



บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 สมมุติฐานเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์คอนกรีตเสริมใยแก้ว

ในการวิเคราะห์คอนกรีตแผ่นหลังคาอาร์ชบางโค้งรูปทรงกระบอกทำด้วยคอนกรีตเสริมใยแก้ว ใช้สมมุติฐานดังต่อไปนี้

2.1.1 คอนกรีตเสริมใยแก้วถือว่าเป็นวัสดุที่มีเนื้อวัสดุเป็นเนื้อเดียวกัน

2.1.2 ในช่วงพิกัดยืดหยุ่นถือว่ามีคุณสมบัติเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's Law)

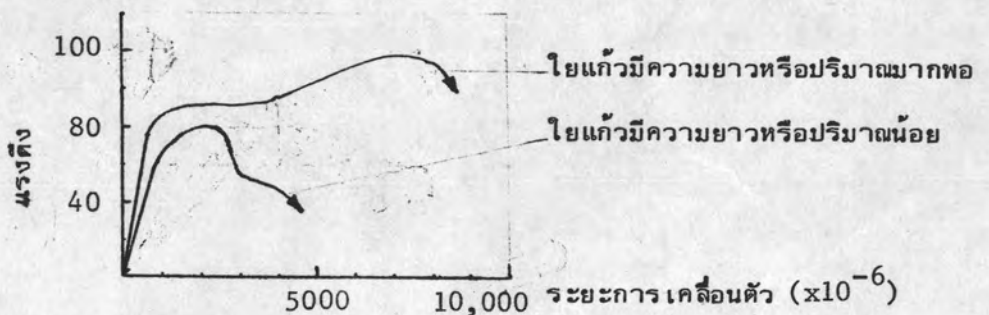
2.1.3 พื้นที่หน้าตัดซึ่งเป็นระนาบก่อนการรับแรงดัด ยังคงเป็นระนาบอยู่หลังจากการรับแรงดัดแล้ว

2.1.4 การวิเคราะห์ถือว่าแรงในแนวแกนมีผลน้อยมาก

2.1.5 การวิเคราะห์ในช่วงอีลาสติก โครงสร้างอาร์ชบางส่วนยังอยู่ในช่วงอีลาสติกขณะที่บางส่วนเป็นอินอีลาสติก ในการวิเคราะห์นี้ใช้ทฤษฎีอีลาสติกมาใช้ประมาณในการคำนวณ

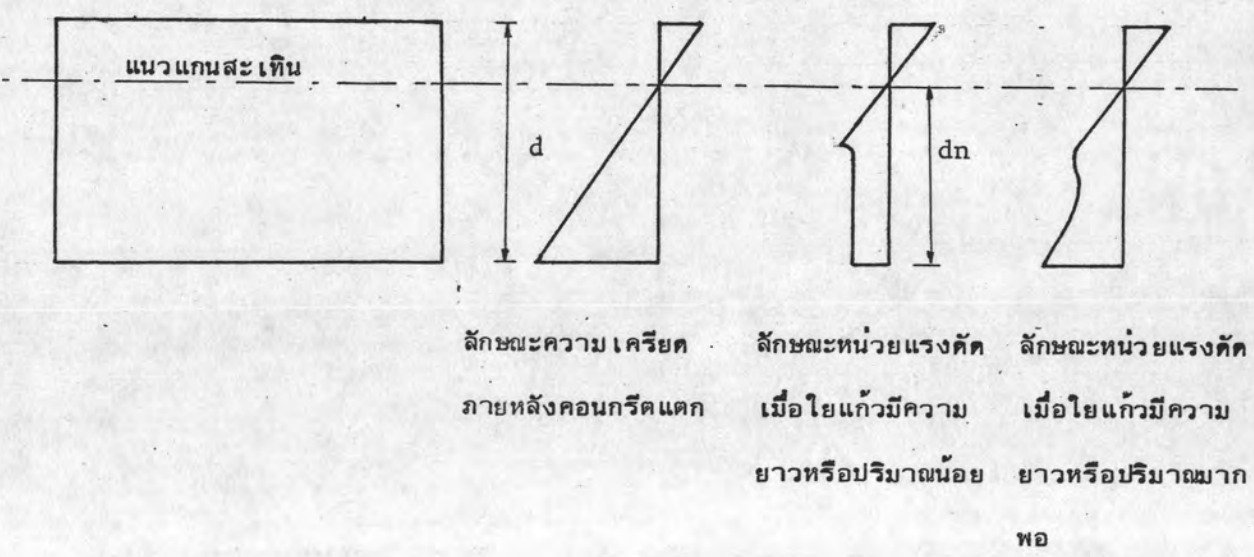
2.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับคอนกรีตเสริมใยแก้ว

