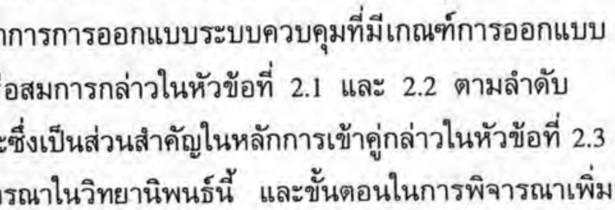
บทที่ 2

กรอบงาน Zakian และปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ

บทนี้ทบทวนกรอบงานของ Zakian ประกอบด้วยหลักการเข้าคู่ และวิธีอสมการ ซึ่งเป็นทฤษฎีหลักเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการการออกแบบระบบควบคุมที่มีเกณฑ์การออกแบบ (1.1) เป็นเกณฑ์หลัก หลักการเข้าคู่ และวิธีอสมการกล่าวในหัวข้อที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ รูปแบบปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะซึ่งเป็นส่วนสำคัญในหลักการเข้าคู่กล่าวในหัวข้อที่ 2.3 หัวข้อที่ 2.4 กล่าวถึงเซตเป็นไปได้ที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ และขั้นตอนในการพิจารณาเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตให้กับเซตเป็นไปได้ เพื่อให้ได้ผลการออกแบบระบบควบคุมที่ดีขึ้น หัวข้อที่ 2.5 กล่าวถึงการมีอยู่ของค่าดัชนีสมรรถนะ

2.1 หลักการเข้าคู่

ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งแวดล้อม และระบบควบคุมสามารถพิจารณาได้ดังนี้ สิ่งแวดล้อมเป็นแหล่งสร้างสัญญาณภายนอก f กระตุ้นระบบ เมื่อระบบถูกกระตุ้นระบบผลิตสัญญาณออก v ให้กับสิ่งแวดล้อม ดังแสดงในรูปที่ 2.1 หลักการเข้าคู่เป็นหลักการที่กล่าวถึงการเข้าคู่กันระหว่างสิ่งแวดล้อม และระบบ (อ่านประกอบเพิ่มเติมใน Zakian, 1991, 1996, 2005)



รูปที่ 2.1: ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งแวดล้อม และระบบ

สัญญาณภายนอกที่สิ่งแวดล้อมสร้างขึ้นเป็นสัญญาณที่เกิดขึ้นจริง หรือมีแนวโน้มว่าจะเกิดขึ้น เซตของสัญญาณดังกล่าวเรียกว่า *เซตเป็นไปได้* $\mathcal{P}$ ในขณะเดียวกันพิจารณาสัญญาณ f ที่มากระทำกับระบบ ถ้าสัญญาณ f กระตุ้นให้ระบบสร้างสัญญาณออกที่อยู่ในเกณฑ์การออกแบบที่กำหนดขึ้นเพื่อให้เป็นเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 ว่ามีปัญหาการออกแบบระบบควบคุมหลายปัญหาที่ใช้เกณฑ์ (1.1) เป็นเกณฑ์หลักในการออกแบบ อ้างถึงเกณฑ์ดังกล่าวซ้ำอีกที

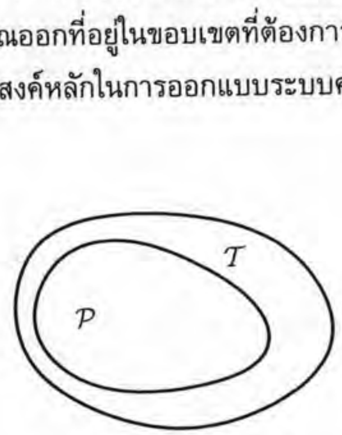
$$|v(t, f)| \leq \varepsilon, \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

ในที่นี้ถ้าสัญญาณ f ใดสอดคล้องกับ (2.1) เรียกสัญญาณดังกล่าวว่า *สัญญาณเข้าทนทานได้ (tolerable input)* และเซตของสัญญาณเข้าทนทานมีชื่อเรียกว่า *เซตทนทานได้* $\mathcal{T}$ *(tolerable set)* (Zakian, 1991, 1996, 2005)

สิ่งแวดล้อมและระบบเข้าคู่กัน หมายถึง ทุก ๆสัญญาณที่อยู่ในเซตเป็นไปได้จะต้องเป็นสัญญาณทนทานด้วย ดังนั้นสิ่งแวดล้อมและระบบเข้าคู่กันสมมูลกับ

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \tag{2.2}$$

แสดงในรูปที่ 2.2 หรือกล่าวได้ว่า ถ้าสิ่งแวดล้อมและระบบเข้าคู่กันแล้ว สัญญาณทุกสัญญาณที่เกิดจากสิ่งแวดล้อมจะสร้างสัญญาณออกที่อยู่ในขอบเขตที่ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับเกณฑ์การออกแบบหลัก (1.1) ดังนั้นวัตถุประสงค์หลักในการออกแบบระบบควบคุม (1.1) สมมูลกับ (1.2) และ (2.2)



รูปที่ 2.2: การเข้าคู่กันระหว่างสิ่งแวดล้อม (แทนด้วยเซต $\mathcal{T}$) และระบบ (แทนด้วยเซต $\mathcal{P}$)

