

การประดิษฐ์และประเมินเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิด
สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

นางสาวเมธิตา จิตมานะ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2558
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Derivation and Evaluation of Closed-form Conduction Matrix
for Four-node Quadrilateral Finite Element

Miss Methisa Chitmana



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2015
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การประดิษฐ์และประเมินเมทริกซ์ของการนำความร้อนใน
รูปแบบปิด สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า
แบบสี่จุดต่อ

โดย

นางสาวเมธิศา จิตมานะ

สาขาวิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เลิศนุวัฒน์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร. ปริญญา บุญมาเลิศ)

เมธิตา จิตมานะ : การประดิษฐ์และประเมินเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิดสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ (Derivation and Evaluation of Closed-form Conduction Matrix for Four-node Quadrilateral Finite Element) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 101 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติโดยใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ความยากลำบากในการวิเคราะห์ปัญหาที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าอยู่ที่การสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนเพราะเป็นเมทริกซ์ที่มีความซับซ้อน วิธีที่ใช้กันในปัจจุบันคือการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยการประยุกต์สูตรของเกาส์-เลอจองด์ ผลจากการอินทิเกรตเป็นค่าโดยประมาณส่งผลให้ผลลัพธ์เกิดความคลาดเคลื่อน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำเสนอการประดิษฐ์เมทริกซ์ในรูปแบบปิด (closed-form) ซึ่งให้ผลลัพธ์อย่างถูกต้องสมบูรณ์ด้วยการใช้โปรแกรมด้านคณิตศาสตร์สัญลักษณ์คือโปรแกรมแมทแลบ (MATLAB) ควบคู่ไปกับแมทมาทิกา (Mathematica) พร้อมกับการสังเกตความสัมพันธ์ของพจน์ต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ของเมทริกซ์ในรูปแบบปิดท้ายสุด

เมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นี้ได้นำมาเขียนขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ โปรแกรมได้ตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงและเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้วิธีที่ใช้กันในปัจจุบัน พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีรูปแบบปิดนั้นมีความแม่นยำสูงกว่าและใช้เวลาคำนวณที่น้อยกว่า โดยเฉพาะเมื่อเอลิเมนต์ในโมเดลนั้นมีรูปร่างใด ๆ โดยทั่วไป

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก

ปีการศึกษา 2558

5670347221 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: FINITE ELEMENT / CONDUCTION MATRIX / FOUR-NODE QUADRILATERAL /
CLOSED-FORM EXPRESSIONS

METHISA CHITMANA: Derivation and Evaluation of Closed-form Conduction Matrix for Four-node Quadrilateral Finite Element. ADVISOR: PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 101 pp.

In this thesis, the finite element method for analyzing two-dimensional heat conduction problems using the quadrilateral elements is presented. In the conventional finite element method, numerical integration is always used to derive the conduction matrix in the finite element equations. Accuracy of the conduction matrix thus will depend on the number of Gauss points if the Gauss-Legendre integration formula is employed. Inaccurate conduction matrix leads to solution error of the problem. This thesis presents a procedure to develop the conduction matrix in closed-form expressions so that there is no error from the integration process. The closed-form conduction matrix is derived by using both the MATLAB and Mathematica symbolic manipulation programs. External effort was also included to guide the two programs appropriately so that the final conduction matrix in closed-form expressions is achieved.

A finite element computer program with the closed-form conduction matrix is developed and verified by solving two-dimensional heat conduction problems of which their exact solutions are available. Results of the program are also compared with the results obtained from the conventional method that employs numerical integration. It has been found that the developed method with closed-form conduction matrix provides higher accuracy than the conventional method as compared to the exact solutions. Moreover, the developed method requires less computational time than the conventional method, especially when the element shape used in the model is arbitrary.

Department: Mechanical Engineering Student's Signature

Field of Study: Mechanical Engineering Advisor's Signature

Academic Year: 2015

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความรู้ คำสอนและคำแนะนำในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดแนวทางในการทำวิจัย ตลอดจนข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งในการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เลิศนุวัฒน์ ประธานกรรมการผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ กรรมการ และ ดร. ปริญญา บุญมาเลิศ กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกมหาลัย ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ทำให้วิทยานิพนธ์มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ คุณชัชชานนท์ โพธิคุณ คุณณัฐชนนท์ ประสมสุข คุณชัชวาล ศิริปฐ และคุณวิทยา สดับสาร ซึ่งเป็นพี่ ๆ ในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ ที่ได้ให้คำแนะนำในการทำวิจัยตลอดจนความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาในการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณเสริมยศ จิตมานะ และคุณนิยวรรณ จิตมานะ บิดามารดาผู้เป็นกำลังใจสำคัญ คอยให้คำปรึกษา ผลักดันและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตาบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูปภาพ.....	ฎ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ฏ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์	1
1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์	5
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	6
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์	6
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	7
บทที่ 2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	8
2.1 ความหมายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	8
2.2 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	9
2.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกราค้าง	11
2.4 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติ	12
2.5 บทสรุป	17
บทที่ 3 การหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในรูปแบบปิด.....	18
3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม.....	18

3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในพิกัดธรรมชาติ.....	19
3.3	การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยวิธีดั้งเดิม.....	23
3.4	การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยวิธีรูปแบบปิด.....	25
3.4.1	ความยากลำบากในการอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อน.....	25
3.4.2	ลักษณะของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิด.....	31
3.4.3	การตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด.....	34
3.5	บทสรุป.....	38
บทที่ 4	ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ.....	39
4.1	ลักษณะของโปรแกรม.....	39
4.1.2	ลักษณะของโปรแกรม HeatCF.....	39
4.1.2	ลักษณะของโปรแกรม HeatG.....	40
4.2	รายละเอียดของโปรแกรม.....	42
4.3	ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	42
4.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม.....	44
4.4.1	ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรมต้องการ.....	45
4.4.2	ข้อมูลที่โปรแกรม HeatCF แสดงผลทางหน้าจอ.....	46
4.4.3	ข้อมูลที่โปรแกรม HeatG แสดงผลทางหน้าจอ.....	47
4.5	บทสรุป.....	47
บทที่ 5	การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม.....	48
5.1	ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น.....	48
5.2	ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นคู่.....	50
5.3	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบมีการกำหนดอุณหภูมิและถูกหุ้มฉนวน.....	52
5.4	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	55

5.5 ปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	60
5.6 ปัญหาแผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง.....	66
5.7 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายในและผลิตความร้อนได้เอง	69
5.7.1 อุณหภูมิที่ขอบของรูกลมเป็นศูนย์.....	70
5.7.2 หุ้มฉนวนตลอดขอบของรูกลม	72
5.8 บทสรุป	74
บทที่ 6 บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ	76
6.1 บทสรุป	76
6.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์	78
6.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	79
รายการอ้างอิง	80
ภาคผนวก.....	84
ภาคผนวก ก รูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อน.....	85
ภาคผนวก ข รายละเอียดโปรแกรม.....	90
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	101

สารบัญตาราง

ตารางที่ 3.1	น้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์.....	24
ตารางที่ 5.1	ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าของปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น.....	50
ตารางที่ 5.2	การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบมีการกำหนดอุณหภูมิและถูกหุ้มฉนวน.....	54
ตารางที่ 5.3	ผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าและการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	58
ตารางที่ 5.4	การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	60
ตารางที่ 5.5	ผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าและการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ของแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	62
ตารางที่ 5.6	การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	65
ตารางที่ 5.7	การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของแผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง.....	68
ตารางที่ 5.8	เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายในและผลิตความร้อนได้เอง.....	74

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ 2.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ	8
รูปที่ 2.2 การนำความร้อนในแผ่นโลหะที่ผลิตความร้อนได้เอง	12
รูปที่ 2.3 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนไหลเข้า	13
รูปที่ 2.4 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน	14
รูปที่ 3.1 การกระจายของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	19
รูปที่ 3.2 การแปลงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าไปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	20
รูปที่ 3.3 โปรแกรมแมทแลบสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน	26
รูปที่ 3.4 ผลการรันจากโปรแกรมแมทแลบสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน ..	26
รูปที่ 3.5 โปรแกรมแมทมาทิกาสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน	27
รูปที่ 3.6 ผลการรันจากโปรแกรมแมทมาทิกาสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน.....	27
รูปที่ 3.7 การคำนวณเมทริกซ์ [I] โดยโปรแกรมแมทมาทิกา	28
รูปที่ 3.8 การคำนวณเมทริกซ์ [I] โดยโปรแกรมแมทแลบ	28
รูปที่ 3.9 ผลการอินทิเกรตสมการ (3.29) โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ	30
รูปที่ 3.10 ผลการอินทิเกรตสมการ (3.29) โดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกา	30
รูปที่ 3.11 เอลิเมนต์ที่ด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 3 และ 4	32
รูปที่ 3.12 เอลิเมนต์ที่ด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 4 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 2 และ 3	33
รูปที่ 3.13 เอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกัน 2 คู่.....	33
รูปที่ 3.14 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่ใช้ตรวจสอบประสิทธิภาพในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนด้วยวิธีรูปแบบปิด.....	35
รูปที่ 3.15 เปรอ์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของเอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมเทียบกับวิธีรูปแบบปิด.....	36

รูปที่ 3.16 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์และเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในแต่ละวิธี.....	37
รูปที่ 4.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม HeatCF.....	41
รูปที่ 4.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม HeatG.....	42
รูปที่ 4.3 ปัญหาตัวอย่างลักษณะข้อมูลนำเข้า	44
รูปที่ 4.4 การแบ่งเอลิเมนต์สำหรับปัญหาตัวอย่างลักษณะข้อมูลนำเข้า.....	45
รูปที่ 5.1 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น	48
รูปที่ 5.2 จุดต่อบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า	49
รูปที่ 5.3 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ	49
รูปที่ 5.4 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นคู่.....	50
รูปที่ 5.5 จุดต่อบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัส	51
รูปที่ 5.6 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ	51
รูปที่ 5.7 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดอุณหภูมิที่ขอบและถูกหุ้มฉนวน	52
รูปที่ 5.8 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า	53
รูปที่ 5.9 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ	53
รูปที่ 5.10 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$	54
รูปที่ 5.11 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	55
รูปที่ 5.12 การแบ่งเอลิเมนต์แบบหยาบสำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เอง	56
รูปที่ 5.13 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ	57
รูปที่ 5.14 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$	57
รูปที่ 5.15 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนได้เองแบบละเอียด.....	58
รูปที่ 5.16 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ	59
รูปที่ 5.17 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$	59

รูปที่ 5.18 แผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง60

รูปที่ 5.19 การแบ่งเอลิเมนต์แบบหยาบสำหรับปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง....61

รูปที่ 5.20 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ61

รูปที่ 5.21 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 62

รูปที่ 5.22 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสามเหลี่ยม.....63

รูปที่ 5.23 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ64

รูปที่ 5.24 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 65

รูปที่ 5.25 แผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง66

รูปที่ 5.26 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของครึ่งขวบนของแผ่นวงกลม67

รูปที่ 5.27 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ67

รูปที่ 5.28 การกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีที่ $y = 0$ 68

รูปที่ 5.29 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายใน69

รูปที่ 5.30 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายใน70

รูปที่ 5.31 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ71

รูปที่ 5.32 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y = 3$ 72

รูปที่ 5.33 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ73

รูปที่ 5.34 กราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y = 3$ 74

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่
a	จำนวนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์, จำนวนจุดต่อ
B	เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความชันของอุณหภูมิกับค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อ
e	พจน์ที่เกี่ยวข้องกับเอลิเมนต์
F	โหนดที่จุดต่อของเอลิเมนต์
f	ฟังก์ชันใด ๆ
h	ค่าสัมประสิทธิ์ของการพาความร้อน
I	ค่าอินทิกรัล
I_{ij}	สมาชิกแถว i หลัก j ในเมทริกซ์ของการนำความร้อนก่อนอินทิเกรต
\hat{i}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x
\hat{j}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y
J	เมทริกซ์แบบจาโคเบียน
K	เมทริกซ์ของความแข็งแกร่ง, สมาชิกในเมทริกซ์ของการนำความร้อน
K_c	เมทริกซ์ของการนำความร้อน
K_h	เมทริกซ์ของการพาความร้อน
k	ค่าสัมประสิทธิ์ของการนำความร้อน
k_x	ค่าสัมประสิทธิ์ของการนำความร้อนในแนวแกน x
k_y	ค่าสัมประสิทธิ์ของการนำความร้อนในแนวแกน y
L	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
NG	จำนวนของจุดเกาส์
N_i	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
\hat{N}_i	ฟังก์ชันพื้นฐาน
n_x	ทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x
n_y	ทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y
\hat{n}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
Q	อัตราความร้อนที่ผลิตได้เอง
Q_0	โหนดเวกเตอร์ความร้อนผลิตเอง
Q_q	โหนดเวกเตอร์ความร้อนที่กำหนดให้

Q_h	โพลตเวกเตอร์การพาความร้อน
Q_c	โพลตเวกเตอร์การนำความร้อน
q	ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
q_s	ปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าขอบเขต
R	เศษตกค้าง
S_1	ขอบเขตที่กำหนดอุณหภูมิ
S_2	ขอบเขตที่มีความร้อนไหลเข้า
S_3	ขอบเขตที่มีการพาความร้อน
T	อุณหภูมิ
T_∞	อุณหภูมิของอากาศรอบนอก
t	ความหนาของเอลิเมนต์
W_i	ค่าน้ำหนัก
x	ระยะในแนวแกน x
y	ระยะในแนวแกน y
Ω	โดเมนของการคำนวณ
$\Omega^{(e)}$	โดเมนของเอลิเมนต์
Γ	ขอบเขตของการคำนวณ
$\Gamma^{(e)}$	ขอบเขตของเอลิเมนต์
$\bar{\phi}$	ตัวแปรตามแม่นยำ
ϕ	ตัวแปรตามไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์
ξ_i	ตำแหน่งของจุดเกาส์
ξ	แกนนอนในพิกัดธรรมชาติ
η	แกนตั้งในพิกัดธรรมชาติ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปรากฏการณ์ส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นรอบตัวสามารถอธิบายได้โดยกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์และทำการประดิษฐ์ขึ้นในลักษณะของสมการต่าง ๆ ซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (integral equations) เป็นต้น ในการวิเคราะห์ปัญหาใดปัญหาหนึ่งนั้นสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตโดยใช้ระเบียบวิธีวิเคราะห์ (analytical method) แต่ในทางปฏิบัติที่รูปร่างของปัญหามีความซับซ้อนทำให้การคำนวณหาผลเฉลยแม่นยำตรงทำได้ยากหรืออาจจะไม่สามารถหาได้ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ของปัญหาต่าง ๆ ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงแม้ว่าปัญหาจะมีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อนทำให้การวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ สะดวกยิ่งขึ้น [1]

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ เนื่องจากปัญหาด้านการนำความร้อนมีตัวไม่รู้ค่าที่ต้องการคำนวณหาคืออุณหภูมิเพียงอย่างเดียว และการกระจายของอุณหภูมิที่ต้องการนั้นสามารถหาได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบง่ายเพียงสมการเดียว รวมทั้งผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นนั้นสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดยไม่ยากเมื่อเปรียบเทียบกับ การวิเคราะห์ปัญหาทางด้านอื่น ด้วยเหตุนี้ปัญหาการนำความร้อนจึงเหมาะแก่การนำมาวิเคราะห์เพื่อหาวิธีคิดที่นำไปสู่คำตอบในรูปแบบปิด (closed form) และยิ่งเหมาะกับการนำไปเปรียบเทียบกับ การวิเคราะห์วิธีอื่น ๆ อีกด้วย

ในปัญหาสองมิติโดยทั่วไปสามารถแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ได้ 2 รูปแบบ นั่นคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element) และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (quadrilateral element) โดยสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น สามารถอินทิเกรตหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนซึ่งอยู่ในรูปแบบปิดได้โดยง่าย แต่ผลที่ได้จะแสดงลักษณะของการกระจายของผลเฉลยไม่สมจริงเท่า เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมเมื่อเปรียบเทียบภายใต้จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน เนื่องจากเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมใช้การสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นแบบเชิงเส้นหรือมีลักษณะเป็นแผ่นเรียบ (flat plane) ส่วนเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมใช้การสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) มีลักษณะโค้งมนบนเอลิเมนต์ซึ่งมีอันดับขั้นของการกระจายของผลเฉลยที่สูงกว่า

อย่างไรก็ตาม ในการหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ากันทำได้โดยยาก เนื่องจากสมการติดอยู่ในรูปแบบการอินทิเกรตที่ยุ่งยากซับซ้อน ต้องแปลง (transform)

รูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้ไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ [2] แล้วจึงใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre integration formulas) เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลย ผลการอินทิเกรตที่ได้จะแม่นยำมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันที่อินทิเกรตและจำนวนของจุดเกาส์ (Gauss points) ที่ใช้ในการอินทิเกรต ซึ่งในบางปัญหาหากต้องการผลเฉลยที่แม่นยำสูงต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ ซึ่งมีผลทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น

จะเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนของการวิเคราะห์ปัญหาทางความร้อนโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเกิดจากสองขั้นตอนคือ ขั้นตอนในการแบ่งรูปร่างของปัญหาให้ใกล้เคียงกับปัญหาจริงมากที่สุด และขั้นตอนของการอินทิเกรตหาเมทริกซ์ของการนำความร้อน ที่ผ่านมาจึงได้มีผู้เสนอแนวคิดต่าง ๆ เพื่อให้การคำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนนั้นมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น โดยการปรับปรุงให้การอินทิเกรตหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนได้ค่าที่แม่นยำขึ้น หรือพยายามลดเวลาในการคำนวณลง

วิทยานิพนธ์นี้จึงได้เสนอเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่อยู่ในรูปแบบปิดสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ โดยได้ใช้โปรแกรมแมทแลบ (MATLAB) และโปรแกรมแมทมาทิกา (Mathematica) ซึ่งเป็นโปรแกรมทางด้าน การคำนวณและคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (computational and symbolic mathematics program) ในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม โดยทำการเปรียบเทียบความแม่นยำและเวลาที่ใช้คำนวณกับวิธีการคำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนแบบดั้งเดิมซึ่งมีการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre integration formulas) ที่ 2×2 จุดเกาส์

1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง

ในอดีตได้มีผู้เสนอแนวคิดในการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยมี 2 แนวคิดหลักคือ เพื่อให้การอินทิเกรตทำได้รวดเร็วขึ้นและเพื่อให้ผลการอินทิเกรตมีความแม่นยำมากขึ้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

แนวคิดหลักในการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้นคือพยายามหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบดั้งเดิมซึ่งมีการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ความแม่นยำจะขึ้นอยู่กับจำนวนจุดเกาส์ โดยในปี 1980 Okabe [3] ได้เสนอแนวทางการประดิษฐ์สมการแบบชัดแจ้ง (explicit form) ของการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่เป็นไอโซพารามเมทริกซ์เอลิเมนต์ ซึ่งเน้นการจัดรูปจาโคเบียนเมทริกซ์แต่สามารถใช้ได้กับสี่เหลี่ยมในบางรูปแบบเท่านั้น

หลังจากนั้นในปี 1984 Babu และ Pinder [4] ได้นำสมการจาก Okabe มาปรับปรุงแล้ว เสนอรูปแบบที่ใช้ในการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมบางรูปแบบที่สร้างขึ้นภายในวงกลม โดยลดความซับซ้อนของสมการที่มีฟังก์ชันลอการิทึมลง พบว่าใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการอินทิเกรตเชิงตัวเลขซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ และยังให้ความแม่นยำที่สูงกว่า

ในปี 1986 Mizukami [5] ได้เสนอสมการการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนลดน้อยลงอีก ซึ่งพบว่าใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข แต่ไม่ได้แสดงผลการเปรียบเทียบใด ๆ โดยสมการประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมมติฐานของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่เมื่อนำไปใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ผลลัพธ์ที่ได้บางกรณีให้ค่าที่เที่ยงตรงแต่บางกรณีก็ให้เป็นค่าประมาณ

จากนั้นในปี 1987 Rathod [6] ได้เสนอการประดิษฐ์สมการในการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งได้จัดรูปฟังก์ชันการประมาณค่าที่จุดต่อ แล้วจึงจัดกลุ่มเป็น 4 กลุ่มก่อนทำการอินทิเกรต ซึ่งขั้นตอนและสมการมีความซับซ้อนมาก โดยในบางกรณีให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 6×6 จุดเกาส์และใช้เวลาคำนวณน้อยกว่า

ในปี 1989 Kikuchi [7] ได้เสนอแนวทางการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อโดยนำโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์มาใช้คำนวณ เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากกว่าแต่ใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า โดยไม่ได้แสดงสมการทั่วไปของการอินทิเกรตเนื่องจากสมการที่ได้มีความยาวและซับซ้อนมากไม่สามารถแสดงผลออกมาได้

ในปี 1996 Videla และคณะ [8] ได้เสนอวิธีการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อโดยใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการอินทิเกรต โดยลดเวลาการคำนวณไป 64% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ และ 166% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 3×3 จุดเกาส์ อย่างไรก็ตามสมการที่ได้นำเสนอยังติดอยู่ในรูปการอินทิเกรตที่ต้องอาศัยโปรแกรมช่วยในการคำนวณและไม่สามารถแสดงผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบปิดได้

จากนั้นในปี 2001 Rathod และ Islam [9] ก็ได้เสนอการประดิษฐ์สมการที่ใช้อินทิเกรตเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยการแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสามรูปก่อน แล้วจัดรูปก่อนทำการอินทิเกรตทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรง อย่างไรก็ตามค่าที่ได้จากการคำนวณเป็นค่าของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมรวมซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสามรูป ไม่สามารถแยกออกมาเป็นค่าของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ารูปเดียวได้

ในปี 2006 Dasgupta [10] ได้เสนอการแปลงฟังก์ชันสัญญาณ (shape function) ของเอลิเมนต์ใด ๆ ซึ่งจะทำให้ได้ฟังก์ชันสัญญาณที่เหมาะสมที่จะทำให้ได้ค่าอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น โดยใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการได้มาซึ่งสมการรูปแบบปิดของการแปลงฟังก์ชันสัญญาณ หลังจากนั้นในปี 2008 Dasgupta [11] ได้นำหลักการแปลงฟังก์ชันสัญญาณที่ได้เคยเสนอไว้มาประยุกต์ใช้กับการอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น โดยเมื่อแปลงฟังก์ชันสัญญาณก่อนนำไปอินทิเกรตและประกอบกับการใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ทำให้สามารถจัดรูปเป็นสูตรการหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ติดในรูปการอินทิเกรตที่ง่ายขึ้น

หลังจากนั้นในปี 2008 Videla และคณะ [12] ได้พัฒนาวิธีที่เคยเสนอไว้ในปี 1996 เพื่อประยุกต์ใช้กับการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 8 จุดต่อ ซึ่งลดเวลาในการคำนวณได้ถึง 50%

นอกจากนี้ ได้มีการประยุกต์ใช้วิธีพลักซ์ซึ่งสามารถทำให้สมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์แปลงมาอยู่ในรูปแบบปิด โดยแนวคิดเริ่มต้นมาจากระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คินที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสมการการพาซึ่งเสนอโดย Donea [13] ในปี 1984 จากนั้นในปี 1985 Bey และคณะ [14] ได้ประยุกต์ใช้วิธีพลักซ์เพื่อคำนวณปัญหาการไหลแบบไม่หนืด โดยจัดสมการที่เกี่ยวข้องกับการไหลให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ และในปี 1986 Thornton และ Dechaumphai [15] ได้นำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาความร้อนกับโครงสร้างแบบไม่เชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลาสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ซึ่งพบว่าช่วยลดเวลาในการคำนวณประมาณ 50% วิธีนี้จึงถูกนำไปประยุกต์ใช้กับอีกหลายปัญหาดังแสดงไว้ในรายการอ้างอิง [16-18] อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าการประยุกต์ใช้วิธีพลักซ์นั้น จะสามารถหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขและทำให้ได้สมการที่ไม่ซับซ้อน ลดเวลาในการคำนวณ แต่ผลลัพธ์ที่ได้ก็ยังคงมีความคลาดเคลื่อน

นอกจากนี้ ยังมีแนวคิดเกี่ยวกับการลดเวลาในการคำนวณแต่ไม่ได้เพิ่มความแม่นยำ โดยในปี 1990 Yagawa และคณะ [19] ก็ได้เสนอการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์และที่ 3×3 จุดเกาส์ โดยได้มีการจัดรูปสมการเพื่อให้ง่ายต่อการอินทิเกรต โดยใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยจัดรูปและอินทิเกรต ซึ่งทำให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง โดยเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการคำนวณโดยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์แบบดั้งเดิม สำหรับที่ 2×2 จุดเกาส์ ใช้เวลาในการคำนวณเพียง 46% เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิม และที่ 3×3 จุดเกาส์ ใช้เวลาในการคำนวณเพียง 28% เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิม

จากนั้นในปี 1994 Griffiths [20] ได้เสนอสูตรการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อซึ่งอยู่ในรูปแบบปิด โดยสังเกตความสัมพันธ์จากผลลัพธ์ของเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้จากการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อโดยการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ ซึ่งมีการแบ่งการคำนวณออกเป็น 6 กลุ่ม ทำให้ง่ายต่อการนำไปประดิษฐ์โปรแกรมและใช้เวลาคำนวณน้อยกว่าการอินทิเกรตตามขั้นตอนดั้งเดิมถึง 2-4 เท่า

ถึงแม้ว่าวิธีของ Griffiths จะได้ความแม่นยำเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ แต่วิธีนี้ก็ได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก สังเกตได้จากมีผู้นำไปปรับปรุงต่อยอดเป็นจำนวนมาก ดังเช่น ในปี 2006 Lozada และ Osorio [21] ได้นำวิธีนี้ไปประยุกต์เพื่อประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบ 8 จุดต่อ ซึ่งพบว่าช่วยลดเวลาการคำนวณไปสูงสุด 37% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์แบบดั้งเดิม ในปี 2006 Zhou และ Vecchio [22] ทำการปรับปรุงโดยการจัดรูปสมการใหม่ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน แต่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของ Griffiths หลังจากนั้นปี 2010 Lozada [23] ได้ปรับปรุงวิธีคำนวณอีกครั้ง ทำให้สามารถประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบ 8 จุดต่อ ที่ลดเวลาการคำนวณไปสูงสุด 50% เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

นอกจากนี้ ในปี 2011 Islam และ Saha [24] ได้นำเสนอสมการรูปแบบปิดที่ใช้ในการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อโดยการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ โดยแบ่งกลุ่มในการคำนวณออกเป็นสองกลุ่มใหญ่ ๆ แล้วนำโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์มาช่วยในการคำนวณ ซึ่งความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้และเวลาที่ใช้ในการคำนวณขึ้นอยู่กับจำนวนจุดเกาส์ที่เลือก ซึ่งใช้เวลาคำนวณลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิมแต่ความแม่นยำเท่าเดิม

ถึงแม้ว่าในอดีตมีงานวิจัยหลายงานที่ศึกษาการประดิษฐ์สมการจากการอินทิเกรตโดยตรง แต่ก็ไม่สามารถนำเสนอเป็นสมการรูปแบบปิดได้อย่างชัดเจน โดยตัวสมการยังประกอบอยู่ในรูปของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่ยาวและมีความซับซ้อนมาก

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.3.2 ศึกษาการใช้โปรแกรมทางด้านกรคำนวณและคณิตศาสตร์สัญลักษณ์เพื่อให้ได้มาซึ่งเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าในรูปแบบปิด

1.3.3 ศึกษาและเปรียบเทียบการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่อยู่ในรูปแบบปิดและวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ในเรื่องของความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

1.3.4 ได้มาซึ่งรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.4.1 ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนที่อยู่ในรูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

1.4.2 ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ

1.4.3 เปรียบเทียบความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนระหว่างการในรูปแบบปิดและการใช้วิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

1.4.4 วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.5.1 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องสำหรับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาการถ่ายเทความร้อน

1.5.2 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

1.5.3 ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ใช้วิธีดั้งเดิมซึ่งมีการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ เพื่อใช้เปรียบเทียบคำตอบ

1.5.4 คำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่อยู่ในรูปแบบปิดโดยใช้โปรแกรมแมทแลบ (MATLAB) และโปรแกรมแมทมาทิกา (Mathematica) ช่วยในการอินทิเกรตและจัดรูปสมการ

1.5.5 เปรียบเทียบความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนระหว่างการในรูปแบบปิดและการใช้วิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

1.5.6 ประยุกต์ใช้เมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ได้จากสมการที่อยู่ในรูปแบบปิดกับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง

1.5.7 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

1.5.8 วิเคราะห์ สรุปผลการวิจัย และจัดพิมพ์วิทยานิพนธ์

1.5.9 สอบวิทยานิพนธ์

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ได้รับความรู้และมีความเข้าใจในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

1.6.2 ได้พัฒนาทักษะในการนำโปรแกรมแมทแลบ (MATLAB) และโปรแกรมแมทมาทิกา (Mathematica) ไปใช้ในการเขียนโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.6.3 ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบปิดสามารถนำไปใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนสำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่ต้องการความแม่นยำสูง

1.6.4 เป็นแนวทางในการศึกษาเพื่อพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไปในอนาคต

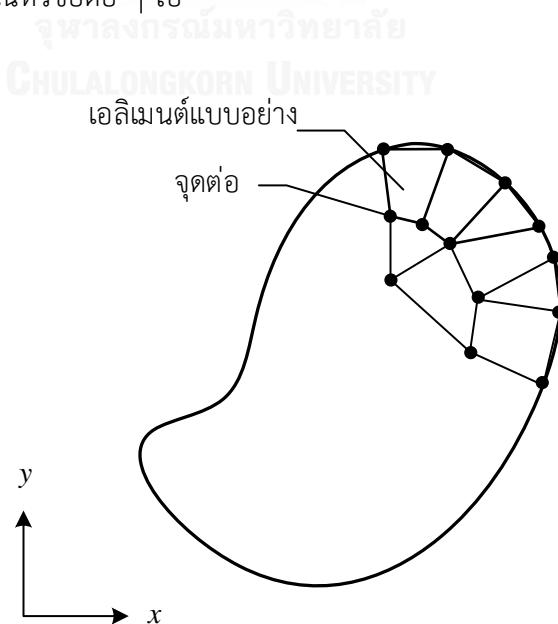
บทที่ 2

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาโดยการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน ในบทนี้จึงเริ่มจากอธิบายถึงความหมายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะอธิบายรายละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน และสุดท้ายจะเป็นการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติซึ่งจะได้นำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติต่อไป

2.1 ความหมายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณของปัญหาโดยแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (elements) เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (nodes) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าตัวแปรตาม (dependent variables) ที่ต้องการ หลักการเริ่มจากการพิจารณาสร้างสมการที่สอดคล้องกับปัญหาสำหรับแต่ละเอลิเมนต์แล้วจึงนำสมการจากทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกัน ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตและทำการแก้ทั้งระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหา ซึ่งจะได้แสดงรายละเอียดไว้ในหัวข้อต่อไป



