บทที่ 3

การคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ

บทนี้เสนอวิธีการคำนวณดัชนีสมรรถนะโดยใช้วิธีเชิงเลข เทคนิคที่สำคัญคือ การแทนปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ด้วยปริพันธ์จำกัดเขต (finite integral) โดยใช้วิธีการตัดปลาย (truncation) ปริพันธ์ และใช้วิธีเชิงเลข เช่นวิธีผลต่างอันตะ (finite difference) ในการคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตและอนุพันธ์ การใช้เทคนิคเหล่านี้ทำให้ให้ปัญหาการคำนวณ $\hat{v}$ แทนด้วยปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบตัวแปรมิติจำกัด (finite-dimensional optimization problem) บนปริภูมิแบบยุคลิด (Euclidean space) นอกจากนี้ในตอนท้ายของบท (หัวข้อที่ 3.7) ได้พิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงสำหรับการคงความเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

3.1 การประมาณฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (2.11) แยกพิจารณาได้ดังนี้

$$\mathrm{I}(f) = \beta f(0) + \mathrm{I}_T(f) + e_T(f) \tag{3.1}$$

โดยที่ $\mathrm{I}_T(f)$ และ $e_T(f)$ นิยามดังต่อไปนี้

$$\mathrm{I}_T(f) \triangleq \int_{-T}^{T} h_1(-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

และ

$$e_T(f) \triangleq \int_{-\infty}^{-T} h(-\tau)f(\tau)d\tau + \int_{T}^{\infty} h(-\tau)f(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตัดปลาย (truncated cost function) $\mathrm{I}_T(f)$ ได้จากการตัดปลายปริพันธ์ที่ปรากฏในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และ $e_T(f)$ แทนฟังก์ชันนัลคลาดเคลื่อน (error functional) ขึ้นกับเวลา T เกิดจากการตัดปลายปริพันธ์ใน (2.11) ประพจน์ 3.1 กล่าวถึงคุณสมบัติค่าขอบเขตบนของ $e_T(f)$

<u>**ประพจน์ที่**</u> **3.1** สมมติให้ระบบ (2.7) มีเสถียรภาพแบบ BIBO และให้ f เป็นสัญญาณเข้าที่มีขนาดจำกัดในเซตเป็นไปได้ (2.14) ฟังก์ชันนัลคลาดเคลื่อน $e_T(f)$ ที่นิยามใน (3.3) มีค่าจำกัด และลู่หาศูนย์ เมื่อ $T \to \infty$ □

พิสูจน์ ให้ $M_f = \|f\|_\infty < \infty$ บทพิสูจน์ของประพจน์ได้จากการประยุกต์ใช้อสมการของ (Hölder's inequality) ดังนี้

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} h_1(-\tau)f(\tau)\tau \right| \le M_f \int_{T}^{\infty} |h(t)|dt \tag{3.4}$$

สำหรับระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต ปริพันธ์ด้านซ้ายมือของ (3.4) มีค่าจำกัดสำหรับ $T \geq 0$ และลู่หาศูนย์ เมื่อ $T \to \infty$ (ดูรายละเอียดใน Chen, 1983) □

ผลที่ได้จากประพจน์ 3.1 คือ ถ้าระบบมีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขตแล้ว ค่าของฟังก์ชันนัลคลาดเคลื่อน $e_T(f)$ สามารถทำให้มีขนาดเล็ก เท่าไหร่ก็ได้สำหรับ T ที่มีขนาดมากเพียงพอ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (3.1) สามารถประมาณด้วย

$$\mathrm{I}(f) \approx \beta f(0) + \mathrm{I}_T(f) \tag{3.5}$$

ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีเชิงเลข ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีผลต่างอันตะซึ่งกล่าวในหัวข้อ 3.4

3.2 ตัวแทนสัญญาณ (Trajectories representation)

