บทที่ 3

การวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต

3.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ส่วนมากมักเป็นการวิเคราะห์เชิงเส้น (Linear analysis) ซึ่งให้ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักหรือแรงที่กระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) เป็นแบบเส้นตรง แต่ในความเป็นจริงแล้ว ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นหรือเกือบจะเป็นเส้นตรงเฉพาะที่มีแรงกระทำน้อยๆ เท่านั้น สำหรับกรณีที่โครงสร้างเกิดการโก่งตัวมาก (Large deflection) หรือโครงสร้างที่รับแรงเกินจุดคลากของวัสดุ การวิเคราะห์เชิงเส้นจะให้ผลการคำนวณที่ผิดพลาดมากยิ่งขึ้น จึงจำเป็นต้องพิจารณาผลของความไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์

โดยทั่วไป พฤติกรรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear behavior) ของโครงสร้าง แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

ก) ความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ (Material nonlinearity) เกิดขึ้นเมื่อวัสดุได้รับแรงกระทำมากเกินกว่าขีดจำกัดการแปรผันตรง (Proportional limit) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจะเริ่มไม่เป็นเส้นตรง ความไม่เชิงเส้นทางวัสดุนี้ จะมีผลต่อความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำ และการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง ถึงแม้ว่าจะยังคงใช้สมการสมดุลย์บนโครงสร้างเดิมก่อนการเปลี่ยนรูปร่าง (Undeformed structure) ก็ตาม

ข) ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต (Geometric nonlinearity) ถึงแม้แรงที่กระทำบนโครงสร้างยังไม่เกินขีดจำกัดการแปรผันตรง แต่หากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งไม่เป็นเส้นตรง ก็จะทำให้ความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งไม่เป็นปฏิภาคกัน ในกรณีนี้การเขียนสมการสมดุลย์บนโครงสร้างเดิมก่อนการเปลี่ยนรูปร่างจะให้

คำตอบในการวิเคราะห์ผิดไป จำเป็นต้องพิจารณาบนลักษณะทางเรขาคณิตของโครงสร้างภายหลังการเปลี่ยนรูปร่าง (Deformed geometry)

พฤติกรรมไม่เชิงเส้นบนโครงสร้าง อาจเกิดเฉพาะอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเกิดพร้อมกันทั้งทางวัสดุและทางเรขาคณิตก็ได้ สำหรับในโครงสร้างเสาสายส่งไฟฟ้า ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มีความชะลูดและความอ่อนมาก จะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งค่อนข้างมากภายใต้แรงที่กระทำ โดยที่โครงสร้างอาจจะยังอยู่ในช่วงอีลาสติก ในกรณีนี้ จึงควรทำการวิเคราะห์โดยพิจารณาผลของความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต ดังจะกล่าวต่อไปในบทนี้

3.2 ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต

การพิจารณาความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต สามารถนำไปสู่การคำนวณสภาวะสูญเสียเสถียรภาพของโครงสร้าง อันเนื่องมาจากสติฟเนสของชิ้นส่วนลดลงเนื่องจากผลของแรงอัดในแนวแกน การสูญเสียเสถียรภาพเกิดขึ้นเมื่อชิ้นส่วนหรือโครงสร้างรับน้ำหนักบรรทุกถึงระดับหนึ่งแล้วเกิดการเปลี่ยน (Convert) พลังงานแนวแกน (Axial strain energy) ไปเป็นพลังงานของการดัด (Strain energy of bending) โดยที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงแรงที่กระทำภายนอก เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้นระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่ง หน่วยแรงตามแนวแกนจะก่อให้เกิดผลต่อสติฟเนสทางการดัด (Bending stiffness) โดยที่หน่วยแรงตามแนวแกนซึ่งกระทำในตำแหน่งที่ชิ้นส่วนเปลี่ยนตำแหน่งไป จะทำให้สติฟเนสทางการดัดลดลงเมื่อแรงตามแนวแกนเป็นแรงอัด และเมื่อสติฟเนสทางการดัดลดลงจนเป็นศูนย์ การโก่งเดาะหรือการสูญเสียเสถียรภาพก็จะเกิดขึ้น (เช่น Cook, Malkus และ Plesha, 1989)

