บทที่ 3

ทฤษฎีเคเบิ้ลตึง

3.1 รูปร่างและน้ำหนักบรรทุกในสะพานชนิดสเตรสริบบอน

เนื่องจากเคเบิ้ลเป็นโครงสร้างชนิดรับแรงดึงใช้เป็นโครงสร้างหลักแขวนระหว่างระยะที่กำหนดให้ ส่วนแผ่นพื้นกำหนดให้มีความแข็งแกร่งตามขวางสูงเพื่อการรับน้ำหนัก ส่วนทางตามยาวนั้นจะยึดต่อระหว่างแผ่นด้วยกันและมีความยืดหยุ่นพอที่จะให้แอ่นตัวตามการหย่อนตัวของเคเบิ้ลในระหว่างใช้งานได้ เมื่อเคเบิ้ลถูกแขวนอย่างอิสระด้วยน้ำหนักของตัวเองกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวของเคเบิ้ล เคเบิ้ลจะหย่อนตัวในรูปของแคทีนารี (catenary) Pugsley[6] เสนอว่าเคเบิ้ลที่หย่อนตัวตามสมการแคทีนารีสามารถแทนได้ด้วยสมการหย่อนตัวพาราโบลา เมื่ออัตราส่วนการหย่อนตัวต่อความยาวช่วงมีค่าน้อยกว่า 0.1 สำหรับสะพานชนิดสเตรสริบบอนการหย่อนตัวต่อความยาวช่วงน้อยกว่า 0.1 มากเพราะเคเบิ้ลมีความตึงสูง

ในกรณีมีน้ำหนักกระทำเยื้องศูนย์ถ่วงของหน้าตัดแผ่นพื้นทำให้โครงสร้างเกิดการบิด แผ่นพื้นจะมีส่วนช่วยต้านทานแรงบิดจากภายนอกที่มากระทำซึ่งจะได้พิจารณาปัญหานี้ในบทต่อไป

3.2 เคเบิ้ลตึง (taut cable)

ในการวิเคราะห์ปัญหาเคเบิ้ลตึง สมมติให้เคเบิ้ลหย่อนตัวตามสมการพาราโบลาภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ

ให้เคเบิ้ลมีการหย่อนตัวที่กึ่งกลางช่วง เป็น d ภายใต้น้ำหนักบรรทุก w กระทำตลอดช่วงความยาว L และจุดเริ่มต้นตามที่แสดงในรูปที่ 3.1 ก. สมการพาราโบลาแสดงการหย่อนตัวของเคเบิ้ล คือ

$$y = \frac{4d}{L^2} x^2 \qquad \text{...........(3.1)}$$

เมื่อ L = ความยาวช่วง

d = การหย่อนตัวที่จุดกึ่งกลางของความยาวช่วง

x = ระยะแปรตามแกนราบ (แกน x)

และแรงดึงคงที่ตามแกน x (แนวราบ) คือ

$$H = \frac{wL^2}{8d} \qquad \text{...........(3.2)}$$

ความยาวของเคเบิ้ล คือ

$$\ell = L\left[1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{d}{L}\right)^4 + \ldots\right] \qquad \text{...........(3.3)}$$

ถ้า d/L มีค่าน้อยกว่า 0.1 เทอม $(d/L)^4$ สามารถละทิ้งได้ ฉะนั้นสมการที่ 3.3 เขียนใหม่ได้โดยที่มีค่าความผิดพลาดน้อยกว่า 0.06 % คือ

$$\ell = L\left[1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2\right] \qquad \text{...........(3.4)}$$

ความลาด (slope) ตามเส้นสัมผัสของเคเบิ้ลที่แต่ละปลายคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4d}{L} \qquad \text{...........(3.5)}$$