วิธีการหนึ่งที่ทำให้เกิดการเข้าคู่กันระหว่างสิ่งแวดล้อมและระบบ คือการหาค่าพารามิเตอร์ p ที่สอดคล้องกับอสมการ (1.2) เห็นได้ว่าในการประยุกต์ใช้หลักการข้างต้นผู้ออกแบบต้องคำนึงถึง การกำหนดเซตเป็นไปได้ และการคำนวณดัชนีสมรรถนะ ซึ่งรายละเอียดของปัญหาทั้งสองแสดงในหัวข้อ 2.3 และ 2.4 ตามลำดับ

2.2 วิธีอสมการ

วิธีอสมการเป็นวิธีการออกแบบวิธีหนึ่งที่เสนอโดย Zakian and Al-Naib (1973) (ดูเพิ่มเติมใน Zakian, 1979, 1996, 2005; Whidborne, 1993; Maciejowski, 1989) ซึ่งกำหนดลักษณะปัญหาการออกแบบในรูปเซตของอสมการ

$$\phi_i(p) \leq \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.3}$$

โดยที่ p เป็นสิ่งที่ต้องการจะออกแบบ (เช่น ตัวควบคุม หรือระบบควบคุม) เลือกจากเซต $C \subseteq R^p$ ที่สมาชิกทุกตัวสามารถออกแบบได้จริง (implementable design) อาทิเช่น ตัวควบคุมที่สามารถสร้างได้จริง เป็นต้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function) $\phi_i : C \to \Re \cup \{\infty\}$ แทนพฤติกรรมหรือลักษณะสมบัติของระบบ และค่า ε_i เป็นขอบเขตที่มากที่สุดของค่าฟังก์ชัน $\phi_i(p)$ ที่ยอมรับได้ พารามิเตอร์ p เป็นคำตอบของการออกแบบ ถ้า p สอดคล้องกับอสมการ (2.3)

นิยามเซต $\mathcal{S}_i$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยพารามิเตอร์ p ที่สอดคล้องกับอสมการ $\phi_i(p) \leq \varepsilon_i$ กล่าวคือ

$$\mathcal{S}_i = \{p : \phi_i(p) \leq \varepsilon_i\} \tag{2.4}$$

ดังนั้นการหาคำตอบของเซตอสมการ (2.3) คือ หาพารามิเตอร์ p ที่เป็นสมาชิกของทุกๆ เซต $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ กล่าวคือ

$$p \in \mathcal{S} \triangleq \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{S}_i \tag{2.5}$$

เรียกเซต $\mathcal{S}$ ว่า *เซตยอมรับได้ (admissible set)*

เซตยอมรับได้ $\mathcal{S}$ อาจจะประกอบด้วยสมาชิกตั้งแต่หนึ่งตัว หรือไม่มีเลย นั่นคือเป็นเซตว่าง (empty set) ถ้าเป็นเซตว่างหมายความว่า ไม่มีคำตอบสำหรับเซตอสมการ (2.3) ผู้ออกแบบสามารถสร้างรูปแบบของปัญหาใหม่ (reformulation) โดยปรับขอบเขต ε_i ให้กว้างขึ้นเพื่อให้เซตอสมการ (2.3) มีคำตอบ หรือปรับโครงสร้างของระบบควบคุม (control configuration) ให้มีความซับซ้อนขึ้น (เป็นการเพิ่มมิติของพารามิเตอร์ p นั่นเอง)

ในทางกลับกันถ้าเซต $\mathcal{S}$ มีขนาดใหญ่ ซึ่งผู้ออกแบบสามารถสังเกตได้จากการที่คำตอบของเซตอสมการ (2.3) หาได้ง่าย ผู้ออกแบบมีโอกาสปรับปรุงการออกแบบให้ดีขึ้น อาทิเช่น ผู้ออกแบบสามารถลดความซับซ้อนของโครงสร้างระบบควบคุมได้ (ลดมิติของพารามิเตอร์ p) เพื่อเป็นการลดความยุ่งยาก และต้นทุนในการสร้างระบบควบคุม หรืออาจจะปรับขอบเขตให้เล็กลงเพื่อเป็นการเพิ่มสมรรถนะของระบบควบคุม ในบางกรณีแม้ว่าเซตยอมรับไม่เป็นเซตว่างก็ตาม แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้เนื่องด้วยวิธีการค้นหาคำตอบ (searching algorithm) ตกหลุมเชิงการคำนวณ (computational trap) การเปลี่ยนจุดเริ่มต้น (starting point) น่าจะช่วยแก้ปัญหาได้

ชุดอสมการ (2.3) สามารถแยกพิจารณาได้ 2 กลุ่ม กลุ่มแรกประกอบด้วยอสมการที่แทนข้อจำกัดในการออกแบบ (constraint) กลุ่มที่สองได้แก่กลุ่มของอสมการที่แทนสมรรถนะที่ต้องการ โดยที่แต่ละสมรรถนะแทนด้วยอสมการหนึ่งสมการ การแทนแต่ละสมรรถนะด้วยอสมการหนึ่งอสมการที่แตกต่างกันนี้ ต่างจากปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่ใช้กันอยู่ที่พิจารณาค่าเหมาะของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $\bar{\phi}(p)$ ฟังก์ชันเดียว (single objective optimization problem) แม้ว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $\bar{\phi}(p)$ นี้ อาจเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมถ่วงน้ำหนักของฟังก์ชันสมรรถนะที่ต้องการ กล่าวคือ

$$\bar{\phi}(p) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, \phi_i(p) \tag{2.6}$$

