ละอายุขึ้นเนื่องจากในความเป็นจริงไม่ได้เป็นตามสัดส่วนที่คาดการณ์ไว้ ปัจจุบันได้เริ่มมีการเก็บข้อมูลสถิติจำนวนตายและจำนวนประชากรกลางปีแบบรายอายุแล้ว หากต้องการศึกษาเพิ่มเติมและข้อมูลตามแหล่งต่างๆเพียงพอแก่การนำไปศึกษาก็ควรนำข้อมูลจริงมาใช้ในงานวิจัย

3.ในงานวิจัยครั้งนี้ได้ประมาณราคาตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองโดยใช้วิธีการประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบลี - คาร์เตอร์และตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้า ในการศึกษาครั้งต่อไปควรศึกษาวิธีประมาณค่าวิธีอื่น เช่นตัวแบบลี - คาร์เตอร์โดยใช้ฟัซซีฟอร์มูเลชั่น หรือวิธีการแปลงของแวง

และสำหรับวิธีการประมาณโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยควรเปรียบเทียบมูลค่าตราสารสิทธิเงินรายปีรับรองที่ได้จากการใช้ตัวแบบจำลองวาซิเซก กับตัวแบบจำลองอื่นๆ เช่น ตัวแบบจำลองของเมร์ทอน ตัวแบบจำลองของค็อกซ์ อินเกอร์ซอลล์ รอสส์ เป็นต้น

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ฐิติวดี ชัยวัฒน์. (2552). การบริหารความเสี่ยงภัยและการประกันภัยในศตวรรษที่ *21*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ณัฐกร สุรเมธากุล. (2552). การคาดประมาณอัตรามรณะไทย: การเปรียบเทียบ *3* วิธีการ(ลี-คาร์เตอร์ , ฟัซซีลี-คาร์เตอร์ และการแปลงของแวง). (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ณิชา ราชฤทธิ์และ สุวาณี สุรเสียงสังข์. (2549). ตัวแบบพยากรณ์อัตรามรณะของประชากรไทยโดยวิธีของลีและคาร์เตอร์. วารสารประชากรศาสตร์*, 22*(กันยายน 2519), 25-43.

พรอนงค์ บุษราตระกูล. (2547). การลงทุนพื้นฐานและการประยุกต์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2534). พจนานุกรมศัพท์ประกันภัย อังกฤษ-ไทย. กรุงเทพมหานคร: บริษัทเพื่อนพิมพ์ จำกัด.

วิพรรณ ประจวบเหมาะและ ชลธิชา อัศวนิรันดร. (2556). ผลกระทบเชิงนโยบายต่อการพัฒนาประเทศด้านสวัสดิการผู้สูงอายุ: ศึกษาจากผลการคาดประมาณประชากรของประเทศไทย พ.ศ.*2553-2583*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์เดือนตุลา.

เสาวรส ใหญ่สว่าง. (2554). เอกสารประกอบคำสอนวิชา 2603681 คณิตศาสตร์ประกันชีวิต 1. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัญญา ขันธวิทย์. (2547). การวิเคราะห์ความเสี่ยงจากการลงทุนในหลักทรัพย์. กรุงเทพมหานคร สำนักพิมพ์อัมรินทร์พริ้นติ้งแอนด์พับลิชชิ่ง.

อัญญา ขันธวิทย์และ อนุฏนาช เจริญจิตรกรรม. (2551). การทดสอบตัวแบบจำลองแบบปัจจัยเดียวเพื่อพรรณนาโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยสำหรับตลาดตราสารหนี้ไทย. วารสารบริหารธุรกิจ*, 31*(117), 6-16.

ภาษาอังกฤษ

Ballotta, L.และ Haberman, S. (2006). The fair valuation problem of guaranteed annuity options : The stochastic mortality environment case. *Insurance: Mathematics and Economics, 38*(February 2006), 195-214.