เคเบิ้ลที่สมดุลย์อยู่ในขณะนี้นั้น เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกมากระทำเพิ่มขึ้น Δw เคเบิ้ลจะยืดตัวออกและยังคงสมมติให้การหย่อนตัวใหม่นี้เป็นพาราโบลิคเคเบิ้ลอยู่ โดยเพิ่มการหย่อนตัวที่จุดกึ่งกลางช่วง จาก d เป็น $d+\Delta d$ ตามที่แสดงในรูปที่ 3.1 ข. เงื่อนไขการสมดุลย์ใหม่ของเคเบิ้ลที่ยืดตัวคือ

$$y = \frac{4(d+\Delta d)}{L^2}x^2 \qquad \text{...........(3.6)}$$

$$H+\Delta H = \frac{(w+\Delta w)}{8(d+\Delta d)}L^2 \qquad \text{...........(3.7)}$$

$$\ell+\Delta\ell = L\left[1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d+\Delta d}{L}\right)^2\right] \qquad \text{...........(3.8)}$$

$$\Delta\ell = \frac{8}{3}\frac{\Delta d}{L}(2d+\Delta d) \qquad \text{...........(3.9)}$$

การยืดตัวอีลาสติค (elastic extension) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้นมาได้จากผลต่างของการยืดตัวเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก w และน้ำหนักบรรทุก $w+\Delta w$ ฉะนั้นจะได้ว่า

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell+\Delta\ell}\frac{(T+\Delta T)\,dS}{AE} - \int_0^{\ell}\frac{T\,dS}{AE}$$

$$\Delta\ell = \int_o^L \frac{(H+\Delta H)\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{AE}\,dx - \int_o^L \frac{H\sqrt{1+(\frac{dy_o}{dx})^2}}{AE}\,dx$$

เมื่อ A = พื้นที่หน้าตัดของเคเบิ้ล

E = โมดูลัสแห่งการยืดหยุ่น

dS = ความยาวของเคเบิ้ลส่วนเล็ก ๆ

y_o = การหย่อนตัวเนื่องจากน้ำหนัก w

y = การหย่อนตัวเนื่องจากน้ำหนัก $w+\Delta w$

โดยกระจาย polynomial เทอม $\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} = 1+(\frac{dy}{dx})^2+ \ldots$

ตัดเทอมที่มีค่าน้อย ๆ ทิ้ง จะได้

$$\Delta\ell = \frac{L}{AE}\left[\frac{(w+\Delta w)L^2}{8(d+\Delta d)}\right]\left[1+\frac{16}{3}(\frac{d+\Delta d}{L})^2\right] - \frac{L}{AE}\frac{wL^2}{8d}\left[1+\frac{16}{3}(\frac{d}{L})^2\right] \quad ..(3.10)$$

เมื่อ $(d+\Delta d)/L < 0.02$ ความผิดพลาดในเทอม $\left[1+\frac{16}{3}(\frac{d+\Delta d}{L})^2\right]$

มีค่าน้อยกว่า 0.2 % เมื่อเทียบกับ 1 สมการที่ 3.10 สามารถเขียนใหม่ได้โดยตัดเทอมที่มีค่าน้อย ๆ ทิ้งไปคือ

$$\Delta\ell = \frac{L^3}{8AE}(\frac{w+\Delta w}{d+\Delta d} - \frac{w}{d}) \quad ....(3.11)$$

รวมสามการ 3.9 และ 3.11 เข้าด้วยกัน และให้ $m = \frac{\Delta d}{d}$ และ $p = \frac{\Delta w}{w}$

$$\frac{8m}{3L}.(2+m) = \frac{w}{8AE}(\frac{L}{d})^3\left[\frac{p+1}{m+1} - 1\right] \quad ....(3.12)$$

$$m(m+1)(m+2) = \frac{3wL}{64AE}(\frac{L}{d})^3(p-m) \quad ....(3.13)$$

ให้

$$K = \frac{3wL}{64AE}(\frac{L}{d})^3 \quad ....(3.14)$$

หรือ

$$m(m+1)(m+2) = K(p-m) \quad ....(3.15)$$

สมการที่ 3.15 ให้คำตอบการหย่อนตัวความยาวช่วง $(m+1)(d/L)$ สำหรับน้ำหนักบรรทุกใด ๆ ที่เพิ่มขึ้น pw จากสภาพสมดุลย์แรกที่มีการหย่อนตัวต่อความยาวช่วง d/L

