บทที่ 2

วิธีวิเคราะห์

2.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างของงานวิจัยนี้ ได้นำเอาผลของ P-Δ เข้าร่วมกับการวิเคราะห์โครงสร้างอันดับแรก เพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ ในลักษณะเดียวกับการวิเคราะห์โครงสร้างอันดับสอง โดยใช้วิธีการเปลี่ยนตำแหน่งแบบการรวมสติฟเนสโดยตรง ซึ่งจะเหมาะกับการนำไปใช้วิเคราะห์โครงสร้างด้วยคอมพิวเตอร์ เนื่องจากเป็นวิธีที่เป็นระบบ สามารถถ่ายทอดลงเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างจากสติฟเนสชิ้นส่วนย่อยสามารถทำให้ ประหยัดหน่วยความจำ และ ประหยัดเวลาคำนวณอีกด้วย

2.2 สมมุติฐาน

2.2.1 ความสัมพันธ์ ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุ เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกโดยสมบูรณ์ (Elastic-Perfectly Plastic) คือไม่พิจารณาผลของความเครียดแข็งที่เพิ่มขึ้น (Strain Hardening) และผลของหน่วยแรงคงค้าง (Residual Stresses)

2.2.2 สมมุติให้องค์อาคารระหว่างเกิดจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) แต่ละจุดยังคงมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก และ ไม่มีการย้อนกลับ (Irreversible) ของจุดหมุนพลาสติก

2.2.3 จุดข้อต่อต่าง ๆ ของโครงสร้าง มีความแข็งแรงพอที่จะยอมให้เกิดการกระจายของแรงเป็นไปตามสัดส่วนของความแข็งของทุกชิ้นส่วนที่จุดข้อต่อนั้น

2.2.4 แรงภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้าง เป็นแรงสถิต และ เพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนจนโครงสร้างเกิดการวิบัติ

2.2.5 สมมุติให้การเกิดการคลาก มีลักษณะเป็นจุด บนองค์อาคารในรูปแบบของจุดหมุนพลาสติก

2.2.6 มีการป้องกัน การเกิดการโก้งงอเฉพาะที่ (Local Buckling) การเกิดโก้งงอรวมด้านข้าง (Global Buckling) การบิดด้านข้าง (Twisting) ขององค์อาคาร

2.2.7 คำนึงถึงผลกระทบซึ่งกันและกันของ แรงในแนวแกน และ โมเมนต์ ทั้งในรูปแบบของ กำลัง และ เสถียรภาพ

2.3 การวิเคราะห์โครงสร้าง

เป็นการวิเคราะห์โครงสร้าง โดยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่ง แบบรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้และเหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้ได้กับโครงสร้างที่มีจำนวนจุดข้อต่อ 200-300 จุด และ จำนวนชิ้นส่วน 350-400 ชิ้น

การสังเคราะห์สติฟเนสรวมของโครงสร้างกระทำได้ โดยการพิจารณาลักษณะสมบัติของชิ้นส่วนย่อย ความต่อเนื่องของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง และ สภาวะสมดุล ของจุดข้อต่อ มีขั้นตอนกระทำได้ดังนี้ คือ

ก. ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนในระบบพิกัด เฉพาะที่ กับระบบพิกัดในวงกว้าง ซึ่งสามารถหาได้โดยอาศัยการแปลงแกน (transformation of axes) ดังแสดงในรูปที่ 2.1 และ 2.2

การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อ a ของชิ้นส่วนโครงข้อแข็งที่เทียบกับระบบพิกัดเฉพาะที่ และ ระบบพิกัดในวงกว้าง จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & c2 & 0 \\ -c2 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

หรือ

$$\{ v_a \} = [a] \{ r_a \} \tag{2.2}$$

และที่จุดข้อต่อ b จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & c2 & 0 \\ -c2 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

หรือ

$$\{ v_b \} = [a] \{ r_b \} \tag{2.4}$$

เมื่อรวมสมการ 2.1 และ 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [0] \\ [0] & [a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\{ v \} = [A] \{ r \} \tag{2.6}$$