ให้ T เป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่ามาก จากประพจน์ที่ 3.1 กราฟของสัญญาณเข้า f สามารถพิจารณาเฉพาะในช่วงเวลา $[-T, T]$ จาก (3.4) ค่าขอบเขตบนของ $e_T(f)$ สามารถทำให้มีขนาดเล็กเท่าไหร่ก็ได้ และค่าขอบเขตดังกล่าวไม่ขึ้นกับเวลาที่ M_f เกิดขึ้น ดังนั้นนอร์ม L_∞ ของ f และ $\dot{f}$ สามารถพิจารณาในช่วงเวลา $t \in [-T, T]$ แทนช่วง $t \in (-\infty, \infty)$ ได้ สำหรับนอร์ม L_2 ของ f และ $\dot{f}$ ประมาณได้ด้วย

$$\|f\|_2^2 \approx \int_{-T}^{-T} |f(t)|^2\, dt \tag{3.6}$$

$$\text{และ} \quad \|\dot{f}\|_2^2 \approx \int_{-T}^{-T} |\dot{f}(t)|^2\, dt \tag{3.7}$$

เพื่อใช้ในการคำนวณ $\hat{v}$ ที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ กราฟของผลตอบ $h(t)$ และสัญญาณ $f(t)$ ในช่วงเวลา $t \in [-T, T]$ แทนด้วยเวคเตอร์ $\bar{\mathrm{h}}_1$, $\bar{\mathrm{f}}_0$ ที่นิยาม

$$\bar{\mathbf{h}}_1 \triangleq \left[\mathbf{h}_{-n},\ \mathbf{h}_{-n+1}, \ldots, \mathbf{h}_{n-1},\ \mathbf{h}_n\right]^{\mathsf{T}} \in \Re^{2n+1} \tag{3.8}$$

และ

$$\bar{\mathbf{f}}_0 \triangleq \left[\mathbf{f}_{-n},\ \mathbf{f}_{-n+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n-1},\ \mathbf{f}_n\right]^{\mathsf{T}} \in \Re^{2n+1} \tag{3.9}$$

โดยที่ $\mathbf{h}_i = h(t_i)$ และ $\mathbf{f}_i = f(t_i)$ จุดเวลา t กำหนดโดย

$$\left.\begin{aligned} t_{-n} &= -T \\ t_{i+1} &= t_i + \sigma \quad \text{สำหรับ} \quad i = -n, -n+1, \ldots, n-1 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

โดยที่ผลต่างเอกภาพ (uniform difference) $\sigma = T/n$

แม้ว่าปัญหา (2.8) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ แต่ก็สามารถมีสัญญาณเข้าใหญ่สุดได้หลายสัญญาณ ดังนั้นเพื่อให้คำตอบของปัญหา (2.8) มีคำตอบเดียว เงื่อนไขด้านขอบของฟังก์ชัน f ต้องถูกระบุ (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Lane, 1992) ในวิทยานิพนธ์นี้ระบุให้ค่าเริ่มต้นของ f มีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ $\mathbf{f}_{-n} = 0$ ดังนั้น $\bar{\mathbf{f}}_0$ ในสมการ (3.9) แทนด้วย

$$\bar{\mathbf{f}} \triangleq \left[\mathbf{f}_{-n+1},\ \mathbf{f}_{-n+2}, \ldots, \mathbf{f}_{n-1},\ \mathbf{f}_n\right]^{\mathsf{T}} \in \Re^{2n} \tag{3.11}$$

3.3 การประมาณอนุพันธ์

ในหัวข้อย่อยที่แล้ว ค่าของสัญญาณ $f(t)$ ในช่วงเวลา $t \in [-T, T]$ แทนด้วยเวคเตอร์ $\bar{\mathbf{f}}$ ตามที่ระบุในสมการ (3.11) ในทำนองเดียวกันกราฟ $\dot{f}(t)$ สามารถแทนได้ด้วยเวคเตอร์ $\bar{\mathbf{f}}_d$ ที่สอดคล้องกับ

$$\bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{d}} = Q_d \bar{\mathbf{f}} \tag{3.12}$$

โดยที่ Q_d และมิติของ $\bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{d}}$ ขึ้นอยู่กับสูตรที่ใช้ในการประมาณอนุพันธ์