โดยที่ $w_i, i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นจำนวนจริงบวก แต่การหาค่าเหมาะของฟังก์ชัน (2.6) ไม่สามารถแสดงให้เห็นถึงความต้องการที่แท้จริงในการปัญหาการออกแบบ ที่ต้องการให้สมรรถนะที่ต้องการ $\phi_i(p)$ อยู่ในขอบเขต ε_i ที่กำหนด ในทางตรงกันข้าม วิธีอสมการเป็นวิธีที่สอดคล้องกับความต้องการจริงในปัญหาการออกแบบ

ในกรณีที่จำนวนอสมการใน (2.3) น้อย และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ไม่ซับซ้อนมากนัก ผู้ออกแบบอาจจะใช้วิธีวิเคราะห์ (analytical method) เพื่อหาคำตอบวิเคราะห์ได้ (analytical solution) แต่ในความเป็นจริง จำนวนอสมการใน (2.3) มีจำนวนมาก และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ก็มีความซับซ้อน ทำให้การหาคำตอบด้วยวิธีการวิเคราะห์เป็นไปได้ยากและมีข้อจำกัด ในขณะที่วิธีเชิงเลข (numerical method) สามารถนำมาใช้ได้ในวงกว้างกว่า ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ขั้นตอนวิธี moving boundaries process (MBP) (Zakian and Al-Naib, 1973) เนื่องจากเป็นวิธีหนึ่งที่ง่าย เชื่อถือได้ และมีเครื่องมือพร้อมใช้สำหรับแก้ปัญหาสำหรับโปรแกรม MATLAB (นอกจากนี้ยังมีวิธีเชิงเลขอื่นๆ อาทิเช่น Zakian (2005, ส่วนที่ III) เป็นต้น)

นับตั้งแต่ปี 1973 เป็นต้นมา มีงานวิจัยหลายงานได้นำวิธีอสมการไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุม โดยนำขั้นตอนวิธี MBP ไปหาคำตอบของชุดอสมการที่เกิดขึ้นอย่างประสบความสำเร็จ อาทิเช่น Zakian and Al-Naib (1973), Gray and Al-Janabi (1975), Gray and Al-Janabi (1976), Taiwo (1978a, 1978b, 1979a, 1979b, 1980, 1986), Prabhu and Chidambaram (1991), และ Janabi and Gray (1991) เป็นต้น สำหรับเอกสารอ้างอิงทั้งหมดที่เกี่ยวข้องสามารถหาได้จาก Zakian (1996) และหนังสือ Zakian (2005)

2.3 ปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ

แม้ว่าเกณฑ์ในการออกแบบ (1.1) และ (1.2) เป็นเกณฑ์ที่ใช้สำหรับระบบใดๆ ไม่เจาะจงเฉพาะกับระบบประเภทใดประเภทหนึ่ง แต่เพื่อให้การกำหนดรูปแบบปัญหาเป็นไปในทิศทางที่ชัดเจน งานวิจัยที่ผ่านมาพิจารณาวิธีคำนวณสมรรถนะของระบบเชิงเส้นเท่านั้น รวมถึง Zakian และคณะ พัฒนาหลักการเข้าคู่สำหรับระบบเชิงเส้น ไม่แปรตามเวลา (linear time-invariant system) ที่มีสัญญาณเข้า f และสัญญาณออก v สัมพันธ์กันด้วยปริพันธ์สังวัตนาการ (convolution integral) ดังนี้

$$v(t,f,p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda,p)\, f(\lambda) d\lambda \tag{2.7}$$

โดยที่ $h(\cdot,p)$ เป็นผลตอบของระบบที่มีต่อสัญญาณเข้า f และขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ p $v(t,f,p)$ เป็นค่าของ $v(\cdot,f,p)$ ณ เวลา t จากงานวิจัยที่ผ่านมา การคำนวณดัชนีสมรรถนะ $\hat{v}$ ของระบบ (2.7) สามารถคำนวณได้สำหรับหลายๆ กรณีของเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}$ กล่าวคือหนึ่งวิธีใช้สำหรับเซตเป็นไปได้หนึ่งเซต

ให้ $\mathcal{P}$ แทนเซตเป็นไปได้ใดๆที่เป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) ถ้าสัญญาณเข้า f เป็นสมาชิกในเซต $\mathcal{P}$ แล้ว สัญญาณเข้าที่ถูกเลื่อนทางแกนเวลา $f(t-\Delta T)$ เป็นสมาชิกของเซต $\mathcal{P}$ ด้วย กล่าวคือค่า $\hat{v}(\mathcal{P})$ สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (2.7) สามารถเกิดขึ้นได้ที่เวลาเจาะจง t ใดๆ ดังนั้นค่า $\hat{v}(\mathcal{P})$ ถูกพิจารณาให้เกิด ณ เวลา $t=0$ นอกจากนี้ $f \in \mathcal{P}$ หมายความถึง $-f \in \mathcal{P}$ ด้วย ดังนั้นปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะสำหรับเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}$ หรือ $\hat{v}(\mathcal{P})$ ของระบบ (2.7) เขียนได้ในรูปของปัญหา

$$\hat{v}(\mathcal{P}) = \sup\{\mathrm{I}(f) : f \in \mathcal{P}\} \tag{2.8}$$

โดยที่ $\mathrm{I}(f)$ แทนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (cost function) นิยามดังนี้

$$\mathrm{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$

รายละเอียดเพิ่มเติมหาอ่านได้ใน Lane (1992) และ Lane (1995) สังเกตว่าปัญหา (2.8) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบตัวแปรมิติอนันต์

