บทที่ 5

การวิเคราะห์พฤติกรรมทางไดนามิคของโครงสร้างสเตรสริบบอน

5.1 ความสำคัญของปัญหา

โครงสร้างแขวนโดยทั่วไปมีแนวโน้มที่จะสั่น เนื่องจากมีความอ่อนตัวค่อนข้างสูง โดยเฉพาะถ้ามีช่วงยาวและมีสัดส่วนของโครงสร้างที่บาง สะพานชนิดสเตรสริบบอนมีความแข็งแกร่งตามหน้าตัดทางขวางจากความแข็งแกร่งของแผ่นพื้นและตามความยาวสูงมาก เมื่อเทียบกับเคเบิ้ลแขวนธรรมดา เพราะจากการที่ดึงด้วยแรงจำนวนมหาศาลจนเกิดการหย่อนตัวน้อย ความถี่ของการสั่นตามแนวราบจึงสูงกว่าตามแนวดิ่ง [2] ปัญหาการสั่นตามแนวดิ่งจึงเป็นสิ่งสำคัญ พฤติกรรมการสั่นของโครงสร้าง ภายใต้การกระทำของน้ำหนักไดนามิคขึ้นอยู่กับค่าความถี่ของการสั่นอย่างอิสระของโครงสร้างและค่าความถี่ของน้ำหนักบรรทุกที่กระทำเป็นจังหวะ

ในการวิเคราะห์ปัญหานี้จะมุ่งความสนใจเฉพาะหาค่าความถี่ของการสั่นอย่างอิสระของโครงสร้าง โดยเฉพาะหาค่าความถี่เฉพาะตัวของโครงสร้าง (natural frequency) ที่ต่ำสุด

5.2 การสั่นอย่างอิสระของเคเบิ้ลตามแนวดิ่ง

สมมติว่า เคเบิ้ลมีน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอตามความยาวช่วง และให้เคเบิ้ลหย่อนตัวตามสมการพาราโบล่า (ตามที่แสดงในรูปที่ 5.1)

จากทฤษฎีคาน $$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \qquad \text{...........(5.1)}$$

จากทฤษฎีเคเบิ้ล $$M = Hy \qquad \text{...........(5.2)}$$

เมื่อ M = โมเมนต์ที่จุดใด ๆ ในคาน

แทนค่า M จากสมการ 5.2 ลงในสมการ 5.1 จะได้

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -w \qquad \text{...........(5.3)}$$

ขณะเมื่อเกิดการสั่น $(H+h)(y+v) = M$

เมื่อ h = แรงดึงตามแนวราบที่เพิ่มเข้ามาเนื่องจากการสั่น

ในกรณีน้ำหนักสแตติค y และ w จะอยู่ในฟังก์ชั่นของ x

ในกรณีน้ำหนักบรรทุกไดนามิค, $w'(x, t)$ เป็นน้ำหนักต่อหนึ่งหน่วยความยาว y และ w จะอยู่ในฟังก์ชั่นของ x และ t

น้ำหนักไดนามิค คือแรงเฉื่อย (inertia force) = มวล x ความเร่ง

$$w'(x, t) = m \frac{d^2v}{dt^2}$$

เมื่อ m = มวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวตามแกน x

t = เวลา

v = การหย่อนตัวที่เพิ่มขึ้นขณะเกิดการสั่น

แรงที่กระทำต่อเคเบิ้ล $= w + m \dfrac{d^2v}{dt^2}$

จากสมการที่ 5.3 แรงต้านในเคเบิ้ลต่อน้ำหนักไดนามิค คือ

$$(H+h) \frac{d^2}{dx^2} (y+v)$$

สมการการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งของเคเบิ้ล คือ

$$(H+h) \frac{d^2}{dx^2} (y+v) = -\left(w+m \frac{d^2v}{dt^2}\right) \qquad \text{.......(5.4)}$$

เนื่องจาก $H\dfrac{d^2y}{dx^2} = -w$ และ h มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ H ฉะนั้น เทอม

$h \dfrac{d^2v}{dx^2}$ มีค่าน้อยจึงละทิ้ง เขียนสมการที่ 5.4 ใหม่ ได้คือ

$$h \frac{d^2y}{dx^2} + H \frac{d^2v}{dx^2} = -m \frac{d^2v}{dt^2} \qquad \text{.........(5.5)}$$

การแก้สมการที่ 5.5 ทำได้อย่างประมาณโดยอาศัยหลักการของพลังงานตามวิธีของ Rayleigh-Ritz[10] โดยคูณสมการที่ 5.5 ทั้งสองข้างของสมการด้วย $\frac{1}{2}v$ และอินทรีเกรตด้านซ้ายของสมการ หา strain energy

$$W_I = \frac{1}{2}\int_o^L \left(h\frac{d^2y}{dx^2} + H\frac{d^2v}{dx^2}\right) v\,dx \qquad \text{...........(5.6)}$$