และในทำนองเดียวกันเมื่อเราแปลงแรงในระบบพิกัดเฉพาะที่ไปเป็น แรงในระบบพิกัดในวงกว้าง ที่จุดข้อต่อ a

$$\{ \bar{S}_a \} = [a]^t \{ S_a \} \tag{2.7}$$

และ ที่จุดข้อต่อ b

$$\{ \bar{S}_b \} = [a]^t \{ S_b \} \tag{2.8}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_a \\ \bar{S}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\,a\,]^t & [\,0\,] \\ [\,0\,] & [\,a\,]^\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a \\ S_b \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\{\,\bar{S}\,\} = [\,A\,]^t \{\,S\,\} \tag{2.10}$$

โดยที่

$[\,a\,]$ = เมตริกซ์หมุนแกน (rotation matrix)

$$= \begin{bmatrix} c1 & c2 & 0 \\ -c2 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$[\,a\,]^t$ = ทรานสโพสของเมตริกซ์ $[\,a\,]$

$[\,A\,]$ = เมตริกซ์ที่แปลงระบบที่สัมพันธ์จากระบบพิกัดในวงกว้าง ไปเป็นระบบพิกัดเฉพาะที่

$$= \begin{bmatrix} c1 & c2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c2 & c1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c1 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c2 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$[\,A\,]^t$ = ทรานสโพสของเมตริกซ์ $[\,A\,]$

$c_1 = \cos\theta$ และ $c_2 = \sin\theta$

θ = มุมที่กระทำของชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดเฉพาะที่เมื่อเทียบกับระบบพิกัดในวงกว้าง โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา

{ v } = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่

{ r } = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดในวงกว้าง

{ $\bar{\bar{S}}$ } = เวกเตอร์แรงภายในที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดวงกว้าง

{ S } = เวกเตอร์แรงภายในที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่

ข. ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายใน กับ การเคลื่อนที่ ที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่ ซึ่งเมื่อพิจารณา การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากผลของ แรงในแนวแกน โมเมนต์ และ แรงเฉือน ของโครงข้อแข็ง สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$[\,k_e\,] = \left[\begin{array}{cc} EA/L & \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad -EA/L & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)} \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & 0 & -6/L^2 & 3/L \\ 3/L & 2+\alpha & 0 & -3/L & 1-\alpha \end{bmatrix} \\ -EA/L & \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad EA/L & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)} \begin{bmatrix} -6/L^2 & -3/L & 0 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & 1-\alpha & 0 & -3/L & 2+\alpha \end{bmatrix} \end{array}\right] \qquad (2.13)$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\{ S \} = [\,k_e\,]\{ v \} \qquad (2.14)$$

โดยที่

$$\alpha = 6EI/L^2GA_r \qquad (2.15)$$

E = โมดูลัสยืดหยุ่น

I = โมเมนต์อินเนอร์เชีย

L = ความยาวของชิ้นส่วนย่อย

G = โมดูลัสเฉือน

= $E/2(1+\upsilon)$

υ = อัตราส่วนบัวซอง (Poisson's Ratio)

= 0.3 สำหรับเหล็ก

A = พื้นที่หน้าตัวรวมของชิ้นส่วน

A_r = พื้นที่ลดลงใช้สำหรับคำนวณความเครียดเฉือน

= A/β

β = ตัวประกอบรูปร่าง

= 1.14 สำหรับหน้าตัดเหล็ก WF

= 1.2 สำหรับหน้าตัดเหล็ก สี่เหลี่ยมผืนผ้า

$[k_e]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดเฉพาะที่

แทนค่าสมการ 2.6 และ 2.14 ลงในสมการ 2.10 จะได้ความสัมพันธ์ของแรง และการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อในระบบพิกัดในวงกว้าง ดังนี้

$$\{\bar{S}\} = [A]^t [k_e][A]\{r\} = [k]\{r\} \qquad (2.16)$$

โดยที่

$$[k] = [A]^t [k_e][A] \qquad (2.17)$$

= สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดในวงกว้าง

สมการที่ (2.16) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ ในระบบพิกัดในวงกว้าง ในระดับของชิ้นส่วน ซึ่งเมื่อพิจารณาสภาวะสมดุลของทุกจุดข้อต่อในโครงสร้างในระบบพิกัดของโครงสร้างจะได้ว่า

$$\{R\} = [K]\{r\} \qquad (2.18)$$

ซึ่งค่าสติฟเนสรวมของโครงสร้างในสมการที่ (2.18) เกิดจากรวมสติฟเนสเมตริกซ์ในระบบพิกัดในวงกว้างหรือพิกัดของโครงสร้างแต่ละชิ้นส่วน จะถูกรวมเข้าไปในตำแหน่งที่เหมาะสม ของสติฟเนสเมตริกซ์รวมของโครงสร้าง หรืออาจเรียกได้ว่าเป็นการสังเคราะห์สติฟเนสเมตริกซ์ ของโครงสร้างทั้งระบบ จากสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งเป็นวิธีการของการรวมสติฟเนสโดยตรงดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