ปัญหาการสูญเสียเสถียรภาพ หรือปัญหาการโก่งเดาะนี้ โดยทั่วไปจะเป็นไปในลักษณะที่หน่วยแรงตามแนวแกนและหน่วยแรงดัดขึ้นแก่กันและกัน ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งทางด้านข้างจะเป็นเส้นโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ค่าแรงวิกฤติสำหรับการโก่งเดาะจะอยู่ที่จุดที่ความชันของเส้นโค้งเป็นศูนย์ การวิเคราะห์ปัญหาการสูญเสียเสถียรภาพนี้ อาจทำโดยใช้วิธีการเพิ่มส่วนทีละขั้น (Incremental method) หรือการทำซ้ำ (Iterative approach) เพื่อให้ได้คำตอบ ซึ่งในการวิจัยนี้ได้ใช้วิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct iteration method) ดังจะกล่าวถึงในช่วงท้ายของบท

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า หน่วยแรงตามแนวแกนจะไปลดหรือเพิ่มค่าสติฟเนสทางการดัด โดยเมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก (Elastic stiffness matrix) จะถูกนำมารวมกับเมตริกซ์สติฟเนสใหม่ที่เพิ่มขึ้น ซึ่งอาจเรียกชื่อได้หลายอย่าง เช่น เมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิต (Geometric stiffness matrix) หรือเมตริกซ์สติฟเนสหน่วยแรงเริ่มต้น (Initial stress stiffness matrix) ซึ่งจะแสดงวิธีการหาค่าเมตริกซ์สติฟเนสดังกล่าว ในหัวข้อต่อไป

3.3 **เมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิต** (Weaver และ Johnston, 1984)

ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตสำหรับชิ้นส่วนดิสคริตมิติเดียวในระนาบสองมิติ ก่อนอื่นให้พิจารณาเอเลเมนต์ดัด (Flexural element) ใดๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.2(ก) มีแรงตามแนวแกนเริ่มต้น P_0 ให้แรงดึงมีค่าเป็นบวกตามทิศดังแสดงในรูป ความเครียดทั้งหมด (ε_x) ประกอบด้วยความเครียดดัด (Flexural strain, ε_{x1}) เนื่องจากความโค้ง (Curvature) และความเครียดแนวแกน (Axial strain, ε_{x2}) อันเนื่องมาจากการยืดของชิ้นส่วนเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งไป

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} \qquad \text{..... (3.1)}$$

ความเครียดดัดและความเครียดแนวแกน มีค่าดังนี้

$$\varepsilon_{x1} = -y\,\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{..... (3.2)}$$

เมื่อ v = ระยะการเปลี่ยนตำแหน่งทางด้านข้าง หรือระยะโก่งตัวของเอเลเมนต์

และ

$$\varepsilon_{x2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \qquad \text{..... (3.3)}$$

ค่าความเครียดแนวแกนในสมการที่ (3.3) ได้จากการประมาณ เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ ในเอเลเมนต์ยาว ds ซึ่งสามารถเขียนในเทอมของความยาว dx ซึ่งเป็นความยาวเริ่มแรกก่อนเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