รูปที่ 2.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

2.2 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

สำหรับปัญหาในสองมิติโดยทั่วไปสามารถแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ได้ 2 รูปแบบ ได้แก่ เอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจะทำให้ได้รูปร่างที่ถูกต้องใกล้เคียงกับปัญหาจริงมากที่สุด ดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 1 จากนั้นจึงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$L(\bar{\phi}) = 0 \quad (2.1)$$

โดย L คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)

$\bar{\phi}$ คือตัวแปรตามแน่นอนตรง

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ในแต่ละเอลิเมนต์จะประกอบไปด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่ตั้งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_i สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ จะประกอบด้วย 4 จุดต่อ ($i = 1, 2, 3, 4$) และสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อคือค่าของอุณหภูมิ ซึ่งลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ คือ

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 + N_4(x, y)\phi_4 \quad (2.2)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \{ \phi \}_{(4 \times 1)} \quad (2.3)$$

โดย $[N]$ คือเมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

โดยขั้นตอนการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าได้แสดงไว้ในหัวข้อ 3.2

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations)
สำหรับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}}_e \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}}_e = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}}_e \quad (2.4)$$

เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์

ซึ่งการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการตรง (direct approach) ซึ่งเหมาะกับปัญหาในหนึ่งมิติ
- ข. วิธีการแปรผัน (variational approach) เป็นระเบียบวิธีที่นิยมกันในยุคแรกเพื่อเน้นวิเคราะห์ปัญหาทางด้านโครงสร้าง โดยมีหลักการสำคัญคือต้องหาหรือสร้างฟังก์ชันซึ่งเมื่อทำการหาค่าต่ำสุด (minimization) ของฟังก์ชันนั้นแล้ว ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมในการนำไปใช้สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทั่วไปเนื่องจากสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยการใช้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง ไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ โดยได้อธิบายหลักการไว้ในหัวข้อ 2.3

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$[K]_{sys} \{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \quad (2.5)$$

โดย $[K]$ คือเมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (stiffness matrix)
 $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ
 $\{F\}$ คือโหลดเวกเตอร์ที่จุดต่อ (load vector)
 ดัชนีล่าง (subscript) sys แทนคำว่า system ซึ่งหมายถึงระบบสมการรวม

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม (2.5) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหา $\{\phi\}_{sys}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถนำมาใช้เพื่อหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ เป็นต้น

2.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ซึ่งเหมาะสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยการใช้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยมีหลักการดังนี้ [25]

ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างใช้หลักการแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (2.3) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) ซึ่งจะพบว่า $L(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะมีค่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นหรือเศษตกค้าง (residual) นั่นคือ

$$R = L(\phi) = L([N]\{\phi\}) = L\left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i\right) \quad (2.6)$$

โดย R คือเศษตกค้าง

m คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์

โดยจะใช้วิธีกาลูร์คิน (Galerkin) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างที่ช่วยลดความผิดพลาดให้เกิดน้อยที่สุด

วิธีกาลูร์คิน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้นแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^1 W_i R d\Omega = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

ซึ่งปกติจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเป็นแบบบับโนฟ-กาลูร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 2 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) โดยแทนสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.7) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i L\left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i\right) d\Omega = \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}} = 0 \quad (2.8)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, $\Omega^{(e)}$ พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$

ขั้นตอนที่ 3 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$, ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

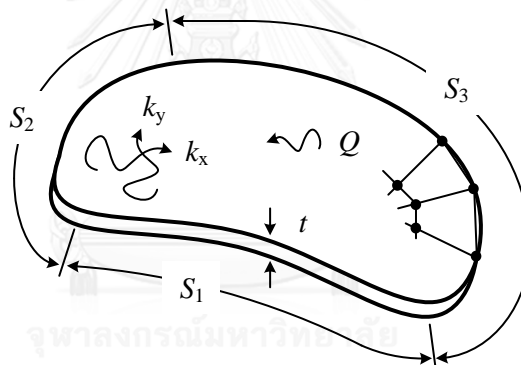
ขั้นตอนที่ 4 เขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งมีทั้งหมด a สมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.9)$$

(axa) $(ax1)$ $(ax1)$

2.4 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติ

สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่จะใช้ในการวิเคราะห์นั้นกำหนดให้เป็นปัญหาสองมิติ โดยจะคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิเนื่องจากการนำความร้อนในแผ่นโลหะที่สามารถผลิตความร้อนได้เองภายใต้สถานะคงตัว (steady state) ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การนำความร้อนในแผ่นโลหะที่ผลิตความร้อนได้เอง

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหานี้คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x A \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y A \frac{\partial T}{\partial y} \right) + QA = 0 \quad (2.10)$$

โดย k_x, k_y คือค่าสัมประสิทธิ์ของการนำความร้อนในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

Q คืออัตราความร้อนที่ผลิตได้เองต่อพื้นที่

A คือพื้นที่ของแผ่นโลหะ

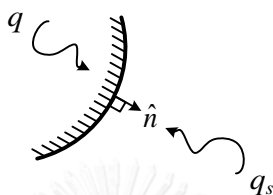
ในทางปฏิบัติค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนนี้จะไม่คงตัว โดยจะเปลี่ยนแปลงไปตามระดับของอุณหภูมิทำให้กลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

ลักษณะการกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะนี้ จะมีความซับซ้อนมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบนอกของแผ่นโลหะ ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตที่เป็นไปได้ มีดังนี้

(ก) การกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ S_1 เช่น

$$T(x, y) = T_1(x, y) \quad (2.11)$$

(ข) การกำหนดปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าตลอดขอบ S_2



รูปที่ 2.3 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนไหลเข้า

จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law)

$$q = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \quad (2.12)$$

โดย n_x และ n_y คือทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{n} ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} \quad (2.13)$$

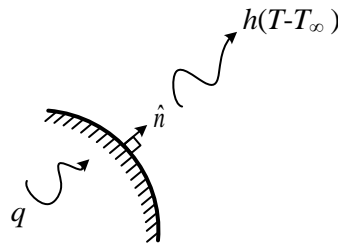
โดย \hat{i} และ \hat{j} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

กำหนดให้ปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าขอบมีเครื่องหมายเป็นบวก ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จะได้ว่า

$$q_s = -q = k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \quad (2.14)$$

โดย q_s คือปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าขอบต่อพื้นที่หนึ่งหน่วย

(ค) การพาความร้อนออกตลอดขอบ S_3



รูปที่ 2.4 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน

จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า

$$q = h(T - T_\infty) \quad (2.15)$$

โดย h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน
 T คืออุณหภูมิที่ขอบ ณ ตำแหน่งที่พิจารณา
 T_∞ คืออุณหภูมิของอากาศรอบนอก

จากสมการ (2.12) และสมการ (2.15) จะได้ว่า

$$-k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = h(T - T_\infty) \quad (2.16)$$

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย a จุดต่อ โดยระเบียบวิธี
 ถ่วงน้ำหนักเศษตค่างทำได้ดังนี้

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R \, d\Omega = 0 \quad i=1, 2, \dots, a \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right) d\Omega = 0 \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} W_i Q \, d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตทีละส่วนบนพจน์แรกของสมการ (2.19) ซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับ
 สอง โดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังนี้

$$\int_{\Omega^{(e)}} u (\nabla \cdot \vec{V}) \, d\Omega = \int_{\Gamma^{(e)}} u (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla u \cdot \vec{V}) \, d\Omega \quad (2.20)$$

เปรียบเทียบกับสมการ (2.19) กับสมการ (2.20) จะได้ว่า

$$u = W_i \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \\ \vec{V} &= k_x \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \end{aligned} \right\} (\nabla \cdot \vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \quad (2.22)$$

เนื่องจาก $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$ ดังนั้น

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \quad (2.23)$$

$$u(\vec{V} \cdot \hat{n}) = W_i \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \quad (2.24)$$

$$\nabla u = \frac{\partial W_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \hat{j} \quad (2.25)$$

$$\nabla u \cdot \vec{V} = \frac{\partial W_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.26)$$

จากนั้นให้ $W_i = N_i$ สมการ (2.19) จะกลายเป็น

$$\int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0 \quad (2.27)$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$, ด้วยเงื่อนไขขอบเขต จากสมการ (2.27) พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ก็คือพจน์แรก นั่นคือ เป็นปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทเข้าและออกตลอดขอบเขตของเอลิเมนต์ ซึ่งเอลิเมนต์อาจวางตัวอยู่กลางแผ่นโลหะหรือติดอยู่กับขอบนอกของแผ่นโลหะ หากอยู่ในตำแหน่งขอบนอกของแผ่นโลหะจะต้องแทนพจน์นี้ด้วยเงื่อนไขขอบเขตของสมการ (2.11), (2.14) หรือ (2.15) ตามความเหมาะสม ดังนั้นสมการ (2.27) สามารถเขียนเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทั่วไปที่อาจวางตัวอยู่ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนแผ่นโลหะได้ ดังนี้

$$\int_{s_2^{(e)}} N_i q_s ds - \int_{s_3^{(e)}} N_i hT ds + \int_{s_3^{(e)}} N_i hT_\infty ds + \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0 \quad i=1, 2, \dots, a \quad (2.28)$$

ซึ่งเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ ได้ว่า

$$\int_{s_2^{(e)}} \{N\} q_s ds - \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT ds + \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT_\infty ds + \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \{N\} Q d\Omega = 0 \quad (2.29)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT ds = \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} \{N\} Q d\Omega + \int_{s_2^{(e)}} \{N\} q_s ds + \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT_\infty ds \quad (2.30)$$

ในแต่ละเอลิเมนต์ สมบัติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$T = T(x, y) = \underset{(1 \times a)}{[N]} \underset{(a \times 1)}{\{T\}} \quad (2.31)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \underset{(1 \times a)}{\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]} \underset{(a \times 1)}{\{T\}} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \underset{(1 \times a)}{\left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]} \underset{(a \times 1)}{\{T\}} \quad (2.32)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงกลายเป็น

$$\underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) d\Omega}_{[K_c]_{(a \times a)}} \underbrace{\{T\}}_{(a \times 1)} + \underbrace{\int_{s_3^{(e)}} \{N\} h [N] ds}_{[K_h]_{(a \times a)}} \underbrace{\{T\}}_{(a \times 1)} = \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma}_{\{Q_c\}_{(a \times 1)}} + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \{N\} Q d\Omega}_{\{Q_Q\}_{(a \times 1)}} + \underbrace{\int_{s_2^{(e)}} \{N\} q_s ds}_{\{Q_q\}_{(a \times 1)}} + \underbrace{\int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT_\infty ds}_{\{Q_h\}_{(a \times 1)}} \quad (2.33)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$[[K_c] + [K_h]] \{T\} = \{Q_c\} + \{Q_Q\} + \{Q_q\} + \{Q_h\} \quad (2.34)$$

โดย $[K_c]$ คือเมทริกซ์ของการนำความร้อน (conduction matrix)

$[K_h]$ คือเมทริกซ์ของการพาความร้อน (convection matrix)

- $\{T\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ (vector of nodal temperature)
- $\{Q_c\}$ คือโหลดเวกเตอร์การนำความร้อน (conduction load vector)
- $\{Q_g\}$ คือโหลดเวกเตอร์ความร้อนผลิตเอง (heat generation load vector)
- $\{Q_s\}$ คือโหลดเวกเตอร์ความร้อนที่กำหนดให้ (specified heating load vector)
- $\{Q_h\}$ คือโหลดเวกเตอร์การพาความร้อน (convection load vector)

2.5 บทสรุป

ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติด้วยการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในบทนี้ได้นำเสนอขั้นตอน วิธีการ และสมการต่าง ๆ ที่ใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติเพื่อนำไปวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน ซึ่งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเมทริกซ์ต่าง ๆ ที่ซับซ้อน โดยในบทต่อไปจะได้นำเสนอวิธีการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนและการสร้างโหลดเวกเตอร์ความร้อนผลิตเอง ซึ่งจะนำเสนอทั้งวิธีดั้งเดิมที่มีการประยุกต์ใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขและวิธีใหม่ที่หลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขตลอดจนการตรวจสอบประสิทธิภาพกับวิธีดั้งเดิม

บทที่ 3

การหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในรูปแบบปิด

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ไว้ในบทที่ 2 สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีแบบสี่จุดต่อในปัญหาสองมิติ ความยากลำบากอยู่ที่การอินทิเกรตเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ต้องอินทิเกรตรอบเนื้อที่ของขอบเขตทั้งหมดของเอลิเมนต์เนื่องจากสมการมีความซับซ้อนมาก ในบทนี้จะแสดงขั้นตอนในการแปลงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในพิกัด $x-y$ ไปเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ แล้วจึงแสดงการอินทิเกรตเมทริกซ์ของการนำความร้อนด้วยวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์และการอินทิเกรตด้วยวิธีรูปแบบปิด โดยจะแสดงการขั้นตอนการประดิษฐ์รูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าและรูปแบบปิดของโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เอง และอธิบายถึงลักษณะของรูปแบบปิด ตลอดจนการตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด

3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน (2.33) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับการนำความร้อน (heat conduction) สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในปัญหาสองมิติที่สามารถผลิตความร้อนได้เองภายใต้สถานะคงตัวเป็นดังนี้

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}_{(4 \times 1)} k_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{(1 \times 4)} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}_{(4 \times 1)} k_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{(1 \times 4)} \right) d\Omega \{T\}_{(4 \times 1)} = \int_{\Omega^{(e)}} \{N\}_{(4 \times 1)} Q d\Omega \quad (3.1)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$[K_c]_{(4 \times 4)} \{T\}_{(4 \times 1)} = \{Q_Q\}_{(4 \times 1)} \quad (3.2)$$

สำหรับแผ่นโลหะที่มีเนื้อเดียวกัน (homogeneous material) และคุณสมบัติสม่ำเสมอ (isotropic material) เมทริกซ์ของการนำความร้อนเป็นดังนี้

$$[K_c]_{(4 \times 4)} = \int_A k \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}_{(4 \times 1)} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{(1 \times 4)} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}_{(4 \times 1)} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{(1 \times 4)} \right) t dA \quad (3.3)$$

โดย k คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์

t คือความหนาของเอลิเมนต์

สมการ (3.3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$[K_c] = \iint_A k [B]^T [B] t dx dy \quad (3.4)$$

(4×4) A (4×2) (2×4)

โดย $[B] = [B(x, y)]$ คือเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความชันของอุณหภูมิในทิศทาง x และ y กับค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อทั้งสี่ นั่นคือ

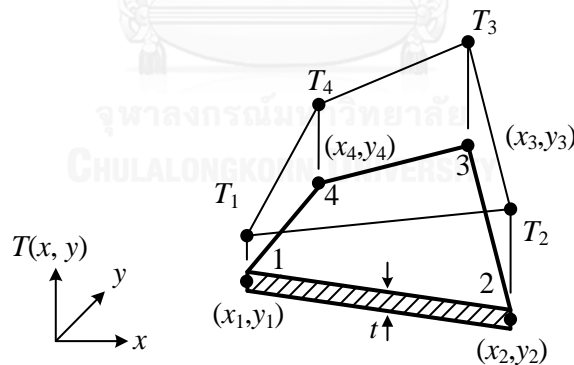
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}}_{[B(x, y)]} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

ส่วนโพลเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองหาได้จากสมการ (2.33) คือ

$$\{Q_Q\} = \iint_A Q \{N\} t dx dy \quad (3.6)$$

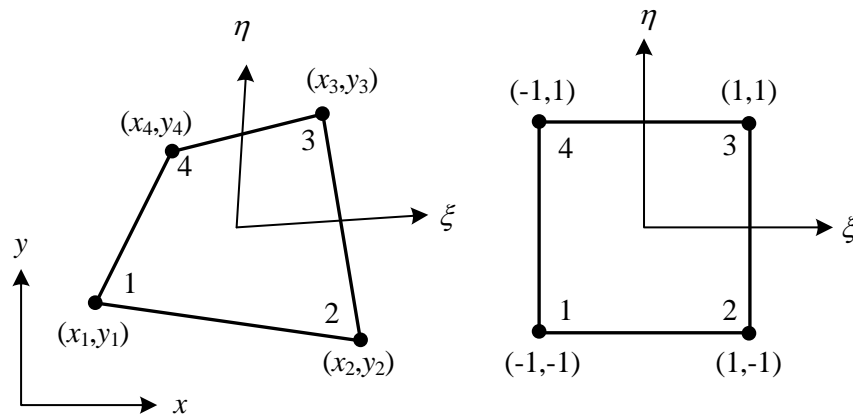
(4×1) A (4×1)

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในพิกัดธรรมชาติ



รูปที่ 3.1 การกระจายของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าประกอบด้วยสมการที่มีความซับซ้อนมากเนื่องจากต้องนำไปหาค่าอนุพันธ์แล้วจึงอินทิเกรตสมการที่ซับซ้อนมากเหล่านี้บนพื้นที่ของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ดังนั้นเพื่อลดความยุ่งยากจึงแปลงรูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้ไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ ดังแสดงในรูปที่ 3.2

(ก) พิกัด $x-y$ (ข) พิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$

รูปที่ 3.2 การแปลงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าไปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหม่ประกอบด้วยระยะทั้งในแกน ξ และแกน η จาก -1 ถึง $+1$ และความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด $x-y$ และ $\xi-\eta$ คือ

$$x = \hat{N}_1 x_1 + \hat{N}_2 x_2 + \hat{N}_3 x_3 + \hat{N}_4 x_4 = \underset{(1 \times 4) \quad (4 \times 1)}{[\hat{N}]} \{x\} \quad (3.7ก)$$

$$y = \hat{N}_1 y_1 + \hat{N}_2 y_2 + \hat{N}_3 y_3 + \hat{N}_4 y_4 = \underset{(1 \times 4) \quad (4 \times 1)}{[\hat{N}]} \{y\} \quad (3.7ข)$$

โดย \hat{N}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งเขียน \hat{N}_i ให้อยู่ในรูปแบบ ξ และ η ได้ดังนี้

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (3.8ก)$$

$$\hat{N}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.8ข)$$

$$\hat{N}_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.8ค)$$

$$\hat{N}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.8ง)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 จุดต่อ โดยปกติเราจะสมมติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์นั้นให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 = \underset{(1 \times 4) \quad (4 \times 1)}{[N]} \{T\} \quad (3.9)$$

โดย N_i , $i = 1, 2, 3, 4$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

T_i , $i = 1, 2, 3, 4$ แทนค่าอุณหภูมิที่จุดต่อทั้งสี่

หากเราเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบเช่นเดียวกันกับฟังก์ชัน
 สันฐาน นั่นคือ

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (3.10ก)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.10ข)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.10ค)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.10ง)$$

เอลิเมนต์ที่มีการใช้ฟังก์ชันตัวแปรเดียวกันในการแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์และการสมมุติ
 ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ เรียกว่า ไอโซพารามเมตริกเอลิเมนต์
 (isoparametric element) ซึ่งใช้กันโดยแพร่หลายในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน

เมทริกซ์ $[B]$ สามารถหาได้จากความชันของอุณหภูมิ $\partial T/\partial x$ และ $\partial T/\partial y$ โดยใช้กฎลูกโซ่
 (chain rule) ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.11ก)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.11ข)$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

โดย $[J]$ คือเมทริกซ์แบบจาโคเบียน (Jacobian matrix)

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

จากสมการ (3.12) จะได้ว่าความชันของอนุกรม $\partial T/\partial x$ และ $\partial T/\partial y$ คือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

กำหนดให้

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

สมการ (3.15) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

แทนค่าสมการ (3.12) และ (3.14) ลงในสมการ (3.17) จะได้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

จะพบว่าเมทริกซ์ $[B]$ คือ

$$[B(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$[B(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ดังนั้นเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าในสมการ (3.4) เมื่อแปลงเป็นพิกัด $\xi - \eta$ โดยใช้ความสัมพันธ์ $|J| d\xi d\eta = dx dy = dA$ จึงเป็น

$$[K_c] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k [B(\xi, \eta)]^T [B(\xi, \eta)] t |J| d\xi d\eta \quad (3.21)$$

โพลเดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองหาได้โดยการแทนค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์จากสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.6) นั่นคือ

$$\{Q_o\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \{N(\xi, \eta)\} t |J| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

ดังนั้น เมื่อทำการแปลงรูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้ไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ จะได้

$$\{Q_o\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{array} \right\} t |J| d\xi d\eta \quad (3.23)$$

โดยค่าดีเทอร์มิแนนท์ของจาโคเบียนเมทริกซ์คือ

$$|J| = -\frac{1}{8} \{ [(x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)] + [(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)] \xi + [(x_1 - x_4)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)] \eta \} \quad (3.24)$$

สมการที่ (3.21) หากเขียนในรูปแบบหลังจากกระทำการคูณกันจะได้สมการที่ยาวและมีความซับซ้อนซึ่งยากแก่การอินทิเกรตแก่สมการ สำหรับการนำไปใช้โดยทั่วไปจะนำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเข้ามาประยุกต์เพื่อให้ได้คำตอบ อย่างไรก็ตามวิทยานิพนธ์นี้จะได้นำเสนออีกวิธีหนึ่งนั่นคือวิธีรูปแบบปิดที่ไม่ได้ประยุกต์ใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยจะแสดงถึงขั้นตอนของทั้งสองวิธีในหัวข้อต่อไป

3.3 การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยวิธีดั้งเดิม

การคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีรูปร่างลักษณะทั่วไป วิธีดั้งเดิมที่เป็นที่นิยมใช้คือการนำสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์มาประยุกต์ใช้ดังเช่นเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งนิยมใช้กันมาก สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

(Gauss–Legendre integration formulas) เป็นการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยถูกจัดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบเพื่อสะดวกแก่การคำนวณ ใช้ได้กับฟังก์ชัน $f(x)$ ทั่วไป ซึ่งต้องแปลงโคออร์ดิเนตจากระบบพิกัด x ไปสู่ ξ ก่อนทำการอินทิเกรตโดยมีสมการดังนี้

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^{NG} W_i f(\xi_i) \quad (3.25)$$

โดย NG คือจำนวนของจุดเกาส์ (the number of Gauss points)

W_i คือค่าน้ำหนัก (weights)

ξ_i คือตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point locations)

I คือค่าอินทิกรัล

ผลจากการอินทิเกรตที่ได้จะแม่นยำมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดมาให้และจำนวนของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตนั้น โดยค่าของน้ำหนักที่ตำแหน่งของจุดเกาส์ต่าง ๆ จะแตกต่างกันออกไปดังแสดงในตาราง [25]

ตารางที่ 3.1 น้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์

จำนวน	ตำแหน่งจุดเกาส์	ค่าน้ำหนัก
NG	$\pm \xi_i$	W_i
1	0.0000000000	2.0000000000
2	0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000	0.8888888889
	0.7745966692	0.5555555556
4	0.3399810436	0.6521451549
	0.8611363116	0.3478548451
5	0.0000000000	0.5688888889
	0.5384693101	0.4786286705
	0.9061798459	0.2369268850
6	0.2386191861	0.4679139346
	0.6612093865	0.3607615730
	0.9324695142	0.1713244924

จากสมการ (3.21) สามารถนำสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ในสมการ (3.23) มาประยุกต์ใช้กับเมทริกซ์ของการนำความร้อนในสมการ (3.21) ซึ่งเป็นปัญหาสองมิติได้ดังนี้

$$[K_c]_{(4 \times 4)} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j k [B(\xi_i, \eta_j)]^T [B(\xi_i, \eta_j)] t |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.26)$$

โดย W_i, W_j คือค่าน้ำหนัก

ξ_i, η_j คือตำแหน่งของจุดเกาส์ในแต่ละทิศของพิกัด

และประยุกต์ใช้กับโพลเดเวเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองจากสมการ (3.22) ได้ดังนี้

$$\{Q_o\}_{(4 \times 1)} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j Q \{N(\xi_i, \eta_j)\} t |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.27)$$

3.4 การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยวิธีรูปแบบปิด

การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยวิธีรูปแบบปิดเป็นการคำนวณโดยใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิดและไม่มีการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข โดยขั้นตอนในการได้มาซึ่งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิด ลักษณะของเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิด ตลอดจนการตรวจสอบประสิทธิภาพของการอินทิเกรตโดยวิธีรูปแบบปิด แสดงได้ดังนี้

3.4.1 ความยากลำบากในการอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อน

จากการศึกษาผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องพบว่าในช่วงเริ่มต้นของแนวคิดในการหารูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ากัน ผู้วิจัยหลายท่านได้พยายามอินทิเกรตเมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยตรงแต่ไม่เป็นผลสำเร็จอาจเป็นผลเนื่องจากโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ในยุคสมัยนั้นยังไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอ ดังนั้นในเวลาต่อมาผู้วิจัยหลายท่านจึงได้มุ่งเน้นไปที่การเพิ่มประสิทธิภาพในการหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนซึ่งมีแนวทางหลัก ๆ สองแนวทางคือ จัดรูปสมการที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีดั้งเดิมที่ 2×2 จุดเกาส์และ 3×3 จุดเกาส์ ซึ่งแนวทางนี้จะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงแต่ไม่สามารถหาค่าที่แม่นยำได้ แนวทางอีกประการหนึ่งคือการหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตโดยตรงแต่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีอื่น ๆ ในการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน เช่น ใช้วิธีพลักซ์เชิงเส้น เป็นต้น ซึ่งช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้และอาจเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ได้

2.) ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกครั้งโดยนำสมการ (3.10) ถึงสมการ (3.21) ประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกาดังรูปที่ 3.5 แต่โปรแกรมแมทมาทิกาก็ไม่สามารถอินทิเกรตเพื่อหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิดได้เช่นเดียวกับโปรแกรมแมทแลบดังแสดงในรูปที่ 3.6

```
(Debug) In[1]=
(* Derivation of Exact [K] for Isoparametric element *)

(Debug) In[2]=
n1 = (1 - ξ) (1 - η) / 4;
n2 = (1 + ξ) (1 - η) / 4;
n3 = (1 + ξ) (1 + η) / 4;
n4 = (1 - ξ) (1 + η) / 4;

j11 = D[n1, ξ] x1 + D[n2, ξ] x2 + D[n3, ξ] x3 + D[n4, ξ] x4;
j12 = D[n1, ξ] y1 + D[n2, ξ] y2 + D[n3, ξ] y3 + D[n4, ξ] y4;
j21 = D[n1, η] x1 + D[n2, η] x2 + D[n3, η] x3 + D[n4, η] x4;
j22 = D[n1, η] y1 + D[n2, η] y2 + D[n3, η] y3 + D[n4, η] y4;

matJ = { {j11, j12},
         {j21, j22} };
detJ = Det[matJ];

matJI = 1/detJ { {j22, -j12},
                {-j21, j11} };

matB = matJI . { {D[n1, ξ] D[n2, ξ] D[n3, ξ] D[n4, ξ]},
                {D[n1, η] D[n2, η] D[n3, η] D[n4, η]} };

matBT = Transpose[matB];
matI = (matBT.matB) detJ;

matK = Integrate[matI, {ξ, -1, 1}, {η, -1, 1}];

N[matK] // MatrixForm;
```

รูปที่ 3.5 โปรแกรมแมทมาทิกาสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน

```
In[6]= j11 = D[n1, ξ] x1 + D[n2, ξ] x2 + D[n3, ξ] x3 + D[n4, ξ] x4;
j12 = D[n1, ξ] y1 + D[n2, ξ] y2 + D[n3, ξ] y3 + D[n4, ξ] y4;
j21 = D[n1, η] x1 + D[n2, η] x2 + D[n3, η] x3 + D[n4, η] x4;
j22 = D[n1, η] y1 + D[n2, η] y2 + D[n3, η] y3 + D[n4, η] y4;

In[10]= matJ = { {j11, j12},
                {j21, j22} };
detJ = Det[matJ];

In[12]= matJI = 1/detJ { {j22, -j12},
                       {-j21, j11} };

In[13]= matB = matJI . { {D[n1, ξ] D[n2, ξ] D[n3, ξ] D[n4, ξ]},
                       {D[n1, η] D[n2, η] D[n3, η] D[n4, η]} };

In[14]= matBT = Transpose[matB];
matI = (matBT.matB) detJ;

In[16]= matK = Integrate[matI, {ξ, -1, 1}, {η, -1, 1}];

In[17]= matKC = Integrate[matK, {η, -1, 1}];

No more memory available.
Mathematica kernel has shut down.
Try quitting other applications and then retry.

N[matK] // MatrixForm;
matK
```

รูปที่ 3.6 ผลการรันจากโปรแกรมแมทมาทิกาสำหรับการประดิษฐ์เมทริกซ์ของการนำความร้อน

3.) วิเคราะห์ถึงสาเหตุที่ทำให้ทั้งสองโปรแกรมอินทิเกรตไม่ได้ พบว่าสมการ (3.21) ประกอบขึ้นจากเมทริกซ์ $[B]$ ซึ่งมีความซับซ้อนเนื่องจากสมการเป็นเศษส่วนที่ตัวเศษและตัวส่วนติดอยู่ในรูปของค่าอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของตัวแปรในพิกัดธรรมชาติจึงเป็นการยากในการอินทิเกรต จึงทำการวิเคราะห์เมทริกซ์สุดท้ายก่อนเข้าสู่กระบวนการอินทิเกรตหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยด้วยเมทริกซ์ $[I]$ ดังสมการ (3.28)

$$[I]_{(4 \times 4)} = k [B(\xi, \eta)]_{(4 \times 2)}^T [B(\xi, \eta)]_{(2 \times 4)} t |J| \quad (3.28)$$

เริ่มต้นคำนวณโดยโปรแกรมแมทมาทิกาแต่โปรแกรมไม่สามารถแสดงผลการรันได้ดังแสดงในรูปที่ 3.7 จึงทำการคำนวณโดยโปรแกรมแมทแลบต่อไป

```
(Debug) In[36]=
matI
(Debug) Out[36]=
{
  { ... 1 ... }, ... 2 ... ,
  { (- x2 y1 + x4 y1 + x1 y2 - x3 y2 + x2 y3 - x4 y3 - x1 y4 + ... 18 ... +
    x4 y2 z - x1 y3 z + x2 y3 z + x1 y4 z - x2 y4 z )
  ( ... 1 ... ) ... 1 ... + ... 1 ... , ... 2 ... , ... 1 ... }
}
large output show less show more show all set size limit...
A very large output was generated. Showing a sample of it.
(Debug) In[38]=
```