โดยที่

$$[K] = \sum [k]^m \quad (2.19)$$

= สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงข้อแข็งที่ประกอบด้วยชิ้นส่วน m ชิ้นส่วน

$\{r\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดข้อต่อ ของโครงสร้าง ในระบบพิกัดในวงกว้าง

$\{R\}$ = เวกเตอร์แรงกระทำในระบบพิกัดวงกว้าง ซึ่งประกอบด้วยแรงกระทำที่ข้อต่อ และแรงยึดแน่นปลายของชิ้นส่วน

และสามารถคำนวณหาแรงภายในที่จุดข้อต่อของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่ได้ดังนี้

$$\{S\} = [k_e][A]\{r\} + \{F_o\} \quad (2.20)$$

โดยที่ $\{F_o\}$ = เวกเตอร์แรงยึดแน่นปลายของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่

2.4 การพิจารณารวมผลของ P-Δ

ในโครงสร้างเกือบทั้งหมด เมื่อมีแรงมากระทำต่อโครงสร้าง ถึงแม้ว่าจะไม่มีแรงกระทำทางด้านข้างก็ตาม โครงสร้างก็จะมีระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้างเกิดขึ้น ผลของการเคลื่อนที่ทางด้านข้างที่เกิดขึ้นนี้ จะทำให้มีโมเมนต์ที่กระทำต่อไปโครงสร้างมากขึ้น ซึ่งเป็นผลมาจากแรงในแนวดิ่ง และ ระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้าง โมเมนต์ส่วนที่เกิดขึ้นเพิ่มเติมนี้จะถูกต้านทานโดยแรงเฉือนในแต่ละชั้นของโครงสร้าง เพื่อรักษาสภาพสมดุลของโครงสร้าง ซึ่งแรงเฉือนที่เกิดขึ้นดังกล่าว จะนำไปรวมกับแรงที่มีอยู่แล้ว ทำให้โครงสร้างเสมือนว่ามีแรงกระทำทางด้านข้างเพิ่มขึ้น ซึ่งผลของการที่พิจารณาระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้างของโครงสร้างในการวิเคราะห์โครงสร้างนี้ เรียกว่า Second-Order Analysis โดยพิจารณารวมผลของ P-Δ

ในโครงสร้าง ที่มีความสูงไม่มากนักผลของ P-Δ จะมีค่าน้อยจนสามารถตัดทิ้งได้ แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อโครงสร้างมีความสูงมากขึ้น เราจำเป็นต้องพิจารณาผลของ P-Δ โดยเฉพาะในกรณีที่โครงสร้างมีความอ่อนตัว (flexible structure) และมีแรงกระทำในแนวดิ่งมาก

มีความจำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์ถึงผลอันเนื่องจาก nonlinearity โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Geometry nonlinearity จะมีผลกระทบต่อแรงภายในและระยะการเคลื่อนที่ของโครงสร้างเป็นอย่างมาก ซึ่งถ้าเราไม่พิจารณาผลอันนี้ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างแล้ว อาจจะทำให้โครงสร้างเกิดการวิบัติได้

2.4.1 การวิเคราะห์ด้วยวิธีทำซ้ำ (Iterative)

ในวิธีนี้ผลของระยะเยื้องศูนย์ของแรงในแนวดิ่ง จะถูกแปลงไปเป็นแรงเฉือนเทียบเท่า ซึ่งมีผลทำให้โมเมนต์ที่เพิ่มขึ้นมีค่าเท่ากัน พิจารณาชิ้นส่วนในแนวดิ่งใด ๆ ตามรูป 2.3

ผลของ P-Δ จะทำให้มีโมเมนต์ในชิ้นส่วนเพิ่มขึ้น $P\delta^*$ จะได้ว่า

$$M^* = Vh + P\delta^* \tag{2.21}$$

และแรงเฉือน V จะมีค่าเพิ่มขึ้น V' เมื่อคิดผลของ P-Δ
จะได้ว่า

$$V' = P\delta^*/h = k_g\ \delta^* \tag{2.22}$$

เมื่อพิจารณารวมทั้งโครงสร้าง โดยการรวมทุกชิ้นส่วนเข้าด้วยกันโดยอาศัยสมการสมดุล สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{R^*\} = [K_g]\{r\} \tag{2.23}$$