เมื่อกระจายค่าที่อยู่ในรากที่สอง ด้วยทฤษฎีบทไบโนเมียล (Binomial theorem) จะได้

$$ds = dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\ldots\right]$$

ซึ่งสองเทอมแรกในวงเล็บเป็นค่าประมาณสำหรับหาความเครียดแนวแกนในสมการที่ (3.3) การเปลี่ยนตำแหน่งทางด้านข้าง v สามารถเขียนในเทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้ว (Nodal displacements) **r** และฟังก์ชันแสดงรูปร่าง (Shape functions) **N** ดังนี้

$$v = \mathbf{N}\,\mathbf{r} \qquad \text{..... (3.4)}$$

เมื่อ $\mathbf{N}$ = ฟังก์ชันแสดงรูปร่าง มีค่าสัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วทั้ง 4 ดีกรีความอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (ข)-(จ) ตามลำดับ

$$= \lfloor N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4 \rfloor$$

$\mathbf{r}$ = การเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้ว หรือดีกรีความอิสระที่พิจารณา

$$= \lfloor v_a \;\; \theta_a \;\; v_b \;\; \theta_b \rfloor^T$$

และ

$$N_1 = 1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x-2\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการที่ (3.4) และแทนค่าในสมการที่ (3.2) และ (3.3) จะได้

$$\varepsilon_{x1} = -y\, \mathbf{N}_{,xx}\, \mathbf{r} \qquad ..... (3.5)$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{1}{2}(\mathbf{N}_{,x}\, \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x}\, \mathbf{r} \qquad ..... (3.6)$$

ผลรวมของพลังงานความเครียด เนื่องจากหน่วยแรงดัด (Flexural stress, σ_{x1}) และหน่วยแรงตามแนวแกนเริ่มต้น (Initial axial stress, σ_{x0}) ในสภาพที่เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง มีค่าดังนี้

$$U = U_1 + U_0 \qquad ..... (3.7)$$

เมื่อ U_1 = พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงดัด

U_0 = พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงตามแนวแกนเริ่มต้น

พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงดัด เขียนได้ดังนี้

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{x1}\varepsilon_{x1} dV \qquad ..... (3.8)$$

พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงดัดในสมการที่ (3.8) ได้ละเทอมอินทิเกรชันของ $\sigma_{x1}\varepsilon_{x2}$ บนพื้นที่หน้าตัด ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากเป็นฟังก์ชันของ y รอบจุดศูนย์ถ่วง เมื่อแทนค่า $\sigma_{x1} = E\varepsilon_{x1}$ เมื่อ E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่น และสมการที่ (3.5) ในสมการดังกล่าว ในที่สุดพลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงดัดจะเขียนได้ดังสมการที่(3.9)

$$U_1 = \frac{1}{2} EI\, \mathbf{r}^T \int_0^L \mathbf{N}_{,xx}^T \mathbf{N}_{,xx}\, dx\, \mathbf{r} \qquad ..... (3.9)$$

พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงตามแนวแกนเริ่มต้น มีค่าดังนี้

$$U_0 = \int_V \sigma_{x0}\varepsilon_{x2} dV \qquad ..... (3.10)$$

โดยที่ได้ละเทอมอินทิเกรชันของ $\sigma_{x0}\varepsilon_{x1}$ บนพื้นที่หน้าตัด ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากเป็นฟังก์ชันของ y รอบจุดศูนย์ถ่วง เมื่อแทนสมการที่ (3.6) ลงในสมการที่ (3.10) แล้วอินทิเกรตบนพื้นที่หน้าตัด จะได้

$$U_0 = \frac{1}{2} P_0 \mathbf{r}^T \int_0^L \mathbf{N}^T_{,x} \mathbf{N}_{,x}\, dx\, \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.11)}$$

จากหลักการของค่าสเตชันเนอรีของพลังงานศักย์รวม (Principle of stationary total potential energy) จะได้

$$\frac{\partial\left(U_1 + U_0\right)}{\partial r} = \text{stationary}$$

ซึ่งจะได้

$$(\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\, \mathbf{r} = \mathbf{P} \qquad \text{..... (3.12)}$$

ในเมื่อ $\mathbf{k}_e$ = เมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติกของเอเลเมนต์ จากสมการที่ (3.9)

$$= EI \int_0^L \mathbf{N}^T_{,xx} \mathbf{N}_{,xx}\, dx \qquad \text{... (3.13ก)}$$