รูปที่ 3.7 การคำนวณเมทริกซ์ $[I]$ โดยโปรแกรมแมทมาทิกา

จากการคำนวณโดยโปรแกรมแมทแลบ ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าสมการภายในเมทริกซ์ $[I]$ มีความยาวและซับซ้อนมากดังแสดงตัวอย่างบางส่วนของผลลัพธ์ในรูปที่ 3.8

```
Command Window
I =
[
  (x1*x2 - x1*x4 - x2*x3 + x3*x4 + y1*y2 - y1*y4 - y2*y3 + y3*y4 + E*x3^2 - E*x4^2 + E*y3^2 -
  (E*x2^2 - 2*y2*y4 - 2*x2*x4 - E*x4^2 + E*y2^2 - E*y4^2 - N*x2^2 + N*x4^2 - N*y2^2 + N*y4^2 + x2^2 + x4^2
  -(x1*x2 - x1*x4 - x2*x3 + x3*x4 + y1*y2 - y1*y4 - y2*y3 + y3*y4 + E*x3^2 + E*x4^2 + E*y2^2 +
  >> I(2,1)
ans =
(x1*x2 - x1*x4 - x2*x3 + x3*x4 + y1*y2 - y1*y4 - y2*y3 + y3*y4 + E*x3^2 - E*x4^2 + E*y3^2 - E*x4^2 + E*y4^2 - N*x3^2 - N*x4^2 - N*y3^2 - N*y4^2 + E^2*x3^2 + E^2*x4^2 + E^2*y3^2 + E^2*y4^2 - E*x1*x3 + E*x1*x4 - E*x2*x3 + E*x2*x4 - E*y1*y3 + E*y1*y4 - E*y2*y3 + E*y2*y4 - 2*N*x1*x2 + N*x1*x3 + N*x1*x4 + N*x2*x3 + N*x2*x4 - 2*N*y1*y2 + N*y1*y3 + N*y1*y4 + N*y2*y3 + N*y2*y4 - E*N*x3^2 + E*N*x4^2 - E*N*y3^2 + E*N*y4^2 - 2*E^2*x3*x4 - 2*E^2*y3*y4 + N^2*x1*x2 - N^2*x1*x3 - N^2*x2*x4 + N^2*x3*x4 + N^2*y1*y2 - N^2*y1*y3 - N^2*y2*y4 + N^2*y3*y4 + E*N*x1*x3 - E*N*x1*x4 + E*N*x2*x3 - E*N*x2*x4 + E*N*y1*y3 - E*N*y1*y4 + E*N*y2*y3 - E*N*y2*y4)/(8*(x2*y1 - x1*y2 + x1*y4 - x2*y3 + x3*y2 - x4*y1 - x3*y4 + x4*y3 + E*x1*y3 - E*x3*y1 - E*x1*y4 - E*x2*y3 + E*x3*y2 + E*x4*y1 + E*x2*y4 - E*x4*y2 + N*x1*y2 - N*x2*y1 - N*x1*y3 + N*x3*y1 + N*x2*y4 - N*x4*y2 - N*x3*y4 + N*x4*y3))
```

รูปที่ 3.8 การคำนวณเมทริกซ์ $[I]$ โดยโปรแกรมแมทแลบ

4.) ทำการจัดรูปและสังเกตความสัมพันธ์ของลำดับของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (mathematical operations) ของสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ $[I]$ พบว่าสมาชิกในเมทริกซ์ $[I]$ จะอยู่ในรูปแบบทั่วไปดังแสดงในสมการ (3.29)

$$I_{ij} = \frac{h_{ij} + f_{ij}\xi + g_{ij}\eta + l_{ij}\xi^2 + m_{ij}\eta^2 + n_{ij}\xi\eta}{p_{ij} + q_{ij}\xi + r_{ij}\eta} \quad \text{เมื่อ } i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.29)$$

โดยที่กำหนดให้ $h_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}$ และ r_{ij} เป็นตัวแปรย่อยที่แทนสมการพีชคณิตซึ่งประกอบด้วยการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขและค่าพิกัดที่จุดต่อทั้งสี่ของเอลิเมนต์นั้นคือ $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4$ และ y_4 ซึ่งสมการที่ใช้คำนวณตัวแปรย่อยสำหรับสมาชิกในเมทริกซ์ $[I]$ แถวที่ i หลักที่ j มีรูปแบบที่ต่างกันซึ่งจะวิเคราะห์ต่อไป

5.) วิเคราะห์สมการของสมาชิกในเมทริกซ์ $[I]$ แต่ละตัวพบว่าตัวแปรย่อย p, q และ r ของสมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากัน ส่วนตัวแปรย่อย h, f, g, l, m และ n ของสมาชิกแต่ละตัวมีค่าต่างกัน และเมทริกซ์ $[I]$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรจึงสามารถลดการคำนวณเหลือเพียง 10 ตัว

6.) สังเกตความสัมพันธ์ของค่าพิกัดและลำดับของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ พบว่าบางส่วนมีลำดับการบวก ลบ คูณ หาร ที่เหมือนกันอย่างมีนัยสำคัญแต่มีค่าพิกัดต่าง ๆ วางตัวในสมการในตำแหน่งที่ต่างกันขึ้นอยู่กับตำแหน่งแถวและหลักของตัวแปรย่อยในเมทริกซ์ จากนั้นจึงจัดกลุ่มสมการต่าง ๆ เพื่อหารูปแบบปิดของตัวแปรย่อย $h_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}$ และ r_{ij} แถวที่ i หลักที่ j โดย $i, j = 1, 2, 3, 4$ ทั้งนี้รูปแบบปิดของตัวแปรย่อยได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก โดยแบ่งรูปแบบปิดของตัวแปรย่อยในเมทริกซ์ $[I]$ ได้เป็น 4 กลุ่มดังสมการ (3.30)

$$[K_c]_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} \square & \text{symmetric} & & \\ \bigcirc & \square & & \\ \triangle & \otimes & \square & \\ \otimes & \triangle & \bigcirc & \square \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ในที่นี้ $\otimes, \triangle, \square$ และ \bigcirc คือตัวแปรย่อยกลุ่มที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

7.) ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่ออินทิเกรตสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ ผลปรากฏว่าโปรแกรมแมทแลบไม่สามารถหาค่าได้ ดังรูปที่ 3.9 จึงประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่ออินทิเกรตสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) อีกครั้งโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกา ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมแมทมาทิกาเป็นดังรูปที่ 3.10 ซึ่งทำให้ได้สมการที่ยาวและซับซ้อนโดยกำหนดให้เป็นสมการหลัก

```

1 clear;
2 clc;
3 syms h f g l m n p q r N E
4 I = (h + f*E + g*N + l*E^2 + m*N^2 + 1*E*N)/(p + q*E + r*N);
5 Kc = int(int(I, E, -1, 1), N, -1, 1);
6 Kc
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

```

MATLAB R2011b

File Edit Debug Parallel Desktop Window Help

Current Folder: C:\Program Files\MATLAB\R2011b\bin

Shortcuts How to Add What's New

Command Window

Warning: Explicit integral could not be found.
Warning: Explicit integral could not be found.

Kc =

int(int((1*E^2 + 1*E*N + f*E + m*N^2 + g*N + h)/(p + E*q + N*r), E = -1..1), N = -1..1)

>>

รูปที่ 3.9 ผลการอินทิเกรตสมการ (3.29) โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ

$$\begin{aligned}
 \text{In[1]} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{h + f\xi + g\eta + l\xi^2 + m\eta^2 + n\xi\eta}{p + q\xi + r\eta} \right) d\eta d\xi \\
 \text{Out[1]} &= \text{ConditionalExpression} \left[\frac{1}{r^2} \left(4r(-mp+gr) + \frac{1}{6q^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (-2(p-q)r(m(p-q)q^2 + r(-3gq^2 - nq(2p+q) + (3fq-1(5p+q))r)) + (p-q-r)(2mq^2(p^2 - q^2 - qr + r^2 + p(-2q+r)) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. r(-3gq^2(p-q+r) + nq(p^2 - p(q+r) - 2(q^2 - qr + r^2)) - r(-3q(-2hq+f(p+q-r)) + 2l(p^2 - q^2 + p(q-2r) - qr + r^2)))) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \text{Log}[p-q-r] - (p-q+r)(2mq^2(p^2 - q^2 + qr + r^2 - p(2q+r)) + r(3gq^2(-p+q+r) + nq(p^2 + p(q-r) - 2(q^2 + qr + r^2)) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. r(-3q(-2hq+f(p+q+r)) + 2l(p^2 + q^2 + qr + r^2 + p(q+2r)))) \right) \text{Log}[p-q+r] - \frac{1}{6q^2} \right. \\
 &\quad \left. (-2(p+q)r(mq^2(p+q) + r(n(2p-q)q - 3gq^2 - 5lpx + 3fqx - 1qx)) + (p+q-r)(2mq^2(p^2 - q^2 + qr + r^2 + p(2q+r)) + \right. \\
 &\quad \left. r(-3gq^2(p+q+r) + nq(p^2 - p(q+r) - 2(q^2 + qr + r^2)) + r(3q(2hq+f(-p+q+r)) + 2l(p^2 - q^2 + qr + r^2 - p(q+2r)))) \right) \\
 &\quad \left. \text{Log}[p+q-r] - (p+q+r)(2mq^2(p^2 - 2pq - q^2 - px - qx + r^2) + r(-3gq^2(p+q-r) - nq(-p^2 + p(q-r) - 2(q^2 - qr + r^2)) + \right. \\
 &\quad \left. r(2l(p^2 - pq + q^2 - 2px - qx + r^2) + 3q(2hq - f(p-q+r)))) \right) \text{Log}[p+q+r] \Big), \\
 &\quad \left((\text{Im}[q] \geq 0 \ \&\& \ (\text{Im}[p] + \text{Im}[q] \leq \text{Im}[r]) \ \|\ \text{Im}[q] + \text{Im}[r] \leq \text{Im}[p]) \ \|\ (\text{Im}[q] \leq 0 \ \&\& \ (\text{Im}[p] + \text{Im}[q] \geq \text{Im}[r]) \ \|\ \text{Im}[q] + \text{Im}[r] \geq \text{Im}[p]) \ \|\ \right. \\
 &\quad \left. \text{Re}[p] + \frac{\text{Im}[r] \text{Re}[q]}{\text{Im}[q]} \geq \frac{\text{Im}[p] \text{Re}[q]}{\text{Im}[q]} + \text{Re}[r] \right) \ \&\& \\
 &\quad \left(\frac{p+r}{q} \leq \text{Reals} \ \|\ \text{Re} \left[\frac{p+r}{q} \right] < -1 \ \|\ \text{Re} \left[\frac{p+r}{q} \right] > 1 \right) \ \&\& \\
 &\quad \left(\frac{p+r}{q} \leq \text{Reals} \ \|\ \text{Re} \left[\frac{p+r}{q} \right] \leq -1 \ \|\ \text{Re} \left[\frac{p+r}{q} \right] \geq 1 \right) \ \&\& \\
 &\quad \left(\frac{\text{Im}[p] + \text{Im}[r]}{\text{Im}[q]} \geq 1 \ \|\ (\text{Im}[p] + \text{Im}[q] + \text{Im}[r] \leq 0 \ \&\& \ \text{Im}[q] \geq 0) \ \|\ \right. \\
 &\quad \left. (\text{Im}[p] + \text{Im}[q] + \text{Im}[r] \geq 0 \ \&\& \ \text{Im}[q] \leq 0) \ \|\ \text{Re}[p] + \text{Re}[r] \geq \frac{(\text{Im}[p] + \text{Im}[r]) \text{Re}[q]}{\text{Im}[q]} \right) \Big]
 \end{aligned}$$

รูปที่ 3.10 ผลการอินทิเกรตสมการ (3.29) โดยใช้โปรแกรมแมทมาทิก้า

8.) ประดิษฐ์สมการในรูปแบบปิดสำหรับเมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยนำสมการหลักซึ่งได้จากการอินทิเกรตสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) ด้วยโปรแกรมแมทมาทิก้าและสมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อยไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยในวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้โปรแกรมแมทแลบ จากนั้นจัดรูปสมการผลลัพธ์อีกครั้งเพื่อลดความซับซ้อนของสมการและลดเวลาในการคำนวณ

9.) ทดสอบการใช้สมการในรูปแบบปิดสำหรับเมทริกซ์ของการนำความร้อนพบว่าจะใช้ได้กับสี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านใดที่ขนานกันเท่านั้น จึงทำการวิเคราะห์หาสาเหตุทำให้พบว่าเมื่อสี่เหลี่ยมมีด้านขนานกันจะส่งผลให้ตัวแปรย่อยบางตัวเป็น 0 ทำให้ไม่สามารถใช้สมการในรูปแบบปิดนี้ได้ ดังนั้นจึงได้ประดิษฐ์สมการหลักสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทุกรูปแบบเพิ่มเติมโดยมีหลักการเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งจะได้อธิบายลักษณะของสมการในรูปแบบปิดอย่างละเอียดในหัวข้อต่อไป

10.) ประดิษฐ์รูปแบบปิดสำหรับโพลเดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองโดยการอินทิเกรตสมการ (3.23) โดยตรงทำให้ได้สมการในรูปแบบปิดที่ประกอบด้วยตัวแปรย่อย p , q และ r ซึ่งใช้ได้กับสี่เหลี่ยมทุกกรณี ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก

จากขั้นตอนต่าง ๆ ที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่าจะมีการพัฒนาโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น แต่การอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนยังคงเป็นเรื่องยากหากทำการใส่ค่าโดยตรงจะไม่สามารถอินทิเกรตหาสมการในรูปแบบปิดได้ ด้วยเหตุผลนี้จึงทำให้นักวิจัยหลายท่านเชื่อว่าไม่สามารถหาค่าแม่นยำได้และทำการหลีกเลี่ยงโดยประยุกต์ใช้วิธีอื่น ๆ ซึ่งในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ไม่ได้ประยุกต์ใช้วิธีอื่น รูปแบบปิดที่ได้มาจากกระบวนการสังเกต วิเคราะห์และจัดรูปอย่างเหมาะสมในหลาย ๆ ขั้นตอนเพื่อช่วยให้โปรแกรมสามารถหาผลลัพธ์ได้ นอกจากนี้ยังต้องอาศัยโปรแกรมถึงสองโปรแกรมช่วยในการหาผลลัพธ์ซึ่งแนวคิดเช่นนี้ผู้เขียนวิทยานิพนธ์ยังไม่เคยพบว่าผู้ใดเคยทำมาก่อน สุดท้ายจึงทำให้ได้สมการรูปแบบปิดที่ใช้อินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ให้ค่าแม่นยำ ซึ่งประกอบไปด้วยสมการที่ติดอยู่ในรูปการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ระหว่างค่าพิกัด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) และ (x_4, y_4) ซึ่งได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

3.4.2 ลักษณะของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิด

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิดจะประกอบไปด้วยสมการหลักและสมการที่ใช้หาตัวแปรย่อยซึ่งแสดงอย่างละเอียดไว้ในภาคผนวก ก โดยเมื่อพิจารณาตามลักษณะเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบต่าง ๆ พบว่าเอลิเมนต์แต่ละกรณีจะมีรูปแบบของสมการหลักที่ไม่เหมือนกัน แต่มีสมการที่ใช้หาตัวแปรย่อยที่มีรูปแบบเดียวกัน ซึ่งสามารถจำแนกสมการหลักได้ 4 กรณี ดังนี้

กรณี 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านขนานกัน ดังรูปที่ 3.1

นำสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) ที่ได้กล่าวมาแล้วสำหรับสมาชิกเพียงหนึ่งตัวไปทำการอินทิเกรตซึ่งสมการที่นำไปอินทิเกรตเป็นดังนี้

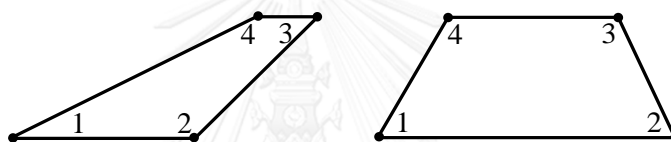
$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h + f\xi + g\eta + l\xi^2 + m\eta^2 + n\xi\eta}{p + q\xi + r\eta} d\xi d\eta \quad (3.31)$$

ภายหลังจากการอินทิเกรตโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิก้าทำให้ได้สมการหลักสำหรับสมาชิกในเมทริกซ์ $[K_c]$ เป็นดังนี้

$$K = A + \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{6q^3 r^3} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\text{โดยที่ } A &= \frac{2(-3gq^2r + 2mpq^2 + 3fqr^2 + npqr - 4lpr^2)}{3q^2r^2} + \frac{4(gr - mp)}{r^2} \\
B_1 &= (p - q - r)\text{Log}(p - q - r)(r(r(3q(2hq - f(p + q - r)) + 2l(C_1 + p(q - 2r) - qr)) \\
&\quad - 3gq^2(p - q + r) + nq(C_2 + p(q + r) + 2qr)) + 2mq^2(C_1 - p(2q - r) - qr)) \\
B_2 &= -(p - q + r)\text{Log}(p - q + r)(r(r(3q(2hq - f(p + q + r)) + 2l(C_1 + p(q + 2r) + qr)) \\
&\quad - 3gq^2(p - q - r) + nq(C_2 + p(q - r) - 2qr)) + 2mq^2(C_1 - p(2q + r) + qr)) \\
B_3 &= (p + q - r)\text{Log}(p + q - r)(r(-r(3q(2hq - f(p - q - r)) + 2l(C_1 - p(q + 2r) + qr)) \\
&\quad + 3gq^2(p + q + r) + nq(-C_2 + p(q - r) + 2qr)) + 2mq^2(-C_1 - p(2q + r) - qr)) \\
B_4 &= -(p + q + r)\text{Log}(p + q + r)(r(-r(3q(2hq - f(p - q + r)) + 2l(C_1 - p(q - 2r) - qr)) \\
&\quad + 3gq^2(p + q - r) + nq(-C_2 + p(q + r) - 2qr)) + 2mq^2(-C_1 - p(2q - r) + qr)) \\
\text{และ} \quad C_1 &= p^2 + q^2 + r^2 \\
C_2 &= p^2 - 2q^2 - 2r^2
\end{aligned}$$

กรณี 2 เอลิเมนต์ที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 3 และ 4 ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 เอลิเมนต์ที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 3 และ 4

จากรูปที่ 3.11 เมื่อ $\overline{12}$ ขนานกับ $\overline{34}$ จะได้ว่าความชันมีค่าเท่ากันคือ

$$\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(y_3 - y_4)}{(x_3 - x_4)} \quad (3.33)$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น} \quad (x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_2) = 0 \quad (3.34)$$

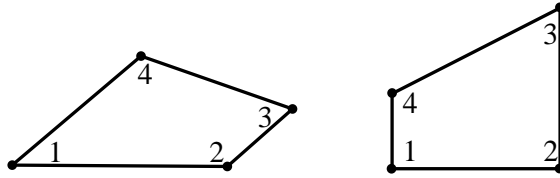
ซึ่งจะได้ว่า $q = 0$ นั่นเอง ดังนั้นจากสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) สมการสำหรับนำไปอินทิเกรตจึงกลายเป็น

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h + f\xi + g\eta + l\xi^2 + m\eta^2 + n\xi\eta}{p + r\eta} d\xi d\eta \quad (3.35)$$

ภายหลังจากการอินทิเกรตทำให้ได้สมการหลักสำหรับสมาชิกในเมทริกซ์ $[K_c]$ เป็นดังนี้

$$K = \frac{-12mpr + 12gr^2 - (6mp^2 - 6gpr + 6hr^2 + 2lr^2)(\text{Log}(p - r) - \text{Log}(p + r))}{3r^3} \quad (3.36)$$

กรณี 3 เอลิเมนต์ที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 4 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 2 และ 3 ดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 เอลิเมนต์ที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 4 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 2 และ 3

จากรูปที่ 3.12 เมื่อ $\bar{14}$ ขนานกับ $\bar{23}$ จะได้ว่าความชันมีค่าเท่ากันคือ

$$\frac{(y_1 - y_4)}{(x_1 - x_4)} = \frac{(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)} \quad (3.37)$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น} \quad (x_1 - x_4)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) = 0 \quad (3.38)$$

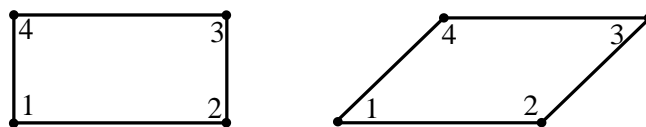
ซึ่งจะได้ว่า $r = 0$ นั่นเอง ดังนั้นจากสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) สมการสำหรับนำไปอินทิเกรตจึงกลายเป็น

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h + f\xi + g\eta + l\xi^2 + m\eta^2 + n\xi\eta}{p + q\xi} d\xi d\eta \quad (3.39)$$

ภายหลังจากการอินทิเกรตทำให้ได้สมการหลักสำหรับสมาชิกในเมทริกซ์ $[K_c]$ เป็นดังนี้

$$K = \frac{-12lpq + 12fq^2 - (6lp^2 - 6fpq + 6hq^2 + 2mq^2)(\text{Log}(p - q) - \text{Log}(p + q))}{3q^3} \quad (3.40)$$

กรณี 4 เอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกัน 2 คู่ ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 เอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกัน 2 คู่

จากรูปที่ 3.13 เอลิเมนต์ลักษณะแบบนี้ ได้แก่ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัส เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน นั่นคือเป็นทั้งกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า $q = r = 0$ ดังนั้นจากสมการรูปแบบทั่วไป (3.29) สมการสำหรับนำไปอินทิเกรตจึงกลายเป็น

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h + f\xi + g\eta + l\xi^2 + m\eta^2 + n\xi\eta}{p} d\xi d\eta \quad (3.41)$$

ภายหลังจากการอินทิเกรตทำให้ได้สมการหลักสำหรับสมาชิกในเมทริกซ์ $[K_c]$ เป็นดังนี้

$$K = \frac{4(3h+l+m)}{3p} \quad (3.42)$$

ในการคำนวณสมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์ $[K_c]$ จะเริ่มต้นโดยหาค่าตัวแปรย่อย $h_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}$ และ r_{ij} ที่จำเป็นต้องใช้ในสมการหลักของเอลิเมนต์แต่ละกรณี ภายหลังจากจึงแทนค่าลงไปในสมการหลักของเอลิเมนต์แต่ละกรณี (3.32), (3.36), (3.40) และ (3.42) หลังจากนั้นนำเมทริกซ์ $[K_c]$ และโหลดเวกเตอร์ $\{Q_o\}$ ซึ่งแสดงสมการรูปแบบปิดไว้ในภาคผนวก ก แทนค่าลงในสมการ (3.2) ประกอบกับแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตอุณหภูมิที่จุดต่อที่ทราบค่า จากนั้นจึงแก้สมการหาอุณหภูมิที่ไม่รู้ค่าต่อไป

จากการแบ่งเป็น 4 กรณีจะพบว่าสำหรับกรณีที่เอลิเมนต์นั้นมีด้านขนานกัน ตัวสมการจะลดความซับซ้อนลงมากและใช้จำนวนตัวแปรน้อยลงจึงช่วยให้ใช้เวลาในการคำนวณลดลง ดังนั้นหากในการวิเคราะห์ที่ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกันจำนวนมากจะส่งผลให้การวิเคราะห์ด้วยวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาอันน้อยลงตามไปด้วย

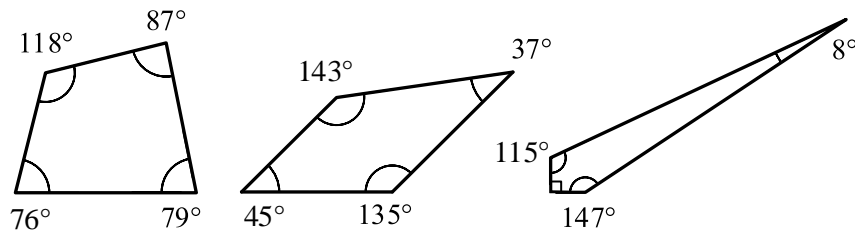
3.4.3 การตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด

เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด (Closed-form Method) ซึ่งเป็นการหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนโดยใช้สมการที่อยู่ในรูปแบบปิดจึงทำการตรวจสอบความถูกต้องและเวลาที่ใช้คำนวณโดยเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิม (Conventional Method) ซึ่งเป็นการหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์โดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ โดยจะพิจารณาที่ 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 และ 6x6 จุดเกาส์ เอลิเมนต์ที่ใช้ทดสอบมีทั้งหมดสามประเภทซึ่งอ้างอิงตามโปรแกรม AUTOMESH-2D คือ

- 1) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในตั้งแต่ 60 องศา ถึง 120 องศา
- 2) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในน้อยกว่า 60 องศา หรือมากกว่า 120 องศา
- 3) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในน้อยกว่า 30 องศา หรือมากกว่า 150 องศา

เอลิเมนต์ประเภทที่หนึ่งมีคุณภาพมากที่สุดเนื่องจากการบิดเบี้ยวค่อนข้างน้อย ในการวิเคราะห์ตัวโปรแกรม AUTOMESH-2D จะพยายามสร้างเอลิเมนต์ประเภทนี้มากที่สุด แต่ในปัญหาโดยทั่วไปมีรูปร่างซับซ้อนจึงจำเป็นต้องสร้างเอลิเมนต์ประเภทที่สองและสามประกอบการวิเคราะห์

ด้วย สำหรับเอลิเมนต์ที่ใช้ตรวจสอบประสิทธิภาพของการวิเคราะห์ด้วยวิธีรูปแบบปิดเป็นดังรูปที่ 3.14



(ก) ประเภท 1

(ข) ประเภท 2

(ค) ประเภท 3

รูปที่ 3.14 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่ใช้ตรวจสอบประสิทธิภาพในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนด้วยวิธีรูปแบบปิด

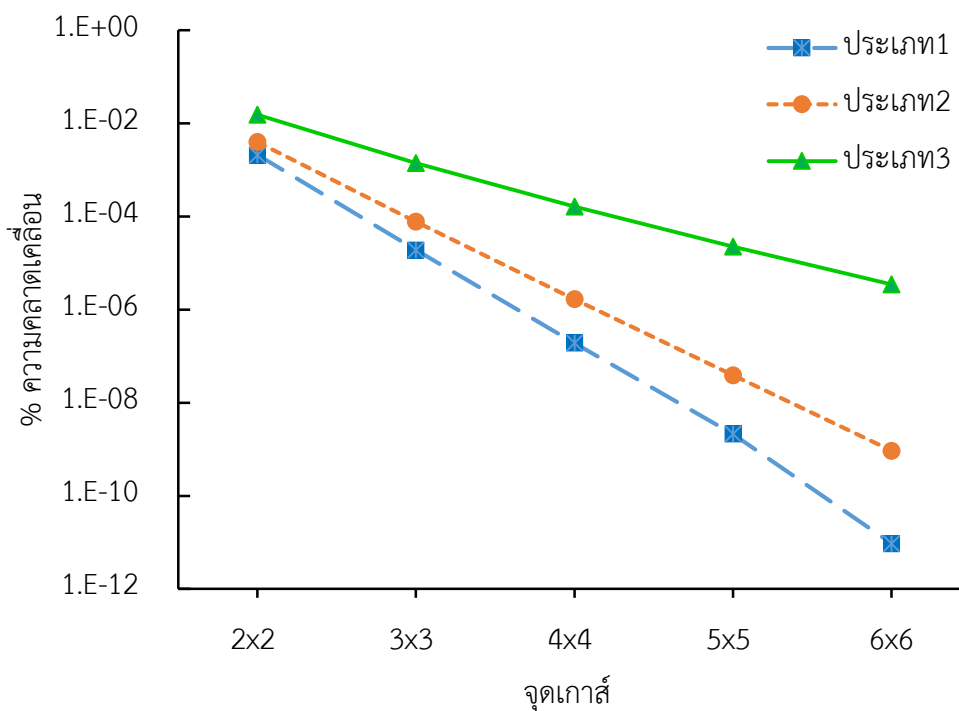
พิจารณาความแม่นยำของการอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของทั้งสองวิธีโดยเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่คิดรวมความคลาดเคลื่อนของสมาชิกทั้ง 16 ตัวในเอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อน $[K_c]$ ซึ่งคำนวณค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนได้จากสมการ (3.43) [8, 12]

$$\% \text{ ความคลาดเคลื่อน} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j=1}^4 (K_{ij}^{\text{closed-form}} - K_{ij}^{\text{conventional}})^2}}{\sum_{i,j=1}^4 |K_{ij}^{\text{closed-form}}|} \times 100 \quad (3.43)$$

โดย $K_{ij}^{\text{closed-form}}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ แทนสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ $[K_c]$ ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิด

$K_{ij}^{\text{conventional}}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ แทนสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ $[K_c]$ ที่ได้จากวิธีดั้งเดิม

จากการแทนค่าพิกัด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) และ (x_4, y_4) ลงในโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิดและที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิมสำหรับคำนวณเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าทำให้ได้ค่าของไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อน $[K_c]$ ที่มีค่าแตกต่างกัน ผลการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของค่าที่ได้จากวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ตั้งแต่ 2x2 จุดเกาส์ถึง 6x6 จุดเกาส์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าทั้งสามประเภทแสดงได้ดังรูปที่ 3.15

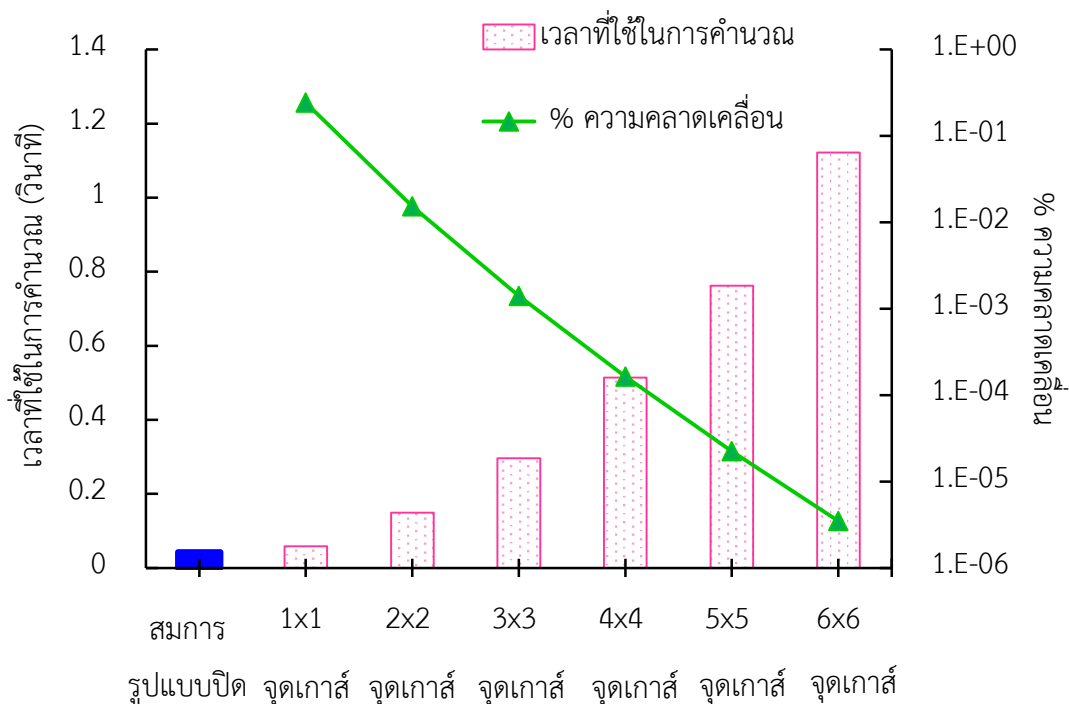


รูปที่ 3.15 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของเอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมเทียบกับวิธีรูปแบบปิด

กราฟแสดงให้เห็นว่าค่าของไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนที่คำนวณจากวิธีดั้งเดิมที่จำนวนจุดเกาส์ที่เพิ่มขึ้นจะเข้าสู่ค่าที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดโดยสังเกตได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่ลดลง ซึ่งสำหรับเอลิเมนต์ประเภทอื่นก็ยังคงให้แนวโน้มเช่นเดียวกัน จึงสรุปได้ว่าโปรแกรมที่คำนวณ $[K_c]$ ซึ่งประดิษฐ์โดยวิธีรูปแบบปิดมีความถูกต้อง