เมื่อรวม $\{R^*\}$ เข้ากับแรงที่กระทำต่อโครงสร้างที่กำหนด ก็จะได้

$$\{R\} + \{R^*\} = [K]\{r\} \tag{2.24}$$

หรือ

$$\{R\} = ([K] - [K_g])\{r\} = [K_s]\{r\} \tag{2.25}$$

โดยที่ P = แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน

V = แรงเฉือนของชิ้นส่วน

V' = แรงเฉือนเทียบเท่า ส่วนที่เพิ่มเนื่องจาก $P-\Delta$

M^* = โมเมนต์ของชิ้นส่วนเมื่อรวมผลจาก $P-\Delta$

h = ความยาวของชิ้นส่วน

δ^* = ระยะเยื้องศูนย์ในแนวดิ่งของแรงในแนวแกน

k_g = สติฟเนสทางเรขาคณิตของชิ้นส่วน

$[K_s]$ = สติฟเนสของโครงสร้าง เมื่อพิจารณารวมผล $P-\Delta$

ซึ่งเมื่อพิจารณาจะเห็นว่าการรวมผล $P-\Delta$ เข้าไปจะทำให้สติฟเนสของโครงสร้างเดิม ถูกลดลงด้วยสติฟเนสทางเรขาคณิต ซึ่งจะส่งผลทำให้โครงสร้างมีการเคลื่อนที่ของจุดข้อต่อและ แรงภายในของชิ้นส่วนมีค่ามากขึ้น และ เนื่องจากว่าสติฟเนสทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนจะขึ้นกับค่า P แต่ค่า P ยังเป็นค่าที่เราไม่ทราบ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องใช้วิธีทำซ้ำ จนกระทั่งได้ P ที่เข้าใกล้กับค่าจริง และเราสามารถสรุปขั้นตอนต่าง ๆ ได้ดังนี้

ก. ทำการวิเคราะห์โครงสร้างจากแรงกระทำที่กำหนดมาโดยไม่คำนึงผล $P-\Delta$ ผลการวิเคราะห์จะได้ ระยะการเคลื่อนที่ $\{ r \}$ และ ค่าแรงภายในของชิ้นส่วน $\{ S \}$

ข. คำนวณหา $[K_g]$ เพื่อนำไปหักออกจาก $[K]$ จะได้ $[K_s]$

ค. แก้สมการสมดุล จากสมการ (2.25) จะได้ระยะการเคลื่อนที่ และ ค่าแรงภายใน ซึ่งรวมผล $P-\Delta$

ง. ขั้นตอน ข. และ ค. จะกระทำซ้ำจนกว่า P ที่วิเคราะห์ได้ จะแตกต่างจากค่าในรอบที่แล้วอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ โดยทั่วไป การทำซ้ำ 3 ถึง 4 รอบก็เพียงพอแล้ว

2.4.2 การวิเคราะห์ด้วยวิธีคุณสมบัติของชิ้นส่วนมีค่าเป็นลบ (Negative property Fictitious Member Method)

วิธีการนี้จะพิจารณาโครงสร้างโดยจะเพิ่มเสาเสมือนที่มีค่า สติฟเนสเป็นลบเข้าไปในโครงสร้าง เพื่อที่จะลดสติฟเนสทางด้านข้างของโครงสร้างลงโดยคำนึงถึงผลจาก $P-\Delta$ สำหรับ

คุณสมบัติของเสาเสมือนสามารถพิจารณาได้ดังนี้

พิจารณาจากรูปที่ 2.4 จะเห็นว่าแรงเฉือน V' ที่เพิ่มขึ้น เนื่องจากการเยื้องศูนย์ของแรงในแนวดิ่ง ที่ชั้น i มีค่าดังนี้

$$V'_i = \Sigma P_i/h_i\,(\Delta^*_{i+1} - \Delta^*_i) \tag{2.26}$$

และแรงที่กระทำทางข้างเทียบเท่า H' ที่กระทำที่ชั้น i คือ

$$\begin{aligned} H'_i &= V'_{i-1} - V'_i \\ &= -\Sigma P_i/h_i\,\Delta^*_{i+1} + (\Sigma P_i/h_i + \Sigma P_{i-1}/h_{i-1})\,\Delta^*_i \\ &\quad - \Sigma P_{i-1}/h_{i-1}\,\Delta^*_{i-1} \end{aligned} \tag{2.27}$$