Bauer, D. (2009). Stochastic Mortality Modeling and Securitization of Mortality Risk. *ifa-Verlag,Ulm,Germany*.

Bauer, D.และคณะ. (2010). Modeling the Forward Surface of Mortality. Retrieved from http://www.uniulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.mort/pdf/models/BauerBenthKiesel_ForwardMortality.pdf. [5 August 2013]

Bauer, D.และคณะ. (2008). The Volatility of Mortality. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance, 3*, 172-199.

Bjork, T. (1999). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford: Oxford University Press.

Boyle, P.และ Hardy, M. (2003). Guaranteed Annuity Options. *Astin Bulletin, 23*, 125-152.

Brigo, D.และ Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Model-Theory and Practice : With Smile,Inflation and Credit*. New York: Springer-Verlag.

Cairns, A. J. G.และคณะ. (2006). Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. *Astin Bulletin, 36* (September 2006), 79-120.

Coale, A.และ Kisker, E. (1990). Defects in Data on Old-Age Mortality in the United States: New Procedures for Calculating Mortality Schedules and Life Tables at the Highest Ages. *Asian and PaCific Population, 4*(1), 1-31.

Hull, J.และ White, A. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivartive Securities. Retrieved from http://zenithcad.com/pricing%20interest-rate-derivative%20securities.pdf [15 March 2014]

Lee, R. D.และ Carter, L. R. (1992). Modelling and forecasting U.S. mortality. *Journal of The American Statistical Association, 87*(September 1992), 659-675.

Lee, R. D.และ Miller, T. (2001). Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality. *Demography, 38* (Novemver 2001), 537-549.

London, D. (1985). *Graduation: The Revision of Estimates*. CT: ACTEX Publications.

Milevsky, M. A.และ Promislow, S. D. (2001). Mortality Derivatives and the Option to Annuitize. Retrieved from http://www.fields.utoronto.ca/ programs/cim /financial_math/finance_seminar/00-01/promislow.pdf [2 August 2013]

Pelsser, A. (2003). Pricing and Hedging Guaranteed Annuity Options via Static Option. Retrieved from http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Maastricht/Pelsser.pdf [10 July 2013]

Swanson, D.และคณะ. (1976). *Methods and Materials of Demography*. New York Academic Press.

Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterisation of the Term Structure. *Journal of Financial Economics, 5*(2), 177-188.

Wang, J. Z. (2007). *Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model.* (Master's Thesis), Stockholm University.

Zhu, N.และ Bauer, D. (2010). Gaussian Forward Mortality Factor Models: Specification ,Calibration, and Application. Retrieved from http://longevity-risk.org/six Paper /Baur_Zhu [5 August 2013]

Zhu, N.และ Bauer, D. (2011a). Coherent Modeling of the Risk in Mortality Projections: A Semi-Parametric Approach. Retrieved from http://www.uni-ulm.de/fileadmin /website_uni_ulm/mawi.inst.140/Vortr%C3%A4ge/2012Bauer.pdf. [5 August 2013]

Zhu, N.และ Bauer, D. (2011b). Applications of Forward Mortality Factor Models in Life Insurance Practice. Retrieved from http://backoffice.institutlouisbachelier.org /Uploads/946629510_bauer.pdf. [3 June 2013]

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ตารางแสดงค่าต่างๆของการปรับข้อมูลจำนวนตายและจำนวนประชากรกลางปี