$\mathbf{k}_g$ = เมตริกซ์สติฟเนสหน่วยแรงเริ่มต้น หรือเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตของเอเลเมนต์ จากสมการที่ (3.11)

$$= P_0 \int_0^L \mathbf{N}^T_{,x} \mathbf{N}_{,x}\, dx \qquad \text{... (3.13ข)}$$

สำหรับชิ้นส่วนหน้าตัดคงที่ (Prismatic flexural element) ในระนาบสองมิติ สติฟเนสอีลาสติก ($\mathbf{k}_e$) และสติฟเนสเรขาคณิต ($\mathbf{k}_g$) จะเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \text{... (3.14ก)}$$

$$\mathbf{k}_g = \frac{P_0}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \text{.... (3.14ข)}$$

ต่อจากนี้จะเป็นการหาเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตสำหรับชิ้นส่วนดิสครีตมิติเดียวในปริภูมิสามมิติ แบ่งออกเป็น ชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกน (Space truss) และชิ้นส่วนรับแรงดัด (Space frame) ซึ่งชิ้นส่วนทั้งสองชนิดนี้ พบได้ในแบบจำลองโครงสร้างเสาสายส่งไฟฟ้าที่ใช้ทำการวิเคราะห์ในกรณีศึกษา

3.3.1 เมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตสำหรับชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกนในปริภูมิสามมิติ (Cook, Malkus และ Plesha, 1989)

พิจารณาชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 3.3 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วหรือดีกรีความอิสระที่พิจารณา มีดังนี้

$$\mathbf{r} = \lfloor u_a \ v_a \ w_a \ u_b \ v_b \ w_b \rfloor^T \qquad \text{..... (3.15)}$$

การเปลี่ยนตำแหน่งที่ระยะ x ใดๆในชิ้นส่วนมีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วในทิศทางเดียวกัน โดยเป็นฟังก์ชันอินเทอโพเลชันเชิงเส้น (Linear interpolation function) และสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u = \left(1-\frac{x}{L}\right)u_a + \frac{x}{L}u_b \qquad \text{... (3.16ก)}$$

$$v = \left(1-\frac{x}{L}\right)v_a + \frac{x}{L}v_b \qquad \text{... (3.17ก)}$$

$$w = \left(1-\frac{x}{L}\right)w_a + \frac{x}{L}w_b \qquad \text{... (3.18ก)}$$

การเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันแสดงรูปร่างและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วได้ ดังต่อไปนี้

$$u = \mathbf{N}_u \mathbf{r} \qquad \text{... (3.16ข)}$$

$$v = \mathbf{N}_v \mathbf{r} \qquad \text{... (3.17ข)}$$

$$w = \mathbf{N}_w \mathbf{r} \qquad \text{... (3.18ข)}$$

เมื่อ

$$\mathbf{N}_u = \left\lfloor \left(1-\frac{x}{L}\right) \ 0 \ 0 \ \frac{x}{L} \ 0 \ 0 \right\rfloor$$

$$\mathbf{N}_v = \left\lfloor 0 \ \left(1-\frac{x}{L}\right) \ 0 \ 0 \ \frac{x}{L} \ 0 \right\rfloor$$

$$\mathbf{N}_w = \left\lfloor 0 \ 0 \ \left(1-\frac{x}{L}\right) \ 0 \ 0 \ \frac{x}{L} \right\rfloor$$

ความเครียดแนวแกนเป็นผลรวมของ 2 ส่วน ดังนี้

$$\varepsilon_x = e_x + \eta_x \qquad \text{..... (3.19)}$$

เมื่อ e_x = ส่วนเชิงเส้นของความเครียดแนวแกน

$$= \frac{du}{dx} = \mathbf{N}_{u,x}\,\mathbf{r} \qquad \text{..... (3.20)}$$

η_x = ส่วนไม่เชิงเส้นของความเครียดแนวแกน

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\left(\mathbf{N}_{v,x}^T\mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T\mathbf{N}_{w,x}\right)\mathbf{r} \qquad \text{..... (3.21)}$$