โดยที่ $i = 1,2,3, \ldots ,n$

n = จำนวนชั้นของโครงสร้าง

ซึ่งเราสามารถเขียนแรงที่กระทำทางข้างเทียบเท่าในรูป เมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ \cdots \\ H'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\Sigma P_o}{h_o}+\frac{\Sigma P_1}{h_1}\right) & -\frac{\Sigma P_1}{h_1} & 0 & 0\ldots0 & \ldots & 0 \\ -\frac{\Sigma P_1}{h_1} & \left(\frac{\Sigma P_1}{h_1}+\frac{\Sigma P_2}{h_2}\right) & -\frac{\Sigma P_2}{h_2} & 0\ldots0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\frac{\Sigma P_2}{h_2} & \left(\frac{\Sigma P_2}{h_2}+\frac{\Sigma P_3}{h_3}\right) & -\frac{\Sigma P_3}{h_3}\ldots0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & \ldots & \left(\frac{\Sigma P_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{\Sigma P_n}{h_n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^*_1 \\ \Delta^*_2 \\ \Delta^*_3 \\ \cdots \\ \Delta^*_n \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

หรือ $[H'] = [Kg]\,\{\Delta^*\}$ (2.29)

โดยที่ $\{\Delta^*\}$ = เมตริกซ์ของการเคลื่อนที่ทางข้างของแต่ละชั้นโดยรวมผลของ จาก P-Δ

ΣP_i = ผลรวมของแรงในแนวแกนของเสาทุกต้นในชั้น i

ซึ่งจากวิธีการดังกล่าวข้างต้น ผลของ P-Δ จะถูกรวมเข้ากับการวิเคราะห์อันดับแรก ได้โดยการลดสติฟเนสอันดับแรกของโครงสร้างลงด้วยสติฟเนสทางด้านข้าง (Lateral Stiffness) ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยแบบจำลองดังรูปที่ 2.5 กล่าวคือ ทำการเชื่อมต่อที่ระดับชั้นต่าง ๆ ของโครงสร้างเดิม ด้วย ชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกน ที่มีสติฟเนสทางแนวแกนสูง กับ โครงสร้างเสาเสมือน (Fictitious Column) โดยให้ สติฟเนสเสาเสมือนในชั้นที่ i มีค่าดังนี้

$$k_{f,i} = -\Sigma P_i / h_i \qquad (2.30)$$

โดยที่ $k_{f,i}$ = สติฟเนสทางการเฉือนของเสาเสมือนในชั้นที่ i

เมื่อเราสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างเสาเสมือน ก็จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับสติฟเนสทางเรขาคณิตของโครงสร้าง [Kg] ดังสมการที่ 2.28 แต่จะมีเครื่องหมายตรงกันข้าม และเมื่อรวมเข้ากับ สติฟเนสของอันดับแรก จะทำให้ได้ สติฟเนสของโครงสร้าง เป็นอันดับสอง และสามารถทำการวิเคราะห์ได้โดยตรง ไม่ต้องใช้วิธีการทำซ้ำ

ในการพิจารณาผลของ P-Δ ด้วยวิธีทำซ้ำ ผลที่ได้จะถูกต้องมาก สำหรับโครงสร้างที่เสียรูปในแบบการดัด และการเฉือน แต่เป็นวิธีการค่อนข้างน่าเบื่อสำหรับโครงสร้างอาคารสูง เนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณนาน วิธีคุณสมบัติของชิ้นส่วนมีค่าเป็นลบ จะเป็นวิธีที่ดีที่สุดสำหรับกรณีนี้ เนื่องจากสามารถคำนวณหาผลลัพธ์ได้โดยไม่ต้องทำซ้ำ และผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ จากวิธีทำซ้ำ

2.5 หลักการและวิธีทางอิลาสติก-พลาสติก

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอิลาสติก-พลาสติก เป็นวิธีวิเคราะห์โครงสร้างที่นำเอาการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอิลาสติก มาประยุกต์เข้ากับหลักการบางอย่าง โดยมีขั้นตอนหลักในการวิเคราะห์ดังนี้