ตารางที่ ก1 จำนวนตายที่ปรับใหม่รายกลุ่มอายุสำหรับเพศชายในปี พ.ศ. 2525

กลุ่มอายุ(ปี)	จำนวนตายเดิม (คน)	น้ำหนักแต่ละกลุ่มอายุ	จำนวนตายที่ปรับใหม่(คน)
0	7729	0.05561	8011
1	2758	0.01968	2836
2	1736	0.01239	1785
3	1354	0.00967	1392
4	1152	0.00822	1184
5 - 9	3726	0.02659	3831
10 - 14	2881	0.02056	2962
15 - 19	5416	0.03865	5568
20 - 24	7153	0.05105	7354
25 - 29	6836	0.04878	7028
30 - 34	6005	0.04285	6174
35 - 39	5516	0.03936	5671
40 - 44	6854	0.04891	7047
45 - 49	8212	0.0586	8443
50 - 54	9566	0.06827	9835
55 - 59	9352	0.06674	9615
60 - 64	10220	0.07293	10507
65 - 69	10771	0.07687	11074
70-over	32826	0.23426	33749
รวม	140126		
ไม่ทราบอายุ	3940		
รวมทั้งหมด	144066		144066

ตารางที่ ก2 ค่าเฉลี่ยสัดส่วนจำนวนตายของประชากรเพศชาย

อายุ	$\overline{P}_i$	อายุ	$\overline{P}_i$	อายุ	$\overline{P}_i$	อายุ	$\overline{P}_i$
5	0.22163	30	0.176566	55	0.19603	80	0.05074
6	0.22572	31	0.192676	56	0.19650	81	0.04954
7	0.19162	32	0.198353	57	0.19832	82	0.04534
8	0.18143	33	0.210735	58	0.20424	83	0.04151
9	0.17961	34	0.221671	59	0.20491	84	0.03848
10	0.13165	35	0.183466	60	0.20210	85	0.03518
11	0.13462	36	0.192137	61	0.20337	86	0.03205
12	0.16357	37	0.198238	62	0.19925	87	0.02776
13	0.23978	38	0.206569	63	0.19655	88	0.02395
14	0.33038	39	0.21959	64	0.19873	89	0.02074
15	0.15657	40	0.185958	65	0.18528	90	0.01793
16	0.19099	41	0.1921948-	66	0.19299	91	0.01549
17	0.21379	42	0.199457	67	0.19795	92	0.01233
18	0.22299	43	0.208083	68	0.20561	93	0.01034
19	0.21566	44	0.214308	69	0.21818	94	0.00801
20	0.18711	45	0.18698	70	0.05175	95	0.0061
21	0.18734	46	0.19453	71	0.05367	96	0.00447
22	0.20182	47	0.20082	72	0.05445	97	0.00336
23	0.20346	48	0.20897	73	0.05558	98	0.0025
24	0.220281	49	0.20871	74	0.05606	99	0.00192
25	0.17537	50	0.19472	75	0.05731	100	0.00131
26	0.184826	51	0.19845	76	0.05599	>100	0.00286
27	0.197746	52	0.2001	77	0 .05588		
28	0.2161	53	0.19947	78	0.05437		
29	0.225962	54	0.20726	79	0.05314		

ตารางที่ ก3 จำนวนตายรายอายุของประชากรเพศชายปี พ.ศ. 2525

อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย
0	8011	25	1233	50	1915	75	1934	100	44
1	2836	26	1299	51	1952	76	1890	>100	96
2	1785	27	1390	52	1968	77	1886	รวม	144066
3	1392	28	1519	53	1962	78	1835		
4	1184	29	1588	54	2038	79	1793		
5	849	30	1090	55	1885	80	1712		
6	865	31	1190	56	1889	81	1669		
7	734	32	1225	57	1907	82	1530		
8	695	33	1301	58	1964	83	1401		
9	688	34	1369	59	1970	84	1299		
10	390	35	1040	60	2124	85	1187		
11	399	36	1090	61	2137	86	1082		
12	485	37	1124	62	2094	87	937		
13	710	38	1171	63	2065	88	808		
14	979	39	1245	64	2088	89	700		
15	872	40	1310	65	2052	90	605		
16	1064	41	1354	66	2137	91	523		
17	1190	42	1406	67	2192	92	416		
18	1242	43	1466	68	2277	93	349		
19	1201	44	1510	69	2416	94	270		
20	1376	45	1579	70	1746	95	206		
21	1378	46	1642	71	1811	96	151		
22	1484	47	1695	72	1838	97	114		
23	1496	48	1764	73	1876	98	84		
24	1620	49	1762	74	1892	99	65		