นอกจากนี้กราฟยังแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากวิธีดั้งเดิมสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมประเภท 3 ซึ่งบิดเบี้ยวมากจะมีความคลาดเคลื่อนมากที่สุดส่วนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมประเภท 1 ซึ่งบิดเบี้ยวน้อยจะมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยการรันโปรแกรมแมทแลบซึ่งประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิดและที่ประดิษฐ์จากวิธีดั้งเดิมในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยทำการรัน 1000 รอบ ซึ่งการคำนวณวิธีเดียวกันสำหรับเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่างกันจะใช้เวลาเท่ากันเนื่องจากมีจำนวนและลำดับในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน ดังนั้นจึงได้นำเสนอเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าในรูปที่ 3.14(ค) เพียงกรณีเดียวซึ่งสำหรับเอลิเมนต์รูปแบบอื่นก็ให้แนวโน้มเดียวกัน โดยพล็อตกราฟเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณกับเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่จุดเกาส์ต่างกันดังแสดงในรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์และเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในแต่ละวิธี

ผลการเปรียบเทียบเวลาของแต่ละวิธีที่ใช้ในการรัน 1000 รอบแสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาใกล้เคียงกับวิธีดั้งเดิมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 1x1 จุดเกาส์ และใช้เวลาเพิ่มขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ

ผลการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณกับเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่จุดเกาส์ต่างกัน จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มจุดเกาส์ค่าที่ได้จะแม่นยำมากขึ้นแต่จะส่งผลให้ใช้เวลาเพิ่มขึ้นตามไปด้วย สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ซึ่งมีเอลิเมนต์จำนวนมาก ความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณจึงเป็นเรื่องที่สำคัญ ดังนั้นผู้เขียนวิทยานิพนธ์จึงเลือกใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2x2 จุดเกาส์ในการวิเคราะห์วิธีดั้งเดิมเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีรูปแบบปิดสำหรับปัญหาต่อไปเนื่องจากที่ระดับความแม่นยำที่ 2x2 จุดเกาส์ ใช้เวลาในการคำนวณไม่มากและเป็นระดับความแม่นยำเดียวกันกับที่ใช้ในโปรแกรมวิเคราะห์ทั่วไป

3.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอเกี่ยวกับวิธีการหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมโดยนำเสนอวิธีการอินทิเกรตทั้งวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ และวิธีรูปแบบปิดซึ่งได้นำเสนอวิธีการประดิษฐ์สมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนและรูปแบบปิดของโพลเดเวเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่จะนำไปใช้ได้โดยง่าย ตลอดจนแสดงการตรวจสอบประสิทธิภาพของการใช้วิธีรูปแบบปิดในการหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนซึ่งตรวจสอบความถูกต้องและเวลาที่ใช้คำนวณกับวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ตั้งแต่ 2x2 จุดเกาส์ถึง 6x6 จุดเกาส์ โดยสมการต่าง ๆ ที่ได้นำเสนอนี้จะนำไปประดิษฐ์เป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไปเพื่อใช้หาค่าอนุหภูมิของปัญหาการนำความร้อน ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมนั้นนำเสนอไว้ในบทต่อไป



บทที่ 4

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติโดยทั่วไปในทางปฏิบัติล้วนมีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อนเพื่อความแม่นยำของผลลัพธ์จึงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมากในการวิเคราะห์ ทำให้ต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ในบทนี้จะได้นำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 มาทำการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยแมทแลบเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ โดยเป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาอุณหภูมิที่ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ บนแผ่นระนาบโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม 2 โปรแกรม ได้แก่ โปรแกรม HeatCF ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิดซึ่งใช้สมการรูปแบบปิดในส่วนของ การคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อน และโปรแกรม HeatG ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองต์ในส่วนของ การคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 3 โดยการแก้ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติโดยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวสามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้ และยังสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 ลักษณะของโปรแกรม

4.1.2 ลักษณะของโปรแกรม HeatCF

โปรแกรม HeatCF ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 4 โปรแกรมย่อย (subroutines) โดยมีขั้นตอนสำคัญในการทำงานของโปรแกรมเป็นดังนี้

(ก) โปรแกรมเริ่มต้นการทำงานโดยให้ผู้ใช้พิมพ์ชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหาทางด้าน การนำความร้อน (input file) เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดของปัญหา คุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ ตำแหน่งพิกัดของทุกจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขต หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์ต่าง ๆ และค่าความร้อนที่ผลิตได้เอง ซึ่งได้อธิบายไฟล์ข้อมูลนำเข้าโดยละเอียดในหัวข้อ 4.3 ซึ่งจะทำการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [Main Program]

(ข) เรียกโปรแกรมย่อย KCFT [Subroutine KCFT] เพื่อคำนวณหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของทุกเอลิเมนต์ โดยภายในโปรแกรมย่อย KCFT ประกอบไปด้วยสมการรูปแบบปิดที่ใช้หาตัวแปรย่อย h_{ij} , f_{ij} , g_{ij} , l_{ij} , m_{ij} , n_{ij} , p_{ij} , q_{ij} และ r_{ij} ดังในสมการ (3.29)

ภายหลังจึงเรียกโปรแกรมย่อย calK [Subroutine calK] เพื่อแทนค่าตัวแปรย่อยลงในสมการหลัก คำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของทุกเอลิเมนต์แล้วสร้างเป็นเมทริกซ์ของการนำความร้อนของระบบสมการรวม

(ค) เรียกโปรแกรมย่อย QCFT [Subroutine QCFT] เพื่อคำนวณหาโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองของทุกเอลิเมนต์ โดยภายในโปรแกรมย่อย QCFT ประกอบไปด้วยสมการรูปแบบปิดที่ใช้หาตัวแปรย่อย p_{ij} , q_{ij} และ r_{ij} ดังในสมการ (3.29) และสมการรูปแบบปิดของโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เอง แล้วจึงสร้างโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองของระบบสมการรวม

(ง) เรียกโปรแกรมย่อย SOLTEMP [Subroutine SOLTEMP] เพื่อรวมเมทริกซ์ต่าง ๆ เป็นระบบสมการรวมสำหรับปัญหาการนำความร้อน แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตซึ่งประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิของจุดต่อก่อนทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่ทุกจุดต่อ

(จ) พิมพ์ผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่จุดต่อที่คำนวณได้ทางหน้าจอแสดงผลและบันทึกลงในไฟล์ผลลัพธ์ที่ต้องการ

ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้ สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 4.1

4.1.2 ลักษณะของโปรแกรม HeatG

โปรแกรม HeatG ประกอบด้วยโปรแกรมหลักและ 3 โปรแกรมย่อย โดยมีขั้นตอนสำคัญในการทำงานของโปรแกรมเป็นดังนี้

(ก) โปรแกรมเริ่มต้นการทำงานโดยให้ผู้ใช้พิมพ์ชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหาทางด้านกรนำความร้อน เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดของปัญหา คุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ ตำแหน่งพิกัดของทุกจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขต หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์ต่าง ๆ และค่าความร้อนที่ผลิตได้เอง ซึ่งได้อธิบายไฟล์ข้อมูลนำเข้าโดยละเอียดในหัวข้อ 4.3 ซึ่งจะทำการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [Main Program]

(ข) เรียกโปรแกรมย่อย KGT [Subroutine KGT] เพื่อคำนวณหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนของทุกเอลิเมนต์ ภายในโปรแกรมย่อย KGT ประกอบไปด้วยขั้นตอนการคำนวณตามวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ 2×2 จุดเกาส์ คำนวณหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของทุกเอลิเมนต์แล้วสร้างเป็นเมทริกซ์ของการนำความร้อนของระบบสมการรวม

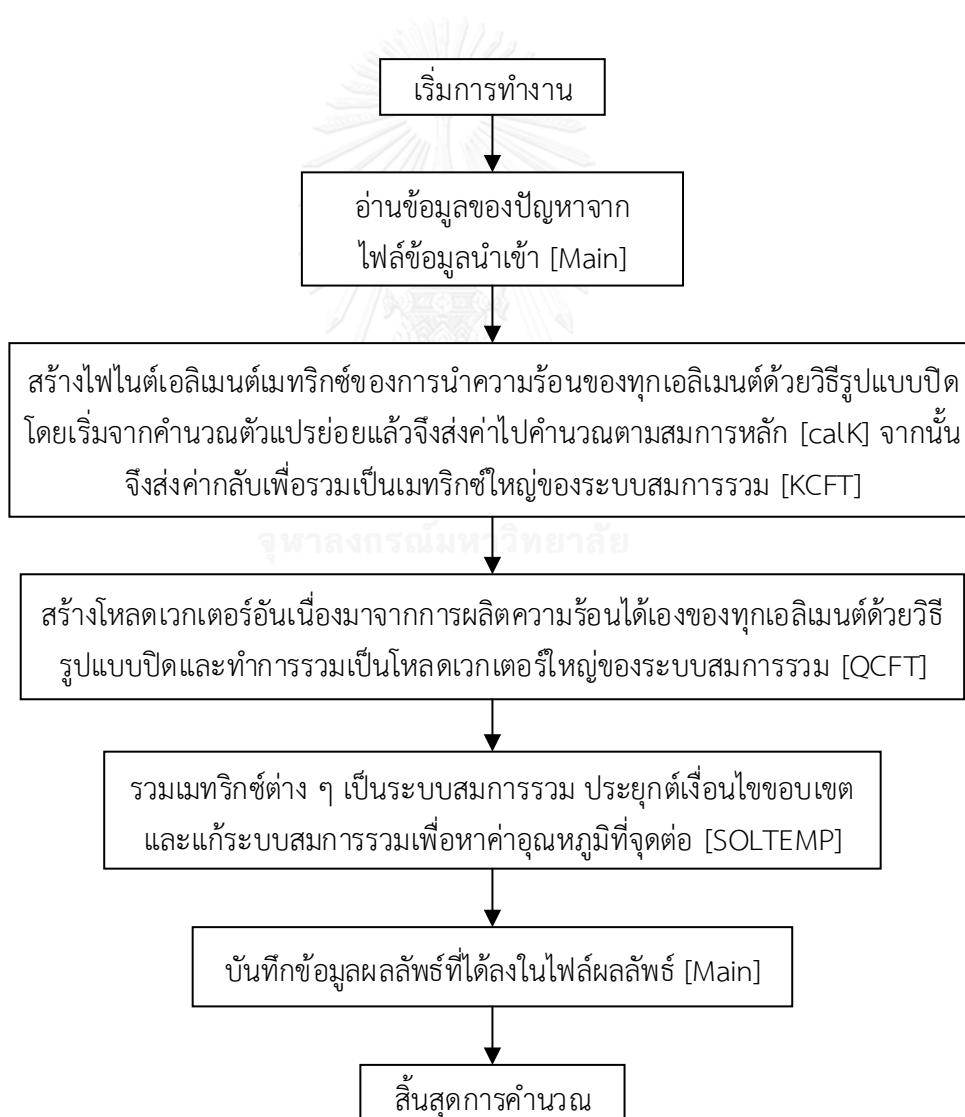
(ค) เรียกโปรแกรมย่อย QGT [Subroutine QGT] เพื่อคำนวณหาโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองของทุกเอลิเมนต์ โดยภายในโปรแกรมย่อย QGT ประกอบไป

ด้วยขั้นตอนการคำนวณตามวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์ 2x2 จุดเกาส์ แล้วจึงสร้างโหนดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองของระบบสมการรวม

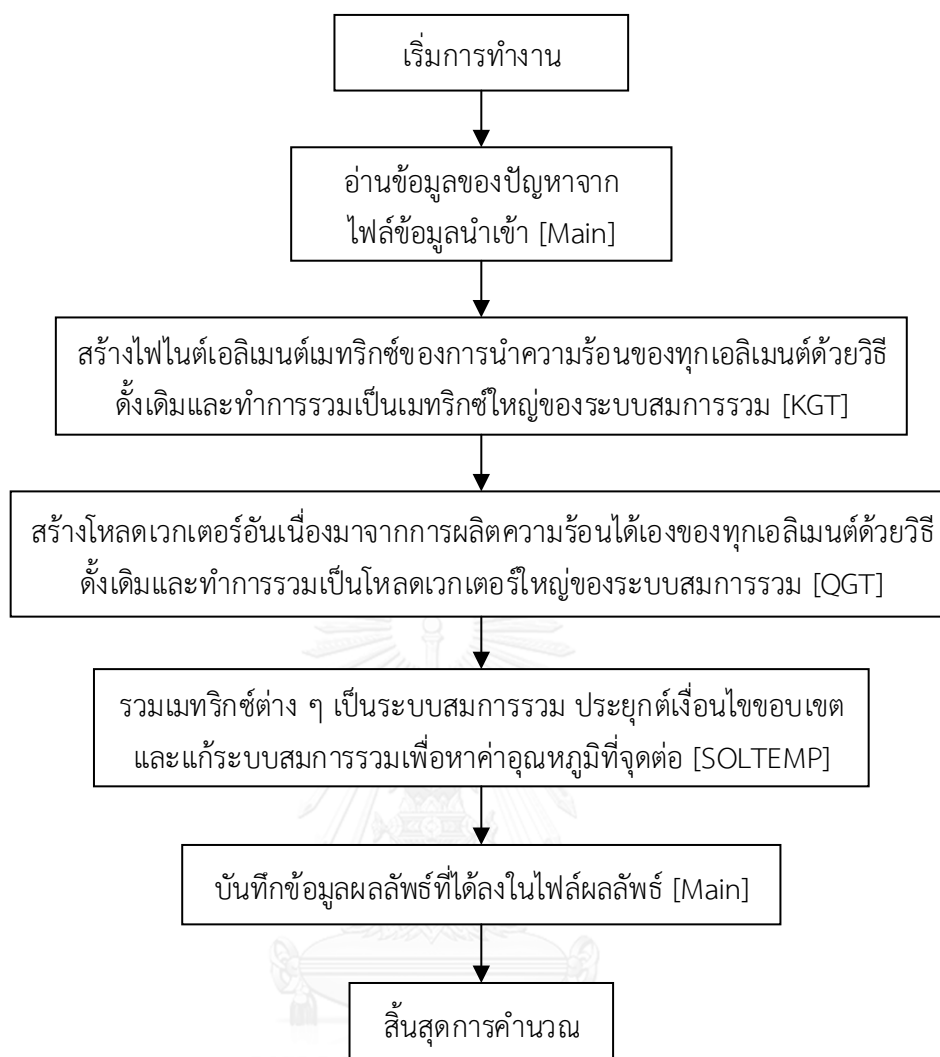
(ง) เรียกโปรแกรมย่อย SOLTEMP [Subroutine SOLTEMP] เพื่อรวมเมทริกซ์ต่าง ๆ เป็นระบบสมการรวมสำหรับปัญหาการนำความร้อน แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตซึ่งประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิของจุดต่อก่อนทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่ทุกจุดต่อ

(จ) พิมพ์ผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่จุดต่อที่คำนวณได้ทางหน้าจอแสดงผลและบันทึกลงในไฟล์ผลลัพธ์ที่ต้องการ

ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้ สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม HeatCF



รูปที่ 4.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม HeatG

4.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรม HeatCF และโปรแกรม HeatG แสดงไว้ในภาคผนวก ข

4.3 ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรม HeatCF และโปรแกรม HeatG ต้องการมีลักษณะเหมือนกันซึ่งจำแนกออกเป็น 5 ส่วนย่อยได้แก่

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์ :

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อ ๆ ไป ประโยคต่าง ๆ เพื่อใช้อธิบายที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น :

```
2
PLATE WITH INTERNAL HEAT GENERATION.
CRUDE MESH WITH 15 NODES AND 8 ELEMENTS.
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา :

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์
 บรรทัดที่สอง ตัวเลขแสดงจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น :

```
NPOIN  NELEM
15      8
```

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของปัญหา :

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ
 บรรทัดที่สอง ตัวเลขแสดงค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและความหนาของแผ่น

ตัวอย่างเช่น :

```
TK      THICK
1.      .1
```

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ :

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ
 บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขต ตำแหน่งในแนวแกน x และ y และอุณหภูมิของจุดต่อนั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น :

```
NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES :
1      0      0      0      0
2      0      0.12  0      0
3      0      0.8    0      0
4      0      0.9    0      0
5      1      1      0      0
⋮      ⋮      ⋮      ⋮      ⋮
15     0      0.5    0.5    0
```

หมายเหตุ : เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ในคอลัมน์ที่สองมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 0 โดยมีความหมายดังนี้

ค่าเป็น 1 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิตามค่าที่ให้ไว้ และไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

ค่าเป็น 0 หมายถึง ให้ทำการคำนวณหาอุณหภูมิที่จุดต่อนั้น

ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์ :

บรรทัดแรก คำนวณลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสี่ที่ประกอบเป็นเอลิเมนต์นั้น และปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองของเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่างเช่น :

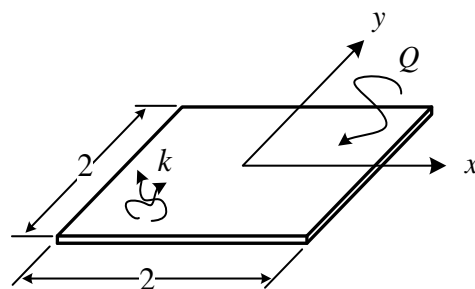
ELEMENT NODAL CONNECTIONS AND HEAT LOADS :

1	1	2	13	12	1
2	2	3	14	13	1
3	3	4	15	14	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	11	12	13	14	1

หมายเหตุ : หมายเลขจุดต่อทั้งสี่ของทุกเอลิเมนต์ ให้ใส่ตัวเลขในทิศทางเข็มนาฬิกา

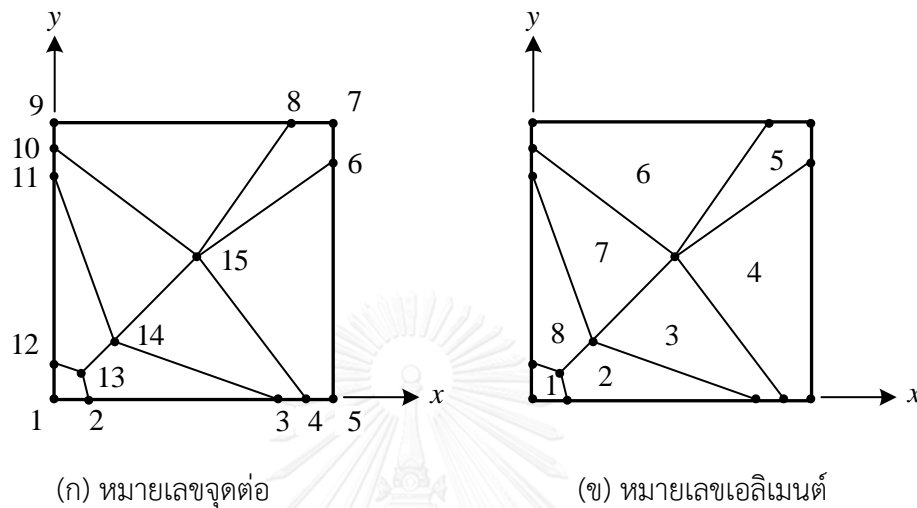
4.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม

ลักษณะการใช้โปรแกรม HeatCF และ HeatG มีลักษณะเหมือนกันโดยจะแตกต่างกันที่กระบวนการคำนวณและข้อมูลการแสดงผล ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรมต้องการและข้อมูลที่โปรแกรมจะแสดงผลโดยยกตัวอย่างการใช้โปรแกรมกับปัญหาในหัวข้อ 5.4 ซึ่งเป็นปัญหาที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ สำหรับปัญหานี้เป็นปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2×2 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 4.3 โดยสามารถผลิตความร้อนได้เองเท่ากับ 1 ภายในสถานะคงตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 อุณหภูมิรอบขอบนอกมีค่าเท่ากับ ศูนย์



รูปที่ 4.3 ปัญหาตัวอย่างลักษณะข้อมูลนำเข้า

เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงวิเคราะห์โดยใช้ขอบเขตเพียง $\frac{1}{4}$ ของขอบเขตทั้งหมดซึ่งวางตัวทางด้านขวาบนของแผ่นสี่เหลี่ยมโดยแบ่งเป็น 8 เอลิเมนต์ 15 จุดต่อ โดยหมายเลขจุดต่อเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.4(ก) และหมายเลขเอลิเมนต์เป็นดังแสดงในรูปที่ 4.4(ข)



รูปที่ 4.4 การแบ่งเอลิเมนต์สำหรับปัญหาตัวอย่างลักษณะข้อมูลนำเข้า

เริ่มต้นโดยสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ สำหรับปัญหาตัวอย่างนี้ไฟล์ข้อมูลนำเข้ามีชื่อว่า 'Exam_CH4.txt' ดังที่จะแสดงในหัวข้อ 4.4.1 จากนั้นเมื่อผู้ใช้เริ่มทำการรันโปรแกรมหน้าจอแสดงผลจะถามถึงไฟล์ข้อมูลนำเข้า หลังจากใส่ไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหาโปรแกรมจะทำการคำนวณไปตามขั้นตอนดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 4.1 เมื่อคำนวณเสร็จสิ้นโปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อทุกจุดต่อของปัญหาซึ่งลักษณะการแสดงผลสำหรับโปรแกรม HeatCF และ HeatG จะแสดงไว้ที่หัวข้อ 4.4.2 และ 4.4.3 ตามลำดับ

4.4.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรมต้องการ

2

PLATE WITH INTERNAL HEAT GENERATION.
CRUDE MESH WITH 15 NODES AND 8 ELEMENTS.

NPOIN	NELEM
15	8
TK	THICK
1.	.1

NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES:

Node	U1	U2	U3	U4
1	0	0	0	0
2	0	0.12	0	0
3	0	0.8	0	0
4	0	0.9	0	0

5	1	1	0	0
6	1	1	0.85	0
7	1	1	1	0
8	1	0.85	1	0
9	1	0	1	0
10	0	0	0.9	0
11	0	0	0.8	0
12	0	0	0.12	0
13	0	0.08	0.08	0
14	0	0.2	0.2	0
15	0	0.5	0.5	0

ELEMENT NODAL CONNECTIONS AND HEAT LOADS:

1	1	2	13	12	1
2	2	3	14	13	1
3	3	4	15	14	1
4	15	4	5	6	1
5	15	6	7	8	1
6	15	8	9	10	1
7	10	11	14	15	1
8	11	12	13	14	1

4.4.2 ข้อมูลที่โปรแกรม HeatCF แสดงผลทางหน้าจอ

```
>> HeatCF
Enter the input file name: Exam_CH4.txt
The FE model includes the following heat transfer mode(s):
  >> Heat conduction
  >> Internal heat generation
--- The FE model consists of 15 nodes and 8 elements ---
Nodal temperature solutions [ 15]:
Node      Temperature
  1      3.000421e-001
  2      2.949540e-001
  3      1.310358e-001
  4      8.908350e-002
  5      0.000000e+000
  6      0.000000e+000
  7      0.000000e+000
  8      0.000000e+000
  9      0.000000e+000
 10      8.908350e-002
 11      1.310358e-001
 12      2.949540e-001
 13      2.970526e-001
 14      2.730569e-001
 15      1.816305e-001
```

4.4.3 ข้อมูลที่โปรแกรม HeatG แสดงผลทางหน้าจอ