ปริพันธ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (2.9) ถูกพิจารณาในช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะจากการที่พิจารณาว่าค่า $\hat{v}(\mathcal{P})$ เกิด ณ เวลา $t = 0$ นั้น สัญญาณเข้าเป็นไปได้ดังกล่าวสามารถเกิดขึ้นได้ก่อนเวลา $t = 0$ ตัวอย่างของสัญญาณเข้าดังกล่าวแสดงในบทที่ 4 (และดูเพิ่มเติมใน Lane (1995, 2005) และ Silpsrikul and Arunsawatwong (2009)

ในวิทยานิพนธ์นี้ กำหนดให้ผลตอบสัญญาณเข้าอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (unit impulse response) มีรูปแบบดังนี้

$$h(t) = \beta\delta(t) + h_1(t) \tag{2.10}$$

โดยที่ β เป็นจำนวนจริงใดๆ δ แทนสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย และ $h_1 : \Re \to \Re$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง (piecswise continuous) โดยการแทน (2.10) ลงใน (2.9) และจากคุณสมบัติการเลือกเฟ้น (sifting property) ของฟังก์ชันอิมพัลส์ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (2.9) สามารถเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\mathrm{I}(f) = \beta f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{2.11}$$

จากรูปแบบปัญหาที่พิจารณาข้างต้น ทำให้วิธีการคำนวณ $\hat{v}$ ที่เสนอในบทต่อไปสามารถใช้ได้กับระบบเชิงเส้นหลายระบบ ที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกสัมพันธ์กันด้วยปริพันธ์สังวัตนาการ (2.7) ระบบดังกล่าวประกอบด้วย ระบบตรรกยะ (RS) และระบบมิติอนันต์บางประเภท เช่น ระบบอนุพันธ์ที่มีการประวิงเวลา (DDS) และ ระบบอนุพันธ์เศษส่วนที่มีการประวิงเวลาแบบหน่วง (RFDDS) รายละเอียดเกี่ยวกับระบบ DDS และ RFDDS มีใน (Hale and Verduyn-Lunel, 1993) และ (Podlubny, 1999) ตามลำดับ

2.4 เซตเป็นไปได้

เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}$ เป็นแบบจำลองสัญญาณในสิ่งแวดล้อมที่เกิดขึ้นจริง หรือมีแนวโน้มว่าจะเกิดขึ้น เซตดังกล่าวจึงมีความสำคัญในการกำหนดรูปแบบของปัญหา (problem formulation) เซต $\mathcal{P}$ ควรมีรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมากจนเกินไป และยังคงสามารถรวมสัญญาณเข้าเป็นไปได้ทั้งหมด ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้นอร์มของฟังก์ชัน (function norm) ในการกำหนดลักษณะเงื่อนไขขอบเขตของเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}$ เช่นเดียวกับงานวิจัยที่ผ่านมาของ Zakian และคณะ (ได้แก่ Lane, 1992; Lane, 1995; Satoh, 2005; Zakian, 1986b; Zakian, 1986a) แต่สิ่งที่แตกต่างคือ เซต

เป็นไปได้ที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้มีความเป็นทั่วไปกว่า เพราะครอบคลุมเซตเป็นไปได้หลายเซต ที่เคยได้รับการพิจาณาหาค่าดัชนีสมรรนะแล้ว ดังที่จะกล่าวในลำดับต่อไป

นิยามนอร์มของฟังก์ชัน และเซตของสัญญาณ ดังต่อไปนี้

<u>นิยาม</u> **2.1** กำหนดให้สัญญาณภายนอกเป็นฟังก์ชัน $f : \Re \rightarrow \Re$ และ $\dot{f}$ แทนอนุพันธ์ของ f เทียบกับเวลา นิยามนอร์ม L_2 และ L_∞ ของฟังก์ชันดังนี้

$$\|f\|_n \triangleq \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} & \mathrm{n} = 2 \\ \sup\{|f(t)| : t \in \Re\} & \mathrm{n} = \infty \end{cases} \tag{2.12}$$

□

<u>นิยาม</u> **2.2** กำหนดเซตของสัญญาณเข้าที่มีนิยามดังนี้ดังต่อไป

$$\left.\begin{array}{rcl} F_n & \triangleq & \{f : \|f\|_n \leq M_n\}, \\ \dot{F}_n & \triangleq & \{f : \|\dot{f}\|_n \leq D_n\} \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

โดยที่จำนวนจริงค่าจำกัด $M_n > 0$ และ $D_n > 0$ แทนขอบเขตของนอร์ม □

เพื่อใช้ในการนิยามเซตเป็นไปได้ในวิทยานิพนธ์นี้ กำหนดเซตดัชนี $\mathcal{I}_0 = \{2, \infty\}$, $\mathcal{I}_1 = \{\infty\}$ และ $\mathcal{I}_2 = \{2\}$ ตัวห้อยท้ายสัญลักษณ์ $\mathcal{I}$ ชี้โยงถึงสมาชิกในเซตดัชนี ที่ใช้ในการกำหนดลักษณะเงื่อนไขขอบเขตของเซตเป็นไปได้ เซตเป็นไปได้นิยามดังนี้