ตารางที่ ก4 ค่าสัมประสิทธิ์พื้นฐานของเบียร์ (Interpolation Coefficients Based on the Beers "Ordinary" Formula)

Interpolated subgroup	Coefficients to be applied to				
	G1	G2	G3	G4	G5
	First panel				
First fifth of G1	0.3333	-0.1636	-0.021	0.0796	-0.0283
Second fifth of G1	0.2595	-0.078	0.013	0.01	-0.0045
Third fifth of G1	0.1924	0.0064	0.0184	-0.0256	0.0084
Fourth fifth of G1	0.1329	0.0844	0.0054	-0.0356	0.0129
Last fifth of G1	0.0819	0.1508	-0.0158	-0.0284	0.0115
	Next-to first panel				
First fifth of G2	0.0404	0.2	-0.0344	-0.0128	0.0068
Second fifth of G2	0.0093	0.2268	-0.0402	0.0028	0.0013
Third fifth of G2	-0.0108	0.2272	-0.0248	0.0112	-0.0028
Fourth fifth of G2	-0.0198	0.1992	0.0172	0.0072	-0.0038
Last fifth of G2	-0.0191	0.1468	0.0822	-0.0084	-0.0015
	Middle panel				
First fifth of G3	-0.0117	0.0804	0.157	-0.0284	0.0027
Second fifth of G3	-0.002	0.016	0.22	-0.04	0.006
Third fifth of G3	0.005	-0.028	0.246	-0.028	0.005
Fourth fifth of G3	0.006	-0.04	0.22	0.016	-0.002
Last fifth of G3	0.0027	-0.0284	0.157	0.0804	-0.0117
	Next-to Last panel				
First fifth of G4	-0.0015	-0.0084	0.0822	0.1468	-0.0191
Second fifth of G4	-0.0038	0.0072	0.0172	0.1992	-0.0198
Third fifth of G4	-0.0028	0.0112	-0.0248	0.2272	-0.0108

ตารางที่ ก4 (ต่อ)

	Next-to Last panel				
Fourth fifth of G4	0.0013	0.0028	-0.0402	0.2268	0.0093
Last fifth of G4	0.0068	-0.0128	-0.0344	0.2	0.0404
	Last panel				
First fifth of G5	0.0115	-0.0284	-0.0158	0.1508	0.0819
Second fifth of G5	0.0129	-0.0356	0.0054	0.0844	0.1329
Third fifth of G5	0.0084	-0.0256	0.0184	0.0064	0.1924
Fourth fifth of G5	-0.0045	0.01	0.013	-0.078	0.2595
Last fifth of G5	-0.0283	0.0796	-0.021	-0.1636	0.3333

ตารางที่ ก5 ค่าประมาณร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายเพศชายปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553

พ.ศ.	T	ต่ำกว่า 1 ปี	1-9ปี	10-59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2515	0	39.01	71.33	69.08	73.44
2516	1	39.67	71.14	69.57	73.99
2517	2	40.33	70.96	70.06	74.54
2518	3	41.00	70.77	70.56	75.09
2519	4	41.66	70.58	71.05	75.64
2520	5	42.32	70.4	71.54	76.19
2521	6	42.98	70.21	72.03	76.74
2522	7	43.64	70.02	72.52	77.29
2523	8	44.31	69.83	73.02	77.84
2524	9	44.97	69.65	73.51	78.39
2525	10	45.63	69.46	74	78.94
2526	11	46.29	69.27	74.49	79.49
2527	12	46.95	69.09	74.98	80.04
2528	13	47.62	68.9	75.48	80.59

ตารางที่ ก5 (ต่อ)