```
>> HeatG
Enter the input file name: Exam_ch4.txt
The FE model includes the following heat transfer mode(s):
  >> Heat conduction
  >> Internal heat generation
--- The FE model consists of 15 nodes and 8 elements ---
Nodal temperature solutions [ 15]:
Node      Temperature
   1    3.000383e-001
   2    2.950585e-001
   3    1.364186e-001
   4    9.370927e-002
   5    0.000000e+000
   6    0.000000e+000
   7    0.000000e+000
   8    0.000000e+000
   9    0.000000e+000
  10    9.370927e-002
  11    1.364186e-001
  12    2.950585e-001
  13    2.969953e-001
  14    2.732728e-001
  15    1.816548e-001
```

4.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 ประกอบกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้อธิบายไว้ในบทที่ 2 มาทำการประดิษฐ์เป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิเพื่อความสะดวกและความถูกต้องของผลลัพธ์ โดยนำเสนอโปรแกรมสองโปรแกรมได้แก่ โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิด [HeatCF] และโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิม [HeatG] โดยได้อธิบายถึงลักษณะการทำงานของโปรแกรม ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรมต้องการ และแสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม ตลอดจนลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมแสดงผลทางหน้าจอ โดยรายละเอียดของโปรแกรมนั้นแสดงไว้ในภาคผนวก ข จากตัวอย่างของลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมแสดงผลจะเห็นได้ว่าทั้งสองโปรแกรมมีลักษณะคล้ายกันและให้ค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองโปรแกรมจะทำได้ทำการวิเคราะห์ในบทต่อไป

บทที่ 5

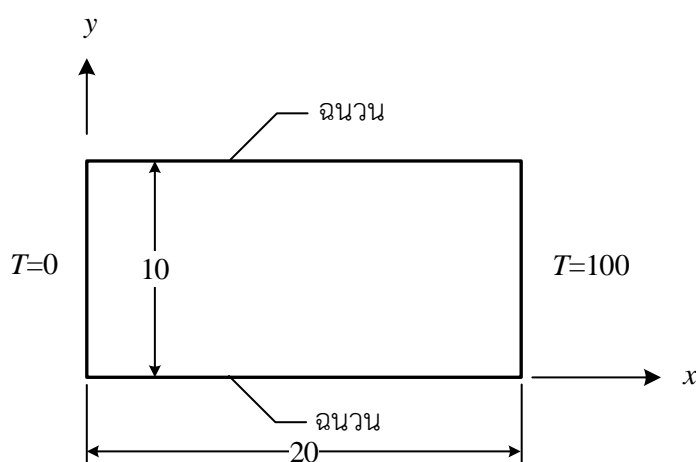
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

ในบทนี้จะแสดงการตรวจสอบความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในของแข็งซึ่งวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม จากนั้นทำการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ระหว่างวิธีรูปแบบปิด (Closed-form) ซึ่งประดิษฐ์จากสมการเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิดโดยใช้โปรแกรม [HeatCF] กับวิธีดั้งเดิม (Conventional) ซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์โดยใช้โปรแกรม [HeatG] ตลอดจนแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างสองวิธีด้วย

สำหรับ 2 ปัญหาแรกจะแสดงการตรวจสอบความถูกต้องโดยวิธีแพทช์เทสต์ (Patch Test) หลังจากนั้นจะนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแน่นอนตรง 4 ปัญหาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิม ปัญหาสุดท้ายจะนำโปรแกรมดังกล่าวไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนดังได้แสดงในบทนี้

5.1 ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น

แผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 10 หน่วย ยาว 20 หน่วย และหนา 0.1 หน่วย ถูกกำหนดอุณหภูมิให้มีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบด้านซ้าย อุณหภูมิตลอดขอบด้านขวาเท่ากับ 100 หน่วย ในขณะที่ตลอดขอบด้านบนและด้านล่างหุ้มฉนวน มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 หน่วย และไม่มีการผลิตความร้อนภายในแผ่นโลหะดังรูปที่ 5.1

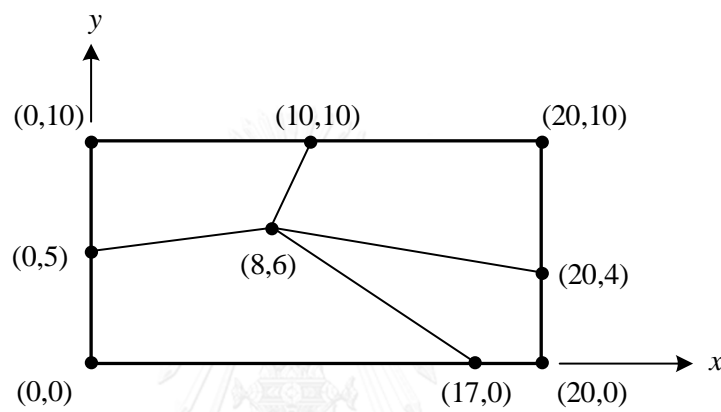


รูปที่ 5.1 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น

ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหานี้คือ

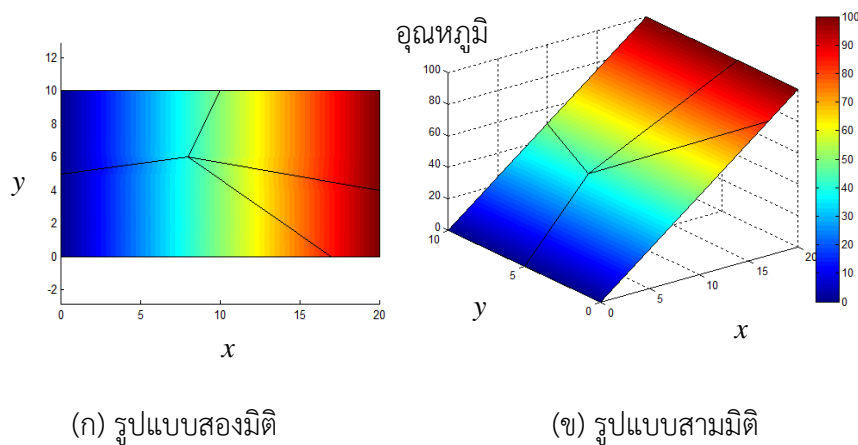
$$T(x, y) = 5x \quad (5.1)$$

ในปัญหานี้จะวิเคราะห์เพื่อดูการกระจายของอุณหภูมิโดยการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า 4 เอลิเมนต์ 9 จุดต่อ แล้วหาอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่า นั่นคือจุดต่อที่พิกัด (10,10), (8,6) และ (17,0) เพื่อดูความแม่นยำของผลลัพธ์ สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และค่าพิกัดที่จุดต่อต่าง ๆ แสดงไว้ดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 จุดต่อบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ภายหลังการวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นด้วยวิธีรูปแบบปิดทำให้ได้ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.3(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.3(ข) โดยค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าแสดงไว้ดังตารางที่ 5.1 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นยำตรง



(ก) รูปแบบสองมิติ

(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.3 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

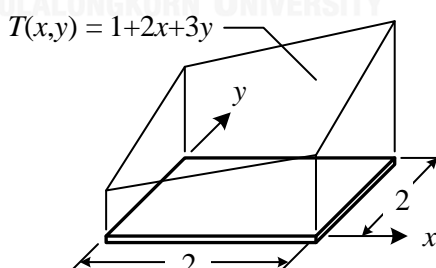
ตารางที่ 5.1 ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าของปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น

ตำแหน่งจุดต่อ (x, y)	อุณหภูมิ	
	ผลเฉลยแม่นยำตรง	วิธีรูปแบบปิด
(17,0)	85	85
(8,6)	40	40
(10,10)	50	50

ซึ่งสำหรับปัญหาที่มีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นในแนวแกน x นี้ไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์จำนวนมากในการวิเคราะห์ เนื่องจากสมการรูปแบบปิดถูกประดิษฐ์ขึ้นจากการสมมุติฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ที่มีลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นค่านั้นคือแปรผันเชิงเส้นตรงทั้งในแนวแกน x และ y ดังนั้นเมื่อวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะของผลเฉลยเป็นแบบเชิงเส้นด้วยวิธีรูปแบบปิดจึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำแม้จะวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อย

5.2 ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นคู่

แผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านเท่ากับ 2 หน่วย หนา 0.1 หน่วย มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 หน่วย ไม่มีการผลิตความร้อนภายในเอลิเมนต์และมีการกระจายของอุณหภูมิเป็นดังรูปที่ 5.4

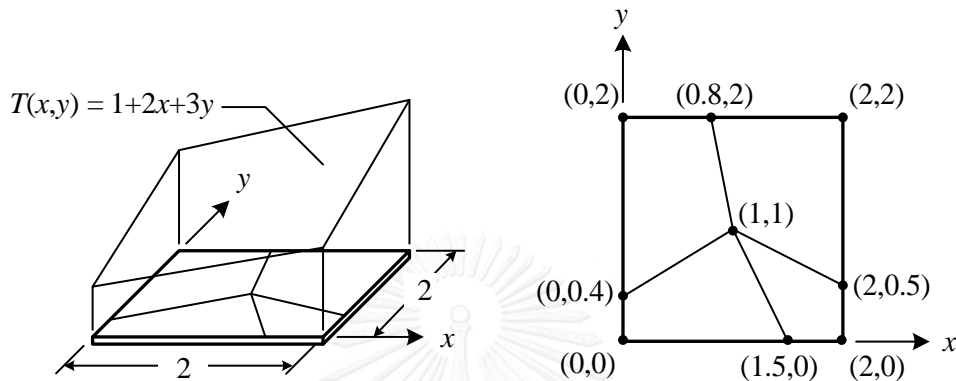


รูปที่ 5.4 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นคู่

ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหานี้คือ [25]

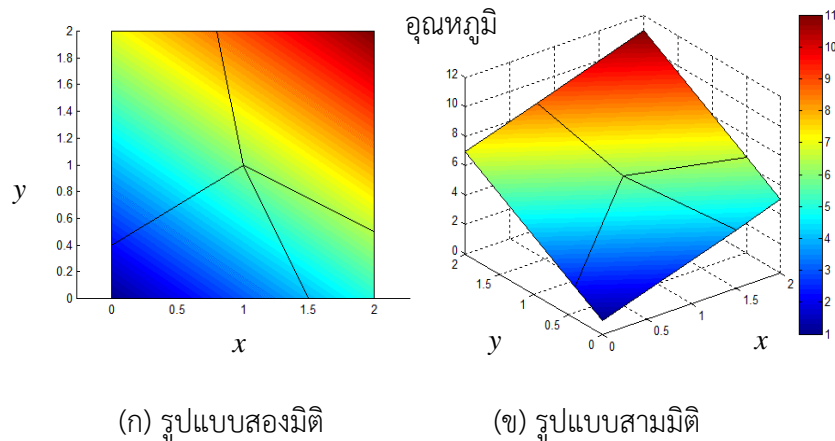
$$T(x, y) = 1 + 2x + 3y \quad (5.2)$$

ทำการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า 4 เอลิเมนต์ 9 จุดต่อ แล้วจึงวิเคราะห์เพื่อหาค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่า กล่าวคือจุด (1,1) ในรูปที่ 5.5 โดยกำหนดให้ขอบเขตทั้งสี่ด้านเป็นไปตามสมการ (5.2) จากนั้นจึงเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำเพื่อดูความแม่นยำของผลลัพธ์ สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และค่าพิกัดที่จุดต่อต่าง ๆ แสดงไว้ดังรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 จุดต่อบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัส

หลังจากวิเคราะห์ด้วยวิธีรูปแบบปิดทำให้ได้ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.6(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.6(ข) โดยค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าคือที่พิกัด (1,1) ค่าอุณหภูมิได้เท่ากับ 6 ซึ่งมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นยำ



รูปที่ 5.6 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

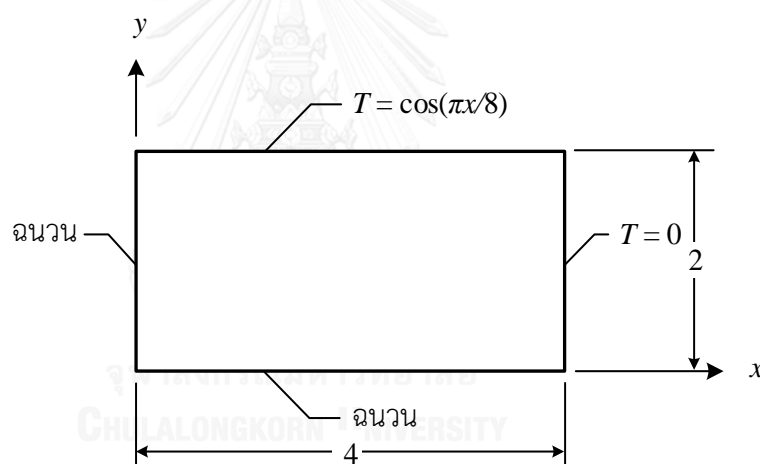
สำหรับปัญหานี้มีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นคู่ นั่นคือแปรผันเชิงเส้นตรงทั้งในแนวแกน x และ y ดังนั้นจึงวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อยด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับที่อธิบายในหัวข้อ 5.1 กล่าวคือ สมการรูปแบบปิดถูกประดิษฐ์ขึ้นจากการสมมติฟังก์ชันการประมาณภายใน

ของเอลิเมนต์ที่มีลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นคู่ ดังนั้นเมื่อนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหานี้จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำแม้จะวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อย

5.3 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบมีการกำหนดอุณหภูมิและถูกหุ้มฉนวน

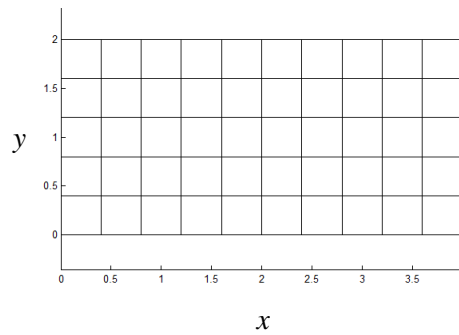
ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าภายในสถานะคงตัวโดยมีขนาดกว้าง 2 หน่วย ยาว 4 หน่วย และหนา 0.1 หน่วย ซึ่งถูกหุ้มฉนวนสองด้านและกำหนดอุณหภูมิสองด้าน โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในรูปที่ 5.7 ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการกระจายของอุณหภูมิในแผ่นคือ [26]

$$T(x, y) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad (5.3)$$



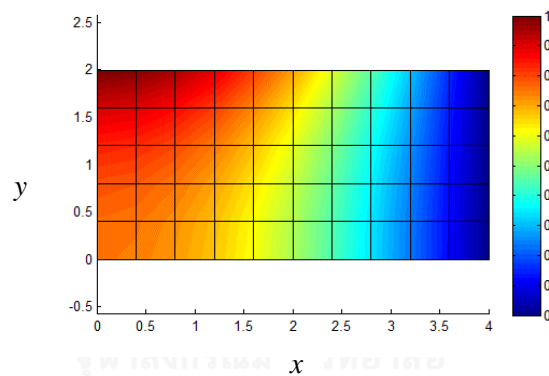
รูปที่ 5.7 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดอุณหภูมิที่ขอบและถูกหุ้มฉนวน

แบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D [27, 28] โดยแบ่งขอบเขตเป็น 50 เอลิเมนต์ 66 จุดต่อ ซึ่งจะได้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากโดยรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงได้ดังรูปที่ 5.8

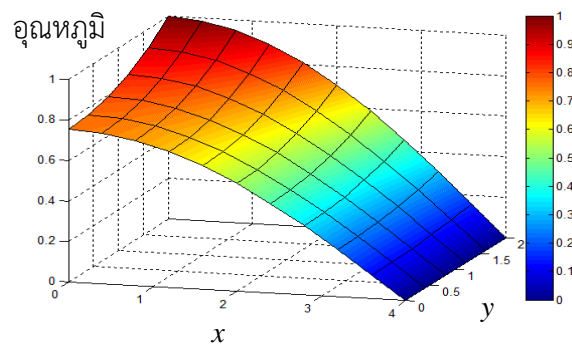


รูปที่ 5.8 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากนั้นทำการสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและทำการวิเคราะห์ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดแสดงให้เห็นว่าการกระจายของอุณหภูมิไม่สมมาตรโดยผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.9(ก) รูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.9(ข)



(ก) รูปแบบสองมิติ



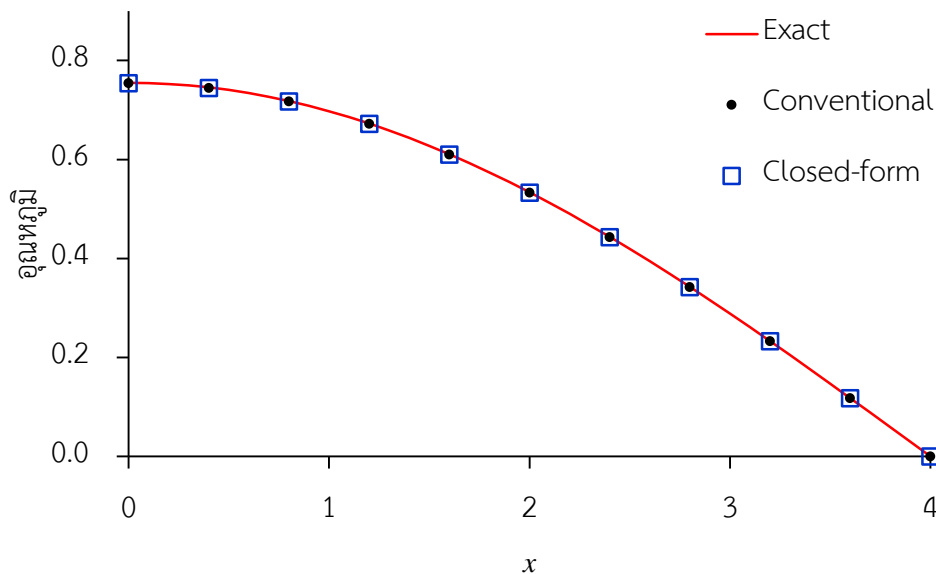
(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.9 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

จากนั้นเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมและวิธีรูปแบบปิด โดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$ ดังรูปที่ 5.10 แล้วเลือกจุดต่อที่มุมล่างซ้ายหรือตำแหน่ง (0,0) ซึ่งถูกหุ้มฉนวนมาพิจารณาเปรียบเทียบอุณหภูมิเพื่อตรวจสอบความแม่นยำของโปรแกรม โดยคำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (5.4)

$$\% \text{ ความคลาดเคลื่อน} = \left| \frac{T_{(x,y)} - T_{exact}}{T_{exact}} \right| \times 100 \quad (5.4)$$

ค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0,0) มีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนแสดงไว้ดังตารางที่ 5.2



รูปที่ 5.10 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบมีการกำหนดอุณหภูมิและถูกหุ้มฉนวน

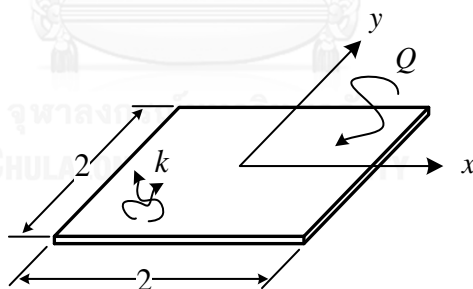
	อุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0,0)	% ความคลาดเคลื่อน	เวลาที่ใช้คำนวณ [K_c] (วินาที)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	0.75494		
วิธีดั้งเดิม	0.75414	0.10625	0.00390
วิธีรูปแบบปิด	0.75414	0.10625	0.00090

ผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าปัญหาที่มีรูปร่างและลักษณะกระจายของอุณหภูมิที่ไม่ซับซ้อนทำให้สามารถแบ่งเอลิเมนต์ได้อย่างเป็นระเบียบและการคำนวณโดยใช้วิธีรูปแบบปิดและวิธีดั้งเดิมให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำโดยวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาคำนวณน้อยกว่าซึ่งอธิบายได้ว่าสำหรับเอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกันจะใช้สมการในรูปแบบปิดที่อยู่ในรูปแบบเส้นและมีตัวแปรที่ต้องคำนวณน้อยลงจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่บิดเบี้ยวมากในขณะที่วิธีดั้งเดิมจะใช้เวลาในการคำนวณเท่ากันสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทุกกรณีเนื่องจากมีกระบวนการคำนวณเท่ากันที่จำนวนจุดเกาส์เดียวกัน

5.4 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเอง

ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะจัตุรัสขนาด 2×2 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 5.11 ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหาตัวอย่างของลักษณะข้อมูลนำเข้าและตัวอย่างการใช้โปรแกรมตลอดจนตัวอย่างการแสดงผลทางหน้าจอที่เสนอในหัวข้อ 4.3 และ 4.4 ในบทที่ 4 โดยแผ่นโลหะสามารถผลิตความร้อนตัวเองเท่ากับ 1 ภายในสถานะคงตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 อุณหภูมิรอบขอบนอกมีค่าเท่ากับศูนย์ มีผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาคือ [1]

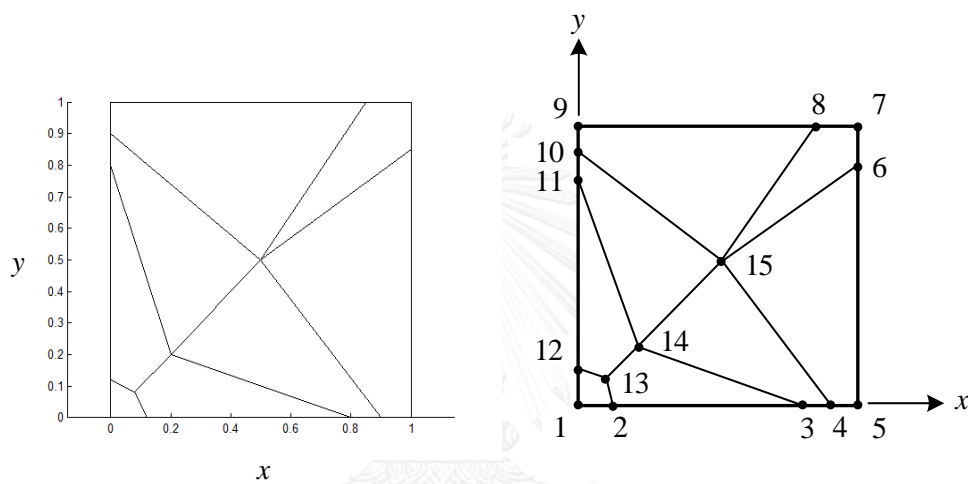
$$T(x, y) = \frac{(1-x^2)}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi x / 2) \cosh((2n+1)\pi y / 2)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi / 2)} \quad (5.5)$$



รูปที่ 5.11 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเอง

วิเคราะห์โดยใช้ขอบเขตเพียง $\frac{1}{4}$ ของขอบเขตทั้งหมดซึ่งวางตัวทางด้านขวาบนของแผ่นสี่เหลี่ยมเนื่องจากปัญหามีความสมมาตร เริ่มต้นวิเคราะห์ความแม่นยำของผลลัพธ์โดยแบ่งปัญหาเป็นเอลิเมนต์แบบหยาบด้วยเหตุผลที่ว่า การวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์แบบหยาบจะทำให้การจำลองผลลัพธ์ไม่สมจริงส่งผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนมากซึ่งในขั้นตอนนี้ต้องการให้เห็นความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ได้อย่างชัดเจนจึงทำการแบ่งเป็นเอลิเมนต์แบบหยาบโดยแบ่งเป็น 8 เอลิเมนต์ 15 จุดต่อ

นอกจากนี้ในการแบ่งเอลิเมนต์ในขั้นตอนนี้เลือกเอลิเมนต์ประเภท 2 และประเภท 3 ที่แสดงในหัวข้อ 3.4.1 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีความบิดเบี้ยวมากด้วยเหตุผลที่ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดและวิธีดั้งเดิมที่วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ประเภท 2 และประเภท 3 จะมีความแตกต่างของผลลัพธ์มากดังแสดงในรูปที่ 3.15 ดังนั้นเพื่อให้เห็นการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีได้อย่างชัดเจนจึงเลือกใช้เอลิเมนต์ประเภท 2 และประเภท 3 โดยรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงดังรูปที่ 5.12(ก) และหมายเลขเอลิเมนต์แสดงโดยละเอียดไว้ในรูปที่ 4.4(ข)

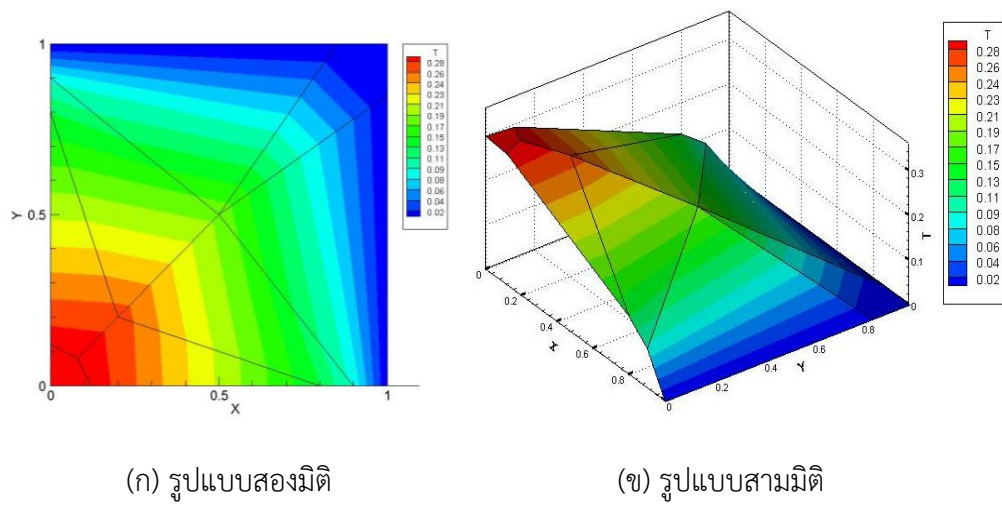


(ก) รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) หมายเลขจุดต่อ

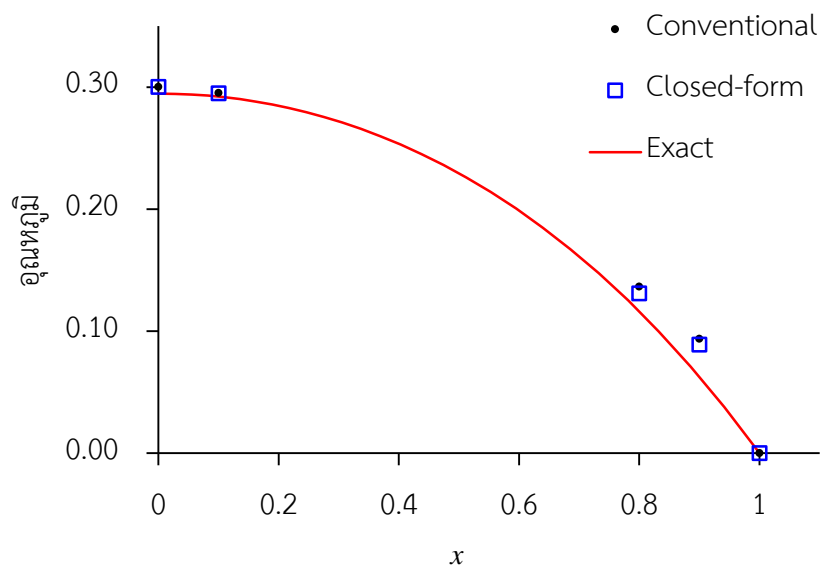
รูปที่ 5.12 การแบ่งเอลิเมนต์แบบหยาบสำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเอง

สร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและทำการวิเคราะห์ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดของการกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.13(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.13(ข)



รูปที่ 5.13 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

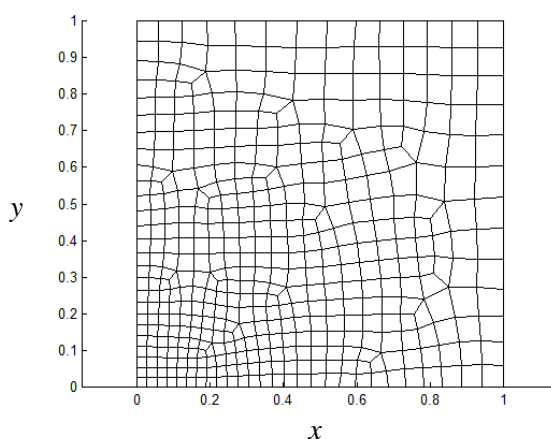
จากนั้นพิจารณาความแม่นยำของผลลัพธ์โดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$ ดังแสดงในรูปที่ 5.14 และเพื่อแสดงให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีอย่างชัดเจนจึงแสดงผลการคำนวณอุณหภูมิที่จุดต่อในแนวแกน x ที่ $y=0$ ด้วยวิธีต่าง ๆ และแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนซึ่งคำนวณจากสมการ (5.4) ไว้ดังตารางที่ 5.3 โดยตำแหน่งจุดต่อเป็นดังรูปที่ 5.12(ข)

รูปที่ 5.14 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$

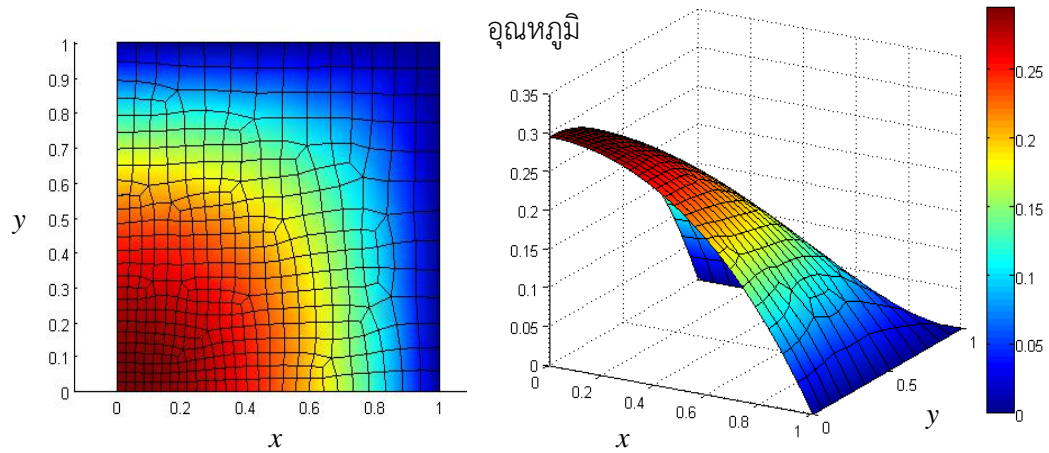
ตารางที่ 5.3 ผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าและการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเอง

จุดต่อ	อุณหภูมิ			% ความคลาดเคลื่อน	
	ผลเฉลยแม่นยำตรง	วิธีรูปแบบปิด	วิธีดั้งเดิม	วิธีรูปแบบปิด	วิธีดั้งเดิม
1	0.29469	0.30004	0.30004	1.82	1.82
2	0.29108	0.29495	0.29506	1.33	1.37
3	0.11617	0.13104	0.13642	12.80	17.43
4	0.06267	0.08908	0.09371	42.15	49.53
5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00	0.00

ผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อในแนวแกน x ที่ $y=0$ แสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดแม่นยำมากกว่าวิธีดั้งเดิมโดยมีความแตกต่างของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงถึง 7.38 % ที่จุดต่อ 4 และเพื่อให้เห็นถึงการจำลองการกระจายของอุณหภูมิที่ถูกต้องสำหรับปัญหานี้จึงทำการแบ่งเป็นเอลิเมนต์อย่างละเอียดซึ่งแบ่งเป็น 421 เอลิเมนต์ 462 จุดต่อ ซึ่งจะได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าไว้ระเบียนดังแสดงในรูปที่ 5.15 โดยผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดของการกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.16(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.16(ข)



รูปที่ 5.15 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเองแบบละเอียด

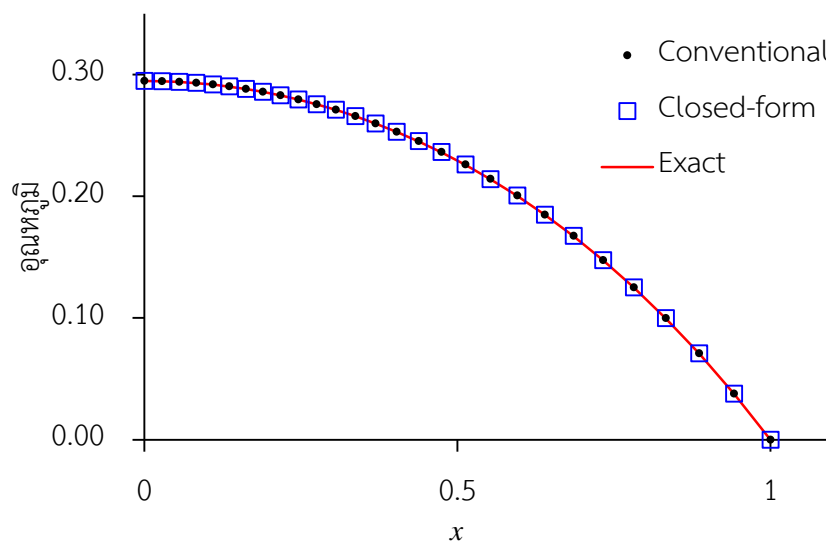


(ก) รูปแบบสองมิติ

(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.16 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

จากนั้นเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมและวิธีรูปแบบปิด โดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$ ดังรูปที่ 5.17 โดยอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางของปัญหาหรือตำแหน่ง $(0,0)$ มีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนแสดงไว้ดังตารางที่ 5.7 ซึ่งกราฟแสดงให้เห็นว่าค่าทั้งสองวิธีให้ค่าเท่ากันซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันกับผลเฉลยแม่นยำตรงตลอดระยะในแนวแกน x ที่ $y=0$ สำหรับการเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนน้อยกว่าวิธีดั้งเดิม

รูปที่ 5.17 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=0$

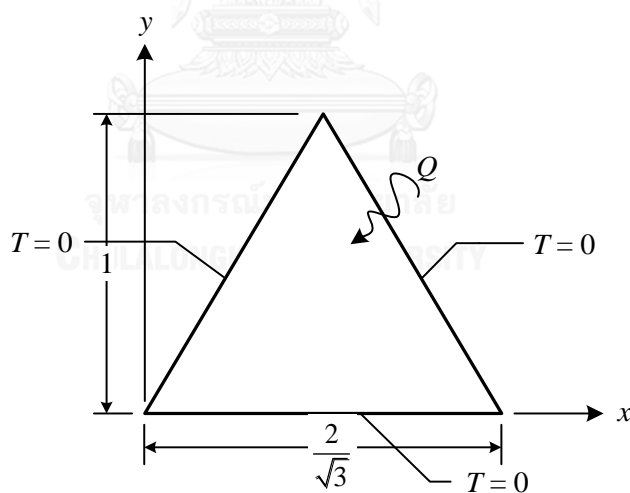
ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ผลิตความร้อนตัวเอง

	อุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0,0)	% ความคลาดเคลื่อน	เวลาที่ใช้คำนวณ [K_c] (วินาที)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	0.29469		
วิธีดั้งเดิม	0.29473	0.01333	0.03023
วิธีรูปแบบปิด	0.29473	0.01333	0.01284

5.5 ปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนตัวเอง

แผ่นโลหะสามเหลี่ยมด้านเท่าสามารถผลิตความร้อน Q ได้เอง มีอุณหภูมิตลอดขอบเท่ากับ ศูนย์ และมีขนาดดังแสดงในรูปที่ 5.18 ผลเฉลยแม่นยำตรงของอุณหภูมิสำหรับปัญหานี้คือ [29]

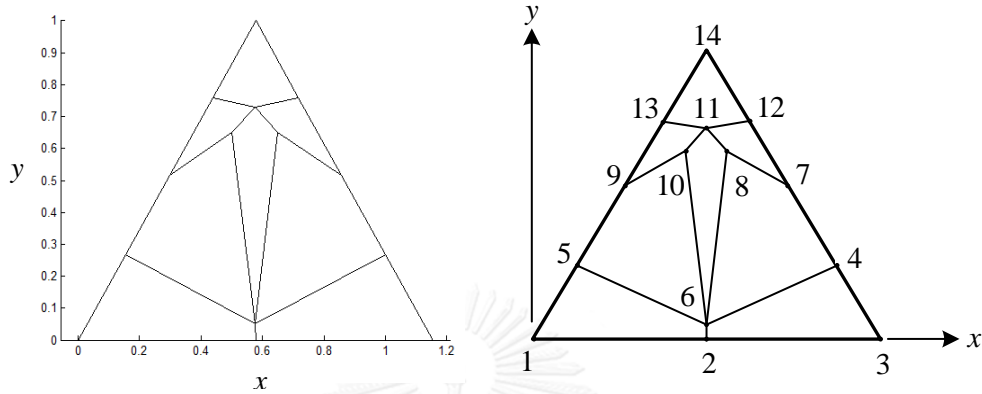
$$T(x, y) = \frac{Q}{4k} (y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \quad (5.6)$$



รูปที่ 5.18 แผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนตัวเอง

วิเคราะห์โดยแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ และเพื่อให้เห็นความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ได้อย่างชัดเจนจึงวิเคราะห์โดยแบ่งเป็นเอลิเมนต์แบบหยาบประกอบด้วยเลือกเอลิเมนต์ประเภท 2 และประเภท 3 ที่แสดงในหัวข้อ 3.4.1 ด้วยเหตุผลดังที่ได้อธิบายไว้ในหัวข้อ 5.4

สำหรับขั้นตอนนี้จะวิเคราะห์ความแม่นยำของผลลัพธ์อุณหภูมิที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าภายในโดเมนของปัญหาที่คำนวณโดยวิธีดั้งเดิมและวิธีรูปแบบปิด โดยแบ่งเป็น 8 เอลิเมนต์ 14 จุดต่อ ดังรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปที่ 5.19(ก) และหมายเลขจุดต่อแสดงดังในรูปที่ 5.19(ข)

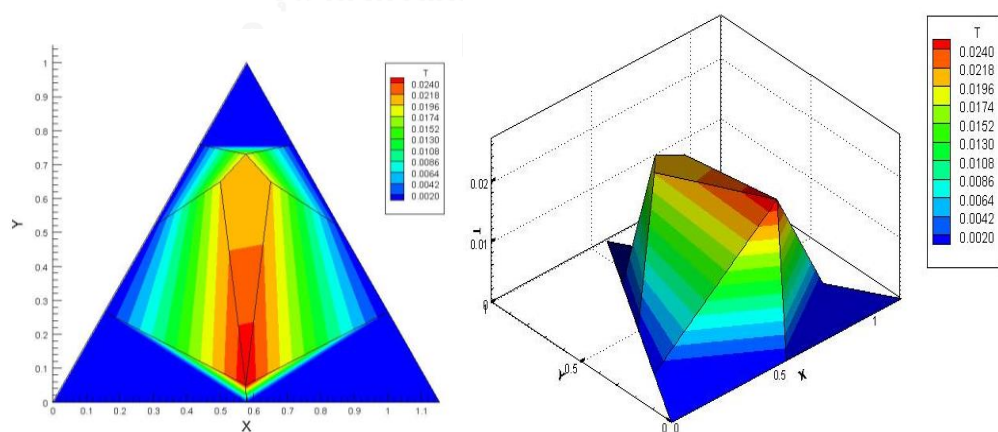


(ก) รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) หมายเลขจุดต่อ

รูปที่ 5.19 การแบ่งเอลิเมนต์แบบหยาบสำหรับปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

สร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและทำการวิเคราะห์ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดของการกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.20(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.20(ข)

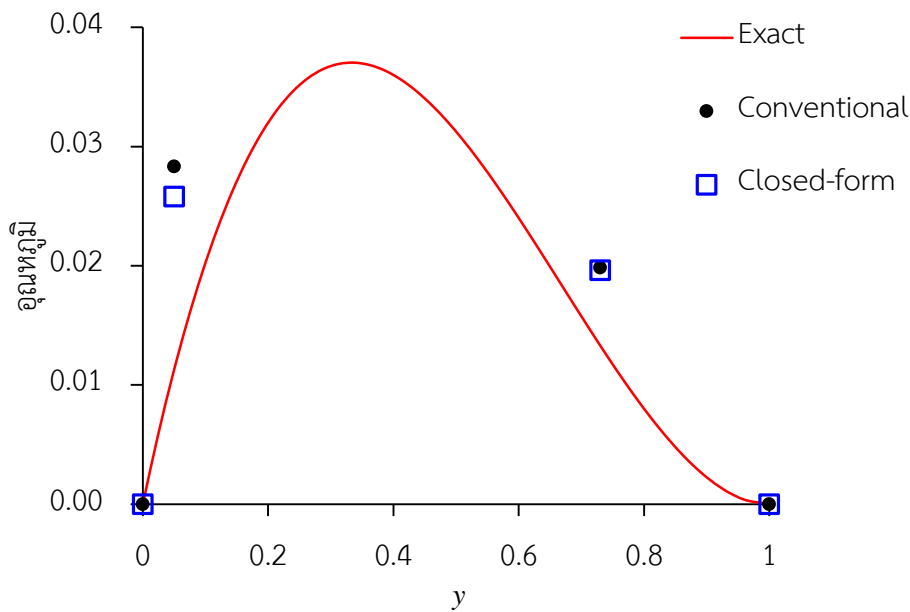


(ก) รูปแบบสองมิติ

(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.20 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

จากนั้นพิจารณาความแม่นยำของผลลัพธ์โดยพล็อตกราฟการกระจายของอนุกรมในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังแสดงในรูปที่ 5.21 และเพื่อแสดงให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีอย่างชัดเจนจึงแสดงผลการคำนวณอนุกรมที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าซึ่งอยู่ในแผ่นสามเหลี่ยมด้วยวิธีต่าง ๆ และแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนซึ่งคำนวณจากสมการ (5.4) ไว้ดังตารางที่ 5.5

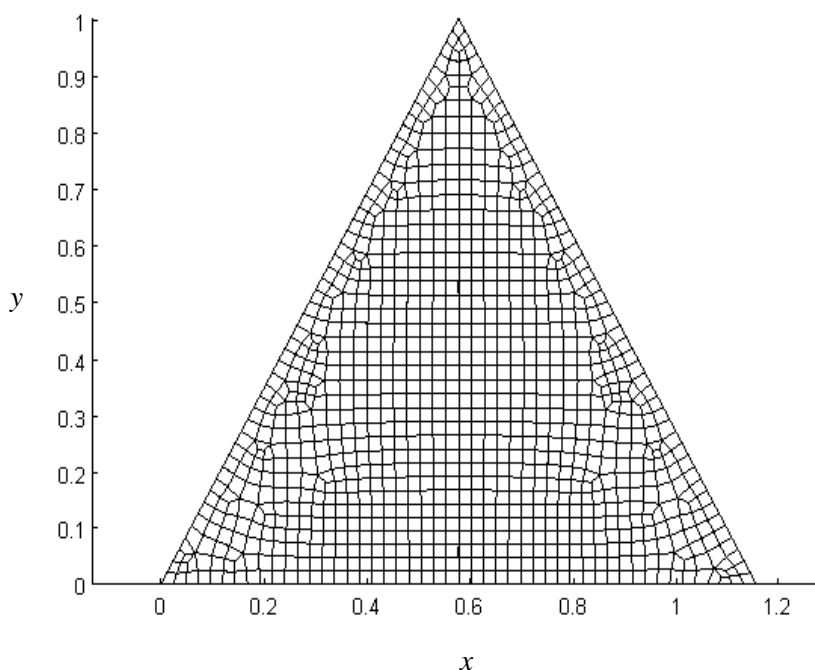


รูปที่ 5.21 การกระจายของอนุกรมในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

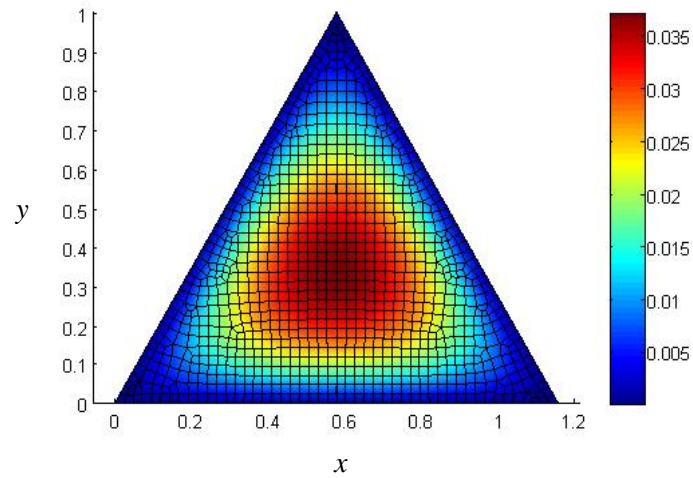
ตารางที่ 5.5 ผลลัพธ์อนุกรมที่จุดต่อที่ไม่ทราบค่าและการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ของแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

จุดต่อ	อนุกรม			% ความคลาดเคลื่อน	
	ผลเฉลยแม่นยำตรง	วิธีรูปแบบปิด	วิธีดั้งเดิม	วิธีรูปแบบปิด	วิธีดั้งเดิม
6	0.01128	0.02580	0.02832	128.72	151.03
8	0.01733	0.02005	0.02025	15.68	16.81
10	0.01699	0.01977	0.01996	16.34	17.49
11	0.01330	0.01962	0.01984	47.48	49.16

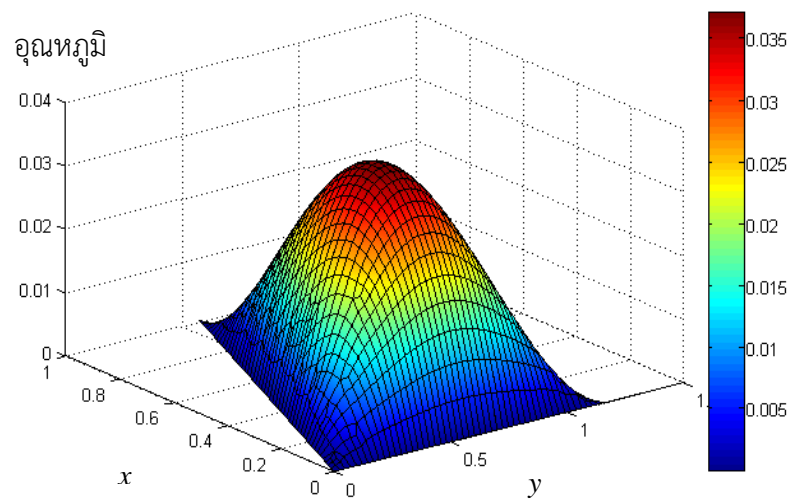
ผลลัพธ์ของอนุกรมที่จุดต่อแสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดแน่นยำมากกว่าวิธีดั้งเดิมโดยมีความแตกต่างของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงถึง 22.31 % ที่จุดต่อ 6 และเพื่อให้เห็นถึงการจำลองการกระจายของอนุกรมที่ถูกต้องสำหรับปัญหานี้จึงทำการวิเคราะห์อีกครั้งโดยแบ่งเป็น 996 เอลิเมนต์ 1069 จุดต่อ ซึ่งจะได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไร้ระเบียบที่ละเอียดมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 5.22 ผลลัพธ์การกระจายของอนุกรมในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.23(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.23(ข)



รูปที่ 5.22 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสามเหลี่ยม



(ก) รูปแบบสองมิติ

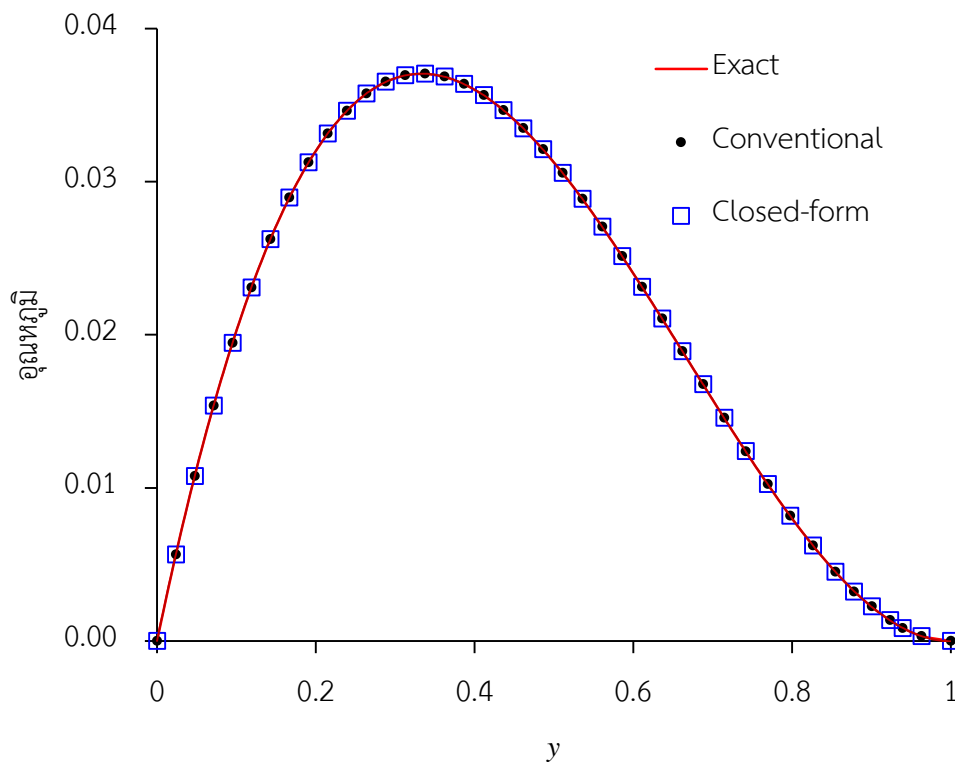


(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.23 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

หลังจากนั้นเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมและวิธีรูปแบบปิดโดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังรูปที่ 5.24 เลือกจุดต่อที่มีอุณหภูมิสูงที่สุดนั่นคือที่ประมาณจุดกึ่งกลางของแผ่นสามเหลี่ยมหรือที่พิกัด $(0.6, 0.5)$ เพื่อพิจารณาตรวจสอบความแม่นยำของโปรแกรม โดยการคำนวณวิธีรูปแบบปิดให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าวิธีดั้งเดิม ในขณะที่ใช้เวลาน้อยกว่า และแสดงให้เห็นว่าปัญหานี้ต้องการการแบ่งเอลิเมนต์แบบละเอียดจึงจะ

สามารถจำลองได้ใกล้เคียงกับลักษณะการกระจายของอุณหภูมิมากที่สุด ซึ่งค่าผลต่างอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.6,0.5) เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเทียบกับผลเฉลยแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนแสดงไว้ดังตารางที่ 5.6



รูปที่ 5.24 การกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน y ที่ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

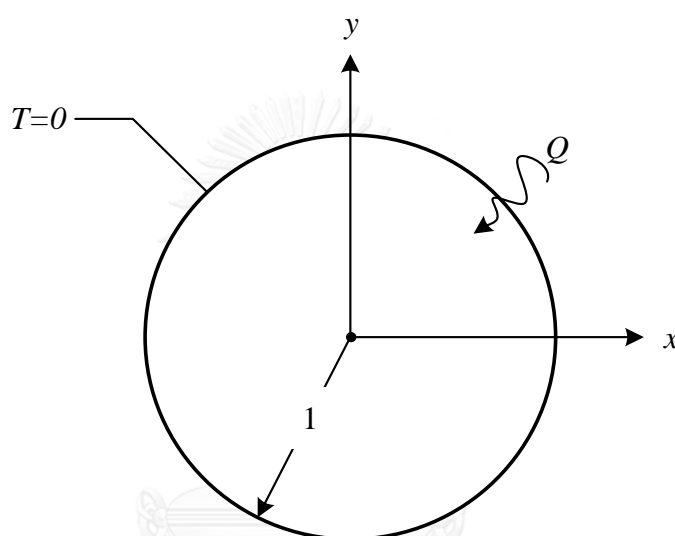
ตารางที่ 5.6 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

	ผลต่างอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.6,0.5) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำ	% ความคลาดเคลื่อน	เวลาที่ใช้คำนวณ [K_c] (วินาที)
วิธีดั้งเดิม	1.70775×10^{-5}	0.05591	0.06800
วิธีรูปแบบปิด	1.55075×10^{-5}	0.05077	0.05113

5.6 ปัญหาแผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนตัวเอง

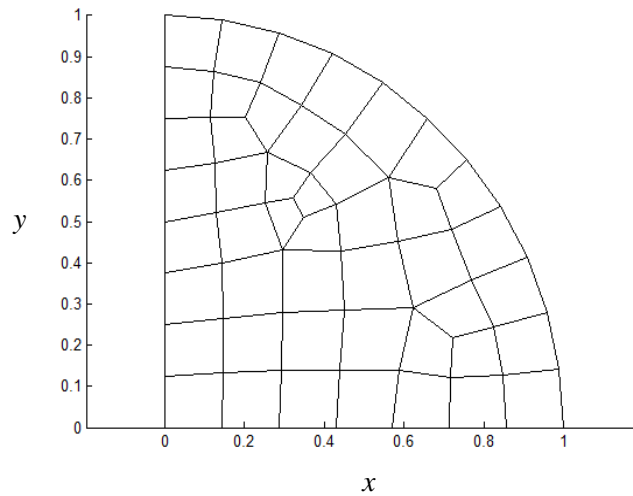
ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย หนา 0.1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 5.25 โดยที่แผ่นสามารถผลิตความร้อน Q ได้เองภายในสถานะคงตัวโดยมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแผ่นวงกลมเท่ากับ k อุณหภูมิตลอดขอบนอกของแผ่นมีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้ $\frac{Q}{k} = 20$ ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการกระจายอุณหภูมิในแผ่นคือ [30]

$$T(x, y) = 5(1 - x^2 - y^2) \quad (5.7)$$



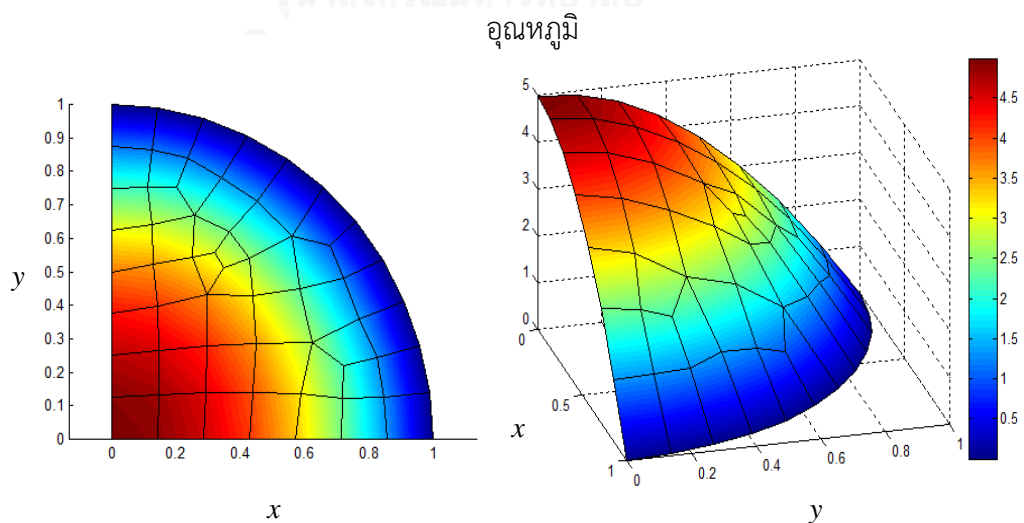
รูปที่ 5.25 แผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนตัวเอง

วิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ขอบเขตเพียง $\frac{1}{4}$ ของขอบเขตทั้งหมดทางด้านขวาบนของแผ่นวงกลม เนื่องจากปัญหามีความสมมาตร แบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D โดยแบ่งขอบเขตเป็น 46 เอลิเมนต์ 60 จุดต่อ ซึ่งจะได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าไว้ระเบียนดังแสดงในรูปที่ 5.26



รูปที่ 5.26 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของครึ่งวงกลมของแผ่นวงกลม

สร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าจากข้อมูลที่ได้จากโปรแกรม AUTOMESH-2D และทำการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดแสดงให้เห็นว่าที่จุดกึ่งกลางหรือตำแหน่ง $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ของแผ่นวงกลมจะมีอุณหภูมิสูงสุดและอุณหภูมิจะลดลงตามแนวรัศมีจนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ขอบ ซึ่งสำหรับปัญหานี้ไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่ละเอียดมากก็สามารถจำลองการกระจายของอุณหภูมิได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงโดยผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.27(ก) รูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.27(ข)

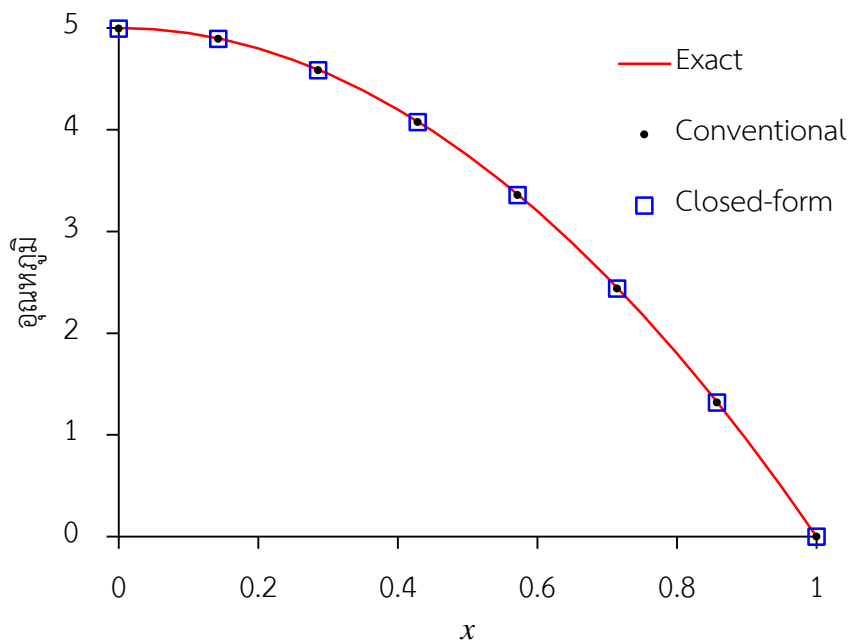


(ก) รูปแบบสองมิติ

(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.27 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ

จากนั้นเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีดั้งเดิมและวิธีรูปแบบปิด โดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีที่ $y=0$ ดังรูปที่ 5.28 ค่าอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางหรือตำแหน่ง $(0,0)$ มีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์ของการนำความร้อนแสดงไว้ดังตารางที่ 5.7



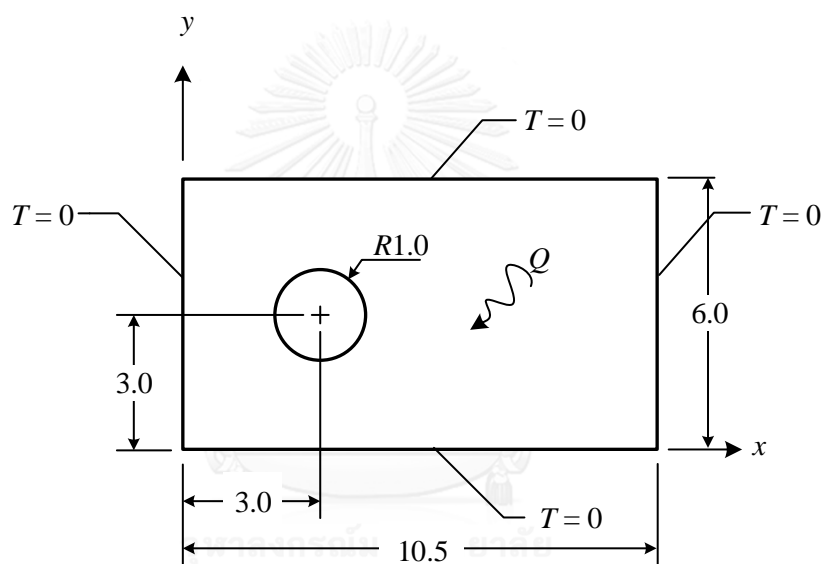
รูปที่ 5.28 การกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีที่ $y=0$

ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของแผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง

	อุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0,0)	% ความคลาดเคลื่อน	เวลาที่ใช้คำนวณ [K_c] (วินาที)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	5.00000		
วิธีดั้งเดิม	4.99572	0.08570	0.00406
วิธีรูปแบบปิด	4.99573	0.08546	0.00292

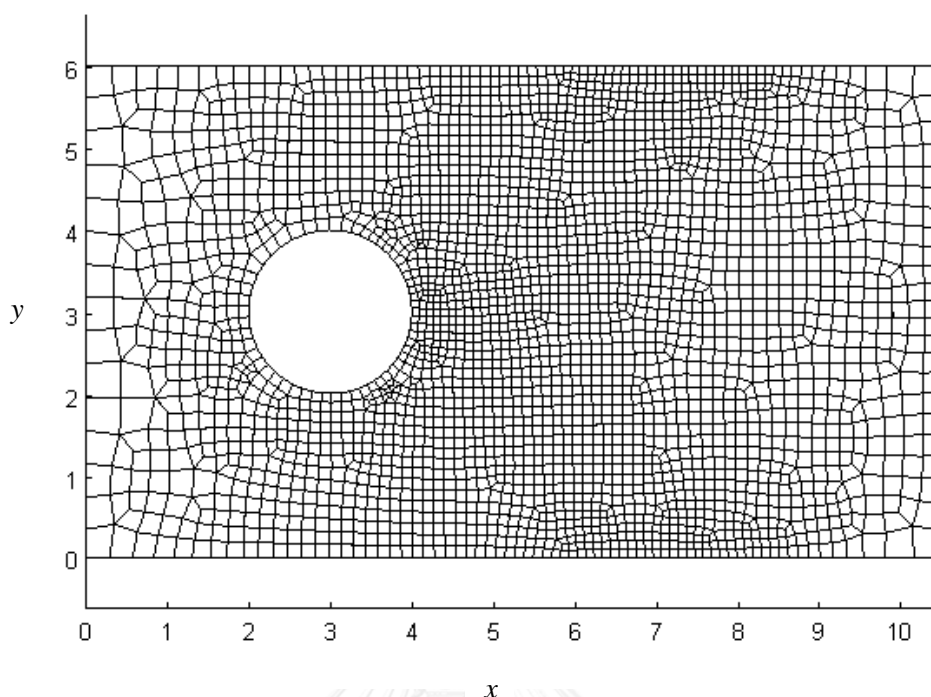
5.7 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายในและผลิตความร้อนได้เอง

ปัญหาการนำความร้อนภายในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายในเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนขึ้นมาอีกระดับหนึ่งซึ่งลักษณะของปัญหาแสดงไว้ดังรูปที่ 5.29 กำหนดให้ขอบภายนอกของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสี่ด้านมีอุณหภูมิเป็นศูนย์ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเท่ากับ 40 วัตต์ต่อเมตร-องศาเซลเซียส มีความหนาเท่ากับ 0.1 เมตร และอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองเท่ากับ 10 วัตต์ต่อลูกบาศก์เมตรตลอดทั้งแผ่นสี่เหลี่ยม โดยจะวิเคราะห์เพื่อหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิใน 2 กรณีซึ่งมีข้อแตกต่างคือกรณีที่ 1 กำหนดอุณหภูมิที่ขอบของรูกลมเป็นศูนย์ส่วนกรณีที่ 2 หุ้มฉนวนตลอดขอบของรูกลม [31]



รูปที่ 5.29 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายใน

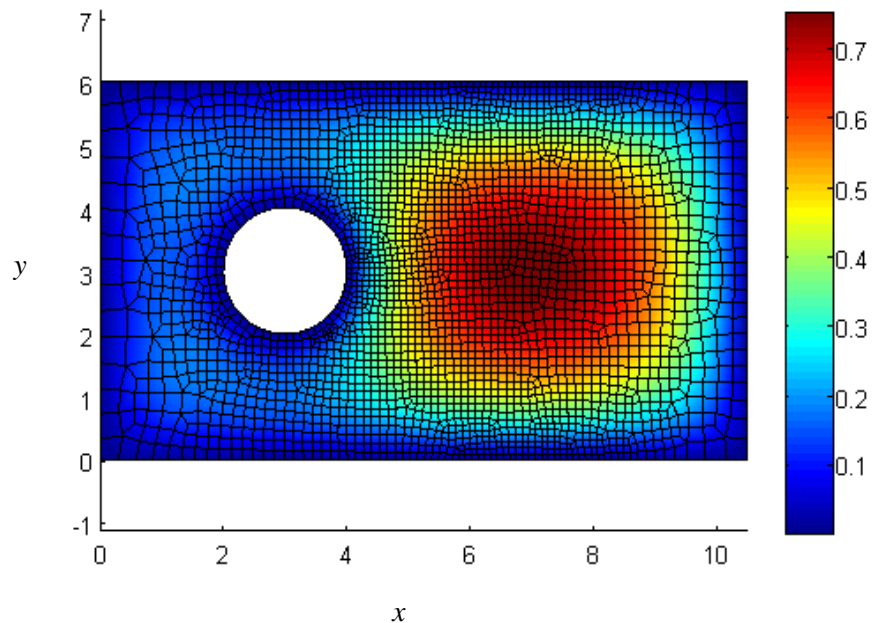
เริ่มต้นวิเคราะห์โดยแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D เนื่องจากปัญหามีรูปร่างซับซ้อนจึงใช้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดโดยแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็น 2831 เอลิเมนต์ 2931 จุดต่อ ลักษณะการวางตัวของเอลิเมนต์จะค่อนข้างไร้ระเบียบและเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีความละเอียดมากบริเวณกลางแผ่นสี่เหลี่ยมและรอบรูกลมเนื่องจากเป็นบริเวณที่คาดว่าจะมีความชันของอุณหภูมิสูงและเป็นบริเวณที่ขอบเขตของปัญหามีความซับซ้อน [32] ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 5.30 โดยจะใช้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์นี้กับปัญหาทั้งสองกรณี



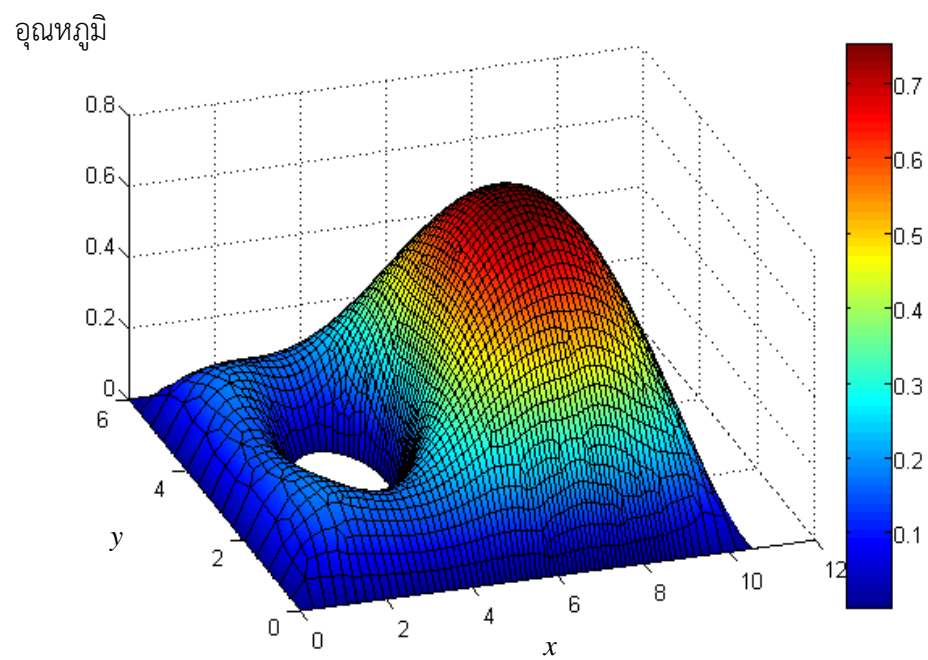
รูปที่ 5.30 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายใน

5.7.1 อุณหภูมิที่ขอบของรูกลมเป็นศูนย์

กรณีนี้ขอบของปัญหาและขอบรูกลมถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิเท่ากับศูนย์ เริ่มต้นโดยสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีรูปแบบปิด ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.31(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.31(ข) เนื่องด้วยปัญหาไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรงจึงได้ตรวจสอบความแม่นยำกับวิธีดั้งเดิมโดยพล็อตกราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=3$ ซึ่งเป็นแนวเส้นที่แบ่งรูปสามเหลี่ยมเป็นสองส่วนอย่างสมมาตรกัน ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าตรงกันโดยกราฟจะเป็นลักษณะเส้นโค้งคว่ำสองเส้นและมีช่วงระยะ x ช่วงหนึ่งที่ไม่มีข้อมูลอุณหภูมิปรากฏในกราฟเนื่องจากเป็นช่วงของรูกลมภายในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 5.32 และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีดั้งเดิมซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 5.8

