

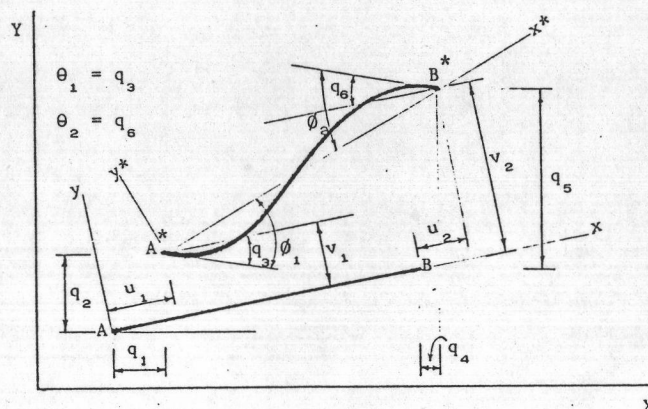
สถิติเนสของชิ้นส่วน

การวิเคราะห์หาสถิติเนสของแต่ละชิ้นส่วนในโครงสร้าง สามารถวิเคราะห์ได้จากพิกัดต่าง ๆ หลายพิกัด ซึ่งแบ่งออกเป็นพิกัดใหญ่ ๆ ได้ 2 พิกัด คือ

1. พิกัดของออยเลอร์ (Euler coordinates)
2. พิกัดของลากรานจ์ (Lagrange coordinates)

1. พิกัดของออยเลอร์

เป็นพิกัดของชิ้นส่วนที่มีการวัดค่าการเคลื่อนที่ และแรงที่กระทำเกี่ยวกับคอร์ด์ของชิ้นส่วนที่เกิดการเคลื่อนที่แล้ว พิจารณารูปที่ 2.1 ชิ้นส่วน AB และ $A^* B^*$ เป็นชิ้นส่วนเดียวกันที่แสดงพิกัดก่อนการเคลื่อนที่และหลังการเคลื่อนที่ตามลำดับ ค่าการเคลื่อนที่ในพิกัดของออยเลอร์จะทำการวัดเทียบกับแกน x^* ซึ่งเป็นแกนในแนวคอร์ด์ของชิ้นส่วนและมีค่าการเคลื่อนที่เป็น ϕ_1 , ϕ_2 และ δ เมื่อ ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นค่าการหมุนตัวที่ปลาย A^* และ B^* เทียบกับคอร์ด์ตามลำดับ และ δ เป็นความยาวของคอร์ด์ที่เปลี่ยนแปลงไป



รูปที่ 2.1 รูปทรงของชิ้นส่วนคาน AB ในพิกัดของออยเลอร์ (ϕ_1 , ϕ_2 , δ) พิกัดของลากรานจ์ ($u_1, v_1, \dots, \theta_2$) และพิกัดของโครงสร้าง (q_1, q_2, \dots, q_6)

2. พิกัดของลากรางจ์

เป็นพิกัดของชิ้นส่วนที่มีการวัดค่าการเคลื่อนที่และแรงที่กระทำเทียบกับแกนของชิ้นส่วนที่ยังไม่เกิดการเคลื่อนที่ (แกน xy ในรูปที่ 2.1) และวัดค่าการเคลื่อนที่เป็น $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2$ และ θ_2 เมื่อ u_1 และ v_1 เป็นค่าการเคลื่อนที่ที่ปลายชิ้นส่วนในแนวของแกน x และ แกน y ตามลำดับและ θ_1 เป็นการหมุนตัวที่ปลายของชิ้นส่วนเทียบกับแกน x

ถึงแม้ว่าการวิเคราะห์จะสามารถหาได้จากหลายพิกัดก็ตาม แต่เมื่อแปลงให้อยู่ในพิกัดเดียวกัน เช่นพิกัดของโครงสร้าง (Global coordinates) จะให้ค่าต่าง ๆ ที่เท่ากัน ทั้งนี้ต้องอยู่ในสมมติฐานเดียวกัน