2.5.1 วิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวมาแล้วข้างต้น โดยผลของการวิเคราะห์ที่ได้ เช่น แรงภายในที่จุดข้อต่อของแต่ละชิ้นส่วนจะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์ขั้นตอนต่อไป

2.5.2 คำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก (Load Factor) ที่ทั้งสองปลาย ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยทุก ๆ ชิ้นส่วน ซึ่งจะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นในชิ้นส่วนนั้น

2.5.3 หาค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่มีค่าน้อยที่สุดและตำแหน่งที่เกิดจุดหมุนพลาสติก

2.5.4 คำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสม ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสม และค่าแรงภายในสะสม

2.5.5 เปลี่ยนแปลงสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเมื่อมีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้น

2.5.6 กระทำซ้ำขั้นตอนที่ 2.5.1 ถึง 2.5.5 จนกว่าจะตรวจสอบพบว่าโครงสร้างไม่มีความเสถียร (Unstable)

สำหรับหลักการที่นำมาผสมผสานเข้ากับการวิเคราะห์โครงสร้าง ด้วยวิธีอิลาสติกก็คือขั้นตอนที่ 2.5.2 ถึง 2.5.6 ซึ่งเป็นการทำในลักษณะที่เพิ่มน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างจนกระทั่ง มีบางจุดในโครงสร้างเกิดหน่วยแรงคลากตลอดทั้งหน้าตัด ซึ่งก็คือความหมาย ของจุดหมุนพลาสติก จากนั้นก็เพิ่มน้ำหนักบรรทุกต่อจนทำให้โครงสร้าง มีจำนวนจุดหมุนพลาสติกมากพอที่จะทำให้โครงสร้างไม่มีความเสถียร

2.6 <u>เงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติก</u>

เป็นที่ทราบกันดีว่าแรงในแนวแกนนอกจากจะทำให้ชิ้นส่วนเกิดความไม่เสถียรภาพ แล้วยังมีผลทำให้พลาสติกโมเมนต์มีค่าลดลงอีกด้วย ในกรณีโครงสร้างสูง 1-2 ชั้น แรงในแนวแกนอาจมีค่าน้อย แต่สำหรับโครงสร้างสูงหลายชั้น (Multistory frames) แรงในแนวแกนของเสาชั้นล่างๆ จะมีค่ามาก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนึงถึงผลกระทบของ แรงในแนวแกน

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่าง แรงในแนวแกน กับ แรงดัดในการรับน้ำหนักของชิ้นส่วนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติกในแง่ของกำลัง ซึ่ง สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

2.6.1) หน้าตัด WF สามารถแสดงได้ ในรูปที่ 2.9

$$\frac{P}{P_y} + 0.85\frac{M}{M_p} <= 1.0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_y} > 0.15 \tag{2.31}$$

$$\frac{M}{M_p} <= 1.0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_y} <= 0.15 \tag{2.32}$$

2.6.2) หน้าตัด สี่เหลี่ยมผืนผ้า สามารถแสดงได้ ในรูปที่ 2.10

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^2 + \frac{M}{M_p} <= 1.0 \tag{2.33}$$

โดยที่ P = แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน

M = แรงดัดของชิ้นส่วน

$P_y = F_y A$

= แรงในแนวแกนเพียงอย่างเดียวที่ทำให้ชิ้นส่วนคลาก

F_y = กำลังคลากของวัสดุ

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

$M_p = F_y Z$

= แรงดัดพลาสติกของชิ้นส่วน

Z = พลาสติกโมดูลัสของหน้าตัด

2.7 การคำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก

การคำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเป็นขั้นตอนหนึ่งของการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอิลาสติก-พลาสติก ในขั้นตอนนี้จะเป็นการหาค่าที่ต่ำที่สุด ของตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกโดยจะคำนวณที่ปลายทั้งสองของแต่ละชิ้นส่วนย่อย ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับแรงกระทำ { R } แล้วจะทำให้มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นในโครงสร้าง โดยที่แรงภายในที่จะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้น ก็คือ