ในการออกแบบสิ่งต้องพิจารณาได้แก่ ความลาดสูงสุดที่ปลายของสะพาน เพื่อเหมาะสมแก่การใช้งาน ข้อยึดจำกัดนี้สามารถแสดงได้ด้วยค่าการหย่อนตัวสูงสุดที่ยอมให้ $(m+1)(d/L)$ ในรูปการหย่อนตัวต่อความยาวช่วงของเคเบิ้ลที่เปลี่ยนการหย่อนตัวใหม่ จากสมการที่ 3.15 สามารถเขียนใหม่ให้แสดงความสัมพันธ์ของ p การหย่อนตัวสภาพเริ่มต้น d/L และ $(m+1)(d/L)$

$$(m+1-1)\frac{d}{L}(m+1)\frac{d}{L}(m+1+1)\frac{d}{L}\,\frac{d}{L} = \frac{3wL}{64AE}\left(p\,\frac{d}{L} - (m+1)\,\frac{d}{L} + \frac{d}{L}\right)$$

$$p \;=\; \frac{64AEM}{3wL}\left[M^2-\left(\frac{d}{L}\right)^2\right] + M\left(\frac{L}{d}\right)-1 \qquad \text{.........(3.16)}$$

โดยที่ $M = (m+1)(d/L)$

สมการที่ 3.16 กำหนดค่า d (self weight profile) และ M สามารถหาอัตราส่วนน้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงไป p ได้ โดยที่มีความลาดหรือการหย่อนตัวต่อความยาวช่วงสูงสุด M ที่กำหนดให้

ในการพิจารณาผลที่เกิดขึ้นเนื่องอุณหภูมิและการคืบตัวของวัสดุ (material creep) ในขั้นนี้จะต้องหาความยาวของเคเบิ้ลที่ไม่ยืดตัว (unextended length of the cable) เสียก่อน โดยการแทนค่า $p = -1$ ในสมการที่ 3.15 ทำให้ผลการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักบรรทุกหักล้างกับน้ำหนักของตัวเองหมดสิ้นไป ซึ่งจะได้ว่า

$$(m+1)^2 \;=\; 1-\frac{3wL}{64AE}\left(\frac{L}{d}\right)^3 \qquad \text{.........(3.17)}$$

ความยาวของเคเบิ้ลที่ไม่ยืดตัวหาได้โดยแทน $(m+1)(d/L)$ ใน d/L ในสมการที่ 3.4 จะได้

$$\ell \;=\; L\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2(1-K)\right] \qquad \text{.........(3.18)}$$

ในกรณีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลง เมื่อให้

t = อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป

$$\alpha \;=\; \text{สัมประสิทธิ์ของการยืดตัวตามเส้นเนื่องจากอุณหภูมิ}$$

ความยาวของเคเบิ้ลที่ไม่ยืดตัว เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ คือ

$$\ell = L(1+\alpha t)\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2(1-K)\right] \qquad \text{.........(3.19)}$$

ความยาวของเคเบิ้ลที่เปลี่ยนแปลงไปคือ

$$\Delta\ell = L\alpha t\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2(1-K)\right] \qquad \text{.........(3.20)}$$

รวมสมการที่ 3.9 และ 3.20 เข้าด้วยกัน และให้ $k = \frac{\Delta d}{d}$ จะได้ว่า

$$\Delta\ell = \frac{8\Delta d}{3L}(2d+\Delta d) = L\alpha t\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2(1-K)\right]$$

$$(k+1)^2 = 1+\alpha t\left[1+\frac{8}{d}\left(\frac{L}{d}\right)^2-K\right] \qquad \text{..........(3.21)}$$

ส่วนแรงดึงในเคเบิ้ล (H) ตามแนวราบ เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกมากระทำเพิ่มขึ้นคือ

$$H = \frac{wL}{8}\left(\frac{L}{d}\right)\left[\frac{(1+p)}{(1+m)}\right] \qquad \text{..........(3.22)}$$