ในการศึกษาเกี่ยวกับคอนกรีตเสริมใยแก้วภายใต้การรับแรงดึง พบว่าเมื่อรับแรงดึงคอนกรีตและใยแก้วจะรับแรงรวมกันในช่วงอีลาสติก แต่เมื่อถึงจุด ๆ หนึ่งคอนกรีตจะเริ่มแตกร้าวออกจากกันแล้วแรงดึงทั้งหมดจะถ่ายให้ใยแก้วรับ โดยที่ถ้าใยแก้วมีความยาวหรือปริมาณน้อยจะทำให้ไม่สามารถรับแรงดึงเพิ่มขึ้น แต่ถ้าใยแก้วมีความยาวหรือปริมาณมากพอก็จะทำให้สามารถรับแรงดึงเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงกับระยะการเคลื่อนตัว

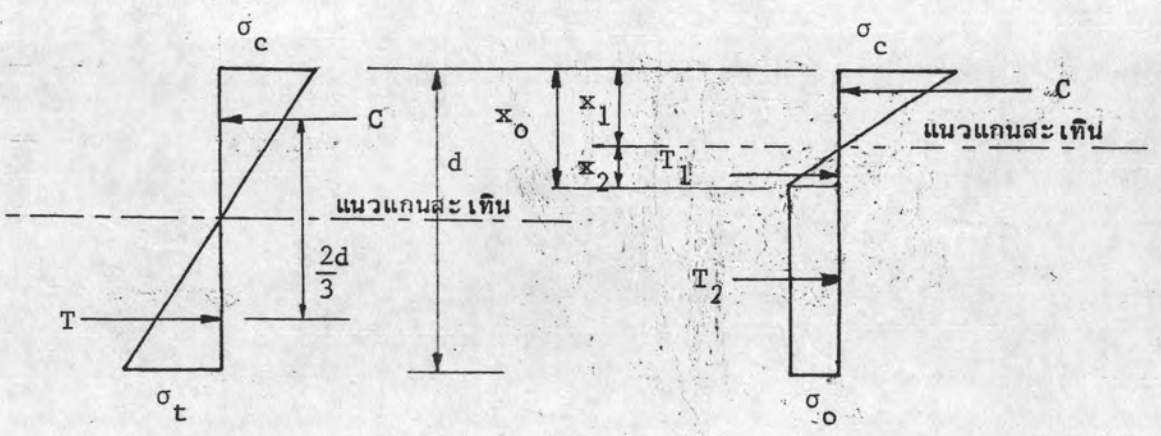
Allen⁴ ได้ศึกษาเกี่ยวกับลักษณะการกระจายของหน่วยแรงคัตและความเครียดที่เกิดขึ้นในคานคอนกรีตเสริมใยแก้ว เมื่อได้รับแรงคัตพบว่า มีลักษณะดังรูปที่ 2.2



ลักษณะความเครียด ลักษณะหน่วยแรงคัต ลักษณะหน่วยแรงคัต
 ภายหลังคอนกรีตแตก เมื่อใยแก้วมีความ เมื่อใยแก้วมีความ
 ยาวหรือปริมาณน้อย ยาวหรือปริมาณมาก
 พอ

รูปที่ 2.2 แสดงลักษณะการกระจายของหน่วยแรงคัตและความเครียดของคาน เมื่อได้รับแรงคัต