โมเมนต์และแรงในแนวแกน ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2.6 สำหรับการหาค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกในแต่ตัวที่อยู่ต่อเนื่องกัน สามารถทำได้โดย การเพิ่มน้ำหนัก บรรทุกจากตำแหน่งจุดหมุนพลาสติกเดิม (λ_1) ด้วยขนาด $\Delta\lambda_1$ โดยเลือกให้ $\Delta\lambda_1$ มีค่าน้อย ๆ เท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (toterance) สำหรับตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก สำหรับงานวิจัยนี้ใช้ $\Delta\lambda_1$ เท่ากับ 0.001 ทั้งนี้เนื่องจากว่าถ้าเลือก $\Delta\lambda_1$ มีขนาดใหญ่เกินไปจะทำให้โครงสร้างที่วิเคราะห์ไม่มีความเสถียรภาพได้ จากนั้นทำการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยขนาดตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$ ถ้าโครงสร้างที่วิเคราะห์ไม่มีเสถียรภาพจะถือว่า จุดหมุนพลาสติกที่มีอยู่เป็นจุดหมุนพลาสติกตัวสุดท้าย ก่อนเกิดการวิบัติของโครงสร้าง และค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสูงสุดที่โครงสร้างสามารถรับได้ คือ λ_1 โดยมีความผิดพลาดไม่เกิน $\Delta\lambda_1$ แต่ถ้าโครงสร้างที่วิเคราะห์มีเสถียรภาพ ก็จะคำนวณอัตราส่วนที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติก จากสมการ 2.31 ถึง 2.33 จากนั้นก็จะประมาณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกตัวถัดไป โดยอาศัยการประมาณ แบบลากานซ์ (Lagrange interpolation) และทำการตรวจสอบเงื่อนไขการเกิดจุดหมุนพลาสติกในหัวข้อ 2.6 ของทุกชิ้นส่วนย่อย ซ้ำจนกระทั่งได้ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกน้อยที่สุดที่ทำให้เงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกเป็นจริง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการแสดงได้ดังนี้

$$\lambda_{i+1,n+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_{n+1} = \sum \lambda_j(f)\ (\lambda_i+\Delta\lambda_j) \tag{2.34}$$

$$\lambda_j(f) = \frac{(f-f_1)\ ..\ (f-f_{j-1})(f-f_{j+1})\ ..\ (f-f_n)}{(f_j-f_1)\ ..\ (f_j-f_{j-1})(f_j-f_{j+1})\ ..\ (f_j-f_n)} \tag{2.35}$$

โดยที่ $f = 1.0$

สำหรับหน้าตัด WF

$$f_j = \left|P_j/P_y\right| + 0.85\left|M_j/M_p\right| \quad \text{เมื่อ} \quad P/P_y > 0.15 \tag{2.36}$$

$$f_j = \left|M_j/M_p\right| \quad \text{เมื่อ} \quad P/P_y <= 0.15 \tag{2.37}$$

หน้าตัด สี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$f_j = (P_j/P_y)^2 + \left|M_j/M_p\right| \qquad (2.38)$$

λ_i = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก i จุด

$\lambda_{i+1,n+1}$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก i+1 จุด โดยอาศัยการประมาณจากโพลิโนเมียลดีกรี n

$\Delta\lambda_{n+1}$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้นจากเดิม ที่มีจุดหมุนพลาสติก i+1 จุด เป็น i+1 จุด โดยอาศัยการประมาณจากโพลิโนเมียลดีกรี n

2.8 การคำนวณค่าผลลัทธ์สะสม

หลังจากที่ทราบค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่น้อยที่สุดในวงรอบการทำงานที่ j ซึ่งหมายถึง ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้โครงสร้างเดิมที่มีจุดหมุนพลาสติกอยู่ j-1 จุด และถูกกระทำอยู่ด้วยแรง $\lambda^{j-1}{}_c$ { R } กลายเป็นโครงสร้างที่มีจุดหมุนพลาสติก j จุดภายใต้แรงกระทำ $\lambda^{j-1}{}_c$ { R } + $\lambda^j{}_m$ { R } และสามารถคำนวณค่าผลลัพธ์สะสมอื่น ๆ ได้ดังนี้

$$\lambda^j{}_c = \sum_{j=1}^{j} \lambda^j{}_m = \lambda^j{}_m + \lambda^{j-1}{}_c \qquad (2.39)$$

$$D^j{}_{ci} = \sum_{j=1}^{j} \lambda^j{}_m \; D^j{}_i = \lambda^j{}_m D^j{}_i + D^{j-1}{}_{ci} \qquad (2.40)$$

$$P^j{}_{ck} = \sum_{j=1}^{j} \lambda^j{}_m \; P^j{}_k = \lambda^j{}_m P^j{}_k + P^{j-1}{}_{ck} \qquad (2.41)$$

$$M^j{}_{cik} = \sum_{j=1}^{j} \lambda^j{}_m \; M^j{}_{ik} = \lambda^j{}_m M^j{}_{ik} + M^{j-1}{}_{cik} \qquad (2.42)$$