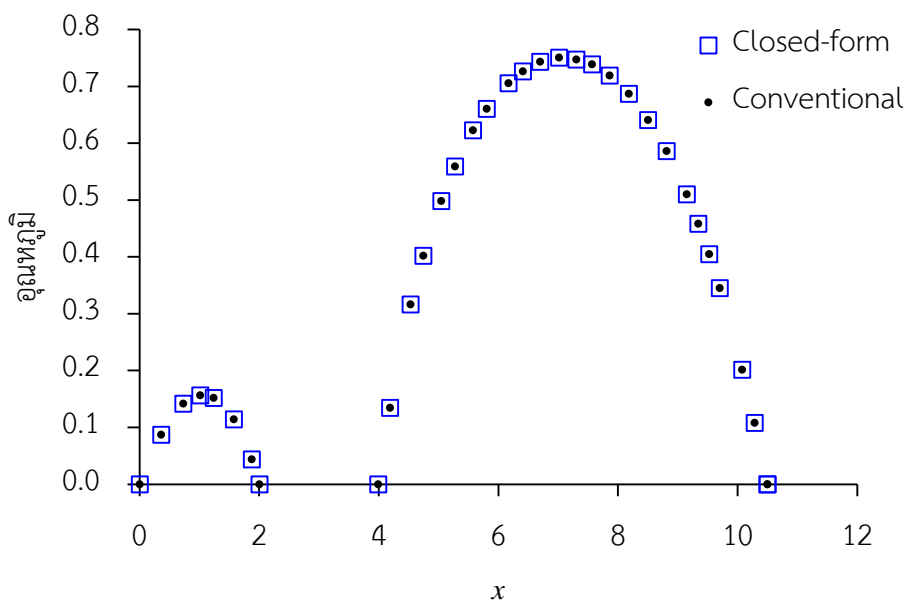


(ก) รูปแบบสองมิติ



(ข) รูปแบบสามมิติ

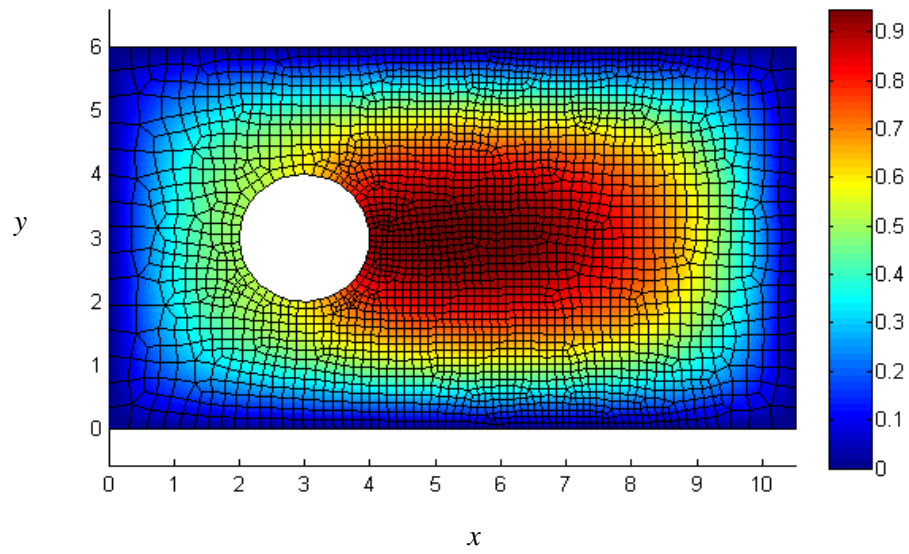
รูปที่ 5.31 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ



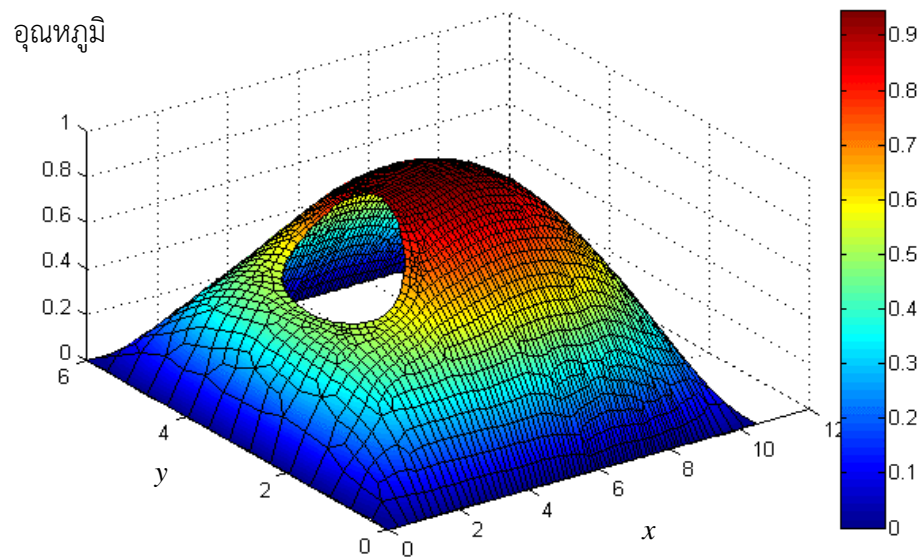
รูปที่ 5.32 การกระจายของอรรถภูมิในแนวแกน x ที่ $y=3$

5.7.2 หุ้มฉนวนตลอดขอบของรูกลม

กรณีนี้ขอบของปัญหามีอรรถภูมิเท่ากับศูนย์และขอบรูกลมเป็นผนังแบบหุ้มฉนวน เริ่มต้นโดยสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีรูปแบบปิด ผลลัพธ์การกระจายของอรรถภูมิในรูปแบบสองมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.33(ก) และรูปแบบสามมิติแสดงได้ดังรูปที่ 5.33(ข) เนื่องจากปัญหาไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรงจึงได้ตรวจสอบความแม่นยำกับวิธีดั้งเดิมโดยพล็อตกราฟการกระจายของอรรถภูมิในแนวแกน x ที่ $y=3$ ซึ่งเป็นแนวเส้นที่แบ่งรูปสามเหลี่ยมเป็นสองส่วนอย่างสมมาตรกัน ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าตรงกันโดยกราฟจะมีลักษณะเหมือนเส้นโค้งเดียวกันแต่ขาดช่วงซึ่งนั่นคือช่วงที่เป็นรูกลมภายในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 5.34 และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีดั้งเดิมซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 5.8

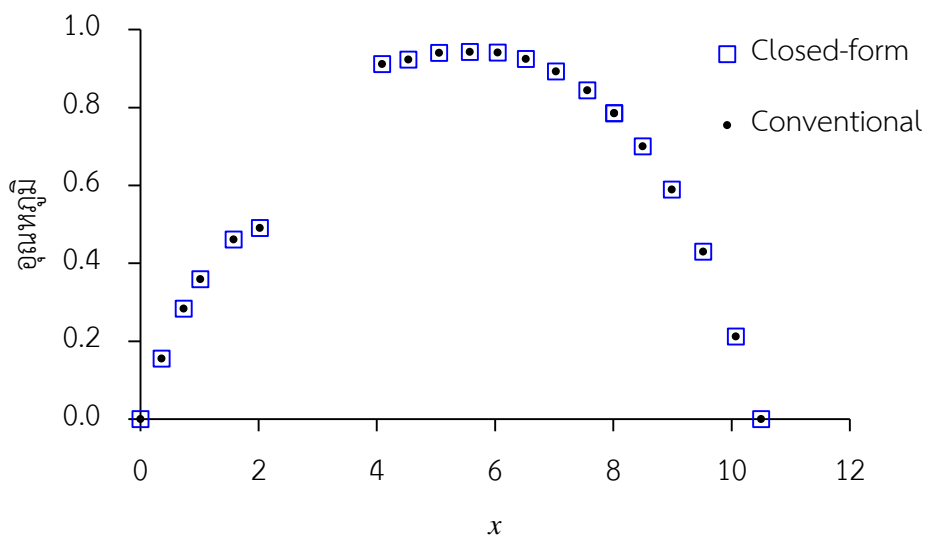


(ข) รูปแบบสองมิติ



(ข) รูปแบบสามมิติ

รูปที่ 5.33 ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิ



รูปที่ 5.34 กราฟการกระจายของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ $y=3$

ตารางที่ 5.8 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมอยู่ภายในและผลิตความร้อนได้เอง

กรณี	เวลาที่ใช้คำนวณ [K_c] (วินาที)	
	วิธีดั้งเดิม	วิธีรูปแบบปิด
อุณหภูมิที่ขอบของรูกลมเป็นศูนย์	0.223277	0.152209
หุ้มฉนวนตลอดขอบของรูกลม	0.214911	0.152299

5.8 บทสรุป

ในบทนี้เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยการตรวจสอบกับปัญหาที่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง เปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์และโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิด ตลอดจนเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างสองวิธีด้วย ซึ่งเริ่มต้นวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีแพทช์ทดสอบจากนั้นจึงทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นยำแล้วจึงนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

สำหรับปัญหาที่มีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นและแบบเชิงเส้นคู่ นั่นคือแปรผันเชิงเส้นตรงในแนวแกน x หรือ y หรือทั้งในแนวแกน x และ y ดังเช่นปัญหาในหัวข้อ

5.1 และ 5.2 สามารถวิเคราะห์โดยวิธีรูปแบบปิดโดยใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อยเนื่องจากสมการรูปแบบปิดถูกประดิษฐ์ขึ้นจากการสมมติฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ที่มีลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นคู่ ดังนั้นเมื่อนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาลักษณะนี้จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำแม้จะวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อย

ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่ไม่ซับซ้อนใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบหยาก็สามารถให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำได้ดังเช่นปัญหาในหัวข้อ 5.3 และ 5.6 แต่สำหรับบางปัญหาการแบ่งเอลิเมนต์แบบหยอาจส่งผลให้ผลลัพธ์อุณหภูมิมีความคลาดเคลื่อนสูงซึ่งหากต้องการให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำมากขึ้นทำได้โดยแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียดยิ่งขึ้นดังเช่นปัญหาในหัวข้อ 5.4 และ 5.5 นอกจากนี้สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรอาจลดหน่วยความจำในการคำนวณและเวลาที่ใช้ในการคำนวณได้โดยวิเคราะห์เพียงบางส่วนของปัญหา

ผลการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในบทนี้สามารถสรุปได้ว่า การวิเคราะห์โดยใช้สมการรูปแบบปิดมีความแม่นยำมากกว่าวิธีดั้งเดิมและใช้เวลาน้อยกว่าวิธีดั้งเดิมโดยวิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาในการคำนวณไม่เท่ากันภายใต้การวิเคราะห์ปัญหาที่มีเอลิเมนต์หรือจุดต่อจำนวนเท่ากัน ทั้งนี้เนื่องจากเวลาในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดจะขึ้นอยู่กับลักษณะของเอลิเมนต์ที่เลือกใช้ซึ่งมีทั้งหมดสี่กรณี ดังที่อธิบายไว้ที่ภาคผนวก ก เนื่องจากสมการหลักของแต่ละกรณีมีความยาวและซับซ้อนต่างกัน โดยหากเลือกใช้เอลิเมนต์กรณี 4 ซึ่งมีสมการหลักที่ยาวและซับซ้อนมากที่สุดจะส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการเลือกใช้เอลิเมนต์กรณี 1 ซึ่งมีสมการหลักที่ซับซ้อนน้อยที่สุด ตัวอย่างเช่นปัญหาในหัวข้อ 5.3 ที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อมากกว่าปัญหาในหัวข้อ 5.6 แต่ใช้เวลาการคำนวณโดยวิธีรูปแบบปิดน้อยกว่าปัญหาในหัวข้อ 5.6 ซึ่งการวิเคราะห์ที่สามารถประหยัดเวลาได้เช่นนี้จะเป็ประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการประหยัดเวลาดังเช่นปัญหาที่มีการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive meshing technique) ซึ่งมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ตามการเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของคำตอบ

บทที่ 6

บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ซึ่งสำหรับปัญหาโดยทั่วไปจำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าเพื่อจะได้จำลองรูปร่างของปัญหาให้ใกล้เคียงที่สุด ที่ผ่านมามีเทคนิคของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยตรงเนื่องจากสมการมีความซับซ้อนมาก กระบวนการปกติซึ่งเป็นวิธีดั้งเดิมในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนจะประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre integration formulas) เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลย ผลการอินทิเกรตที่ได้จะแม่นยำมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันที่อินทิเกรตและจำนวนของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต ซึ่งในบางปัญหาหากต้องการผลเฉลยที่แม่นยำสูงจะต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ซึ่งมีผลทำให้กระบวนการคำนวณต้องมีการทำซ้ำมากขึ้น นอกจากนี้ในปัญหาที่ต้องการความแม่นยำสูงจำเป็นต้องแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์จำนวนมากซึ่งส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย วิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำเสนอรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งใช้โปรแกรมทางด้านการคำนวณและคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการวิเคราะห์ โดยมีจุดประสงค์เพื่อหลีกเลี่ยงความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลขและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งจากการประเมินเมทริกซ์ของการนำความร้อนในรูปแบบปิดโดยวิเคราะห์เปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิมซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากกว่าวิธีดั้งเดิมและใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า โดยวิทยานิพนธ์มีรายละเอียดที่สำคัญดังนี้

ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติด้วยการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในบทที่ 2 ได้แสดงถึงความหมายและขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มตั้งแต่การแบ่งรูปร่างของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นจึงคำนวณหาค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อ โดยได้แสดงขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างอย่างละเอียด ตลอดจนแสดงขั้นตอนวิธีการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติเพื่อนำไปวิเคราะห์ปัญหาต่อไป

สำหรับในบทที่ 3 ได้นำเสนอเกี่ยวกับวิธีการหาเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยเริ่มต้นตั้งแต่การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งอยู่ในพิกัด $\xi-\eta$ ซึ่งขั้นต่อไปที่เป็นความยากลำบากอยู่ที่การอินทิเกรตเมทริกซ์ของการนำความร้อนที่ต้องอินทิเกรตตลอดพื้นที่ทั้งหมดของเอลิเมนต์ ซึ่งวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอวิธีการอินทิเกรตทั้งวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ และวิธีรูปแบบปิดที่ได้จากการอินทิเกรตโดยตรง ซึ่งได้นำเสนอรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนและรูปแบบปิดของโพลเดเวเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่จะสามารถนำไปใช้ได้โดยง่าย โดยสำหรับสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าได้แสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์และลักษณะของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิดโดยละเอียด และแสดงการตรวจสอบประสิทธิภาพของการใช้สมการรูปแบบปิดในการหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อนซึ่งตรวจสอบความถูกต้องและเวลาที่ใช้คำนวณกับวิธีดั้งเดิม

ปัญหาปกติล้วนมีรูปร่างลักษณะซับซ้อนและมีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากในการคำนวณหาผลลัพธ์ เพื่อความสะดวกและความถูกต้องของผลลัพธ์จึงจำเป็นต้องประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณ ในบทที่ 4 จึงได้นำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 ประกอบกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้อธิบายไว้ในบทที่ 2 มาทำการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิที่ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ บนแผ่นระนาบซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตเช่นใดก็ได้ ทั้งการวิเคราะห์การนำความร้อนบนแผ่นระนาบอันเนื่องมาจากแผ่นระนาบนั้นผลิตความร้อนได้เอง (heat generation) หรือมีการให้ความร้อนที่ผิว (specified surface heating) ก่อให้เกิดการนำความร้อน (heat conduction) ในแนวระนาบของแผ่น จะวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมสองโปรแกรมเปรียบเทียบกันซึ่งได้แก่ โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิมซึ่งประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ และโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากสมการรูปแบบปิด โดยได้อธิบายถึงลักษณะการทำงานของโปรแกรม ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ และแสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรมตลอดจนลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมแสดงผลทางหน้าจอ

สำหรับในบทที่ 5 เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยจะทำการตรวจสอบกับปัญหาที่ทราบผลเฉลยแน่นอนตรง เปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีรูปแบบปิด [HeatCF] และโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีดั้งเดิม [HeatG] ตลอดจนเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างสองวิธีด้วย ซึ่งปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้น ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การกระจายของอุณหภูมิเป็นแบบเชิงเส้นคู่ ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่

กำหนดอุณหภูมิที่ชอบและถูกหุ้มฉนวน ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง ปัญหาแผ่นสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง ปัญหาแผ่นวงกลมที่สามารถผลิตความร้อนได้เอง และ ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูปกลมอยู่ภายในและผลิตความร้อนได้เอง ผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่าการวิเคราะห์โดยใช้สมการรูปแบบปิดมีความแม่นยำมากกว่าวิธีดั้งเดิมและใช้เวลาน้อยกว่าวิธีดั้งเดิมโดยวิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาในการคำนวณไม่เท่ากันภายใต้การวิเคราะห์ปัญหาที่มีเอลิเมนต์หรือจุดต่อจำนวนเท่ากัน ทั้งนี้เนื่องจากเวลาในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดจะขึ้นอยู่กับลักษณะของเอลิเมนต์ที่เลือกใช้ซึ่งมีทั้งหมดสี่กรณีดังที่อธิบายไว้ที่ภาคผนวก ก เนื่องจากสมการหลักของแต่ละกรณีมีความยาวและซับซ้อนต่างกัน

กล่าวโดยสรุปได้ว่าวิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนซึ่งเป็นการปรับปรุงวิธีดั้งเดิมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ซึ่งทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และจากการประเมินพบว่าการวิเคราะห์โดยใช้สมการรูปแบบปิดทำให้ได้ค่าที่แม่นยำมากขึ้นและยังสามารถลดเวลาในการคำนวณได้เป็นอย่างมาก โดยรูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าและรูปแบบปิดของโพลเดกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สามารถจะนำไปใช้ได้โดยง่าย

6.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์คือในวิทยานิพนธ์นี้ได้แบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมภายนอกคือ AUTOMESH-2D ซึ่งบางครั้งไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ขึ้นมาได้เนื่องจากอาจกำหนดจุดและขนาดของความหนาแน่นสัมพัทธ์ไม่เหมาะสม ทำให้ต้องใช้เวลาในการปรับแก้ที่พอสมควร

ความยากลำบากที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือการหารูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อนเนื่องจากสมการติดในรูปของการอินทิเกรตที่มีตัวส่วนเป็นดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์แบบจาโคเบียนซึ่งอยู่ในพิกัด $\xi - \eta$ ซึ่งมีความซับซ้อนมากและประกอบด้วยตัวแปรเป็นจำนวนมาก หลายครั้งที่โปรแกรมไม่สามารถรันได้ ต้องอาศัยการวิเคราะห์และจัดรูปอย่างเหมาะสมประกอบกับการใช้ความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ถึงสองโปรแกรมแมทแลบและแมทมาทิกาสลับกันในการรันเพื่ออินทิเกรตหารูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อน

6.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

จากการศึกษาพบว่าการใช้สมการรูปแบบปิดทำให้ได้ค่าที่แม่นยำมากขึ้นและยังสามารถลดเวลาในการคำนวณได้เป็นอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีดั้งเดิมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ อย่างไรก็ตามวิทยานิพนธ์เล่มนี้เป็นเพียงการนำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้สามารถใช้งานได้จริงในงานทางวิศวกรรมจึงควรพัฒนาให้สามารถใช้ได้กับปัญหาการนำความร้อนในสามมิติ และปัญหาการถ่ายเทความร้อนชนิดอื่นเพิ่มเติม



รายการอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 5. 2555, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
2. Logan, D., *A first course in the finite element method*. 2011: Cengage Learning.
3. Okabe, M., *Analytical integral formulae related to convex quadrilateral finite elements*. Computer methods in Applied mechanics and Engineering, 1981. 29(2): p. 201-218.
4. Babu, D. and Pinder, G., *Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984. 20(6): p. 1153-1163.
5. Mizukami, A., *Some integration formulas for a four-node isoparametric element*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1986. 59(1): p. 111-121.
6. Rathod, H., *Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element*. Computers & structures, 1988. 30(5): p. 1101-1109.
7. Kikuchi, M., *Application of the symbolic mathematics system to the finite element program*. Computational mechanics, 1989. 5(1): p. 41-47.
8. Videla, L., Cerrolaza, M., and Aparicio, N., *Explicit integration of the stiffness matrix of a four-noded-plane-elasticity finite element*. Communications in numerical methods in engineering, 1996. 12(11): p. 731-743.
9. Rathod, H. and Islam, M., *Technical Note: Reduction of rational integrals related to linear and convex quadrilateral finite elements*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2002. 18(6): p. 759-770.
10. Dasgupta, G., *Closed-Form Isoparametric Shape Functions of Four-Node Convex Finite Elements*. Journal of Aerospace Engineering, 2008. 21(1): p. 10-18.
11. Dasgupta, G., *Stiffness matrices of isoparametric four-node finite elements by exact analytical integration*. Journal of Aerospace Engineering, 2008. 21(2): p. 45-50.

12. Videla, L., Baloa, T., Griffiths, D.V., and Cerrolaza, M., *Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2008. 24(1): p. 249-261.
13. Donea, J., *A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984. 20: p. 101-119.
14. Bey, K.S., Thornton, E.A., Dechaumphai, P., and Ramakrishnan, R., *A New Finite Element Approach for Prediction of Aerothermal Loads-Progress in Inviscid Flow Computations*. in *The AIAA 7th Computational Fluids Dynamics Conference*. 1985. Cincinnati, OH.
15. Thornton, E.A. and Dechaumphai, P., *A Taylor-Galerkin Finite Element Algorithm for Transient Nonlinear Thermal-Structural Analysis*. 1986, Old Dominion University. p. 1-12.
16. Siriparu, C., *Adaptive Quadrilateral Elements with Linear Flux Formulation for Heat Conduction Analysis*, in *Mechanical Engineering*. 2013, Chulalongkorn University: Thailand.
17. Prasomsuk, N., *Improving Solution Accuracy in Structures by Adaptive Quadrilateral Elements with Linear Flux Formulation*, in *Mechanical Engineering*. 2013, Chulalongkorn University.
18. Pandey, A.K., Dechaumphai, P. and Wieting, A.R., *Thermal-Structural Finite Element Analysis Using Linear Flux Formulation*. 1990: NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
19. Yagawa, G., Ye, G.W. and Yoshimura, S., *A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation*. International journal for numerical methods in engineering, 1990. 29(7): p. 1539-1549.
20. Griffiths, D., *Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form*. International journal for numerical methods in engineering, 1994. 37(6): p. 1027-1038.

21. Lozada, I.J., Osorio, J.C., Griffiths, D.V., and Cerrolaza, M., *Semi-analytical integration of the 8-node plane element stiffness matrix using symbolic computation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2006. 22(2): p. 296-316.
22. Zhou, C. and Vecchio, F.J., *Closed-form stiffness matrix for the four-node quadrilateral element with a fully populated material stiffness*. Journal of engineering mechanics, 2006. 132(12): p. 1392-1395.
23. Lozada, I., Griffiths, D. and Cerrolaza, M., *Semi-analytical integration of the elastic stiffness matrix of an axisymmetric eight-noded finite element*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2010. 26(6): p. 1624-1635.
24. Islam, M.S., Saha, G. and Akter, N., *Gauss-Legendre Numerical Integrations over a Quadrilateral Element in Closed Form*. Bangladesh J. Sci. Ind. Res., 2011. 46(3): p. 399-405.
25. ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภากย์, *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม*. พิมพ์ครั้งที่ 9. 2557, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
26. Dechaumphai, P., *Finite Element Method: Fundamentals and Applications*. 2010: Alpha Science International Limited.
27. Ma, X., Zhao, G., and Sun, L., *AUTOMESH-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation*. Materials Research Innovations, 2011. 15(s1): p. s482-s486.
28. Ma, X. and Zhao, G., *An automated approach to quadrilateral mesh generation with complex geometric feature constraints*. Engineering with Computers: p. 1-12.
29. Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S., *Easy Finite Element Method with Software*. 2009, Oxford: Alpha Science.
30. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, *พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม*. พิมพ์ครั้งที่ 2. 2553, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
31. Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S., *Easy Finite Element Method with Software*. 2007: Chulalongkorn University Press.

32. Zhu, J.Z. and Zienkiewicz, O.C., *Adaptive Techniques in The Finite Element Method*. Communications in Applied Numerical Methods, 1988. 4: p. 197-204.





ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ภาคผนวก ก

รูปแบบปิดของเมทริกซ์ของการนำความร้อน

ในการคำนวณปัญหาการนำความร้อนในสองมิติด้วยวิธีรูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่สามารถผลิตความร้อนได้เองภายใต้สถานะคงตัวประกอบไปด้วยรูปแบบปิดของสมการหลักซึ่งใช้คำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อน และรูปแบบปิดของโพลเดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เอง ซึ่งในรูปแบบปิดยังประกอบไปด้วยตัวแปรย่อย ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

รูปแบบปิดของสมการหลัก

จากสมการ (3.21) เมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ k และมีความหนาเท่ากับ t คือ

$$[K_c] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k [B(\xi, \eta)]^T [B(\xi, \eta)] t |J| d\xi d\eta$$

(4×4) (4×2) (2×4)

ซึ่งสามารถทำการอินทิเกรตโดยตรงเป็นสมการในรูปแบบปิด โดยจำแนกรูปแบบปิดของสมการหลักที่ใช้คำนวณเมทริกซ์ของการนำความร้อนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ได้เป็น 4 กรณีดังนี้

กรณี 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ดังแสดงในรูปที่ 3.1

สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านขนานกัน มีสมการหลักในรูปแบบปิดคือ

$$K_{ij} = kt \left(A + \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{6q^3 r^3} \right) \quad ; i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (ก.1)$$

$$\text{เมื่อ } A = \frac{2(-3gq^2 r + 2mpq^2 + 3fqr^2 + npqr - 4lpr^2)}{3q^2 r^2} + \frac{4(gr - mp)}{r^2}$$

$$B_1 = E_1 \text{Log } E_1(r(r(3q(2hq - fE_3) + 2l(C_1 + p(q - 2r) - qr)) - 3gq^2 E_2 + nq(C_2 + p(q + r) + 2qr)) + 2mq^2(C_1 - p(2q - r) - qr))$$

$$B_2 = -E_2 \text{Log } E_2(r(r(3q(2hq - fE_4) + 2l(C_1 + p(q + 2r) + qr)) - 3gq^2 E_1 + nq(C_2 + p(q - r) - 2qr)) + 2mq^2(C_1 - p(2q + r) + qr))$$

$$B_3 = E_3 \text{Log } E_3(r(-r(3q(2hq - fE_1) + 2l(C_1 - p(q + 2r) + qr)) + 3gq^2 E_4 + nq(-C_2 + p(q - r) + 2qr)) + 2mq^2(-C_1 - p(2q + r) - qr))$$

$$B_4 = -E_4 \text{Log } E_4(r(-r(3q(2hq - fE_2) + 2l(C_1 - p(q - 2r) - qr)) + 3gq^2 E_3 + nq(-C_2 + p(q + r) - 2qr)) + 2mq^2(-C_1 - p(2q - r) + qr))$$

โดยที่

$$\begin{aligned} E_1 &= p - q - r \\ E_2 &= p - q + r \\ E_3 &= p + q - r \\ E_4 &= p + q + r \\ C_1 &= p^2 + q^2 + r^2 \\ C_2 &= p^2 - 2q^2 - 2r^2 \end{aligned}$$

กรณี 2 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 3.11

สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 1 หรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 3 และ 4 มีสมการหลักในรูปแบบปิดคือ

$$K_{ij} = kt \left(\frac{-12mpr + 12gr^2 - (6mp^2 - 6gpr + 6hr^2 + 2lr^2)(\text{Log}(p-r) - \text{Log}(p+r))}{3r^3} \right) ; i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{ก.2})$$

กรณี 3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 3.12

สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 2 หรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 4 ขนานกับด้านระหว่างจุดต่อ 2 และ 3 มีสมการหลักในรูปแบบปิดคือ

$$K_{ij} = kt \left(\frac{-12lpq + 12fq^2 - (6lp^2 - 6fpq + 6hq^2 + 2mq^2)(\text{Log}(p-q) - \text{Log}(p+q))}{3q^3} \right) ; i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{ก.3})$$

กรณี 4 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังแสดงในรูปที่ 3.13

สำหรับเอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกัน 2 คู่ ซึ่งได้แก่ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัส เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีสมการหลักในรูปแบบปิดคือ

$$K_{ij} = kt \left(\frac{4(3h+l+m)}{3p} \right) ; i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{ก.4})$$

รูปแบบปิดของโพลีเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เอง

สมการรูปแบบปิดของโพลีเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการผลิตความร้อนได้เองเท่ากับ Q และ มีความหนาเท่ากับ t สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ทุกกรณีคือ

$$\{Q_e\} = \frac{Qt}{64} \begin{Bmatrix} -p + \frac{q}{3} + \frac{r}{3} \\ -p - \frac{q}{3} + \frac{r}{3} \\ -p - \frac{q}{3} - \frac{r}{3} \\ -p + \frac{q}{3} - \frac{r}{3} \end{Bmatrix} \quad (ก.5)$$

รูปแบบปิดของตัวแปรย่อย

สมการหลักในรูปแบบปิดจะประกอบด้วยตัวแปรย่อย f, g, h, l, m, n, p, q และ r ซึ่ง รูปแบบปิดของตัวแปรย่อยสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ทุกกรณีมีรูปแบบเดียวกัน สำหรับรูปแบบ ปิดของตัวแปรย่อยกำหนดให้ $x_{ij} = x_i - x_j$ และ $i, j = 1, 2, 3, 4$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

รูปแบบปิดของตัวแปรย่อย p, q และ r เป็นดังนี้

$$p = 8(x_{24}y_{13} - x_{13}y_{24})$$

$$q = 8(x_{43}y_{12} - x_{12}y_{43})$$

$$r = 8(x_{14}y_{23} - x_{23}y_{14})$$

รูปแบบปิดของตัวแปรย่อย f, g, h, l, m และ n ในการคำนวณ K_{ij} ซึ่งเป็นสมาชิกใน เมทริกซ์ $[K_c]$ ในแถวที่ i หลักที่ j แบ่งออกได้เป็น 4 กลุ่มดังนี้

กลุ่มที่ 1: $K(1,1), K(2,2), K(3,3), K(4,4)$

$$f(1,1) = 2(x_{24}x_{34} + y_{24}y_{34})$$

$$f(2,2) = 2(x_{13}x_{34} + y_{13}y_{34})$$

$$f(3,3) = 2(x_{12}x_{24} + y_{12}y_{24})$$

$$f(4,4) = 2(x_{12}x_{13} + y_{12}y_{13})$$

$$g(1,1) = 2(x_{23}x_{24} + y_{23}y_{24})$$

$$g(2,2) = 2(x_{13}x_{14} + y_{13}y_{14})$$

$$g(3,3) = -2(x_{14}x_{24} + y_{14}y_{24})$$

$$g(4,4) = -2(x_{13}x_{23} + y_{13}y_{23})$$

$$\begin{aligned}
h(1,1) &= h(3,3) = -x_{24}^2 - y_{24}^2 \\
h(2,2) &= h(4,4) = -x_{13}^2 - y_{13}^2 \\
l(1,1) &= l(2,2) = -x_{34}^2 - y_{34}^2 \\
l(3,3) &= l(4,4) = -x_{12}^2 - y_{12}^2 \\
m(1,1) &= m(4,4) = -x_{23}^2 - y_{23}^2 \\
m(2,2) &= m(3,3) = -x_{14}^2 - y_{14}^2 \\
n(1,1) &= -2(x_{23}x_{34} + y_{23}y_{34}) \\
n(2,2) &= -2(x_{14}x_{34} + y_{14}y_{34}) \\
n(3,3) &= 2(x_{12}x_{14} + y_{12}y_{14}) \\
n(4,4) &= 2(x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23})
\end{aligned}$$

กลุ่มที่ 2: $K(2,1)$, $K(4,3)$

$$\begin{aligned}
h(2,1) &= h(4,3) = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} \\
f(2,1) &= -x_{34}(x_1 + x_2) - y_{34}(y_1 + y_2) + x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 \\
f(4,3) &= x_{12}(x_3 + x_4) + y_{12}(y_3 + y_4) + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\
g(2,1) &= -x_{13}x_{23} - x_{14}x_{24} - y_{13}y_{23} - y_{14}y_{24} \\
g(4,3) &= x_{13}x_{14} + x_{23}x_{24} + y_{13}y_{14} + y_{23}y_{24} \\
l(2,1) &= x_{34}^2 + y_{34}^2 \\
l(4,3) &= x_{12}^2 + y_{12}^2 \\
m(2,1) &= m(4,3) = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} \\
n(2,1) &= x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34} + x_4^2 - x_3^2 + y_4^2 - y_3^2 \\
n(4,3) &= x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34} + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2
\end{aligned}$$

กลุ่มที่ 3: $K(3,2)$, $K(4,1)$

$$\begin{aligned}
f(3,2) &= x_{12}x_{13} + x_{24}x_{34} + y_{12}y_{13} + y_{24}y_{34} \\
f(4,1) &= x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34} + y_{12}y_{24} + y_{13}y_{34} \\
g(3,2) &= x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 \\
g(4,1) &= x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 \\
h(3,2) &= h(4,1) = -x_{13}x_{24} - y_{13}y_{24} \\
l(3,2) &= l(4,1) = -x_{12}x_{34} - y_{12}y_{34} \\
m(3,2) &= x_{14}^2 + y_{14}^2 \\
m(4,1) &= x_{23}^2 + y_{23}^2 \\
n(3,2) &= x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 \\
n(4,1) &= -x_{14}x_{23} - y_{14}y_{23} + x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2
\end{aligned}$$

กลุ่มที่ 4: $K(3,1)$, $K(4,2)$

$$f(3,1) = -x_{13}x_{24} - y_{13}y_{24} + x_2^2 - x_4^2 + y_2^2 - y_4^2$$

$$f(4,2) = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$

$$g(3,1) = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_4^2 - x_2^2 + y_4^2 - y_2^2$$

$$g(4,2) = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$

$$h(3,1) = x_{24}^2 + y_{24}^2$$

$$h(4,2) = x_{13}^2 + y_{13}^2$$

$$l(3,1) = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34}$$

$$l(4,2) = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34}$$

$$m(3,1) = m(4,2) = -x_{14}x_{23} - y_{14}y_{23}$$

$$n(3,1) = x_{12}x_{23} - x_{14}x_{34} + y_{12}y_{23} - y_{14}y_{34}$$

$$n(4,2) = x_{12}x_{14} - x_{23}x_{34} + y_{12}y_{14} - y_{23}y_{34}$$



ภาคผนวก ข

รายละเอียดโปรแกรม

รายละเอียดโปรแกรม HeatCF