เนื่องจากความเครียดเชิงเส้น (du/dx) มีค่าอยู่ในอันดับเดียวกับ $(dv/dx)^2$ และ $(dw/dx)^2$ ในส่วนไม่เชิงเส้นแต่ $(du/dx)^2$ เป็นผลอันดับที่สูงกว่าจึงได้ละทิ้งในสมการที่ (3.21)

ถ้าแรงภายนอกที่กระทำก่อให้เกิดแรงตามแนวแกนบนชิ้นส่วน P_0 และให้แรงมีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงตามแนวแกน (Axial stress, σ_x) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_v \sigma_x \varepsilon_x \, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_v E\varepsilon_x^2 \, dv \qquad \text{..... (3.22)}$$

แต่

$$\varepsilon_x^2 = (e_x + \eta_x)^2$$

$$= e_x^2 + 2e_x\eta_x + \eta_x^2 \approx e_x^2 + 2e_x\eta_x \qquad \text{..... (3.23)}$$

เทอมที่สามของ ε_x^2 ให้ละทิ้ง เนื่องจากเป็นเทอมอันดับสูง ดังนั้นเมื่อแทนค่าใน สมการที่ (3.22) จะได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_v E\, e_x^2\, dv + \int_v E\, e_x \eta_x dv \qquad \text{..... (3.24)}$$

แทนค่า e_x และ η_x จากสมการที่ (3.20) และ (3.21) และแทนค่า $\sigma_x = Ee_x$ ในที่สุด พลังงานความเครียดในสมการที่ (3.24) จะสามารถเขียนได้เป็น 2 ส่วนดังในสมการที่ (3.25) และ (3.26)

$$U_1 = \frac{1}{2} EA\, \mathbf{r}^T \int_0^L \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x}\, dx\, \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.25)}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} P_0\, \mathbf{r}^T \int_0^L (\mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x})\, dx\, \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.26)}$$

จากหลักการของค่าสเตชันเนอรีของพลังงานศักย์รวมเช่นเดียวกับสมการที่ (3.12) จะสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนสได้ดังนี้

$$\mathbf{k_e} = EA \int_0^L \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x}\, dx \qquad \text{... (3.27ก)}$$

$$\mathbf{k_g} = P_0 \int_0^L (\mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x})\, dx \qquad \text{... (3.27ข)}$$

สำหรับชิ้นส่วนหน้าตัดคงที่ในปริภูมิสามมิติ เมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก และเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิต สำหรับชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกน มีค่าดังนี้

$$\mathbf{k_e} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{... (3.28ก)}$$

$$\mathbf{k_g} = \frac{P_0}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{... (3.28ข)}$$

3.3.2 เมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตสำหรับชิ้นส่วนรับแรงดัดในปริภูมิสามมิติ

ชิ้นส่วนรับแรงดัดในปริภูมิสามมิติ ความยาว L แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 มีดีกรีความอิสระที่พิจารณา ดังนี้

$$\mathbf{r} = \lfloor v_a \;\; w_a \;\; \theta_{ya} \;\; \theta_{za} \;\; v_b \;\; w_b \;\; \theta_{yb} \;\; \theta_{zb} \rfloor \quad \text{..... (3.29)}$$

การเปลี่ยนตำแหน่งทางด้านข้างที่ระยะ x ใดๆ ในชิ้นส่วน มีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายในบางดีกรีความอิสระ เป็นฟังก์ชันอินเทอโพเลชั่นกำลังสาม (Cubic interpolation function) และแสดงได้ดังนี้

$$v = \mathbf{N}\begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_{za} \\ v_b \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix}$$

$$w = \mathbf{N}\begin{Bmatrix} w_a \\ -\theta_{ya} \\ w_b \\ -\theta_{yb} \end{Bmatrix}$$

เมื่อ $\mathbf{N}$ = ฟังก์ชันแสดงรูปร่าง และมีค่าเช่นเดียวกับ $\mathbf{N}$ ในสมการที่ (3.4)