โดยที่ $\lambda^j{}_c$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสมในวงรอบการทำงานที่ j

$\lambda^{j-1}{}_c$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสมในวงรอบการทำงานที่ j-1

D^{j}_{ci} = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสมที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j

D^{j}_{i} = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j

D^{j-1}_{ci} = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสมที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j-1

P^{j}_{ck} = แรงในแนวแกนสะสมของชิ้นส่วน k ในวงรอบการทำงานที่ j

M^{j}_{cik} = แรงดัดสะสมที่ปลาย i ของชิ้นส่วน k ในวงรอบการทำงานที่ j

2.9 การเปลี่ยนแปลงสติฟเนสเมติกซ์ของชิ้นส่วนย่อย

เมื่อจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ชิ้นส่วนใดในโครงสร้าง จะทำให้ความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้น ๆ เปลี่ยนไป ซึ่งย่อมจะมีผลกระทบต่อการรับแรงต่าง ๆ ทั้งหมดของโครงสร้างไปด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเปลี่ยนแปลงค่าสติฟเนสเมติกซ์ ของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นเพื่อให้สอดคล้อง กับความเป็นจริงในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้น ๆ และเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกในหัวข้อ 2.6 ที่มีผลมาจากโมเมนต์และแรงในแนวแกน ซึ่งสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกในระบบพิกัดเฉพาะที่ เมื่อพิจารณาผลของแรงในแนวแกนและ โมเมนต์ ที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่งจะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งดังต่อไปนี้

2.9.1 สติฟเนสเมตริกซ์ ของชิ้นส่วน ที่มีจุดข้อต่อทางซ้ายมือเป็นจุดหมุนพลาสติก (Left Plastic Higne) และ ด้านขวามือยังสามารถรับการกระจายของโมเมนต์ได้ ตามรูปที่ 2.6

$$[k_e] = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \multicolumn{5}{c}{\begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L^2 & 0 & 0 & -(3+6\alpha)/L^2 & (3+6\alpha)/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \multicolumn{5}{c}{\begin{bmatrix} -(3+6\alpha)/L^2 & 0 & 0 & (3+6\alpha)/L^2 & -(3+6\alpha)/L \\ (3+6\alpha)/L & 0 & 0 & -(3+6\alpha)/L & (3+6\alpha) \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \qquad (2.43)$$

2.9.2 สติฟเนสเมตริกซ์ ของชิ้นส่วน ที่มีจุดข้อต่อทางขวามือเป็นจุดหมุนพลาสติก (Right Plastic Hinge) และ ด้านซ้ายมือยังสามารถรับการกระจายของโมเมนต์ได้ ตามรูปที่ 2.7

$$
[k_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} \begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L^2 & (3+6\alpha)/L & 0 & -(3+6\alpha)/L^2 & 0 \\ (3+6\alpha)/L & (3+6\alpha) & 0 & -(3+6\alpha)/L & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} \begin{bmatrix} -(3+6\alpha)/L^2 & -(3+6\alpha)/L & 0 & (3+6\alpha)/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.44)
$$

2.9.3 สติฟเนสเมตริกซ์ ของชิ้นส่วน ที่มีจุดข้อต่อทางขวามือและซ้ายมือ เป็นจุดหมุนพลาสติก (Both Plastic Hinge) ตามรูปที่ 2.8

$$
[k_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)
$$

2.10 <u>การตรวจสอบการวิบัติของโครงข้อแข็ง</u>

สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงข้อแข็งเปลี่ยนแปลงตามสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วน เมื่อจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นจนในที่สุดโครงข้อแข็งเกิดความไม่เสถียร โดยตรวจสอบได้ดังนี้

ก) เทอมใดเทอมหนึ่งในแนวทแยง ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ข) ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่ามาก เนื่องจากว่าเมื่อมีจุดหมุนพลาสติกมากพอ โครงสร้างก็จะมีการเปลี่ยนตำแหน่งมากอย่างไม่จำกัด โดยไม่สามารถรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มได้อีก