ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต
ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

นายกมล นาคสุทธิ

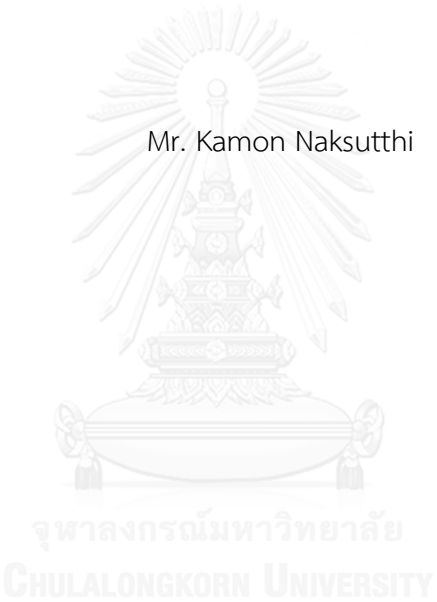
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย
The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2559
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

EFFECT OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING PROOF MAPPING TECHNIQUE TO WRITE GEOMETRIC PROOFS ON GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS

Mr. Kamon Naksutthi



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2016
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
โดย	นายกมล นาคสุทธิ
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมยศ ชิดมงคล

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.....คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. ศิริเดช สุชีวะ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมยศ ชิดมงคล)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์)

กมล นาคสุทธิ : ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (EFFECT OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING PROOF MAPPING TECHNIQUE TO WRITE GEOMETRIC PROOFS ON GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร. สมยศ ชิดมงคล, 156 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน 2) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต กับ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ และ 3) ศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษานครปฐม เขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา จำนวน 46 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 23 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 23 คน โดยนักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และวิเคราะห์ค่าที (t-test)

ผลการวิจัยพบว่า 1) ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05 2) ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05 และ 3) พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น

ภาควิชา หลักสูตรและการสอน ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา การศึกษาคณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก .....

ปีการศึกษา 2559

5683301527 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORDS: PROOF MAPPING TECHNIQUE/ WRITE GEOMETRIC PROOFS/ GEOMETRIC REASONING ABILITY

KAMON NAKSUTTHI: EFFECT OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING PROOF MAPPING TECHNIQUE TO WRITE GEOMETRIC PROOFS ON GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS. ADVISOR: ASST. PROF. SOMYOT CHIDMONGKOL, Ph.D., 156 pp.

The purposes of this research were: 1) to compare geometric reasoning abilities of students between, before and after learning by organizing mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs, 2) to compare geometric reasoning abilities of students between groups being organized mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs and conventional approach, and 3) to study the geometric reasoning ability of students learning by organizing mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs.

The population of this research were eighth grade students in Nakhonpathom Education service area office 9 under the office of The Basic Education Commission, Ministry of Education. The subjects were 46 eighth grade students in academic year 2016 at Watraikhingwittaya School. They were divided into two groups, one experimental group with 23 students and the other control group with 23 students. The students in experimental group were organized mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs and those in control group were organized mathematics learning activities using conventional approach. The data collecting instruments were geometric reasoning ability tests. The experimental instruments were lesson plans being organized mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs and the conventional lesson plans. The data were analyzed by means of arithmetic mean, standard deviation and t-test.

The results of the study revealed that: 1) the geometric reasoning ability of students after learning by organizing mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs was higher than that before the experiment at .05 level of significance, 2) the geometric reasoning ability of students being organized mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs was higher than that of students being organized mathematics learning activities using conventional approach at .05 level of significance, and 3) the geometric reasoning ability of students learning by organizing mathematics learning activities using proof mapping technique to write geometric proofs was developed in positive direction.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

Department: Curriculum and Instruction Student's Signature .....
Field of Study: Mathematics Education Advisor's Signature .....
Academic Year: 2016

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาอย่างสูงจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมยศ ชิดมงคล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่กรุณาดูแลเอาใจใส่ ให้คำปรึกษา คำแนะนำที่เป็นประโยชน์และมีคุณค่าต่อการเรียนรู้ และได้ตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนงานวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งประสบการณ์ในการเรียนรู้ทุกด้านแก่ผู้วิจัยตั้งแต่ต้นจนจบ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่สละเวลาในการเป็นกรรมการสอบ ให้ข้อแนะนำ ข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ ทำให้งานวิทยานิพนธ์มีความถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่สละเวลาในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น รวมทั้งให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการทำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณะครูโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยาทุกท่านที่ได้ให้การช่วยเหลือประสานงาน ให้คำแนะนำ และดูแลผู้วิจัยตลอดช่วงเวลาการทดลอง ขอขอบคุณนักเรียนโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยาที่ให้ความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อปราโมท นาคสุทธิ และ คุณแม่นพดี นาคสุทธิ เป็นอย่างสูงที่อยู่เคียงข้างและให้กำลังใจเสมอมา ขอบคุณ คุณธีรพล พากเพียรกิจ ที่ให้กำลังใจและให้การช่วยเหลือ ตลอดจนเพื่อน ๆ พี่ ๆ น้อง ๆ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ให้กำลังใจ ในการทำวิทยานิพนธ์ด้วยดีเสมอมา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... จ
กิตติกรรมประกาศ ..... ฉ
สารบัญ ..... ช
สารบัญตาราง ..... ญ
สารบัญรูปภาพ ..... ฏ
บทที่ 1 บทนำ 1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
คำถามการวิจัย 5
วัตถุประสงค์การวิจัย 5
สมมติฐานการวิจัย 5
ขอบเขตการวิจัย 7
คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย 7
ประโยชน์ที่ได้รับ 10
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 11
1. เทคนิคพรู้ฟแมปปิง 12
1.1 ความเป็นมาของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง 12
1.2 ความหมายของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง 13
1.3 แนวคิดพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคพรู้ฟแมปปิง 13
1.4 แนวคิดการจัดกิจรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง 14
2. การเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต 26
2.1 ความหมายของการพิสูจน์ 26