```

filename = input('Enter the input file name: ', 's');
fid = fopen(filename, 'r');
%
% Read the title of computation:
%
nntitle = fscanf(fid, '%i', 1);
for i = 1:nntitle+1
    text1 = fgetl(fid);
end
%
% Read input data:
%
text2 = fgetl(fid);
npoin = fscanf(fid, '%i', 1);
nelem = fscanf(fid, '%i', 1);
for i=1:2
    text3 = fgetl(fid);
end
tk = fscanf(fid, '%f', 1);
thick = fscanf(fid, '%f', 1);
for i=1:2
    text4 = fgetl(fid);
end
noddata = fscanf(fid, '%i %i %f %f %f', [5 npoin]);
noddata = noddata';
%
nodid = squeeze(noddata(:, 1));
ibc = squeeze(noddata(:, 2));
coord(nodid, 1) = squeeze(noddata(:, 3));
coord(nodid, 2) = squeeze(noddata(:, 4));
temp = squeeze(noddata(:, 5));
%
for ip = 1:npoin
    if noddata(ip, 1) ~= ip
        fprintf(' node no. %5d in data file is missing', ip);
        pause;
        break
    end
end
%
for i=1:2
    text5 = fgetl(fid);
end
eledata = fscanf(fid, '%i %i %i %i %i %f', [6 nelem]);
eledata = eledata';
eleid = squeeze(eledata(:, 1));
intmat(eleid, 1) = squeeze(eledata(:, 2));
intmat(eleid, 2) = squeeze(eledata(:, 3));
intmat(eleid, 3) = squeeze(eledata(:, 4));
intmat(eleid, 4) = squeeze(eledata(:, 5));
iqele = squeeze(eledata(:, 6));
%
iq = 0;
for ie = 1:nelem
    if eledata(ie, 1) ~= ie

```