นอกจากนี้ Allen ยังได้พบว่า การกระจายของหน่วยแรงคัตในช่วงอีลาสติกภายใต้การรับแรงคัต จะมีลักษณะดังรูปที่ 2.3 และเมื่อคานได้รับแรงเพิ่มขึ้นจนเนื้อคอนกรีตส่วนที่รับแรงดึงแยกออกจากกัน เหลือแต่ใยแก้วรับแรงอยู่การกระจายของหน่วยแรงคัตโดยเฉลี่ยจะมีค่าสม่ำเสมอแต่ส่วนที่รับแรงดึงได้แนวแกนสะเทินซึ่งเนื้อคอนกรีตยังไม่เกิดการแตกร้าวยังถือว่าอยู่ในช่วงอีลาสติก ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.3 แสดงลักษณะหน่วยแรงคัตในช่วงอีลาสติก

รูปที่ 2.4 แสดงหน่วยแรงคัตในช่วงอินอีลาสติก

ดังนั้น เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.3 ซึ่งมีลักษณะแรงค้ำอยู่ในช่วงอีลาสติก

$$T = c = \frac{\sigma_t}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\sigma_t d}{4}$$

$$\text{ดังนั้น โมเมนต์ด้านทาน} = \sigma_t \cdot \frac{d}{4} \cdot \frac{2d}{3} = \frac{\sigma_t d^2}{6} \dots\dots\dots(2.1)$$

และ เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.4 ซึ่งมีลักษณะแรงค้ำอยู่ในช่วงอินอีลาสติก

$$C = T_1 + T_2$$

$$\text{เนื่องจาก } C = \frac{1}{2} \sigma_c x_1 b$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sigma_o (x_o - x_1) b$$

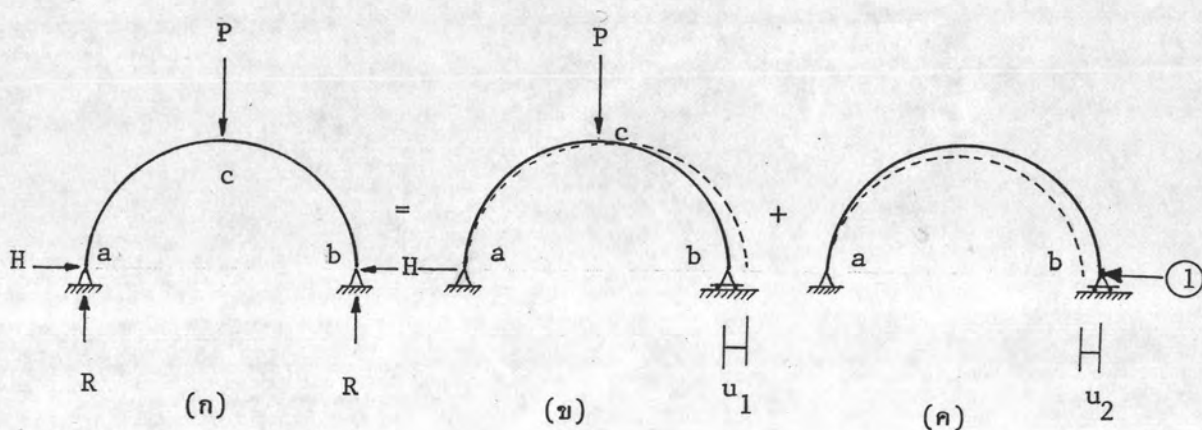
$$T_2 = \sigma_o (d - x_o) b$$

$$\text{ดังนั้น โมเมนต์ด้านทาน} = \frac{1}{3} \sigma_c x_1^2 b + \frac{1}{3} \sigma_o (x_o - x_1)^2 b + \frac{1}{2} \sigma_o (d - x_o) (d + x_o - 2x_1) b \dots(2.3)$$