หรือหน่วยแรงดึง

$$f = \frac{wL}{8A}\left(\frac{L}{d}\right)\left[\frac{(1+p)}{(1+m)}\right] \qquad \text{..........(3.23)}$$

หรือเขียนในเทอมของ m จากสมการที่ 3.15 จะได้

$$\frac{p+1}{m+1} = \frac{m(m+2)}{K} + 1 \qquad \text{..........(3.24)}$$

แทน $\frac{p+1}{m+1}$ ลงในสมการที่ 3.23 จะได้

$$f = \frac{wL}{8A}\left(\frac{L}{d}\right)\left[\frac{m(m+2)}{K} + 1\right] \qquad \text{..........(3.25)}$$

หรือ $$m = \sqrt{K\left[\frac{8A}{wL}\,f\left(\frac{d}{L}\right)-1\right]+1} - 1$$

แทนค่า m ลงในสมการที่ 3.15 จะได้

$$p = \frac{8Af}{wL}\left(\frac{d}{L}\right)\sqrt{1+K\left[\frac{8Af}{wL}\left(\frac{d}{L}\right)-1\right]} -1 \qquad \text{.........(3.26)}$$

สมการที่ 3.26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงไปกับหน่วยแรงดึงที่กำหนดให้ในเคเบิ้ล

ความสัมพันธ์ระหว่างการหย่อนตัวที่เพิ่มขึ้น (Δd) กับแรงดึงที่เพิ่มขึ้น (ΔH) จากสมการที่ 3.2 และสมการที่ 3.22 หาการเพิ่มของแรงดึงได้ คือ

$$\Delta H = \frac{wL}{8}\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{p+1}{m+1}\right) - \frac{wL}{8}\left(\frac{L}{d}\right)$$

$$\Delta H = \frac{wL}{8}\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{p-m}{m+1}\right)$$

$$(p-m) = \frac{8}{wL}\left(\frac{d}{L}\right)(m+1)\Delta H \qquad \text{.........(3.27)}$$

แทน (p-m) ในสมการที่ 3.13 จะได้ว่า

$$m(m+1)(m+2) = \frac{3wL}{64AE}\left(\frac{L}{d}\right)^3 \frac{8}{wL}\left(\frac{d}{L}\right)(m+1)\Delta H$$

$$m(m+2) = \left[\frac{3}{8}\left(\frac{L}{d}\right)^2 \frac{1}{AE}\right]\Delta H$$

ให้ $N = \frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2 AE$

หรือ $m(m+2) = \frac{\Delta H}{N}$ ....(3.28)

3.3 <u>เคเบิ้ลตึงแขวนในลักษณะคอร์ดเอียงภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ</u>

พิจารณาจากรูปที่ 3.2 น้ำหนักบรรทุกกระทำตามแนวราบ คือ

$$w_h = w_o \sec\beta \qquad \text{........(3.29)}$$

ให้จุด A เป็นจุดเริ่มต้นและ d เป็นการหย่อนตัวจากคอร์ด AB ที่กึ่งกลางช่วง L สมการการหย่อนตัวพาราโบลา คือ

$$y = \frac{4d}{L^2}x^2 + \left(\tan\beta - \frac{4d}{L}\right)x \qquad \text{........(3.30)}$$

แรงดึงตามแนวราบของเคเบิ้ลแขวนเอียงภายใต้น้ำหนักบรรทุก คือ

$$H = \frac{w_h L_1^2}{8d_1} = \frac{w_h L_2^2}{8d_2} = \frac{w_h L^2}{8d} \qquad \text{..........(3.31)}$$

ความยาวของเคเบิ้ล คือ

$$\ell = L\left[1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\tan^2\beta\right] \qquad \text{..........(3.32)}$$

ความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุกของเคเบิ้ลตึงที่มีคอร์ดเอียงกับการหย่อนตัว คือ

$$m(m+1)(m+2) = \frac{3w_o L \operatorname{Sec}^3\beta}{64AE}\left(\frac{L}{d}\right)^3(p-m) \qquad \text{..........(3.33a)}$$