วิทยานิพนธ์นี้ พิจารณาสูตรการหาอนุพันธ์แบบอันตะในรูป

$$\dot{f}(t_i) \approx \sum_{j=-\hat{k}}^{\hat{k}} \alpha_j f(t_{i+j}) \tag{3.13}$$

โดยที่ตัวถ่วง α_j $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \hat{k})$ เป็นค่าจริงใดๆ สูตร (3.13) เป็นรูปทั่วไปของสูตรการประมาณอนุพันธ์หลายสูตร อาทิเช่น สูตรผลต่างข้างหน้า (forward difference formula) สูตรผลต่างย้อนหลัง (backward difference formula) สูตรผลต่างกลาง (central difference formula) เป็นต้น (ดูตัวอย่างได้ใน Ralston and Rabinowitz, 2001)

เมื่อใช้สูตรผลต่างข้างหน้าอันดับหนึ่ง (the first-order forward formula)

$$\dot{f}(t_i) \approx \frac{f(t_i + \sigma) - f(t_i)}{\sigma} \qquad \text{สำหรับ } i = -n, -n+1, \ldots, n-1 \tag{3.14}$$

หรือสูตรผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (the first-order backward formula)

$$\dot{f}(t_i) \approx \frac{f(t_i) - f(t_i - \sigma)}{\sigma} \qquad \text{สำหรับ } i = -n+1, -n+2, \ldots, n \tag{3.15}$$

เมทริกซ์ Q_d ในสมการ (3.12) จะมีมิติ $(2n \times 2n)$ ดังนี้

$$Q_d = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

3.4 การประมาณปริพันธ์จำกัดเขตด้วยการใช้สูตรนิวตัน-โค้ตส์ (Newton-Cotes formula)

โดยทั่วไปวิธีหนึ่งที่ใช้ในการคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตคือ การใช้สูตรผลต่างอันตะ วิทยานิพนธ์นี้พิจารณาสูตรการหาปริพันธ์แบบ n_p จุดของนิวตัน-โค้ตส์ (n_p-point Newton-Cotes formula)

$$\int_{t_0}^{t_{n_p}} f(\tau)\, d\tau \approx \sum_{j=0}^{n_p} w_i f(\tau_{a+j}) \tag{3.17}$$

โดยที่ t_j $(j = 1, 2, \ldots, n_p)$ เป็นจุดเวลาบนช่วง $[t_0, t_{n_p}]$ และ $t_{j+1} - t_j = \sigma$ สูตรการคำนวณปริพันธ์จำกัดเขต (3.17) คลอบคลุมสูตรหลายๆสูตร อาทิเช่น ในกรณี $(n_p = 1)$ และ $(n_p = 2)$ สูตร (3.17) คือ หลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal rule) และหลักเกณฑ์ซิมป์สัน (Simpson's rule) ตามลำดับ (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Ralston and Rabinowitz, 2001)

สมมติว่าปริพันธ์จำกัดเขตคำนวณโดยใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สัน สำหรับระบบสังวัตนาการ (2.7) ที่เป็นระบบเหตุภาพ (non-anticipative system) กล่าวคือ $h(t) = 0\ \forall t < 0$ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ถูกตัดปลาย $\mathrm{I}_T(f)$ นิยามใน (3.5) คำนวณได้ดังนี้ (ดูเพิ่มเติมใน Silpsrikul and Arunsawatwong, 2009)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(f) &\approx (\beta + \tfrac{\sigma}{3}\mathbf{h}_0) f_0 + \tfrac{\sigma}{}3 \sum_{k=1}^{n-1} \left[3 + (-1)^{k+1}\right] \mathbf{h}_{n-k} \mathbf{f}_{-n+k} && (3.18) \\ &= \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}}^{\mathsf{T}} \bar{\mathbf{f}} \triangleq I(\bar{\mathbf{f}}) && (3.19) \end{aligned}$$

โดยที่เวคเตอร์ $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}} \in \Re^{2n}$ ใน (3.19) คือ

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}} = \tfrac{\sigma}{3}\left[4\mathbf{h}_{n-1},\ 2\mathbf{h}_{n-2}, \ldots, 4\mathbf{h}_{-1},\ \tfrac{3\beta}{\sigma} + \mathbf{h}_0,\ \mathbf{0}_{1\times \mathrm{n}}\right]^{\mathsf{T}} \tag{3.20}$$

ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $\mathrm{I}(f)$ ประมาณด้วย $I(\bar{\mathbf{f}})$ ที่นิยามใน (3.19)

ในทำนองเดียวกันเมื่อหลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมูนำมาใช้ในการคำนวณหาปริพันธ์จำกัดเขตฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตัดปลายคำนวณดังนี้

$$I(\bar{\mathbf{f}}) = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}} \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{โดยที่}\ \ \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}} = \tfrac{\sigma}{2}\left[2\mathbf{h}_{n-1},\ 2\mathbf{h}_{n-2}, \ldots, 2\mathbf{h}_{-1},\ \tfrac{2\beta}{\sigma} + \mathbf{h}_0,\ \mathbf{0}_{1\times \mathrm{n}}\right]^{\mathsf{T}}$$

3.5 เงื่อนไขขอบเขต L_2

ในหัวข้อ 3.2 นอร์มแบบ L_2 ของสัญญาณเข้า f และ $\dot{f}$ ประมาณได้ด้วย การตัดปลายปริพันธ์ไม่ตรงแบบในสมการ (3.6) และ (3.7) ตามลำดับ ทำนองเดียวกันกับวิธีที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันตัดปลาย นอร์ม L_2 ของสัญญาณ f คำนวณได้ดังนี้

$$\int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt \approx \sum_{k=1}^{2n-1} q_k \mathbf{f}_{n-k}^2 = \bar{\mathbf{f}}^{\,\mathsf{T}} Q_1 \bar{\mathbf{f}} \tag{3.21}$$

โดยที่ $Q_1 \in \Re^{2n\times 2n}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม สมาชิกลำดับที่ k ของแนวทแยงมุมคือ q_k มีค่าดังนี้

$$q_k = \begin{cases} \frac{\delta}{3}\left[3+(-1)^{k+1}\right] & \text{สำหรับ } k = 1,2,\ldots,2n-1 \\ \frac{\delta}{3} & \text{สำหรับ } k = 2n \end{cases} \tag{3.22}$$

เมื่อใช้เกณฑ์ซิมป์สัน ค่า q_k สำหรับ $k = 1,2,\ldots,2n$ เป็นจำนวนจริงบวกทั้งสิ้น เป็นผลให้เมทริกซ์ Q_1 เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในหัวข้อ 3.7

ในทำนองเดียวกันการคำนวณนอร์ม L_2 ของ $\dot{f}$ ใน (3.7) สามารถคำนวนได้ดังนี้

$$\int_{-T}^{T} |\dot{f}(t)|^2\,dt \approx \bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{d}}^{\mathsf{T}} Q_{1d} \bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}}^{\,\mathsf{T}} Q_2 \bar{\mathbf{f}} \tag{3.23}$$

โดยที่เมทริกซ์ $Q_2 = Q_d^{\mathsf{T}} Q_{1d} Q_d$ และ $Q_{1d} \in \Re^{2n\times 2n}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม และเป็นบวกแน่นอน เงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์ Q_2 เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนจะกล่าวในบทที่ 4

3.6 เงื่อนไขขอบเขต L_∞

ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อ 3.2 แล้วว่า นอร์ม L_∞ ของ f และ $\dot{f}$ สามารถพิจารณาในช่วงเวลา $t \in [-T,T]$ ได้ ดังนั้นอสมการ $\|f\|_\infty \le M_\infty$ และ $\|\dot{f}\|_\infty \le D_\infty$ แทนด้วย

$$-M_\infty \le \mathbf{f}_i \le M_\infty \quad \text{สำหรับ } i = -n+1, -n+2, \ldots, n \tag{3.24}$$

และ

$$-D_\infty \le \mathbf{f}_{\mathbf{d}i} \le D_\infty \quad \text{สำหรับ } i = -n+1, -n+2, \ldots, n \tag{3.25}$$

โดยที่ $\mathbf{f}_i$ และ $\mathbf{f}_{\mathbf{d}i}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์ $\bar{\mathbf{f}}$ และ $\bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{d}}$ ตามลำดับ