<u>นิยาม</u> **2.3** กำหนดให้ $\mathcal{P}_j^i$ เป็นเซตเป็นไปได้ที่อธิบายได้ด้วย

$$\mathcal{P}_j^i \triangleq \left(\bigcap_{k \in \mathcal{I}_i} \dot{F}_k \right) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathcal{I}_j} F_k \right) \tag{2.14}$$

□

เซตเป็นไปได้ (2.14) ประกอบด้วย เงื่อนไขขอบเขตบนขนาดและอนุพันธ์ของสัญญาณ เหตุผลสำหรับการมีเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองมีดังต่อไปนี้

- ในกรณีที่เซตเป็นไปได้ ถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขขอบเขตบนขนาดของสัญญาณเข้าเพียงอย่างเดียว กล่าวคือใช้เซตเป็นไปได้ F_∞ หรือ F_2 เซตดังกล่าวรวมสัญญาณขั้นไม่ต่อเนื่อง (stepwise discontinuity) หรือสัญญาณเข้าที่มีขนาดไม่จำกัด (ในกรณีที่เซตเป็นไปได้คือ F_2) เซตดังกล่าวไม่ได้สะท้อนพฤติกรรมทางกายของสัญญาณเข้าเป็นไปได้อย่างถูกต้อง และอาจจะให้ผลการออกแบบที่ไม่มีถ้าไม่มีการชดเชยผลดังกล่าวที่ดีพอ Zakian (2005) ให้ทางแก้ปัญหาดังกล่าวโดยเสนอให้กำหนดขอบเขตเงื่อนไขบนความชัน

- ในบางกรณีสำหรับเซตเป็นไปได้ที่มีกำหนดขอบเขตเงื่อนไขบนความชันอย่างเดียว เช่น $\dot{F}_n$ สำหรับ $n = 2, \infty$ ดัชนีสมรรถนะของระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต สำหรับเซตดังกล่าวมีค่าอนันต์ ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตบนขนาดจึงมีความสำคัญในการขจัดปัญหานี้ (ดูรายละเอียดใน Zakian, 1996)

นอกจากนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ ที่นิยามใน (2.14) เป็นคอนเวกซ์เซต ดังนั้นปัญหาการคำนวณสมรรถนะ (2.8) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

ตารางที่ 2.1: เซตเป็นไปได้ที่ปรากฏในงานวิจัยก่อนหน้านี้

i	j	เซตเป็นไปได้	งานวิจัยเกี่ยวข้อง
1	1	$\mathcal{P}_1^1 = \left\{ f : f \in \dot{F}_\infty \cap F_\infty \right\}$	(Zakian, 1979b)*, (Lane, 1992; Satoh, 2005), (Khaisongkram and Banjerdpongchai, 2007)† และเอกสารอ้างอิงที่ระบุอยู่ในบทความข้างต้น
2	1	$\mathcal{P}_1^2 = \left\{ f : f \in \dot{F}_\infty \cap F_2 \right\}$	(Zakian, 1979b)*.
2	2	$\mathcal{P}_2^2 = \left\{ f : f \in \dot{F}_2 \cap F_2 \right\}$	(Lane, 1995; Lane, 2005).

* เฉพาะวิธีการคำนวณขอบเขตบนของ $\hat{v}$

† ประยุกต์ใช้เฉพาะระบบตรรกยะ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระบบ (2.7)

ตารางที่ 2.1 แสดงเซตเป็นไปได้ที่ใช้ในการหาค่าดัชนีสมรรถนะ $\hat{v}$ ในงานวิจัยที่ผ่านมา เซตเป็นไปได้เหล่านั้น เป็นกรณีพิเศษของเซตเป็นไปได้ (2.14) ในวิทยานิพนธ์นี้จะเสนอวิธีการคำนวณ $\hat{v}$ สำหรับเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ โดยที่ $i, j = 0, 1$ หรือ 2 ดังนั้นวิธีการคำนวณที่เสนอนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_1^1$, $\mathcal{P}_1^2$, and $\mathcal{P}_2^2$ ได้ด้วยเช่นกัน

ข้อได้เปรียบของการกำหนดลักษณะของเซตเป็นไปได้ ที่นิยามไว้ใน (2.14) คือ

- เงื่อนไขขอบเขตนอร์ม (norm bounding condition) ที่ใช้ใน (2.14) เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex function) และกลายเป็นเงื่อนไขบังคับ (constraint) ในการหาคำนวณหา $\hat{v}$ (ดูบทที่ 3) เป็นผลให้ปัญหาดังกล่าวเป็นเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (convex optimization problem)
- เซตเป็นไปได้สามารถถูกกำหนดลักษณะเงื่อนไขขอบเขตได้มากกว่า 2 เงื่อนไข การเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตทำให้เซตใหม่มีขนาดเล็กลง ตัวอย่างเช่น $\mathcal{P}_0^0 \subset \mathcal{P}_1^1$ และ $\mathcal{P}_0^0 \subset \mathcal{P}_2^2$ เป็นต้น ผลที่ได้คือสมาชิกในเซตเป็นไปได้มีลักษณะสมบัติสอดคล้องกับสัญญาณที่เกิดขึ้นจริงมากขึ้น *สัญญาณที่ไม่เกิดขึ้นจริง (fictitious input)* บางส่วนถูกแยกออกไป และเมื่อนำเซตเป็นไปได้ใหม่นี้ใช้ในการออกแบบระบบควบคุม จะช่วยลดความอนุรักษ์ลงได้ ข้อเท็จจริงนี้แสดงให้เห็นในประพจน์ที่ 2.1