หรือ $$m(m+1)(m+2) = K_o(p-m) \qquad \text{..........(3.33b)}$$

แทน $p = -1$ ลงในสมการ 3.33a จะได้

$$(m+1)^2 = 1- \frac{3w_o L \operatorname{Sec}^3\beta}{64AE}\left(\frac{L}{d}\right)^3 \qquad \text{..........(3.34)}$$

แทน $(m+1)/(d/L)$ สำหรับ d/L ในสมการที่ 3.32 จะได้

เคเบิ้ลที่มีความยาวไม่ยืดตัว คือ

$$\ell = L\left[1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d}{L}\right)^2\left(1- \frac{3w_o L \operatorname{Sec}^3\beta}{64AE}\left(\frac{L}{d}\right)^3\right) + \frac{1}{2}\tan^2\beta\right] \qquad \text{....(3.35)}$$

แรงดึงตามแนวราบ H ในเคเบิ้ล คือ

$$H = \frac{w_o L}{8}\left(\frac{L}{d}\right)\left[\frac{(1+p)}{(1+m)}\right]\operatorname{Sec}\beta \qquad \text{.........(3.36)}$$

ความเค้นในเคเบิ้ล

$$f = \frac{w_o L}{8A}\left(\frac{L}{d}\right)\frac{1+p}{1+m}\operatorname{Sec}^2\beta \qquad \text{.........(3.37)}$$

เมื่อกำหนดความลาดสูงสุดของเคเบิ้ลภายใต้น้ำหนักบรรทุกจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความลาดหรือการหย่อนตัวที่กำหนดให้ คือ

$$p = \frac{64AEM}{3w_o L \, Sec^3\beta}\left[M^2 - \left(\frac{d}{L}\right)^2\right] + M\left(\frac{L}{d}\right) - 1 \qquad \text{.........(3.38a)}$$

และ
$$p = \frac{64EM}{3\rho L \, Sec^3\beta}\left[M^2 - \left(\frac{d}{L}\right)^2\right] + M\left(\frac{L}{d}\right) - 1 \qquad \text{.........(3.38b)}$$

เมื่อ $\rho = \frac{w_o}{A}$

หรืออยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความเค้นในเคเบิ้ล คือ

$$p = \frac{8f}{\rho L \, Sec^2\beta}\left(\frac{d}{L}\right)\sqrt{1 + k_o\left[\frac{8f}{\rho L \, Sec^2\beta}\left(\frac{d}{L}\right) - 1\right]} - 1 \qquad \text{.........(3.39)}$$

เมื่อเคเบิ้ลที่มีการหย่อนตัวต่อความยาวช่วง $d/L > 0.02$ ทฤษฎีเคเบิ้ลตึงที่ได้วิเคราะห์มาแล้วนั้น ยังคงสามารถใช้ได้อยู่ ซึ่งมีวิธีการวิเคราะห์ คือ แบ่งเคเบิ้ลออกเป็นสองส่วนหรือมากกว่า ดังแสดงในรูปที่ 3.3 จนในส่วนที่แบ่งมี $d/L < 0.02$ โดยที่จุดต่อของส่วนต่าง ๆ ในเคเบิ้ลจะต้องอยู่ในสมดุลย์

3.4 เคเบิ้ลตึงภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำสม่ำเสมอเป็นบางช่วง

จากรูปที่ 3.4 ก. แสดงน้ำหนักบรรทุกจร w_2 กระทำจากปลายเคเบิ้ล B ถึงบางส่วนของช่วง เพื่อให้การคำนวณแม่นยำถูกต้องยิ่งขึ้น น้ำหนักกระทำต่อเคเบิ้ลตามแนวราบจะเท่ากับ $w_1 Sec\beta_1$ และน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้น $w_2 Sec\beta_2$

กำหนดให้มุม β ในทิศทางกดลง (depression) และจุด A อยู่ต่ำกว่าจุด B เท่ากับ h เป็นบวก แบ่งเคเบิ้ลออกเป็นสองส่วน AC และ BC