พ.ศ.	t	ต่ำกว่า 1 ปี	1-9ปี	10-59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2529	14	48.28	68.71	75.97	81.14
2530	15	48.94	68.53	76.46	81.69
2531	16	49.60	68.34	76.95	82.24
2532	17	50.26	68.15	77.44	82.79
2533	18	50.93	67.96	77.94	83.34
2534	19	51.59	67.78	78.43	83.89
2535	20	52.25	67.59	78.92	84.44
2536	21	52.91	67.4	79.41	84.99
2537	22	53.57	67.22	79.9	85.54
2538	23	54.24	67.03	80.4	86.09
2539	24	54.90	66.84	80.89	86.64
2540	25	55.56	66.66	81.38	87.19
2541	26	56.22	66.47	81.87	87.74
2542	27	56.88	66.28	82.36	88.29
2543	28	57.55	66.09	82.86	88.84
2544	29	58.21	65.91	83.35	89.39
2545	30	58.87	65.72	83.84	89.94
2546	31	59.53	65.53	84.33	90.49
2547	32	60.19	65.35	84.82	91.04
2548	33	60.86	65.16	85.32	91.59
2549	34	61.52	64.97	85.81	92.14
2550	35	62.18	64.79	86.3	92.69
2551	36	62.84	64.6	86.79	93.24
2552	37	63.5	64.41	87.28	93.79
2553	38	64.17	64.22	87.78	94.34

ตารางที่ ก6 ค่าประมาณร้อยละความครบถ้วนสมบูรณ์ของการจดทะเบียนการตายเพศหญิงปี พ.ศ. 2515 - พ.ศ. 2553

พ.ศ.	t	ต่ำกว่า 1 ปี	1-9ปี	10-59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2515	0	31.12	56.87	68.35	64.95
2516	1	32.29	57.17	68.96	65.69
2517	2	33.46	57.47	69.57	66.42
2518	3	34.64	57.77	70.18	67.16
2519	4	35.81	58.07	70.79	67.89
2520	5	36.98	58.37	71.40	68.63
2521	6	38.15	58.66	72.00	69.37
2522	7	39.32	58.96	72.61	70.10
2523	8	40.50	59.26	73.22	70.84
2524	9	41.67	59.56	73.83	71.57
2525	10	42.84	59.86	74.44	72.31
2526	11	44.01	60.16	75.05	73.05
2527	12	45.18	60.46	75.66	73.78
2528	13	46.36	60.76	76.27	74.52
2529	14	47.53	61.06	76.88	75.25
2530	15	48.70	61.36	77.49	75.99
2531	16	49.87	61.65	78.09	76.73
2532	17	51.04	61.95	78.7	77.46
2533	18	52.22	62.25	79.31	78.20
2534	19	53.39	62.55	79.92	78.93
2535	20	54.56	62.85	80.53	79.67
2536	21	55.73	63.15	81.14	80.41
2537	22	56.9	63.45	81.75	81.14
2538	23	58.08	63.75	82.36	81.88

ตารางที่ ก6 (ต่อ)

พ.ศ.	t	ต่ำกว่า 1 ปี	1-9ปี	10-59 ปี	60 ปีขึ้นไป
2539	24	59.25	64.05	82.97	82.61
2540	25	60.42	64.35	83.58	83.35
2541	26	61.59	64.64	84.18	84.09
2542	27	62.76	64.94	84.79	84.82
2543	28	63.94	65.24	85.4	85.56
2544	29	65.11	65.54	86.01	86.29
2545	30	66.28	65.84	86.62	87.03
2546	31	67.45	66.14	87.23	87.77
2547	32	68.62	66.44	87.84	88.50
2548	33	69.80	66.74	88.45	89.24
2549	34	70.97	67.04	89.06	89.97
2550	35	72.14	67.34	89.67	90.71
2551	36	73.31	67.63	90.27	91.45
2552	37	74.48	67.93	90.88	92.18
2553	38	75.66	68.23	91.49	92.92