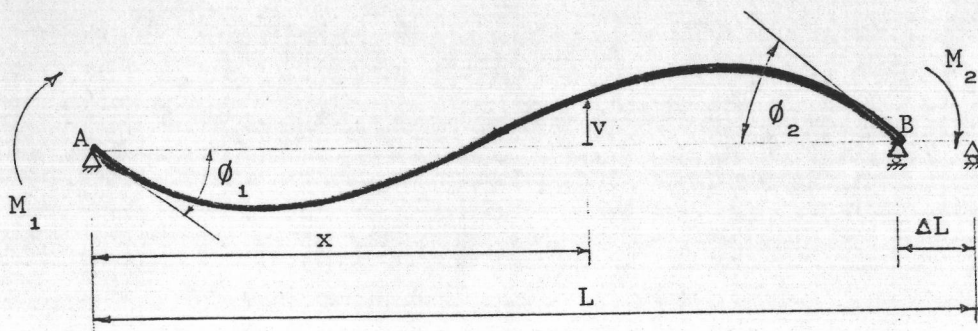
สตีฟเนสของชิ้นส่วนคาน และการแปลงพิกัด

การวิเคราะห์หาสตีฟเนสของชิ้นส่วนคานในการวิจัยนี้ อาศัยแนวทางของ Jennings [1] และ Meek [12] โดยพิจารณาคาน AB ที่เกิดการโก่งตัวเนื่องจากแรงดัด ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งทิศทางบวกของการหมุนตัวที่ปลายและแรงดัดที่กระทำมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และสมมุติให้การโก่งตัวของคานดังกล่าวอยู่ในรูปของพหุนามกำลังสาม คือ

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.1)$$

จากเงื่อนไขที่ขอบเมื่อ $x = 0$ และ $x = L$ จะได้การโก่งตัวจากสมการที่ 2.1 เป็น

$$v(x) = \phi_1x - (2\phi_1 + \phi_2)x^2/L + (\phi_1 + \phi_2)x^3/L^2 \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วนคานเมื่อเกิดการโก่งตัวเนื่องจากแรงดัด

ความยาวของคาน AB เมื่อเกิดการโก่งตัวตามสมการที่ 2.2 จะมีค่าเท่ากับ

$$L = \int_0^{L-\Delta L} [1 + (dv/dx)^2]^{1/2} dx$$

$$= L - \Delta L + \frac{1}{2} \int_0^L (dv/dx)^2 dx$$

ซึ่งสามารถหาการหดสั้นของคานเมื่อเกิดการโก่งตัว มีค่าเท่ากับ

$$\Delta L = (2\phi_1^2 - \phi_1\phi_2 + 2\phi_2^2) L/30 \quad (2.3)$$

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดของออยเลอร์ และระบบพิกัดของชิ้น

ส่วน (Local Coordinates) จะได้

$$\delta = [(L+u)^2 + v^2]^{1/2} - L \quad (2.4)$$

$$\phi_1 = \theta_1 + \text{Arctan} [v/(L+u)] \quad (2.5)$$

$$\phi_2 = \theta_2 + \text{Arctan} [v/(L+u)] \quad (2.6)$$

เมื่อ $u = u_2 - u_1$

$v = v_2 - v_1$

จากสมการที่ 2.3, 2.4 และกฎของฮุก สามารถคำนวณหาแรงในแนวแกนได้เป็น

$$P = [\delta + (2\phi_1^2 - \phi_1\phi_2 + 2\phi_2^2)L/30] EA/L \quad (2.7)$$

เมื่อแรงดึง P กระทำในแนวแกนของคานที่มีการโก่งตัวตามสมการที่ 2.2 จะทำให้เกิดโมเมนต์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ เป็น $M_p = -Pv$ ซึ่งทำให้เกิดการหมุนตัวที่ปลายของคาน โดยใช้หลักการของงานสมมุติ (Virtual Work) จะสามารถหาค่าการหมุนตัวที่ปลายอันเนื่องมาจากแรงในแนวแกน P ได้เป็น

$$\{\phi_p\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1P} \\ \phi_{2P} \end{Bmatrix} = -PL^2/60EI \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ดังนั้น การหมุนตัวที่ปลายอันเนื่องมาจากแรงดัด เมื่อพิจารณารวมผลของแรงในแนวแกนจะมีค่าเท่ากับ $\{\phi\} - \{\phi_p\}$ และแรงดัดที่ปลายของชิ้นส่วนจะมีค่าเป็น

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 2EI/L \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + PL/30 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

จากสมการที่ 2.7 และ 2.9 เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับการเคลื่อนที่ในพิกัดของออยเลอร์จะได้ส่วนที่เพิ่มขึ้นคือ