จากรูปที่ 3.4ก จะได้ว่า

$$\tan\beta_2 = \frac{L_1\tan\beta_1 + h}{L_2} \qquad \text{..........(3.40)}$$

$$\sec\beta_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_1\tan\beta_1 + h}{L_2}\right)^2} \qquad \text{..........(3.41)}$$

เนื่องจากเป็นน้ำหนักบรรทุกกระทำสม่ำเสมอ ที่จุด C ความลาด (slope) ต้องต่อเนื่องกัน ซึ่งจะได้ว่า

จุดเริ่มต้นที่ A ช่วง AC (รูป 3.4ข)

$$y = \frac{4d_1x^2}{L_1^2} - \left(\tan\beta_1 + \frac{4d_1}{L_1}\right) x \qquad \text{.......(3.42a)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8d_1x}{L_1^2} - \left(\tan\beta_1 + \frac{4d_1}{L_1}\right)$$

ที่ $x = L_1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{4d_1}{L_1} - \tan\beta_1$

จุดเริ่มต้นที่ C ช่วง CB (รูป 3.4ค.)

$$y = \frac{4d_2x^2}{L_2^2} + \left(\tan\beta_2 - \frac{4d_2}{L_2}\right) x \qquad \text{........(3.42b)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8d_2x}{L_2^2} + \left(\tan\beta_2 - \frac{4d_2}{L_2}\right)$$

ที่ $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = -4\frac{d_2}{L_2} + \tan\beta_2$

$$4\frac{d_1}{L_1} - \tan\beta_1 = -4\frac{d_2}{L_2} + \tan\beta_2 \qquad \text{........(3.42c)}$$

จากสมการที่ 3.40 แทนลงในสมการที่ 3.42 จะได้ว่า

$$\frac{d_2}{L_2} = -\frac{d_1}{L_1} + \frac{\tan\beta_1}{4} + \left(\frac{L_1\tan\beta_1 + h}{4L_2}\right) \qquad \text{.....(3.43)}$$

ที่จุดต่อเชื่อมของเคเบิ้ลส่วน AC และ BC คือจุด C เมื่ออยู่ในสมดุลย์แรงดึง ต้องมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม

$$H = \frac{w_1 L_1 \sec\beta_1}{8} \left(\frac{L_1}{d_1}\right) = \frac{(w_1+w_2) L_2 \sec\beta_2}{8} \left(\frac{L_2}{d_2}\right) \quad \ldots.(3.44)$$

แทนค่า $\sec\beta_2$ จากสมการที่ 3.41 และ d_2/L_2 จากสมการที่ 3.43 ลงในสมการที่ 3.44 จะได้ d_1/L_1 ในเทอมของ β_1 เท่านั้น เมื่อทราบการหย่อนตัวเริ่มแรกของเคเบิ้ลภายใต้น้ำหนักบรรทุก w_1 ความยาวไม่ยืดตัว ℓ ก็สามารถคำนวณได้ เนื่องจากเคเบิ้ลต่อเนื่องกันของส่วน AC และ CB ผลรวมความยาวของทั้งสองส่วนนี้ คือ

$$\ell = \ell_{AC}+\ell_{BC} = L_1\{1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d_1}{L_1}\right)^2 \left[1- \frac{3w_1 L_1 \sec^3\beta_1}{64AE}\left(\frac{L_1}{d_1}\right)^3\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\tan^2\beta_1\}+L_2\{1+ \frac{8}{3}\left(\frac{d_2}{L_2}\right)^2\left[1- \frac{3(w_1+w_2) L_2 \sec^3\beta_2}{64AE}\left(\frac{L_2}{d_2}\right)^3\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\tan^2\beta_2\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.45)$$

แทนค่าสมการที่ 3.45 ด้วย $(L_2/d_2)\sec\beta_2$ จากสมการที่ 3.44, d_2/L_2 จากสมการที่ 3.43 และ $\tan\beta_2$ จากสมการที่ 3.40 จะได้สมการใหม่ในเทอมของ β_1 และ d_1/L_1 เท่านั้น คำตอบที่ได้จากค่า β_1 และ d_1/L_1 นี้จะได้การหย่อนตัวและความเค้นในเคเบิ้ลภายใต้น้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอที่เพิ่มขึ้น w_2