ตารางที่ ก7 จำนวนตายที่ปรับใหม่รายอายุสำหรับเพศชายปี พ.ศ. 2525

อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย	อายุ	จำนวนตาย
0	12367	25	1553	50	2413	75	2341	100	53
1	3702	26	1637	51	2459	76	2287	>100	117
2	2330	27	1751	52	2480	77	2283	รวม	181563
3	1817	28	1914	53	2472	78	2221		
4	1546	29	2001	54	2568	79	2171		
5	1108	30	1374	55	2375	80	2073		
6	1129	31	1499	56	2381	81	2020		
7	958	32	1543	57	2403	82	1853		
8	907	33	1639	58	2474	83	1696		
9	898	34	1724	59	2482	84	1572		
10	491	35	1311	60	2571	85	1437		
11	502	36	1373	61	2587	86	1310		
12	610	37	1417	62	2535	87	1134		
13	895	38	1476	63	2500	88	978		
14	1233	39	1569	64	2528	89	847		
15	1098	40	1651	65	2484	90	733		
16	1340	41	1706	66	2587	91	633		
17	1500	42	1771	67	2654	92	504		
18	1565	43	1848	68	2756	93	423		
19	1513	44	1903	69	2925	94	327		
20	1734	45	1989	70	2114	95	249		
21	1736	46	2069	71	2193	96	183		
22	1870	47	2136	72	2225	97	137		
23	1885	48	2223	73	2271	98	102		
24	2041	49	2220	74	2290	99	78		

ภาคผนวก ข

ทฤษฎีบทเสริม

1. บทเสริมที่ 4.1 ในแดเนียล เบเออร์และคณะ ปี ค.ศ. 2010

ตัวแบบปัจจัยการตายไปข้างหน้าของ Gaussion (The Gaussion Forward Mortality Factor Models) เป็นตัวแบบที่อยู่ในกระบวนการ realization ที่มีมิติจำกัด (finite-dimensional realization) ใน Hilbert space ; $H_{\beta,\gamma}$ จะได้ว่า

$$\overline{\sigma}(\tau, x) = C(x+\tau) \times \exp\{M\tau\} \times N$$

เมื่อ $N \in R^{m\times d}$, $M \in R^{m\times m}$ และ $C \in C^1\ ([0,\infty), R^m)$

โดยรูปแบบของกระบวนการ realization เป็นดังนี้

$$dZ_t = MZ_t dt + NdW_t, Z_0 = 0$$

$$\bar{\mu}_t(\tau, x) = \xi(t,\tau,x) + C(x+\tau) \times \exp\{M\tau\} Z_t$$

เมื่อ Z_t แทน กระบวนการกระจายที่มีมิติจำกัด (finite - dimensional diffusion process)

ξ แทน ฟังก์ชันค่ากำหนดชัดเจนแน่นอน (deterministic function)

2. พิสูจน์บทเสริมที่ 3.1 ใน นาน ชู และแดเนียล เบเออร์ ปี ค.ศ. 2011

$$\begin{aligned}
&[\sigma_1(\tau,x), \dots, \sigma_d(\tau,x)] \\
&= [C_1(x+\tau) \times \exp\{M_1\tau\} \times N_1, \dots, C_d(x+\tau) \times \exp\{M_d\tau\} \times N_d] \\
&= [C_1(x+\tau), \dots, C_d(x+\tau)] \times \begin{pmatrix} \exp\{M_1\tau\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp\{M_2\tau\} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp\{M_d\tau\} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_d \end{pmatrix} \\
&= C(x+\tau) \times \exp\{\mathrm{diag}\{M_1, \dots, M_d\}\tau\} \times N \\
&= C(x+\tau) \times \exp\{M\tau\} \times N
\end{aligned}$$

3. บทเสริมที่ 20.5 ใน โทมัส บีโจกค์ ปี ค.ศ. 1999

ถ้า $p(t,T)$ สามารถหาได้จาก

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)\upsilon(t,T)dW(t)$$

จะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงในอนาคต (forward rate) ได้จาก