ส่วน kinetic energy W_{II} คือ $\frac{1}{2}$ (มวล)(ความเร็ว)^2

เมื่อระบบอยู่ในสมดุลย์ $W_I = W_{II}$

การเปลี่ยนแปลงความยาวของเคเบิ้ล เนื่องจากแรงดึงที่เปลี่ยนแปลง[10] คือ

$$\Delta\ell = -\int_o^L v\frac{d^2y}{dx^2}\,dx \qquad \text{...........(5.7)}$$

$$\frac{hL}{EA} = -\int_o^L v\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

$$h = -\frac{EA}{L}\int_o^L v\frac{d^2y}{dx^2}\,dx \qquad \text{...........(5.8)}$$

เนื่องจากเคเบิ้ลหย่อนตัวตามสมการพาราโบลา

$$y = 4d\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

curvature

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \theta = -\frac{8d}{L^2} \qquad \text{...........(5.9)}$$

จากการที่น้ำหนักกระจายสม่ำเสมอต่อเคเบิ้ล รูปร่างการหย่อนตัวที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการสั่นเปลี่ยนแปลงอยู่ในรูป sine curve และสมมติให้ shape function คือ

$$v = \sum_i C_i \sin\frac{i\pi x}{L} \qquad \text{...........(5.10)}$$

เมื่อ $i = 1, 3, 5 \ldots\ldots$

แทนสมการที่ 5.9 และ 5.10 ลงในสมการที่ 5.8 จะได้

$$h = -\frac{EA}{L}\int_o^L \sum_i C_i \, \text{Sin}\,\frac{i\P x}{L}\,\theta dx$$

$$h = -2EA\theta\sum_i C_i\left(\frac{1}{i\P}\right) \qquad \text{...........(5.11)}$$

แทนสมการที่ 5.9, 5.10 และ 5.11 ลงในสมการที่ 5.6 จะได้strain energy คือ

$$W_I = \frac{1}{2}\int_o^L \left[-2EA\theta^2\sum_i C_i\left(\frac{1}{i\P}\right) - H\left(\frac{i\P}{L}\right)^2 \sum_i C_i \,\text{Sin}\,\frac{i\P x}{L}\right]$$

$$\sum_i C_i \,\text{Sin}\,\frac{i\P x}{L}\,dx$$

$$W_I = -2EA\theta^2 \frac{L}{(i\P)^2} \sum_i\sum_i C_i^2 - \frac{H}{4}\frac{(i\P)^2}{L}\sum_i\sum_i C_i^2 \qquad \text{.....(5.12)}$$

kinetic energy สูงสุดของการสั่นคือ

$$W_{II} = \frac{1}{2}\;(\text{มวล})(\text{ความเร็ว})^2$$

$$= -\frac{1}{2}\,m\omega^2\int_o^L v^2 dx$$

$$= -\frac{m}{2}\,\omega^2\int_o^L \left(\sum_i C_i \,\text{Sin}\,\frac{i\P x}{L}\right)^2 dx$$

$$= -\frac{mL\omega^2}{4}\sum_i\sum_i C_i^2 \qquad \text{..............(5.13)}$$

เมื่อ ω เป็นความถี่เชิงวงกลม (circular frequency) ตามวิธีของ Rayleigh-Ritz minimizing $W_{II} - W_I$

$$\frac{\partial}{\partial C_i}(W_{II} - W_I) = 0 \qquad \text{..............(5.14)}$$

แทนค่า W_I และ W_{II} ลงในสมการที่ 5.14 คิดเฉพาะเทอมแรกของ v ในสมการที่ 5.10 ได้ความถี่

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{m}\left[\frac{H}{L^2} + \frac{8EA\theta^2}{\pi^4}\right]$$

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{H}{L^2} + \frac{8EA\theta^2}{\pi^4}\right]} \qquad \text{.............(5.15)}$$

หาร ω **ด้วย** 2π **จะได้ความถี่ของการสั่นในหน่วย รอบต่อหนึ่งหน่วยเวลา คือ**

$$\eta = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{H}{L^2} + \frac{8EA\theta^2}{\pi^4}\right]} \qquad \text{.............(5.16)}$$

เทอม $\frac{8EA\theta^2}{\pi^4}$ **เป็นผลเนื่องจากแรงที่เปลี่ยนแปลง** h **หากตัดเทอมนี้ทิ้งไป จะได้คำตอบของ** η **ซึ่งเหมือนกับการแก้ปัญหา** "One dimensional wave equation" **นั่นเอง เมื่อคิด เฉพาะค่าความถี่ต่ำสุด** (i = 1) **คือ**

$$\eta = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{H}{m}} \qquad \text{รอบ/หนึ่งหน่วยเวลา}$$

สมการที่ 5.16 ค่าความถี่ η **แปรผันตรงกับ** $\sqrt{H}$ **เมื่อทิ้ง** $\frac{8EA\theta^2}{\pi^4}$ **นั่นคือยิ่งดึงให้เคเบิ้ลตึง ค่าความถี่ต่ำสุดของโครงสร้าง เมื่อสั่นตัวอย่างอิสระจะสูงตามขึ้น**