3.5 <u>เคเบิ้ลดึงภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นจุด</u>

การวิเคราะห์เคเบิ้ลดึงภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำลงเป็นจุดนั้น มีวิธีการคือ รวมแรงตามแนวดิ่งและแนวราบ ซึ่งต้องอยู่ในสมดุลย์และเงื่อนไข compatibility เมื่อรวมความยาวของส่วนต่าง ๆ ของเคเบิ้ลที่ไม่ยืดตัว จากรูปที่ 3.5 จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$\tan\beta_2 = \frac{L_1\tan\beta_1+ h}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.46)$$

ที่จุด C แรงสมดุลย์ตามแนวราบของส่วนเคเบิ้ล AC และ BC คือ

$$H = \frac{wL_1 \sec\beta_1}{8}\left(\frac{L_1}{d_1}\right) = \frac{wL_2 \sec\beta_2}{8}\left(\frac{L_2}{d_2}\right) \qquad \text{........(3.47)}$$

แรงสมดุลย์ตามแนวดิ่งที่ C และการสมดุลย์ของโครงสร้าง คือ

$$\left.\begin{aligned} H\left(\tan\beta_1 - \frac{4d_1}{L_1}\right) + H\left(\tan\beta_2 - \frac{4d_2}{L_2}\right) &= P \\ H\left(\tan\beta_1 + \frac{4d_1}{L_1}\right) + H\left(\tan\beta_2 + \frac{4d_2}{L_2}\right) &= P + w\ell \end{aligned}\right\} \text{.....(3.48)}$$

$$H(\tan\beta_1 + \tan\beta_2) = P + \frac{w\ell}{2}$$

$$H\left(\tan\beta_1 + \frac{L_1\tan\beta_1 + h}{L_2}\right) = P + \frac{w\ell}{2}$$

$$\frac{H}{L_2}(L\tan\beta_1 + h) = P + \frac{w\ell}{2} \qquad \text{.....(3.49)}$$

รวมสมการที่ 3.46, 3.47, 3.48 และ 3.49 เข้าด้วยกัน จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$\sec\beta_1\left(\frac{L_1}{d_1}\right) = \frac{L_2}{L_1}\frac{1}{R} \; ; \; \sec\beta_2\left(\frac{L_2}{d_2}\right) = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d_1}{L_1} = R\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1+\tan^2\beta_1} \; , \; \frac{d_2}{L_2} = R\sqrt{1+\left(\frac{L_1\tan\beta_1+h}{L_2}\right)^2}$$

$$R = \frac{w(L\tan\beta_1 + h)}{8\left(P + \frac{w\ell}{2}\right)} \qquad \text{......(3.50)}$$

ความยาวที่ไม่ยืดตัวของเคเบิ้ลทั้งหมด เท่ากับความยาวที่ไม่ยืดตัวของส่วน AC บวกด้วยความยาวของเคเบิ้ลที่ไม่ยืดตัวส่วน CB จะได้ว่า

$$\ell_{AB} = \ell_{AC} + \ell_{CB} = L_1\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{d_1}{L_1}\right)^2\left[1 - \frac{2wL_1\sec^3\beta_1}{64AE}\left(\frac{L_1}{d_1}\right)^3\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\tan^2\beta_1\right\} + L_2\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{d_2}{L_2}\right)^2\left[1 - \frac{3wL_2\sec^3\beta_2}{64AE}\left(\frac{L_2}{d_2}\right)^3\right] + \frac{1}{2}\tan^2\beta_2\right\} \text{..(3.51)}$$

แทนค่าสมการที่ 3.46 และ 3.49 ลงในสมการที่ 3.51 จะได้สมการในเทอมของ $\tan\beta_1$ การหย่อนตัว แรงดึงในเคเบิ้ลและความลาดสามารถหาได้จากค่า $\tan\beta_1$ นี้