```

        fprintf(' element no. %5d in data file is missing', ie);
        pause;
        break
    end
    if iqe(ie) ~= 0., iq = 1; end
end
fprintf('\n\nThe FE model includes the following heat transfer mode(s):');
fprintf('\n    >> Heat conduction');
if iq==1
    fprintf('\n    >> Internal heat generation');
end
fclose(fid);
%
%----- calculation -----%
%
neq = npoin;
sysq = zeros(neq, 1);
sysk = zeros(neq);
fprintf('\n--- The FE model consists of %5d nodes and %5d elements --- \n',
npoin, nelelem);
%
[sysk] = KCFT(nelelem, intmat, coord, tk, thick, sysk );
[sysq] = QCFT(nelelem, intmat, coord, thick, iqe, sysq);
%
% Gathering a list of the specified nodes and their temperatures, applying
% boundary conditions and solve for the nodal temperatures solutions:
%
ifixnode = find(IBC);
ifixtemp = squeeze(temp(ifixnode));
%
temp = soltemp(sysk, sysq, ifixnode, ifixtemp);
%
%----- Print out Solution -----%
%
% Print out the nodal temperatures into a file and on the screen:
%
filename = input('\n Enter file name for temperature solutions: ', 's');
fid = fopen(filename, 'w');
fprintf(fid, ' Nodal temperature solutions [%5d]:\n', npoin);
fprintf('    ' Nodal temperature solutions [%5d]:\n', npoin);
fprintf(fid, '\n    Node      Temperature\n');
fprintf('    '\n    Node      Temperature\n');
for ip = 1:npoin
    fprintf(fid, ' %6d %14.6e\n', ip, temp(ip));
    fprintf('    ' %6d %14.6e\n', ip, temp(ip));
end
fclose(fid);

%*****

function [sysk] = KCFT(nelelem, intmat, coord, tk, thick, sysk )
%
% Establish element matrices and assemble them for system equations
%
% Loop over the number of elements:
%
for ie = 1:nelelem
    eq = intmat(ie,:);
%
% Find element nodal coordinates:
%
%
    nodexy = [x1,y1; x2,y2; x3,y3; x4, y4];
    ii = intmat(ie,1);
    jj = intmat(ie,2);

```

```

zz = intmat(ie,3);
ll = intmat(ie,4);
x1 = coord(ii,1);
x2 = coord(jj,1);
x3 = coord(zz,1);
x4 = coord(ll,1);
y1 = coord(ii,2);
y2 = coord(jj,2);
y3 = coord(zz,2);
y4 = coord(ll,2);

%
% ----- closed-form K -----%
%
%Group1: K(1,1), K(2,2), K(3,3), K(4,4)
%
h(1,1) = -(x2-x4)^2 - (y2-y4)^2;
h(2,2) = -(x1-x3)^2 - (y1-y3)^2;
h(3,3) = h(1,1);
h(4,4) = h(2,2);
f(1,1) = 2*(x2-x4)*(x3-x4) + 2*(y2-y4)*(y3-y4);
f(2,2) = 2*(x1-x3)*(x3-x4) + 2*(y1-y3)*(y3-y4);
f(3,3) = 2*(x1-x2)*(x2-x4) + 2*(y1-y2)*(y2-y4);
f(4,4) = 2*(x1-x2)*(x1-x3) + 2*(y1-y2)*(y1-y3);
g(1,1) = 2*(x2-x3)*(x2-x4) + 2*(y2-y3)*(y2-y4);
g(2,2) = 2*(x1-x3)*(x1-x4) + 2*(y1-y3)*(y1-y4);
g(3,3) = -2*(x1-x4)*(x2-x4) - 2*(y1-y4)*(y2-y4);
g(4,4) = -2*(x1-x3)*(x2-x3) - 2*(y1-y3)*(y2-y3);
l(1,1) = -(x3-x4)^2 - (y3-y4)^2;
l(2,2) = l(1,1);
l(3,3) = -(x1-x2)^2 - (y1-y2)^2;
l(4,4) = l(3,3);
m(1,1) = -(x2-x3)^2 - (y2-y3)^2;
m(2,2) = -(x1-x4)^2 - (y1-y4)^2;
m(3,3) = m(2,2);
m(4,4) = m(1,1);

%-----%
%
%Group2: K(2,1), K(4,3)
%
h(2,1) = (x1-x3)*(x2-x4) + (y1-y3)*(y2-y4);
h(4,3) = h(2,1);
f(2,1) = -(x1+x2)*(x3-x4) - (y1+y2)*(y3-y4) + x3^2 - x4^2 + y3^2 - y4^2;
f(4,3) = (x3+x4)*(x1-x2) + (y3+y4)*(y1-y2) - x1^2 + x2^2 - y1^2 + y2^2;
g(2,1) = -(x1-x3)*(x2-x3) - (x1-x4)*(x2-x4) - (y1-y3)*(y2-y3) - (y1-y4)*(y2-y4);
g(4,3) = (x1-x3)*(x1-x4) + (x2-x3)*(x2-x4) + (y1-y3)*(y1-y4) + (y2-y3)*(y2-y4);
l(2,1) = (x3-x4)^2 + (y3-y4)^2;
l(4,3) = (x1-x2)^2 + (y1-y2)^2;
m(2,1) = (x1-x4)*(x2-x3) + (y1-y4)*(y2-y3);
m(4,3) = m(2,1);

%-----%
%
%Group3: K(3,2), K(4,1)
%
h(3,2) = -(x1-x3)*(x2-x4) - (y1-y3)*(y2-y4);
h(4,1) = h(3,2);
f(3,2) = (x1-x2)*(x1-x3) + (x2-x4)*(x3-x4) + (y1-y2)*(y1-y3) + (y2-y4)*(y3-y4);
f(4,1) = (x1-x2)*(x2-x4) + (x1-x3)*(x3-x4) + (y1-y2)*(y2-y4) + (y1-y3)*(y3-y4);
g(3,2) = (x2+x3)*(x1-x4) + (y2+y3)*(y1-y4) - x1^2 + x4^2 - y1^2 + y4^2;
g(4,1) = (x1+x4)*(x2-x3) + (y1+y4)*(y2-y3) - x2^2 + x3^2 - y2^2 + y3^2;
l(3,2) = -(x1-x2)*(x3-x4) - (y1-y2)*(y3-y4);
l(4,1) = l(3,2);
m(3,2) = (x1-x4)^2 + (y1-y4)^2;
m(4,1) = (x2-x3)^2 + (y2-y3)^2;

%-----%

```

```

%
%Group4: K(3,1) , K(4,2)
%
h(3,1)= (x2-x4)^2 + (y2-y4)^2;
h(4,2)= (x1-x3)^2 + (y1-y3)^2;
f(3,1)= -(x1+x3)*(x2-x4) - (y1+y3)*(y2-y4) + x2^2 - x4^2 + y2^2 - y4^2;
f(4,2)= (x2+x4)*(x1-x3) + (y2+y4)*(y1-y3) - x1^2 + x3^2 - y1^2 + y3^2;
g(3,1)= (x1+x3)*(x2-x4) + (y1+y3)*(y2-y4) - x2^2 + x4^2 - y2^2 + y4^2;
g(4,2)= (x2+x4)*(x1-x3) + (y2+y4)*(y1-y3) - x1^2 + x3^2 - y1^2 + y3^2;
l(3,1)= (x1-x2)*(x3-x4) + (y1-y2)*(y3-y4);
l(4,2)= (x1-x2)*(x3-x4) + (y1-y2)*(y3-y4);
m(3,1)= -(x1-x4)*(x2-x3) - (y1-y4)*(y2-y3);
m(4,2)= m(3,1);
%-----
%
% p q r
% same every K
p = (x2*y1 - x1*y2 + x1*y4 - x2*y3 + x3*y2 - x4*y1 - x3*y4 + x4*y3)*8;
q = (x1*y3 - x3*y1 - x1*y4 - x2*y3 + x3*y2 + x4*y1 + x2*y4 - x4*y2)*8;
r = (x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y4 - x4*y2 - x3*y4 + x4*y3)*8;
%-----
%
if (abs(q)>10^(-5)) & (abs(r)>10^(-5))
n(1,1)= -2*(x2-x3)*(x3-x4) - 2*(y2-y3)*(y3-y4);
n(2,2)= -2*(x1-x4)*(x3-x4) - 2*(y1-y4)*(y3-y4);
n(3,3)= 2*(x1-x2)*(x1-x4) + 2*(y1-y2)*(y1-y4);
n(4,4)= 2*(x1-x2)*(x2-x3) + 2*(y1-y2)*(y2-y3);
n(2,1)= (x1+x2)*(x3-x4)+(y1+y2)*(y3-y4)- x3^2 + x4^2 - y3^2 + y4^2;
n(4,3)= (x3+x4)*(x1-x2)+(y3+y4)*(y1-y2)- x1^2 + x2^2 - y1^2 + y2^2;
n(3,2)= (x2+x3)*(x1-x4)+(y2+y3)*(y1-y4)- x1^2 + x4^2 - y1^2 + y4^2;
n(4,1)= -(x1+x4)*(x2-x3)-(y1+y4)*(y2-y3)+ x2^2 - x3^2 + y2^2 - y3^2;
n(3,1)= (x1-x2)*(x2-x3)-(x1-x4)*(x3-x4)+(y1-y2)*(y2-y3)-(y1-y4)*(y3-y4);
n(4,2)= (x1-x2)*(x1-x4)-(x2-x3)*(x3-x4)+(y1-y2)*(y1-y4)-(y2-y3)*(y3-y4);
% same every K
E1 = p-q-r;
E2 = p-q+r;
E3 = p+q-r;
E4 = p+q+r;
C1 = p^2+q^2+r^2;
C2 = p^2-2*q^2-2*r^2;
%-----
%
K(1,1) =
calK(p,q,r,h(1,1),f(1,1),g(1,1),l(1,1),m(1,1),n(1,1),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(2,1) =
calK(p,q,r,h(2,1),f(2,1),g(2,1),l(2,1),m(2,1),n(2,1),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,1) =
calK(p,q,r,h(3,1),f(3,1),g(3,1),l(3,1),m(3,1),n(3,1),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,1) =
calK(p,q,r,h(4,1),f(4,1),g(4,1),l(4,1),m(4,1),n(4,1),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(2,2) =
calK(p,q,r,h(2,2),f(2,2),g(2,2),l(2,2),m(2,2),n(2,2),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,2) =
calK(p,q,r,h(3,2),f(3,2),g(3,2),l(3,2),m(3,2),n(3,2),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,2) =
calK(p,q,r,h(4,2),f(4,2),g(4,2),l(4,2),m(4,2),n(4,2),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,3) =
calK(p,q,r,h(3,3),f(3,3),g(3,3),l(3,3),m(3,3),n(3,3),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,3) =
calK(p,q,r,h(4,3),f(4,3),g(4,3),l(4,3),m(4,3),n(4,3),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,4) =
calK(p,q,r,h(4,4),f(4,4),g(4,4),l(4,4),m(4,4),n(4,4),E1,E2,E3,E4,C1,C2);
% q == 0 and r==0
% 12 // 43 and 23 // 14

```

```

elseif (abs(q) <= 10^(-5)) & (abs(r) <= 10^(-5))
K(1,1) = zeroqr(p,h(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeroqr(p,h(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeroqr(p,h(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeroqr(p,h(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeroqr(p,h(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeroqr(p,h(3,2),l(3,2),m(3,2));
K(4,2) = zeroqr(p,h(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeroqr(p,h(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeroqr(p,h(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeroqr(p,h(4,4),l(4,4),m(4,4));
% q==0
% 12 // 43
elseif (abs(q) <= 10^(-5))
K(1,1) = zeroq(p,r,h(1,1),g(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeroq(p,r,h(2,1),g(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeroq(p,r,h(3,1),g(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeroq(p,r,h(4,1),g(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeroq(p,r,h(2,2),g(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeroq(p,r,h(3,2),g(3,2),l(3,2),m(3,2));
K(4,2) = zeroq(p,r,h(4,2),g(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeroq(p,r,h(3,3),g(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeroq(p,r,h(4,3),g(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeroq(p,r,h(4,4),g(4,4),l(4,4),m(4,4));
% r==0
% 23 // 14
elseif (abs(r) <= 10^(-5))
K(1,1) = zeror(p,q,h(1,1),f(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeror(p,q,h(2,1),f(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeror(p,q,h(3,1),f(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeror(p,q,h(4,1),f(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeror(p,q,h(2,2),f(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeror(p,q,h(3,2),f(3,2),l(3,2),m(3,2));
K(4,2) = zeror(p,q,h(4,2),f(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeror(p,q,h(3,3),f(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeror(p,q,h(4,3),f(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeror(p,q,h(4,4),f(4,4),l(4,4),m(4,4));
end
%
K(1,2) = K(2,1);
K(1,3) = K(3,1);
K(1,4) = K(4,1);
K(2,3) = K(3,2);
K(2,4) = K(4,2);
K(3,4) = K(4,3);
%
KC = tk*thick*K;
%-----
% Element conduction matrix:
sysk(eq, eq) = sysk(eq, eq) + KC;
end

%*****

function KK = calK(p,q,r,h,f,g,l,m,n,E1,E2,E3,E4,C1,C2)
%
A = ((- 3*g*q^2*r + 2*m*p*q^2 + 3*f*q*r^2 + n*p*q*r -
4*l*p*r^2)*2/3/(q^2*r^2)) + ((g*r-m*p)*4/r^2);
%
part1 = ((( p*(q-2*r)-q*r+C1)*2*1 + 3*q*(2*h*q-f*E3))*r - 3*g*q^2*E2 +
n*q*( 2*q*r+p*(q+r)+C2))*r + (-q*r-p*(2*q-r)+C1)*2*m*q^2)*E1*log(E1);
%
part2 = ((( p*(q+2*r)+q*r+C1)*2*1 + 3*q*(2*h*q-f*E4))*r - 3*g*q^2*E1 -
n*q*( 2*q*r-p*(q-r)-C2))*r + ( q*r-p*(2*q+r)+C1)*2*m*q^2)*E2*log(E2);

```

```

part3 = (((-p*(q+2*r)+q*r+C1)*2*1 + 3*q*(2*h*q-f*E1))*(-r) + 3*g*q^2*E4 +
n*q*( 2*q*r+p*(q-r)-C2))*r - (q*r+p*(2*q+r)+C1)*2*m*q^2)*(-E3)*log(E3);
%
part4 = (((-p*(q-2*r)-q*r+C1)*2*1 + 3*q*(2*h*q-f*E2))*(-r) + 3*g*q^2*E3 +
n*q*(-2*q*r+p*(q+r)-C2))*r - (-q*r+p*(2*q-r)+C1)*2*m*q^2)*(-E4)*log(E4);
%
K = A + (part1-part2-part3+part4)/(6*q^3*r^3);
%
KK = real(K);
end

%*****

function [sysq] = QCFT(nelem, intmat, coord, thick, iqele, sysq)
%
% Establish element matrices and assemble them for system equations
%
% Loop over the number of elements:
%
for ie = 1:nelem
    eq = intmat(ie,:);
% Find element nodal coordinates:
    ii = intmat(ie,1);
    jj = intmat(ie,2);
    zz = intmat(ie,3);
    ll = intmat(ie,4);
    x1 = coord(ii,1);
    x2 = coord(jj,1);
    x3 = coord(zz,1);
    x4 = coord(ll,1);
    y1 = coord(ii,2);
    y2 = coord(jj,2);
    y3 = coord(zz,2);
    y4 = coord(ll,2);
    %nodexy = [x1,y1; x2,y2; x3,y3; x4, y4];
    Qq = iqele(ie);
%
%----- closed-form Q -----%
%
% p q r
% same every K
p = (x2*y1 - x1*y2 + x1*y4 - x2*y3 + x3*y2 - x4*y1 - x3*y4 + x4*y3)*8;
q = (x1*y3 - x3*y1 - x1*y4 - x2*y3 + x3*y2 + x4*y1 + x2*y4 - x4*y2)*8;
r = (x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y4 - x4*y2 - x3*y4 + x4*y3)*8;
%-----
qq(1,1) = -p + q/3 + r/3;
qq(2,1) = -p - q/3 + r/3;
qq(3,1) = -p - q/3 - r/3;
qq(4,1) = -p + q/3 - r/3;
QQ = Qq*thick*qq/64 ;
%-----
% Element conduction matrix:
    sysq(eq, 1) = sysq(eq, 1) + QQ;
end

%*****

function temp = soltemp(K, Q, fixe, nodval)
%
% Apply boundary conditions and solve for nodal temperatures
%
% fixe is the list of equation numbers with specified nodal temp:
dof = length(Q);

```

```

% Use the setdiff command for matrix partitioning:
df = setdiff(1:dof, fixeql);
% So that the system equations contain only unknown equations:
Kf = K(df, df);
Qf = Q(df) - K(df, fixeql)*nodval;
% Then use the \ command to solve such set of partitioning equations:
sol = Kf\Qf;
temp = zeros(dof,1);
temp(fixeql) = nodval;
% Finally, fill back the computed unknowns to all nodal solutions:
temp(df) = sol;

%*****

```

รายละเอียดโปรแกรม HeatG

```

filename = input('Enter the input file name: ', 's');
fid = fopen(filename, 'r');
%
% Read the title of computation:
%
ntitle = fscanf(fid,'%i',1);
for i = 1:ntitle+1
    text1 = fgetl(fid);
end
%
% Read input data:
%
text2 = fgetl(fid);
npoin = fscanf(fid,'%i',1);
nelem = fscanf(fid,'%i',1);
for i=1:2
    text3 = fgetl(fid);
end
tk = fscanf(fid,'%f',1);
thick = fscanf(fid,'%f',1);
for i=1:2
    text4 = fgetl(fid);
end
noddata = fscanf(fid,'%i %i %f %f %f',[5 npoin]);
noddata = noddata';
nodid = squeeze(noddata(:,1));
ibc = squeeze(noddata(:,2));
coord(nodid,1) = squeeze(noddata(:,3));
coord(nodid,2) = squeeze(noddata(:,4));
temp = squeeze(noddata(:,5));
%
for ip = 1:npoin
    if noddata(ip,1) ~= ip
        fprintf(' node no. %5d in data file is missing', ip);
        pause;
        break
    end
end
%
for i=1:2
    text5 = fgetl(fid);
end
eledata = fscanf(fid,'%i %i %i %i %i %f',[6 nelem]);
eledata = eledata';
%
eleid = squeeze(eledata(:,1));

```

```

intmat(eleid,1) = squeeze(eledata(:,2));
intmat(eleid,2) = squeeze(eledata(:,3));
intmat(eleid,3) = squeeze(eledata(:,4));
intmat(eleid,4) = squeeze(eledata(:,5));
iqele = squeeze(eledata(:,6));
%
iq = 0;
for ie = 1:nelem
    if eledata(ie,1) ~= ie
        fprintf(' element no. %5d in data file is missing', ie);
        pause;
        break
    end
    if iqele(ie) ~= 0., iq = 1; end
end
fprintf('\n\nThe FE model includes the following heat transfer mode(s:');
fprintf('\n    >> Heat conduction');
if iq==1
    fprintf('\n    >> Internal heat generation');
end
fclose(fid);
%
%----- Calculation -----%
%
neq = npoin;
sysq = zeros(neq, 1);
sysk = zeros(neq);
fprintf('\n--- The FE model consists of %5d nodes and %5d elements --- \n',
npoin, nelem);

[sysk] = KGT(nelem, intmat, coord, tk, thick, sysk);
[sysq] = QGT(nelem, intmat, coord, thick, iqele, sysq);

% Gathering a list of the specified nodes and their temperatures, applying
% boundary conditions and solve for the nodal temperatures solutions:
%
ifixnode = find(IBC);
ifixtemp = squeeze(temp(ifixnode));

temp = soltemp(sysk, sysq, ifixnode, ifixtemp);
%
%----- Print out Solution -----%
%
% Print out the nodal temperatures into a file and on the screen:
%
filename = input('\n Enter file name for temperature solutions: ', 's');
fid = fopen(filename, 'w');
fprintf(fid, ' Nodal temperature solutions [%5d]:\n', npoin);
fprintf('    Nodal temperature solutions [%5d]:\n', npoin);
fprintf(fid, '\n    Node      Temperature\n');
fprintf('    \n    Node      Temperature\n');
for ip = 1:npoin
    fprintf(fid, ' %6d %14.6e\n', ip, temp(ip));
    fprintf('    %6d %14.6e\n', ip, temp(ip));
end
fclose(fid);

%*****

function [sysk] = KGT(nelem, intmat, coord, tk, thick, sysk)
%
% Establish element matrices and assemble them for system equations
%
% Loop over the number of elements:

```



```

%
for ie = 1:nelem
    eq = intmat(ie,:);
%
% Find element nodal coordinates:
%
    ii = intmat(ie,1);
    jj = intmat(ie,2);
    zz = intmat(ie,3);
    ll = intmat(ie,4);
    x1 = coord(ii,1);
    x2 = coord(jj,1);
    x3 = coord(zz,1);
    x4 = coord(ll,1);
    y1 = coord(ii,2);
    y2 = coord(jj,2);
    y3 = coord(zz,2);
    y4 = coord(ll,2);
    nodexy = [x1,y1; x2,y2; x3,y3; x4, y4];
% ng = 2 Gauss point
%-----
sq3 = 1/sqrt(3);
w11 = 1*1;
location = [-sq3,-sq3; -sq3,sq3; sq3,-sq3; sq3,sq3];
weight = [w11, w11, w11, w11];
%-----
% Compute element matrices for 4-node quadrilateral element
% Using (ng x ng) Gauss point integration
kk=zeros(4);
for i=1:length(weight)
    s = location(i, 1); t = location(i, 2); w = weight(i);
    dnds = [-(1-t)/4, (1-t)/4, (1+t)/4, -(1+t)/4];
    dndt = [-(1-s)/4, -(1+s)/4, (1+s)/4, (1-s)/4];
    J11 = dnds*nodexy(:,1); J12 = dnds*nodexy(:,2);
    J21 = dndt*nodexy(:,1); J22 = dndt*nodexy(:,2);
    detJ = J11*J22-J12*J21;
    JI = [J22, -J12; -J21, J11]/detJ;
    u = [dnds; dndt];
    b(1,1) = JI(1,1)*u(1,1)+JI(1,2)*u(2,1);
    b(1,2) = JI(1,1)*u(1,2)+JI(1,2)*u(2,2);
    b(1,3) = JI(1,1)*u(1,3)+JI(1,2)*u(2,3);
    b(1,4) = JI(1,1)*u(1,4)+JI(1,2)*u(2,4);
    b(2,1) = JI(2,1)*u(1,1)+JI(2,2)*u(2,1);
    b(2,2) = JI(2,1)*u(1,2)+JI(2,2)*u(2,2);
    b(2,3) = JI(2,1)*u(1,3)+JI(2,2)*u(2,3);
    b(2,4) = JI(2,1)*u(1,4)+JI(2,2)*u(2,4);
    bt(1,1)= b(1,1);
    bt(2,1)= b(1,2);
    bt(3,1)= b(1,3);
    bt(4,1)= b(1,4);
    bt(1,2)= b(2,1);
    bt(2,2)= b(2,2);
    bt(3,2)= b(2,3);
    bt(4,2)= b(2,4);
    btb(1,1) = bt(1,1)*b(1,1) + bt(1,2)*b(2,1) ;
    btb(1,2) = bt(1,1)*b(1,2) + bt(1,2)*b(2,2) ;
    btb(1,3) = bt(1,1)*b(1,3) + bt(1,2)*b(2,3) ;
    btb(1,4) = bt(1,1)*b(1,4) + bt(1,2)*b(2,4) ;
    btb(2,1) = bt(2,1)*b(1,1) + bt(2,2)*b(2,1) ;
    btb(2,2) = bt(2,1)*b(1,2) + bt(2,2)*b(2,2) ;
    btb(2,3) = bt(2,1)*b(1,3) + bt(2,2)*b(2,3) ;
    btb(2,4) = bt(2,1)*b(1,4) + bt(2,2)*b(2,4) ;
    btb(3,1) = bt(3,1)*b(1,1) + bt(3,2)*b(2,1) ;
    btb(3,2) = bt(3,1)*b(1,2) + bt(3,2)*b(2,2) ;

```

```

        btb(3,3) = bt(3,1)*b(1,3) + bt(3,2)*b(2,3) ;
        btb(3,4) = bt(3,1)*b(1,4) + bt(3,2)*b(2,4) ;
        btb(4,1) = bt(4,1)*b(1,1) + bt(4,2)*b(2,1) ;
        btb(4,2) = bt(4,1)*b(1,2) + bt(4,2)*b(2,2) ;
        btb(4,3) = bt(4,1)*b(1,3) + bt(4,2)*b(2,3) ;
        btb(4,4) = bt(4,1)*b(1,4) + bt(4,2)*b(2,4) ;
        kk = kk + tk*w*btb*thick*detJ;
    end
% Element conduction matrix:
    sysk(eq, eq) = sysk(eq, eq) + kk;
end

%*****

function [sysq] = QGT(nelem, intmat, coord, thick, iqele, sysq)
%
% Establish element matrices and assemble them for system equations
%
% Loop over the number of elements:
for ie = 1:nelem
    eq = intmat(ie,:);
%
% Find element nodal coordinates:
%
    ii = intmat(ie,1);
    jj = intmat(ie,2);
    zz = intmat(ie,3);
    ll = intmat(ie,4);
    x1 = coord(ii,1);
    x2 = coord(jj,1);
    x3 = coord(zz,1);
    x4 = coord(ll,1);
    y1 = coord(ii,2);
    y2 = coord(jj,2);
    y3 = coord(zz,2);
    y4 = coord(ll,2);
    nodexy = [x1,y1; x2,y2; x3,y3; x4, y4];
    q = iqele(ie);
% ng = 2 Gauss point
%-----%
    sq3 = 1/sqrt(3);
    w11 = 1*1;
    location = [-sq3,-sq3; -sq3,sq3; sq3,-sq3; sq3,sq3];
    weight = [w11, w11, w11, w11];
%-----%
    Compute element matrices for 4-node quadrilateral element
% Using (ng x ng) Gauss point integration
    rq = zeros(4,1);
    for i = 1:length(weight)
        s = location(i, 1); t = location(i, 2); w = weight(i);
        dnds = [-(1-t)/4, (1-t)/4, (1+t)/4, -(1+t)/4];
        dndt = [-(1-s)/4, -(1+s)/4, (1+s)/4, (1-s)/4];
        J11 = dnds*nodexy(:,1); J12 = dnds*nodexy(:,2);
        J21 = dndt*nodexy(:,1); J22 = dndt*nodexy(:,2);
        detJ = J11*J22-J12*J21;
        n = [(1-s)*(1-t)/4; (1+s)*(1-t)/4; (1+s)*(1+t)/4; (1-s)*(1+t)/4];
        rq = rq + w*q*n*thick*detJ;
    end
% Element conduction matrix:
    sysq(eq, 1) = sysq(eq, 1) + rq;
end

%*****

```

```
function temp = soltemp(K, Q, fixe, nodval)
%
% Apply boundary conditions and solve for nodal temperatures
%
% fixe is the list of equation numbers with specified nodal temp:
dof = length(Q);
% Use the setdiff command for matrix partitioning:
df = setdiff(1:dof, fixe);
% So that the system equations contain only unknown equations:
Kf = K(df, df);
Qf = Q(df) - K(df, fixe)*nodval;
% Then use the \ command to solve such set of partitioning equations:
sol = Kf\Qf;
temp = zeros(dof,1);
temp(fixe) = nodval;
% Finally, fill back the computed unknowns to all nodal solutions:
temp(df) = sol;

%*****
```



ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวเมธิศา จิตมานะ เกิดเมื่อวันที่ 31 เดือนกรกฎาคม พุทธศักราช 2534 ที่จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เมื่อปีการศึกษา 2555 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2556