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & EA(4\phi_1 - \phi_2)/30 & EA(4\phi_2 - \phi_1)/30 \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{Sym.} & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \phi_1 \\ \Delta \phi_2 \end{Bmatrix}$$

หรือ $\{\Delta s^*\} = [k] \{\Delta d^*\} \quad (2.10)$

เมื่อ $k_{22} = 4EI/L + 4EA\delta/30 + EAL(8\phi_1^2 - 4\phi_1\phi_2 + 3\phi_2^2)/300$

$$k_{23} = 2EI/L - EA\delta/30 - EAL(2\phi_1^2 - 6\phi_1\phi_2 + 2\phi_2^2)/300$$

$$k_{33} = 4EI/L + 4EA\delta/30 + EAL(3\phi_1^2 - 4\phi_1\phi_2 + 8\phi_2^2)/300$$

พิจารณาสมการที่ 2.4 ถึง 2.6 เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดของชิ้นส่วน และเขียนเป็นสมการรูปเมตริกซ์จะได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \phi_1 \\ \Delta \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (L+u)/(L+\delta) & v/(L+\delta) & 0 & 0 \\ -v/(L+\delta)^2 & (L+u)/(L+\delta)^2 & 1 & 0 \\ -v/(L+\delta)^2 & (L+u)/(L+\delta)^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{Bmatrix}$$

หรือ $\{\Delta d^*\} = [A] \{\Delta d'\} \quad (2.11)$

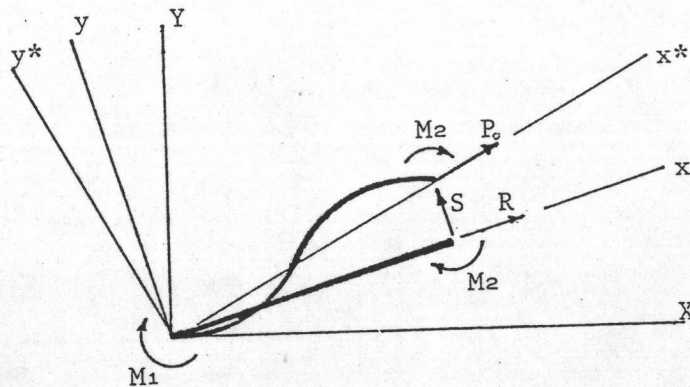
พิจารณาระบบของแรงในระบบแกน xy และแกน x^*y^* ดังแสดงรูปที่ 2.3

$$\{s'\}^T = [R \quad S \quad M_1 \quad M_2]$$

$$\{s^*\}^T = [P_0 \quad M_1 \quad M_2]$$

เมื่อ R และ S เป็นแรงที่กระทำในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ P_0 เป็นแรงในแนวแกน x^* จากหลักการของงานสมมุติ (Virtual Work) จะได้

$$\begin{aligned}
 \{s'\}^T \{\Delta d'\} &= \{s^*\}^T \{\Delta d^*\} \\
 &= \{s^*\}^T [A] \{\Delta d'\} \\
 \{s'\}^T &= \{s^*\}^T [A] \\
 \text{หรือ} \quad \{s'\} &= [A]^T \{s^*\} \qquad (2.12)
 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.3 แสดงระบบของแรงในแกน xy และ แกน x*y*

จากสมการที่ 2.12 เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดของชิ้นส่วนโดยกฎลูกโซ่ของการหาอนุพันธ์ (chain rule of differentiate) จะได้

$$\{ds'\} = [A]^T \{ds^*\} + [dA]^T \{s^*\} \qquad (2.13)$$

ซึ่งเทอมสุดท้ายในสมการที่ 2.13 สามารถแปลงให้อยู่ในรูป $[B] \{\Delta d'\}$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.11 และ 2.12 อีกทั้งสังเกตว่า $[dA]^T \{s^*\} = \{ds'\}$ โดยให้ s^* คงที่ ผลที่ได้ตามขั้นตอนเป็นดังนี้

$$R = [(L+u)/(L+\delta)]P_0 - [v/(L+\delta)^2](M_1 + M_2) \qquad (2.14)$$

$$S = [v/(L+\delta)]P_0 + [(L+u)/(L+\delta)^2](M_1 + M_2) \qquad (2.15)$$

แก้สมการหาค่า P_0 และ $(M_1 + M_2)$ จะได้

$$\begin{Bmatrix} P_0 \\ M_1 + M_2 \end{Bmatrix} = 1/(L+\delta) \begin{bmatrix} L+u & v \\ -v(L+\delta) & (L+u)(L+\delta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix} \qquad (2.16)$$