เพื่อความกระทัดรัดให้สัญลักษณ์ $x \preceq y$ แทนการเทียบอสมการระหว่างสมาชิกของเวคเตอร์ x และ y อสมการ (3.24) และ (3.25) เขียนแทนด้วย

$$\mathbf{I}\bar{\mathbf{f}} \preceq M_\infty \bar{\mathbf{1}} \quad \text{และ} \quad -\mathbf{I}\bar{\mathbf{f}} \preceq M_\infty \bar{\mathbf{1}} \tag{3.26}$$

และ

$$Q_d \bar{\mathbf{f}} \preceq D_\infty \bar{\mathbf{1}} \quad \text{and} \quad -Q_d \bar{\mathbf{f}} \preceq D_\infty \bar{\mathbf{1}} \tag{3.27}$$

ตามลำดับ โดยที่สัญลักษณ์ $\mathbf{I}$ และ $\bar{\mathbf{1}}$ แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ และเวคเตอร์ที่สมาชิกทั้งหมดมีค่าเป็นหนึ่ง

3.7 ความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ

ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ว่า ปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ (2.8) เป็นปัญหาแบบการหาค่าเหมาะที่เชิงคอนเวกซ์ เพื่อคงคุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์ไว้ บทนี้กล่าวถึงเงื่อนไข

จำเป็นและเพียงพอ สำหรับความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหาการคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่เกิดจากการใช้เทคนิคการประมาณที่ได้กล่าวในบทที่นี้ ซึ่งปัญหาที่ได้เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดนิยามบนปริภูมิ $\Re^{2n}$

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และเงื่อนไขบังคับสำหรับปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะที่ได้จากการใช้เทคนิคการประมาณในบทที่ 3 กล่าวซ้ำดังนี้ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ

$$I(\bar{\mathbf{f}}) = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{f}} \tag{3.28}$$

โดยที่ $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{h}}$ เป็นเวคเตอร์ตามที่ระบุใน (3.20) เงื่อนไขบังคับต่างๆ มีดังนี้

- $\|f\|_2 \le M_2$ แทนด้วย

$$\bar{\mathbf{f}}^{\mathsf{T}}Q_1\bar{\mathbf{f}} \le M_2^2 \tag{3.29}$$

- $\|f\|_\infty \le M_\infty$ แทนด้วย

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{I}\bar{\mathbf{f}} & \preceq & M_\infty\bar{\mathbf{1}} \\ -\mathbf{I}\bar{\mathbf{f}} & \preceq & M_\infty\bar{\mathbf{1}} \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

- $\|\dot{f}\|_2 \le D_2$ แทนด้วย

$$\bar{\mathbf{f}}^{\mathsf{T}}Q_2\bar{\mathbf{f}} \le D_2^2 \tag{3.31}$$

  โดยที่ $Q_2 = Q_d^{\mathsf{T}}Q_{1d}Q_d$

- $\|\dot{f}\|_\infty \le D_\infty$ แทนด้วย

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_d\bar{\mathbf{f}} & \preceq & D_\infty\bar{\mathbf{1}} \\ -Q_d\bar{\mathbf{f}} & \preceq & D_\infty\bar{\mathbf{1}} \end{array}\right\} \tag{3.32}$$

ดัชนีสมรรถนะเป็นคำตอบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{\bar{\mathbf{f}}} & I(\bar{\mathbf{f}}) \\ \text{subject to} & \big(\text{(3.29) และ/หรือ (3.30)}\big) \text{ และ } \big(\text{(3.31) และ/หรือ (3.32)}\big) \end{array}\right\} \tag{3.33}$$

ในวิทยานิพนธ์นี้ ความชันของสัญญาณเข้า $\dot{f}$ ประมาณโดยสูตร (3.13) สูตรดังกล่าวทำให้เงื่อนไข (3.30) และ (3.32) เป็นอสมการเชิงเส้นในตัวแปร $\bar{\mathbf{f}}$ ดังนั้นปัญหา (3.33) มีความเป็นคอนเวกซ์ก็ต่อเมื่อ Q_1 และ Q_2 เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ความเป็นบวกแน่นอนของเมทริกซ์ทั้งสองขึ้นอยู่กับสูตรการประมาณปริพันธ์ (3.17) และสูตรการประมาณอนุพันธ์ (3.13) เงื่อนไขสำหรับการเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนของ Q_1 และ Q_2 แสดงในประพจน์ดังต่อไปนี้