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

เมื่อ α และ σ สามารถหาได้จาก

$$\alpha(t,T) = v_T(t,T) \cdot v(t,T) - m_T(t,T)$$

$$\sigma(t,T) = -v_T(t,T)$$

โดยที่ $m(t,T)$, $\upsilon(t,T)$, $\alpha(t,T)$ และ $\sigma(t,T)$ แทนตัวแปรสุ่มอย่างต่อเนื่องของความผันผวน ณ เวลา T

$m_T(t,T)$ และ $v_T(t,T)$ แทนอนุพันธ์บางส่วนของความผันผวน ณ เวลา T

ภาคผนวก ค

R Code

1. เริ่มต้น ทำการจัดข้อมูลให้อยู่ในไฟล์ Excel ตามฟอร์แมทที่จะใช้งาน
2. เรียกใช้งาน Package สำหรับการคำนวณ

```
library(rJava)                  ###ถ้าหาก version ของ โปรแกรม R ไม่ตรงกับ
                                version Java ที่ supportจะเกิด error
library (xlsx)
```

3. นำเข้าไฟล์ข้อมูล

```
k <- read.xlsx("C:/Data /kpx.xlsx",2)
```

4. เริ่มขั้นตอนการคำนวณ

4.1 คำนวณ L(k,u,N,Sigma,const)

```
L <- function(k,u,N,Sigma){
    j <- 2
    summ <- 0
    summation <- function(k,u,N,Sigma,j){
    for (i in j:N){
        summ <- summ + (-log(det(Sigma))-((k[j-1,j])-u)*solve(Sigma)*t(k[j-
         1,j]-u))
            }
    return(summ)
    }
    L <- 1/2*summ + const
    return(L)
}
L <- L(k,u,N,Sigma,const) #เรียกใช้งาน
```

4.2 คำนวณ u0(T,x)

```
u0 <- function(T,x){
C <- 0.1132
M <- 0.005
N <- 0.9885
e <- 2.71828
```

```
u0 <- C*(1-e^(-M*(1-T)))-(N^2*C^2/(2*((-M)-(log(C,base=e)/x+T))*(-M))) +
(N^2/((-M-log(C,base=e)/(x+T))*(-M+ log(C,base=e)/(x+T))))*C^2*e^-(-M-
log(C,base=e)/(x+T)-(N^2/(-2*M*(-M-
log(C,base=e)/(x+T))))*C^2*e^(2*M*(T+1))
return(u0)
}
u0 <- u0(T,x) #เรียกใช้งาน เช่น u0(30,30)
```

4.3 คำนวณ ut(T,t,x,y)

```
ut <- function(T,t,x,y){
Sig <- C*exp(M*T)*N
integrandv <- function(v) {Sigt}
V <- integrate(integrandv, lower = 0, upper = T)
alpha <- Sig * V
integrandy <- function(y) {alpha(T+t-y,x-t+y)}
Y <- integrate(integrandy, lower = 0, upper = t)
Integrandw <- function(w) {exp(M*(t-y)*N)}
W <- integrate(integrandw, lower = 0, upper = t)
ut <- u0+Y+C*exp(M*T)*W
return(ut)
}
ut <- ut(T,t,x,y) #เรียกใช้งาน เช่น ut(30,0,0,0)
```


4.4 คำนวณ tpx(T)

```
tpx <- function(T,t){
integrands <- function(s) {ut}
S <- integrate(integrands, lower = 0, upper = T)
tpx < exp(-S)
return(tpx)
}
Tpx <- tpx(T) #เรียกใช้งาน เช่น tpx(30)
```

4.5 คำนวณ V(0,k)

```
summation <- function(T,kk){
```

```
    summm <- 0
    TT <- 110-T ###Not sure 110 or 110 -T###
    for (i in T:TT){
    summm <- summm + k[i-3,2]*k[i-3,4]
    }
    return(summm)
}
W0 <- function(T,kk){
    W <- k[T-3,2]*k[kk-3,4]/summation(T,kk)
    ##print(W)
    return(W)
}
W <- W0(T,kk)                #เรียกใช้งาน เช่น W0(30,30)
```