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

หน้า

2.2 ความสำคัญของการพิสูจน์ 26
2.3 ประเภทของการพิสูจน์ 26
2.4 กระบวนการพิสูจน์ 27
2.5 ความหมายของการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต 27
2.6 การสอนพิสูจน์ทางเรขาคณิต 28
2.7 ข้อเสนอแนะการพิสูจน์เรขาคณิต 29
2.8 การพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม 30
3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 31
3.1 ความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 31
3.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 32
3.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 34
3.4 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 37
3.5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล 39
3.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล 41
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 44
4.1 งานวิจัยต่างประเทศ 44
4.2 งานวิจัยในประเทศ 45
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย 47
1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 47
2. การออกแบบการวิจัย 47
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง 48
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 49
4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง 49

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

หน้า

4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล 54
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล 61
6. การวิเคราะห์ข้อมูล 63
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย 65
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 67
ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ (การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต) 68
ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ (การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต) 70
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 87
สรุปผลการวิจัย 91
อภิปรายผลการวิจัย 92
ข้อเสนอแนะ 95
รายการอ้างอิง 96
ภาคผนวก 102
ภาคผนวก ก กรอบแนวคิดการวิจัย 103
ภาคผนวก ข รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย 105
ภาคผนวก ค หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย 107
ภาคผนวก ง โครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 113
ภาคผนวก จ ผลการประเมินแบบวัดจากผู้ทรงคุณวุฒิ 115
ภาคผนวก ฉ ผลการวิเคราะห์คุณภาพเครื่องมือ 118
ภาคผนวก ช ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล 121
ภาคผนวก ซ ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง 131
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 156

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สารบัญตาราง

ตารางที่ 1 แสดงการให้เหตุผลเชิงคุณภาพ 35

ตารางที่ 2 แสดงเกณฑ์การประเมินเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็น
กรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียนด้านการให้เหตุผล
ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 42

ตารางที่ 3 แสดงเกณฑ์การให้ผลการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะ/กระบวนการ
ให้เหตุผลของกรมวิชาการ 43

ตารางที่ 4 แสดงแบบการวิจัย 47

ตารางที่ 5 แสดงหัวข้อการเรียนรู้ และจำนวนคาบของแผนการจัดกิจกรรม
การเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน 50

ตารางที่ 6 แสดงเนื้อหา และจำนวนคาบของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
เรื่อง เส้นขนาน 50

ตารางที่ 7 แสดงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ
กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 52

ตารางที่ 8 แสดงเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 54

ตารางที่ 9 แสดงระยะเวลาการวิเคราะห์ข้อมูลพัฒนาการความสามารถ
ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 64

ตารางที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน 68

ตารางที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 68

ตารางที่ 12 แสดงคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ของนักเรียน โดยพิจารณาตามรายองค์ประกอบของความสามารถใน
การให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่มีการเปลี่ยนแปลงของพัฒนาการใน 3 ระยะ 69

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 13 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับก่อนการทดลอง 114

ตารางที่ 14 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับหลังการทดลอง 114

ตารางที่ 15 แสดงผลการประเมินความสอดคล้องและความเหมาะสมเฉลี่ยของ
แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง 116

ตารางที่ 16 แสดงผลการประเมินความสอดคล้องและความเหมาะสมเฉลี่ยของ
แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง 117

ตารางที่ 17 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 10 ข้อ (try out) 119

ตารางที่ 18 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 5 ข้อ (ใช้จริง) 119

ตารางที่ 19 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับหลังการทดลอง จำนวน 10 ข้อ (try out) 120

ตารางที่ 20 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ฉบับหลังการทดลอง จำนวน 5 ข้อ (ใช้จริง) 120

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ 1 แสดงปัญหาที่ให้นักเรียนใช้พรู้ฟแมปปิงเพื่อทำให้การพิสูจน์สำเร็จ
(Linares and Smith, 2009: 261) 14

รูปที่ 2 แสดงขั้นตอนแรกของกระบวนการสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยการตั้งคำถามหลัก
(Linares and Smith, 2009: 261) 15

รูปที่ 3 แสดงคำตอบที่เป็นไปได้ของคำถามหลักได้รับการเพิ่มเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงด้วยลูกศรเส้นทึบ
(Linares and Smith, 2009: 262) 16