ประพจน์ที่ 3.2 สมมติให้ค่าปริพันธ์ใน (3.6) และ (3.7) คำนวณโดยการใช้สูตร (3.17) ด้วยค่า $n_p \le 7$ หรือ $n_p = 9$ เมทริกซ์ Q_1 และ Q_{1d} ในเงื่อนไข (3.29) และ (3.31) มีความเป็นบวกแน่นอน □

พิสูจน์ ตัวถ่วง w_j ในสูตรการคำนวณปริพันธ์ (3.17) เป็นสมาชิกในแนวทแยงของเมทริกซ์ Q_1 และ Q_{1d} และตัวถ่วง w_j มีค่าเป็นบวกทุกค่า เมื่อใช้ $n_p \le 7$ หรือ $n_p = 9$ (ดูตัวอย่างใน Ralston and Rabinowitz, 2001) □

ประพจน์ที่ 3.3 สมมติค่า $\dot{f}(t_i)$ คำนวณจาก (3.13) โดยใช้ค่า $f(t_j)$ $(j = -n+1, -n+2, \ldots, n-1, n)$ และ $f(t_{-n}) = 0$ และสมมติว่า Q_{1d} เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

ก) ใช้สูตรผลต่างข้างหน้าอันดับหนึ่ง (3.14) หรือ สูตรผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (3.15) ในการคำนวณ $\dot{f}(t_i)$

ข) เมทริกซ์ Q_d ใน (3.12) มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม (full column rank)

ค) เมทริกซ์ Q_2 ใน (3.31) เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

□

พิสูจน์ ก) $\Leftarrow$ ข) สมมติว่าอนุพันธ์คำนวณโดยใช้สูตร (3.13) กรณี $\hat{k} \geq 2$ เมทริกซ์ Q_d ที่ได้ไม่มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม พิจารณากรณี $\hat{k} = 1$ สูตร (3.13) กระจายได้ดังนี้

$$\dot{f}(t_i) \approx \alpha_{-1} f(t_i - \sigma) + \alpha_0 f(t_i) + \alpha_1 f(t_i + \sigma) \tag{3.34}$$

สมการที่ (3.34) มีความเป็นไปได้ 4 กรณีดังนี้ (i) α_{-1}, α_0 และ α_1 ไม่เป็นศูนย์ (ii) เฉพาะ $\alpha_0 = 0$ (iii) เฉพาะ $\alpha_{-1} = 0$ และ (iv) เฉพาะ $\alpha_1 = 0$ กรณี (i) และ (ii) ให้เมทริกซ์ Q_d ไม่มีค่าลำดับแนวตั้งเต็มเช่นกัน โดยการประยุกต์ใช้การกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor expansion) กับสมการ (3.34) และใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficient) สามารถแสดงให้เห็นว่ากรณีที่ (iii) และ (iv) เป็นสูตรการผลต่างข้างหน้าอันดับหนึ่ง (3.14) และ สูตรย้อนหลังอันดับหนึ่ง (3.15) ตามลำดับ ดังนั้นถ้าใช้สูตร (3.14) หรือ (3.15) แล้ว Q_d มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม

ก) $\Rightarrow$ ข) เมื่อใช้สูตร (3.14) หรือ (3.15) ในการคำนวณค่าอนุพันธ์ เมทริกซ์ Q_d ที่ระบุใน (3.16) เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ดังนั้น Q_d มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม

ข) $\Rightarrow$ ค) ให้ $\bar{y} = Q_d\bar{x}$ แต่ละสดมภ์ (column) มีความเป็นอิสระเชิงเส้นกัน (linearly independent) เพราะว่า Q_d มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม ดังนั้น $\bar{y} = \bar{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{x} = \bar{0}$ และเนื่องจาก Q_{1d} เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน $\bar{y}^{\mathsf{T}} Q_{1d} \bar{y} = \bar{x}^{\mathsf{T}} Q_2 \bar{x} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{x} = \bar{0}$