เมื่อทำการหาอนุพันธ์สมการที่ 2.14 และ 2.15 เทียบกับการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดของชิ้นส่วน โดยคงค่าของแรง P_0 และ $(M_1 + M_2)$ ให้เป็นค่าคงที่ และเขียนเป็นรูปเมตริกซ์จะได้

$$[dA]^T \{s^*\} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \{\Delta d'\}$$

ในเมื่อ $B_{11} = \partial R / \partial u$, $B_{12} = \partial R / \partial v = B_{21} = \partial S / \partial u$, $B_{22} = \partial S / \partial v$ ผลลัพธ์สุดท้ายเมื่อทำการหาอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง และใช้สมการที่ 2.16 จะได้ [12]

$$B_{11} = 1/(L+\delta)^4 \{-(L+u)v^2 R + v[2(L+u)^2 + v^2]S\}$$

$$B_{12} = B_{21} = 1/(L+\delta)^4 \{-v^3 R - (L+u)^3 S\}$$

$$B_{22} = 1/(L+\delta)^4 \{(L+u)[(L+u)^2 + 2v^2]R - (L+u)^2 vS\}$$

พิจารณความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดของชิ้นส่วนกับระบบพิกัดของโครงสร้างจากรูปที่ 2.1 จะได้

$$\begin{Bmatrix} u = u_2 - u_1 \\ v = v_2 - v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

หรือ $\{d'\} = [T]\{d\}$ (2.17)

โดยที่ $\{d'\}^T = \{u \ v \ \theta_1 \ \theta_2\}$

$\{d\}^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6\}$

จากสมการที่ 2.17 จะได้ $\{\Delta d'\} = [T] \{\Delta d\}$ (2.18)

และแรงที่ขั้วของชิ้นส่วน ในระบบแกนทั้งสอง มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\{\Delta s\} = [T]^T \{\Delta s'\} \quad (2.19)$$

แทนค่า $\{\Delta d'\}$ ลงในสมการ 2.11 จะได้ $\{\Delta d^*\} = [A] [T] \{\Delta d\}$
ซึ่งเมื่อพิจารณาสมการที่ 2.10 ได้ความสัมพันธ์

$$\{\Delta s^*\} = [k] [A] [T] \{\Delta d\} \quad (2.20)$$

จากสมการที่ 2.13 เมื่อแทนค่า $\{\Delta s'\}$ ลงในสมการที่ 2.19 จะได้

$$\{\Delta s\} = [T]^T ([A]^T \{\Delta s^*\} + [B] \{\Delta d'\}) \quad (2.21)$$

แทนค่า $\{\Delta s^*\}$ จากสมการที่ 2.20 และ $\{\Delta d'\}$ จากสมการที่ 2.18 ลงในสมการที่ 2.21 ได้
ความสัมพันธ์ของแรงส่วนที่เพิ่มขึ้น และการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้น ดังนี้

$$\begin{aligned} \{\Delta s\} &= [T]^T ([A]^T [k] [A] [T] \{\Delta d\} + [B] [T] \{\Delta d\}) \\ &= [T]^T ([A]^T [k] [A] + [B]) [T] \{\Delta d\} \end{aligned}$$

$$\text{หรือ} \quad \{\Delta s\} = [k_u] \{\Delta d\} \quad (2.22)$$

ซึ่งเป็นสมการสำหรับวิธีเพิ่มทีละขั้น โดยที่

$$\begin{aligned} \{\Delta s\} &= \text{น้ำหนักที่กระทำเพิ่มขึ้นในระบบพิกัดของโครงสร้าง} \\ \{\Delta d\} &= \text{การเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้นในระบบพิกัดของโครงสร้าง} \\ [k_u] &= \text{สติเฟเนสจากเส้นสัมผัสของชิ้นส่วนในระบบพิกัดของโครงสร้าง} \\ &= [T]^T ([A]^T [k] [A] + [B]) [T] \end{aligned}$$