ถ้าต้องการให้การเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าว อยู่ในเทอมของฟังก์ชันแสดงรูปร่างและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายทั้งหมด จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$v = \mathbf{N}_v \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.30)}$$

$$w = \mathbf{N}_w \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.31)}$$

เมื่อ

$$\mathbf{N}_v = \lfloor N_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; N_4 \rfloor$$

$$\mathbf{N}_w = \lfloor 0 \;\; N_1 \;\; -N_2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; N_3 \;\; -N_4 \;\; 0 \rfloor$$

$N_1 - N_4$ = ค่าของฟังก์ชันแสดงรูปร่างในสมการที่ (3.4)

จากสมการที่ (3.1) ความเครียดเนื่องจากความโค้งแบ่งได้เป็นสองส่วน คือ ความเครียดดัด (ε_{x1}) และความเครียดแนวแกน (ε_{x2}) เมื่อพิจารณาในปริภูมิสามมิติ จะได้

$$\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]$$

เมื่อแทนค่า v และ w ด้วยสมการที่ (3.30) และ (3.31) สมการความเครียด จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$\varepsilon_{x1} = -y\,\mathbf{N}_{v,xx}\,\mathbf{r} - z\,\mathbf{N}_{w,xx}\,\mathbf{r} \qquad \text{..... (3.32)}$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\left(\mathbf{N}_{v,x}^T\mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T\mathbf{N}_{w,x}\right)\mathbf{r} \qquad \text{..... (3.33)}$$

เช่นเดียวกับในวิธีการหาเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิต สำหรับชิ้นส่วนรับแรงดัดในระนาบสองมิติ ถ้ามีแรงตามแนวแกนเริ่มต้น P_0 กระทำต่อชิ้นส่วน พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงดัด (U_1) และพลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงตามแนวแกนเริ่มต้น (U_0) จะเป็นดังสมการที่ (3.8) และ (3.10) ดังนี้

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_v \sigma_{x1}\varepsilon_{x1}\,dV$$

$$U_0 = \int_v \sigma_{x0}\varepsilon_{x2}\,dV$$

เมื่อแทนค่า $\sigma_{x1} = E\varepsilon_{x1}$ และแทนค่า ε_{x1} , ε_{x2} ด้วยสมการที่ (3.32) และ (3.33) สุดท้าย พลังงานความเครียดดังกล่าว จะมีค่าดังนี้

$$U_1 = \frac{1}{2} E \mathbf{r}^T \int_0^L (I_z \mathbf{N}_{v,xx}^T \mathbf{N}_{v,xx} + I_y \mathbf{N}_{w,xx}^T \mathbf{N}_{w,xx})\, dx\, \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.34)}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} P_0 \mathbf{r}^T \int_0^L (\mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x})\, dx\, \mathbf{r} \qquad \text{..... (3.35)}$$

จากหลักการสเตชันเนอรีของพลังงานศักย์รวม จะได้สมการเช่นเดียวกับสมการที่ (3.12) และจะสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนสได้ดังนี้

$$\mathbf{k_e} = E \int_0^L (I_z \mathbf{N}_{v,xx}^T \mathbf{N}_{v,xx} + I_y \mathbf{N}_{w,xx}^T \mathbf{N}_{w,xx})\, dx \qquad \text{... (3.36ก)}$$

$$\mathbf{k_g} = P_0 \int_0^L (\mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x} + \mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x})\, dx \qquad \text{... (3.36ข)}$$