<u>**นิยาม**</u> **2.4** กำหนดให้ $\mathcal{P}$ คือเซตเป็นไปได้ที่พิจารณา *สัญญาณเข้าใหญ่สุด (maximal input)* ในเซต $\mathcal{P}$ คือสัญญาณเข้าที่ทำให้เกิด $\hat{v}(\mathcal{P})$ และ $f^*(\mathcal{P})$ แทนสัญญาณเข้าใหญ่สุดในเซต $\mathcal{P}$ □

<u>ประพจน์ที่</u> 2.1 *พิจารณาเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_a$ และ $\mathcal{P}_b$ โดยที่ $\mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_b$ กำหนดให้เซต $F_a^* \subset \mathcal{P}_a$ และ $F_b^* \subset \mathcal{P}_b$ เป็นเซตที่รวมสัญญาณเข้าใหญ่สุด $f^*(\mathcal{P}_a)$ และ $f^*(\mathcal{P}_b)$ ตามลำดับ จะได้ว่า*

$$F_a^* \cap F_b^* \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v}(\mathcal{P}_a) = \hat{v}(\mathcal{P}_b) \tag{2.15}$$

พิสูจน์ เนื่องจากปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ (2.8) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบคอนเวกซ์ ดังนั้น $\hat{v}(\mathcal{P}_a)$ และ $\hat{v}(\mathcal{P}_b)$ เป็นค่าสูงสุดวงกว้าง (global maxima)

($\Rightarrow$) สมมติให้ $f_a \in F_a^* \cap F_b^*$ จะได้ว่า $\hat{v}(\mathcal{P}_a) = \mathrm{I}(f_a) = \hat{v}(\mathcal{P}_b)$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามีสัญญาณเข้ามากสุด $f_a \in F_a^*$ กล่าวคือ $\mathrm{I}(f_a) = \hat{v}(\mathcal{P}_a)$ เพราะว่า $f_a \in \mathcal{P}_b$ และ $\hat{v}(\mathcal{P}_a) = \hat{v}(\mathcal{P}_b)$ จะได้ว่า $\mathrm{I}(f_a) = \hat{v}(\mathcal{P}_b)$ ดังนั้น $f_a \in F_b^*$ □

บทแทรกต่อไปนี้เป็นผลมาจาก $\hat{v}(\mathcal{P}_a) \leq \hat{v}(\mathcal{P}_b)$ (เพราะว่า $\mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_b$)

บทแทรกที่ 2.2 *ภายใต้เงื่อนไขเดียวกับประพจน์ที่ 2.1 ข้อความใน (2.15) สมมูลกับ*

$$F_a^* \cap F_b^* = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v}(\mathcal{P}_a) < \hat{v}(\mathcal{P}_b).$$

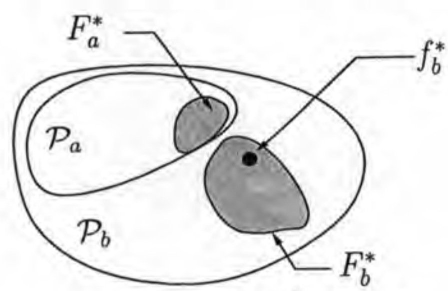
ประพจน์ที่ 2.1 และบทแทรกที่ 2.2 มีความสำคัญในการเพิ่มคุณลักษณะสมบัติเซตเป็นไปได้ เมื่อนำเซตเป็นไปได้ใหม่ไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุมแล้ว ผลที่ได้จะให้ผลที่ดีขึ้น กระบวนการสำหรับเพิ่มลักษณะสมบัติให้เซตเป็นไปได้ใหม่ $\mathcal{P}_a$ แสดงดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1: คำนวณ $\hat{v}(\mathcal{P}_b)$ และ f_b^*

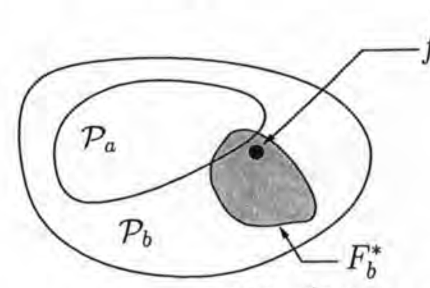
ขั้นตอนที่ 2: กำหนดลักษณะสมบัติของเซต $\mathcal{P}_a$ ที่ทำให้ $f_b^* \notin \mathcal{P}_a$ (สามารถกระทำได้โดยการลดค่าขอบเขต หรือการเพิ่มเงื่อนไขขอบเขต) และคำนวณ $\hat{v}(\mathcal{P}_a)$

ขั้นตอนที่ 3: ถ้า $\hat{v}(\mathcal{P}_a) < \hat{v}(\mathcal{P}_b)$ แล้วการใช้เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_a$ ในการออกแบบจะให้ผลที่ดีกว่าเซต $\mathcal{P}_b$ (ดูรูป 2.3a ประกอบ) มิเช่นนั้นการใช้เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_a$ ในการออกแบบจะให้ผลไม่ต่างกับการใช้เซต $\mathcal{P}_b$ (ดูรูป 2.3b ประกอบ) ในกรณีนี้กลับไปขั้นตอนที่ 2 และกำหนดลักษณะสมบัติเซต $\mathcal{P}_a$ ใหม่ โดยทั้งการเปลี่ยนค่าขอบเขต หรือเพิ่มเงื่อนไขขอบเขต

ดูบทที่ 6 สำหรับการนำขั้นตอนข้างต้นไปใช้งานในการออกแบบระบบควบคุม



(a) $\mathcal{P}_a$ ให้ผลที่ดีกว่าเซต $\mathcal{P}_b$



(b) $\mathcal{P}_a$ ไม่ให้ผลที่ดีกว่าเซต $\mathcal{P}_b$

รูปที่ 2.3: กำหนดลักษณะสมบัติเซตเป็นไปได้ใหม่ $\mathcal{P}_a$.