2.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับอาร์ช^{7,9}

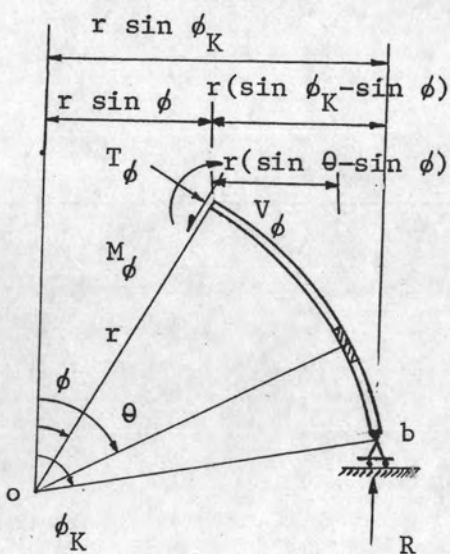
ในการวิเคราะห์อาร์ชที่มีรัศมีความโค้งยาวคงที่และที่ปลายทั้งสองมีจุดยึดรองรับแบบยึดหมุน (Hinge) เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาที่ฐานในแนวตั้งและแนวนอนรวม 4 แรงด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 2.5ก เนื่องจากสมการการสมดุลมีเพียง 3 สมการ แสดงว่าโครงสร้างนี้เป็นโครงสร้างอินดิเทอร์มิเนต ดังนั้นการวิเคราะห์โครงสร้างนี้จึงต้องหาสมการอีกสมการหนึ่งมาช่วย ซึ่งจะหาได้จากสมการของการเคลื่อนที่ดังนี้

พิจารณาโครงสร้างอาร์ช ในรูปที่ 2.5 ก ซึ่งสามารถแยกออกได้เป็น 2 รูป คือรูปที่ 2.5 ข และ 2.5 ค โดยที่รูป 2.5 ข มีลักษณะฐานยึดหมุนที่ปลาย a ส่วนที่ปลาย b เป็นฐานแบบเคลื่อนที่ได้ เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำที่จุด c ที่จุด a จะเกิดการเคลื่อนที่ตามแนวนอนเป็นระยะ u_1 มีค่าดังสมการที่ (2.7) ส่วนรูปที่ 2.5 ค สมมุติว่าที่ปลาย b มีแรงภายนอก H มากระทำตามแนวนอนและเกิดการเคลื่อนที่ที่ปลาย b เข้ามา u_2 มีค่าดังสมการที่ (2.9)



รูปที่ 2.5 แสดงการหาแรงปฏิกิริยาตามแนวนอนที่เกิดขึ้นที่ฐานของอาร์ชโค้ง

การหาค่าการเคลื่อนที่ u_1 และ u_2 พิจารณาส่วนอาร์ชโค้งที่ฐาน b ซึ่งมีฐานยึดแบบเคลื่อนที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.6