4.6 คำนวณ S(u,T,x)

```
S <- 0
SS <- 0
ST <- 0
C <- 0.1132
M <- 0.005
N <- 0.9885
integrandS <- function(s) {C*exp(M*s)*N}
S <- integrate(integrandS, lower = 0, upper = T)
SS <- S$value *-1
return(SS)
}
SST<-S(u,T ,x)               #เรียกใช้งาน เช่น S(0,30,0)
```

4.7 คำนวณ S(u,k,x)

```
SK <- function(u,k,x){
S <- 0
SS <- 0
```

```
SK <- 0
C <- 0.1132
M <- 0.005
N <- 0.9885
integrandS <- function(s) {C*exp(M*s)*N}
S <- integrate(integrandS, lower = 0, upper = k)
SS <- S$value *-1
return(SS)
}
SSK<-SK(u,k,x)                #เรียกใช้งาน เช่น S(0,30,0)
```

4.8 คำนวณ V(0,T)

```
VT <- function(T){
e <- 2.71828
sig <- 0.0273
a <- 0.087
VT <- 0
integrandv <- function(s) {e^((-a)*s)}
sigv <- sqrt(sig^2/(2*a)*(1-e^-2*a*k[T-3,4]))
VT <- integrate(integrandv, lower = 0, upper = k[T-3,4])
VVT <- -sigv*VT$value
}
VVT<-VT(T)                    #เรียกใช้งาน เช่น VT(30)
```

4.9 คำนวณ V(0,k)

```
VK <- function(kk){
e <- 2.71828
sig <- 0.0273
a <- 0.087
VK <- 0
integrandv <- function(s) {e^((-a)*s)}
sigv <- sqrt(sig^2/(2*a)*(1-e^-2*a*k[kk-3,4]))
VK <- integrate(integrandv, lower = 0, upper = k[kk-3,4])
```

```
 VVK <- -sigv*VK$value
 }
 VVK<-VK(30)                    #เรียกใช้งาน เช่น VK(30)
```

4.10 คำนวณ Gamma(u,T,x)

```
gamma <- function(u,T,x){
gamm <- 0
TT <- 110-T for (i in T:TT){
amm <- gamm + W*((ST(u,T,x)+VT(T))-(SSK+VVK))
return(gamm)
}
gamm <- gamma(u,T ,x)     #เรียกใช้งาน เช่น gamm(0,30,0)
```

4.11 คำนวณ sigGAO(T)

```
sigGAO <- function(T){
integrandT <- function(u) {gamm^2*u}
sigGAO <- integrate(integrandT, lower = 0, upper = T)
sigGAOO <- sigGAO
}
sigG <- sigGAO(30)            #เรียกใช้งาน เช่น sigG(0,30,0)
```

4.12 คำนวณ CGAO(T,Tpx)

```
CGAO <- function(T,Tpx){
CGAO <- T*Tpx*(2*dnorm(1/2*sigGAOO,0,1)-1)
Return(CGAO)
}
CGAOO  <- CGAO(30,30)     #เรียกใช้งาน เช่น CGAOO(30,30)
```

4.13 คำนวณ VGAO(T,Tpx)

```
 VGAO <- function(T,Tpx){
 VGAO <- T*Tpx + CGAO }
Return(VGAO)
VGAOO <- VGAO(30,30)      #เรียกใช้งาน เช่น VGAOO(30,30)
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวอุษา อินทร์เมือง เกิดวันที่ 7 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2531 สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนสุราษฎร์พิทยา เมื่อปีการศึกษา 2549 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาสถิติธุรกิจและการประกันภัย ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือในปีการศึกษา 2553 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการประกันภัย ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2554 ปัจจุบันทำงานที่บริษัทกรุงเทพประกันภัยจำกัด (มหาชน)

ติดต่อ : usa.inmueng@gmail.com