วิธีหนึ่งในการสร้างเซต $\mathcal{P}_a$ ให้มีขนาดเล็กกว่า $\mathcal{P}_b$ เพื่อให้เซตใหม่มีสัญญาณเข้าที่ไม่เกิดขึ้นจริงน้อยลง คือการเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตให้กับเซต $\mathcal{P}_b$ แม้ว่าการกระทำดังกล่าวจะทำให้วิธีการคำนวณ $\hat{v}(\mathcal{P}_a)$ ด้วยวิธีวิเคราะห์ (analytical method) มีความซับซ้อน และยากขึ้น แต่ด้วยเทคนิคที่ใช้เสนอในบทที่ 3 ของวิทยานิพนธ์นี้เป็นวิธีหนึ่งในการคำนวณดัชนีสมรรถนะสำหรับเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ ที่นิยามใน (2.14) ซึ่งมีความซับซ้อนในระดับหนึ่ง

เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ ที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้มีลักษณะสมบัติเพียงพอครอบคลุมสัญญาณที่เกิดขึ้นจริงในทางปฏิบัติ เนื่องจากในทางปฏิบัติจำแนกสัญญาณออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

- *สัญญาณเข้าชั่วครู่ (transient input)* คือสัญญาณที่มีการเปลี่ยนแปลงในช่วงระยะเวลาจำกัด และคงที่เมื่อเวลามีค่ามากๆ กล่าวคือสัญญาณที่มีลักษณะในเซต $\dot{F}_2$
- *สัญญาณเข้าอยู่ตัว (persistent input)* คือสัญญาณที่มีการเปลี่ยนแปลง ตลอดระยะเวลาใดๆ กล่าวคือสัญญาณที่มีลักษณะในเซต $\dot{F}_\infty$

(ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Zakian, 1989; Zakian, 1991; Zakian, 1996; Zakian, 2005) ดังนั้นการใช้นอร์ม L_2 และ/หรือ L_∞ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของเซตเป็นไปได้ครอบคลุมสัญญาณทั้งหมด (หรือโดยส่วนใหญ่) ที่เกิดขึ้นจริง

2.5 ค่าจำกัดของดัชนีสมรรถนะ (Finiteness of performance)

ในหัวข้อนี้แสดงให้เห็นว่าค่าดัชนีสมรรถนะ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ ที่คำนวณจากปัญหา (2.8) มีค่าจำกัดเสมอ (กล่าวคือ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i) < \infty$) สำหรับระบบ (2.7) ที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต

<u>**ประพจน์ที่**</u> **2.3** *ถ้าระบบ (2.7) มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขตแล้ว ดัชนีสมรรถนะ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ โดยที่เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ นิยามใน (2.14) มีค่าจำกัด ($\hat{v}(\mathcal{P}_j^i) < \infty$)*

พิสูจน์ ประเด็นสำคัญในการพิสูจน์ประพจน์นี้คือ การพิสูจน์ว่าสัญญาณเข้าใดๆในเซต $\mathcal{P}_j^i$ ขนาดมีค่าขอบเขต ($\|f\|_\infty < \infty$) เห็นได้ชัดว่ากรณีของเซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ สำหรับ $i = 0, 1, 2$ และ $j = 0, 1$ สัญญาณเข้าทุกตัวในกรณีนี้มีขนาดจำกัดเพราะขนาดของสัญญาณเข้าถูกกำหนดขอบเขตด้วยนอร์ม L_∞

สำหรับการพิสูจน์ว่าขนาดของสัญญาณเข้าในเซต $\mathcal{P}_2^i$ สำหรับ $i = 0, 1, 2$ (กรณีที่ขนาดของสัญญาณเข้าถูกกำหนดขอบเขตด้วยนอร์ม L_2 เท่านั้น) มีค่าจำกัดอาศัยเอกลักษณ์ (ดูรายละเอียด Zakian, 2005, หน้า 59)

$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\,[f(\tau) + \dot{f}(\tau)]d\tau \tag{2.16}$$

และอสมการของเฮิลเดอร์ (Hölder's inequality)

เนื่องจากขนาดของสัญญาณเข้าใดๆในเซต $\mathcal{P}_j^i$ มีค่าขอบเขต ดังนั้นระบบ (2.7) ที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต ให้สัญญาณออกที่มีขอบเขตเสมอ ดังนั้น $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i) < \infty$ □