ข) $\Leftarrow$ ค) สมมติให้ Q_d ไม่มีค่าลำดับแนวตั้งเต็ม กล่าวคือ $Q_d(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{0}$ สำหรับ $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ กำหนดให้ $\bar{y} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ จะพบว่า $\bar{y}^{\mathsf{T}} Q_2 \bar{y} = 0$ สำหรับ $\bar{y} \neq \bar{0}$ ดังนั้น Q_2 ไม่เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

กรณีทั้งหมดเป็นจริงสำหรับค่า $\sigma > 0$ ใด □

ทฤษฎีบทที่ 3.4 สมมติค่าปริพันธ์และอนุพันธ์คำนวณโดยการใช้สูตรผลต่างอันตะ (3.17) และ (3.13) ด้วยผลต่างเอกภาพ $\sigma > 0$ ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (3.33) เป็นปัญหาเชิงคอนเวกซ์สำหรับค่า $\sigma > 0$ ใดๆ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) ค่าปริพันธ์ใน (3.6) และ (3.7) คำนวณโดยใช้สูตร (3.17) ด้วยค่า $n_p \leq 7$ หรือ $n_p = 9$

2) ค่าอนุพันธ์ $\dot{f}(t_i)$ คำนวณโดยใช้สูตรผลต่างอันดับหนึ่ง (3.14) หรือ (3.15)

□

พิสูจน์ ผลของทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจากประพจน์ที่ 3.2 และ 3.3 □

ทฤษฎีที่ 3.4 แสดงให้เห็นว่าสูตรผลต่างอันตะสูตรใดบ้างที่สามารถนำมาใช้คำนวณค่าปริพันธ์และอนุพันธ์ เพื่อให้ปัญหาการคำนวณสมรรถนะ (3.33) เป็นปัญหาเชิงคอนเวกซ์

บทแทรกที่ 3.5 เมื่อค่าปริพันธ์และอนุพันธ์ในปัญหาการคำนวณสมรรถนะ (3.33) คำนวณโดยการใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สัน และผลต่างอันดับหนึ่ง (3.14) ตามลำดับ ปัญหาการคำนวณสมรรถนะ (3.33) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ สำหรับทุกค่า $\sigma > 0$ □

ในทางปฏิบัติการใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สัน (เป็นกรณี $n_p = 2$ ของสูตรนิวตัน-โค้ตส์) เพียงพอสำหรับการนำไปใช้ คำนวณค่าปริพันธ์ในปัญหา (3.33) เนื่องจากหลักเกณฑ์ซิมป์สันให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่ (local truncation error) $\mathcal{O}(\sigma^5)$ ในขณะที่สูตรการคำนวณอนุพันธ์ผลต่างอันดับหนึ่งให้ค่าคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ $\mathcal{O}(\sigma^1)$ ดังนั้นการใช้สูตรนิวตัน-โค้ตส์ด้วยค่า $n_p \geq 3$ จะไม่ให้ผลที่ดีขึ้น เพราะค่าคลาดเคลื่อนหลักเกิดจากการประมาณอนุพันธ์

3.8 สรุป

เทคนิคที่ใช้ในการคำนวณดัชนีสมรรถนะในวิทยานิพนธ์นี้คือ การตัดปลายปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และใช้วิธีผลต่างอันตะ (finite difference) คำนวณปริพันธ์และอนุพันธ์ที่ปรากฏในปัญหา (2.8) การใช้สูตรนิวตัน-โค้ตส์ (3.17) และอนุพันธ์ใช้สูตร (3.13) ทำให้ปัญหาดังกล่าวซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในตัวแปรมิติอนันต์ แทนด้วยปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบตัวแปรมิติจำกัดบนปริภูมิแบบยุคลิด

นอกจากนี้ได้พิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการนำสูตร (3.17) และ (3.13) มาใช้เพื่อให้ปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ยังคงความเป็นคอนเวกซ์