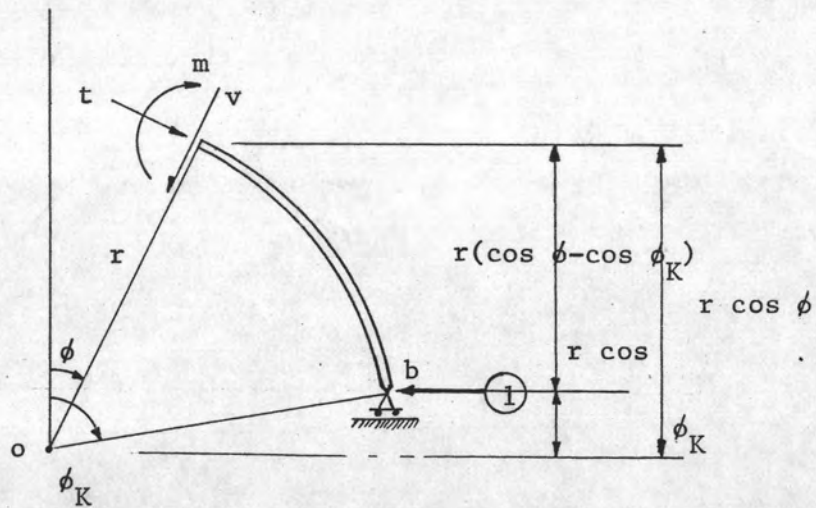


รูปที่ 2.6 แสดงการเกิดแรงปฏิกิริยาภายในของส่วนต่าง ๆ ของอาร์ชโค้ง

เนื่องจากอาร์ชโค้ง ในรูปที่ 2.6 จะมีแรงปฏิกิริยาที่ฐาน b ในแนวตั้งมีค่า R และ สามารถหาค่าโมเมนต์ที่หน้าตัดใด ๆ ได้โดยที่

$$\begin{aligned} M\phi &= Rr(\sin \phi_K - \sin \phi) - \int_{\phi}^{\phi_K} wrd\theta \cdot r(\sin \theta - \sin \phi) \\ &= Rr(\sin \phi_K - \sin \phi) - wr^2 | -\cos \theta - \theta \sin \theta |_{\phi}^{\phi_K} \\ &= Rr(\sin \phi_K - \sin \phi) - wr^2 (-\cos \phi_K + \cos \phi - \phi_K \sin \phi + \phi \sin \phi) \dots (2.4) \end{aligned}$$

ใช้ CASTIGLIANO'S THEOREM ทหาระยะการเคลื่อนที่ u_1 ที่ฐาน b โดยให้แรง 1 หน่วยกระทำที่ฐาน b ดังแสดงในรูปที่ (2.7) จากนั้นก็คำนวณหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้น โดยไม่นำค่าแรงเฉือน V และแรงตามแนวแกน T มาพิจารณาเพราะถือว่ามีผลน้อยมาก



รูปที่ 2.7 แสดงการทหาระยะการเคลื่อนที่ของฐาน เมื่อมีแรง 1 หน่วยกระทำ

$$m = lxr(\cos \phi - \cos \phi_K) \dots \dots \dots (2.5)$$

$$u_1 = \frac{\int mMdx}{EI} = \frac{\int mMrd\phi}{EI} \dots \dots \dots (2.6)$$

แทนค่าสมการ (2.4) และ (2.5) ลงในสมการที่ (2.6) จะได้ค่า u_1

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{2}{EI} \left| \int_0^{\phi_K} Rr(\sin \phi_K - \sin \phi) \cdot r(\cos \phi - \cos \phi_K) r d\phi - \int_0^{\phi_K} wr^2(-\cos \phi_K + \right. \\
 &\quad \left. \cos \phi - \phi_K \sin \phi + \phi \sin \phi) \cdot r(\cos \phi - \cos \phi_K) r d\theta \right| \\
 &= \frac{2Rr^3}{EI} \left| \sin^2 \phi_K - \frac{\cos^2 \phi_K}{2} + \cos \phi_K - \frac{1}{2} - \phi_K \sin \phi_K \cos \phi_K \right| \\
 &\quad \left. - \frac{2wr^4}{EI} \left| \frac{\phi_K}{4} - \frac{9}{4} \sin \phi_K \cos \phi_K + \phi_K \cos \phi_K (\cos \phi_K + 1) \right| \dots (2.7)
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาระยะการเคลื่อนที่ u_2 ที่ฐาน b เนื่องจากโมเมนต์ m