สำหรับชิ้นส่วนหน้าตัดคงที่ในปริภูมิสามมิติ เมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก และเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตสำหรับชิ้นส่วนรับแรงดัด มีค่าดังนี้

$$\mathbf{k_e} = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12I_z & 0 & 0 & 6LI_z & -12I_z & 0 & 0 & 6LI_z \\ 0 & 12I_y & -6LI_y & 0 & 0 & -12I_y & -6LI_y & 0 \\ 0 & -6LI_y & 4L^2I_y & 0 & 0 & 6LI_y & 2L^2I_y & 0 \\ 6LI_z & 0 & 0 & 4L^2I_z & -6LI_z & 0 & 0 & 2L^2I_z \\ -12I_z & 0 & 0 & -6LI_z & 12I_z & 0 & 0 & -6LI_z \\ 0 & -12I_y & 6LI_y & 0 & 0 & 12I_y & 6LI_y & 0 \\ 0 & -6LI_y & 2L^2I_y & 0 & 0 & 6LI_y & 4L^2I_y & 0 \\ 6LI_z & 0 & 0 & 2L^2I_z & -6LI_z & 0 & 0 & 4L^2I_z \end{bmatrix}$$

... (3.37ก)

$$\mathbf{k}_g = \frac{P_0}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{.... (3.37ข)}$$

3.4 ปัญหาการสูญเสียเสถียรภาพ

จากที่ได้กล่าวถึงในตอนต้นแล้วว่า การแก้ปัญหาการสูญเสียเสถียรภาพที่ใช้ในการวิจัยนี้เป็นวิธีทำซ้ำโดยตรง ซึ่งในการวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม GTSTRUDL และ SAP90 และวิธีการที่ใช้วิเคราะห์ในโปรแกรมทั้งสอง มีข้อจำกัดว่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างต้องมีค่าน้อย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ค่าความเครียดและการหมุน (Rotation) ในเอเลเมนต์ต้องมีค่าน้อย กล่าวคือ ความเครียดจะต้องมีค่าน้อยตราบเท่าที่พฤติกรรมระหว่างหน่วยแรงและความเครียดอยู่ในพิกัดยืดหยุ่นเชิงเส้น และค่าการหมุนจะต้องมีค่าน้อยจนสามารถประมาณ SIN $\theta \approx \theta$

วิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct iteration method) เป็นวิธีทำซ้ำโดยใช้เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นคอร์ด (Secant stiffness matrix) และการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด (Total displacement) โดยเขียนเป็นสมการการทำซ้ำในรอบที่ j ได้ดังนี้

$$\left(\mathbf{K}_E^{j-1} + \mathbf{K}_G^{j-1}\right) \mathbf{r}^j = \mathbf{P} \quad \text{..... (3.38)}$$

เมื่อ $\mathbf{K}_E^{j-1}$ = เมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติกที่คิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งในรอบที่ j-1

$\mathbf{K}_G^{j-1}$ = เมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตที่คิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งและหน่วยแรงตามแนวแกนในรอบที่ j-1

$\mathbf{r}^j$ = การเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของโครงสร้างที่คำนวณได้ในรอบที่ j

$\mathbf{P}$ = แรงทั้งหมดที่กระทำต่อโครงสร้าง

การคำนวณในรอบแรกจะใช้ค่าเมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก ในการคำนวณแบบเชิงเส้น เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย และแรงตามแนวแกนภายในเอเลเมนต์ และในรอบที่ 2 เมตริกซ์สติฟเนสที่ใช้จึงค่อยเป็นเมตริกซ์สติฟเนสจากเส้นคอร์ด ที่รวมผลของเมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก และเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิต ที่ได้จากการเปลี่ยนตำแหน่งและหน่วยแรงตามแนวแกนจากการคำนวณในรอบแรก เพื่อคำนวณหาการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายและแรงตามแนวแกนภายในเอเลเมนต์ และค่าดังกล่าวก็จะนำไปใช้หาเมตริกซ์สติฟเนสในรอบต่อไป การทำซ้ำจะทำให้คำตอบเข้าใกล้ค่าที่ถูกต้องดังรูปที่ 3.5 และจะทำซ้ำไปจนกระทั่งค่าด้านซ้ายและขวาในสมการที่ (3.38) มีค่าเท่ากัน หรือใกล้เคียงกันในระดับที่ต้องการ