การที่ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i, p)$ มีค่าจำกัดมีสำคัญต่อการค้นหาคำตอบของอสมการ (1.2) ด้วยวิธีเชิงเลข เพราะต้องกระทำในเซตของพารามิเตอร์ p ที่ทำให้ดัชนีสมรรถนะมีค่าจำกัด กล่าวคือในเซต Ω ที่นิยามดังนี้

$$\Omega \quad \triangleq \quad \{p \in \Re^p \, : \, \hat{v}(p) < \infty\}$$

ในหลายๆ กรณีที่สำคัญ (ได้แก่ ระบบตรรกยะ ระบบอนุพันธ์ประวิงเวลาแบบหน่วง และระบบอนุพันธ์เศษส่วนที่มีการประวิงเวลาแบบหน่วง เป็นต้น) ประพจน์ที่ 2.3 หมายความว่า

$$\hat{\lambda}(p) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{v}(p) < \infty \tag{2.17}$$

โดยที่ $\hat{\lambda} : \Re^p \to \Re$ คือค่าพิกัดเสถียรภาพซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\hat{\lambda} \triangleq \sup\{\text{Re } s : D(s) = 0\} \tag{2.18}$$

สัญลักษณ์ Re s แทนส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน s และ $D(s)$ แทนฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function) ของระบบ

ดังนั้นในการหาจุด $p_0 \in \Omega$ เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในการค้นหาคำตอบของอสมการ (1.2) เราใช้อสมการ $\hat{\lambda}(p) < 0$ แทนอสมการ $\hat{v}(p) < \infty$ เพราะสำหรับระบบดังกล่าวข้างต้น ฟังก์ชัน $\hat{\lambda}$ สามารถคำนวณได้ (ด้วยวิธีเชิงเลข) ในทางปฏิบัติ และยิ่งไปกว่านั้น $\hat{\lambda}(p)$ มีค่าจำกัดสำหรับทุกค่า $p \in \Re^p$ ในขณะที่มีบางค่าของ $p \in \Re^p$ ที่ทำให้ $\hat{v}(p) = \infty$ ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน Zakian(1985, 2005) และ Nguyen and Arunsawatwong (2009)

นอกจากนี้ในการใช้งานจริงแทนอสมการ $\hat{\lambda} < 0$ ด้วย

$$\hat{\lambda} \leq -\varepsilon_\lambda \tag{2.19}$$

โดยที่ ε_λ เป็นค่าบวกที่มีขนาดเล็กมาก สังเกตได้ว่า ถ้าเงื่อนไข (2.19) เป็นจริง แล้ว $\hat{\lambda}(p) < 0$ จะเป็นจริงด้วย (รายละเอียด ดูประกอบเพิ่มเติมใน Zakian, 2005; Arunsawatwong, 1996) ดังนั้น เงื่อนไข (2.19) เป็นเงื่อนไขที่ใช้รับประกันว่า $\hat{v}(p) < \infty$ ในทางปฏิบัติ

2.6 สรุป (Conclusions)

หลักการเข้าคู่ และวิธีอสมการเป็นสองทฤษฎีที่ใช้ในการแก้ปัญหาการออกแบบระบบควบคุม ที่มีเกณฑ์การออกแบบ (1.1) เป็นเกณฑ์หลัก เกณฑ์ดังกล่าวสมมูลกับเกณฑ์ (1.2) ที่ต้องการวิธีการคำนวณดัชนีสมรรถนะสำหรับเซตเป็นไปได้ ที่ถูกกำหนดลักษระสมบัติของสัญญาณเข้าเป็นไปได้ ปัญหาการคำนวณดัชนีสมรรถนะ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ ใน (2.8) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดใน

ตัวแปรมิติอนันต์เชิงคอนเวกซ์ ปัญหาการคำนวณ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ พิจารณาสำหรับระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกสัมพันธ์กันด้วยปริพันธ์สังวัตนาการ (2.7) และด้วยคุณประโยชน์ของรูปแบบความสัมพันธ์ดังกล่าว ในบทต่อไปจะใช้รูปแบบนี้ในการคำนวณ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ ทำให้วิธีที่เสนอมีความเป็นทั่วไป กล่าวคือสามารถนำไปใช้ได้กับระบบหลายประเภท

เซตเป็นไปได้ $\mathcal{P}_j^i$ นิยามใน (2.14) สามารถกำหนดลักษณะสมบัติด้วยเงื่อนไขขอบเขต 2, 3 และ 4 เงื่อนไข ทำให้มีความหลากหลายในการกำหนดเซตเป็นไปได้เพื่อให้เหมาะกับปัญหาการออกแบบระบบควบคุม (มีเซตเป็นไปได้มากถึง 9 เซต) นอกจากนี้การเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตให้กับเซตเป็นไปได้ทำให้แยกสัญญาณเข้าที่ไม่เกิดขึ้นจริงออก และเป็นการปรับปรุงการออกแบบให้ดียิ่งขึ้นอีกด้วย

หัวข้อที่ 2.5 พิจารณาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีค่าจำกัดของ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ เงื่อนไขดังกล่าวมีความสำคัญในการค้นหาคำตอบของอสมการ (1.2) ด้วยวิธีเชิงเลข ในหลาย ๆ กรณีเงื่อนไขสำหรับการมีค่าจำกัดของ $\hat{v}(\mathcal{P}_j^i)$ สามารถจัดให้อยู่ในรูปของอสมการได้ ซึ่งสามารถนำมารวมกับเกณฑ์ (1.2) และหาคำตอบพร้อมกันด้วยวิธีอสมการ ตามที่ได้กล่าวถึงอย่างคร่าวในหัวข้อ 2.2