ได้ดังนี้

$$Hu_2 = H \int \frac{m^2}{EI} dx = H \int \frac{m^2 r}{EI} d\phi \dots (2.8)$$

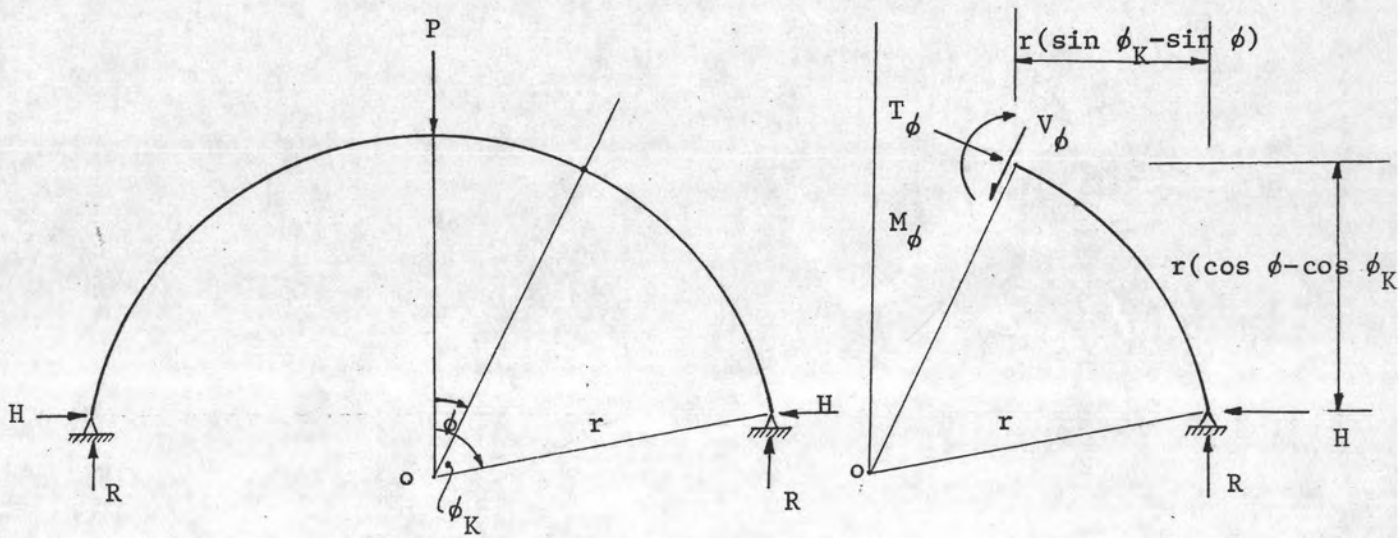
แทนค่าสมการ (2.5) ลงในสมการที่ (2.8) จะได้ค่า u_2

$$\begin{aligned}
 Hu_2 &= \frac{2H}{EI} \int_0^{\phi_K} r^3 (\cos \phi - \cos \phi_K)^2 d\phi \\
 &= \frac{2Hr^3}{EI} \left| \frac{\phi_K}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi_K - 2 \cos \phi_K \sin \phi_K + \phi_K \cos^2 \phi_K \right| \dots (2.9)
 \end{aligned}$$

เนื่องจากที่ฐาน b ในรูปที่ 2.5 ก) มีลักษณะเป็นฐานรองรับแบบจุดยึดคทมนจึงไม่มีการเคลื่อนที่เกิดขึ้น ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 u_1 + Hu_2 &= 0 \\
 H &= \frac{u_1}{u_2} \dots (2.10)
 \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (2.7) และ (2.9) ลงในสมการที่ (2.10) ก็จะสามารถหาค่า H ได้ จากรูปที่ 2.8 เมื่อหาค่าแรงปฏิกิริยาภายนอกที่เกิดขึ้นเมื่ออาร์ชโค้งมีน้ำหนักบรรทุกภายนอกกระทำได้แล้ว ก็สามารถที่จะหาค่าแรงปฏิกิริยาภายในต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นได้ดังสมการที่ (2.11), (2.12) และ (2.13)



รูปที่ 2.8) แสดงการเกิดแรงปฏิกิริยาภายในของอาร์ชโค้ง

$$M_\phi = Rr(\sin \phi_K - \sin \phi) - Hr(\cos \phi - \cos \phi_K) - wr^2(\cos \phi - \cos \phi_K - \phi_K \sin \phi + \phi \sin \phi) \dots\dots\dots (2.11)$$

$$T_\phi = R \sin \phi + H \cos \phi - wr(\phi_K - \phi) \sin \phi \dots\dots\dots (2.12)$$

$$V_\phi = R \cos \phi + H \sin \phi - wr(\phi_K - \phi) \cos \phi \dots\dots\dots (2.13)$$

การหาระยะโค้งของอาร์ชโค้ง

การหาระยะโค้งของอาร์ชโค้ง ทำได้โดยใช้ทฤษฎี CASTIGLIANO'S THEOREM โดยที่เมื่อต้องการหาระยะโค้งตามทิศทางใดก็สมมติให้แรงภายนอก \$P\$ มากระทำที่จุดและทิศทางที่ต้องการหาซึ่งก็จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.14)

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P_n} \dots\dots\dots (2.14)$$

โดยที่ U เป็นพลังงานภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากโมเมนต์คด แรงเฉือนและแรงในแนวแกน

สำหรับกรณีอาร์ชโค้งนี้ถือว่า ค่าแรงเฉือนและแรงตามแนวแกนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าของโมเมนต์คด ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.15)

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\phi_K} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} r d\theta \dots\dots\dots (2.15)$$

ดังนั้น เมื่อนำเอาคอนกรีตเสริมใยแก้วมาทดลองทำเป็นแผ่นหลังคาอาร์ชบางโค้งรูปทรงกระบอก แล้วใช้ทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นมาเปรียบเทียบกับ การทดลองจริง ก็จะสามารถหาค่าความเครียดและระยะโก่งตัวได้ แต่เนื่องจากการหาระยะโก่งตัวนั้นค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียในช่วงอีลาสติกจะคงที่ ส่วนในช่วงอินอีลาสติก ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียจะลดลง เนื่องจากจะเกิดการแตกร้าวในเนื้อเสริมใยแก้วส่วนที่รับแรงดึงได้แนวแกนสะเทิน ซึ่งในการหาค่าระยะโก่งตัวสามารถหาได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.15) เมื่อนำมาใช้กับอาร์ชโค้งซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นจุด จะได้ค่าระยะโก่ง

$$\Delta = C \frac{Pr^3}{EI} \dots\dots\dots (2.16)$$

โดยขณะที่คอนกรีตเสริมใยแก้วยังอยู่ในช่วงอีลาสติก การหาค่าระยะโก่งจะใช้ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียเต็มเนื้อที่หน้าตัด สามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะสมการที่ (2.16) ได้นั้นคือ

$$I_g = \frac{bd^3}{12} \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\Delta = C \frac{Pr^3}{EI_g} \dots\dots\dots (2.18)$$

แต่ขณะที่คอนกรีตเสริมใยแก้วอยู่ในช่วงอินอีลาสติก คอนกรีตเสริมใยแก้วส่วนที่รับแรงดึงได้แนวแกนสะเทินจะเกิดการแตกร้าว ทำให้เนื้อที่หน้าตัดลดน้อยลง ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียก็จะลดลงเรื่อย ๆ ในขณะที่น้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้น ดังนั้นในการหาค่าระยะโก่งก็จะทำได้โดยใช้ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียประสิทธิผล⁸ ตามที่กำหนดโดย ACI (1971) นั่นคือ

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3 |I_g + 1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3| I_{cr} < I_g \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

$$\Delta = C \frac{Pr^3}{EI_e} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

ในการหาค่า I_e นั้นสมมุติว่าเนื้อที่หน้าตัดของอาร์ชส่วนที่รับแรงอัด เทียบแนวแกนสะเทินทั้งหมดและส่วนที่รับแรงดึงได้แนวแกนสะเทินซึ่งมีค่าความเครียดน้อยกว่าค่าความเครียดที่จะทำให้เนื้อคอนกรีตเกิดการแตกร้าวอยู่ในช่วงอีลาสติกซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเครียด ส่วนบริเวณที่รับแรงดึงที่เหลืออยู่ในช่วงอินอีลาสติกซึ่งการกระจายของหน่วยแรงส่วนนี้จะมีค่าสม่ำเสมอตั้งแสดงในรูปที่ 2.4 ดังนั้นในการทดลองนี้การหา I_{cr} ใช้บริเวณที่อยู่ในช่วงอีลาสติกมาคำนวณ