รูปที่ 4 แสดงข้อมูล "กำหนดให้" ได้รับการเพิ่มเข้าไปในพรู้ฟแมปปิง
(Linares and Smith, 2009: 262) 17

รูปที่ 5 แสดงลูกศรเส้นประทำหน้าที่เตือนว่าคู่ของด้านที่เท่ากันทุกประการสองคู่ได้รับการบ่งชี้แล้ว
(Linares and Smith, 2009: 263) 18

รูปที่ 6 แสดงเส้นทางการพิสูจน์ที่ไม่น่าจะเป็นไปได้ถูกกำจัดออก (Linares and Smith, 2009: 263) ... 19

รูปที่ 7 แสดงการใช้บทนิยามของการเท่ากันทุกประการเพื่อแสดงว่ามุมทั้งสองเท่ากันทุกประการ
(Linares and Smith, 2009: 263) 20

รูปที่ 8 แสดงแผนภาพการพิสูจน์แบบดั้งเดิมช่วยบ่งชี้สมมติฐานหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสม
(Linares and Smith, 2009: 264) 21

รูปที่ 9 แสดงพรู้ฟแมปปิงที่เสร็จเรียบร้อยจะให้โครงสร้างแก่การเขียนเรียบเรียงที่เป็นทางการมากขึ้น
(Linares and Smith, 2009: 264) 21

รูปที่ 10 แสดงการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ที่สำเร็จเรียบร้อยโดยใช้พรู้ฟแมปปิงที่ได้สร้างขึ้น
(Linares and Smith, 2009: 264) 22

รูปที่ 11 แสดงการพิสูจน์บางครั้งอาจจะต้องการคำถามหลักมากกว่าหนึ่งคำถาม
(Linares and Smith, 2009: 265) 23

รูปที่ 12 แสดงปฏิสัมพันธ์ของกระบวนการในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
(สุภาภรณ์ ฟองจันทร์ตา, 2553: 13) 38

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รูปที่ 13 แสดงแผนภูมิแท่งที่แสดงคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการ
ให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยพิจารณาตามรายองค์ประกอบของ
ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่มีการเปลี่ยนแปลง
ของพัฒนาการใน 3 ระยะ 69

รูปที่ 14 แสดงการเขียนสิ่งที่ไม่มีความเกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 71

รูปที่ 15 แสดงการเขียนข้อความทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
แต่นักเรียนเลือกใช้ทฤษฎีบทไม่ถูกต้อง 72

รูปที่ 16 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียน
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ 74

รูปที่ 17 แสดงการเขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ 76

รูปที่ 18 แสดงการเขียนข้อความทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ถูกต้องบางส่วน โดยเขียนข้อความตามความเข้าใจ 77

รูปที่ 19 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่เขียนทฤษฎีบท
ให้เหตุผลไม่ตรงกับทฤษฎีบทที่เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้ 79

รูปที่ 20 แสดงการเขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่มีการขีดเส้น
เพิ่มเติมในรูปเพื่อพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 81

รูปที่ 21 แสดงการเขียนข้อความบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้
ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตแต่เขียนไม่ครบทุกอย่าง 82

รูปที่ 22 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่
โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 84

รูปที่ 23 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน
การสร้างพรู้ฟแมปปิงเพื่อเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบท 150

รูปที่ 24 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน
การเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบทโดยใช้พรู้ฟแมปปิงที่สร้างขึ้น 151

รูปที่ 25 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน
การสร้างพรู้ฟแมปปิงเพื่อเขียนพิสูจน์ปัญหาข้อที่ 1 152

รูปที่ 26 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน
การเขียนพิสูจน์ปัญหาข้อที่ 1 โดยใช้พรู้ฟแมปปิงที่สร้างขึ้น 153

รูปที่ 27 แสดงตัวอย่างภาพการจัดกิจกรรมนักเรียนกลุ่มทดลองสร้างพรู้ฟแมปปิง
เพื่อใช้ในการเขียนพิสูจน์เป็นรายบุคคล 154

รูปที่ 28 แสดงตัวอย่างภาพการจัดกิจกรรมนักเรียนกลุ่มทดลองสร้างพรู้ฟแมปปิง
เพื่อใช้ในการเขียนพิสูจน์ร่วมกันเป็นกลุ่ม 155

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์มีบทบาทต่อการพัฒนาความคิดและความเจริญก้าวหน้าของโลก มนุษย์ใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดที่หลากหลาย ทั้งการคิดวิเคราะห์สังเคราะห์ คิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล คิดอย่างมีวิจารณญาณและคิดอย่างมีระบบและมีระเบียบแบบแผน ซึ่งกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้บุคคลสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555ก) นอกจากนี้ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องใช้การคิดอย่างเป็นระบบ คิดอย่างมีเหตุผล เพื่อใช้เหตุผลมาช่วยในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลเป็นกระบวนการหนึ่งที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างละเอียดรอบคอบ สามารถวางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม การคิดอย่างมีเหตุผลจึงถือเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้และดำรงชีวิต ดังนั้นการคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2550: 18)

จากความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่กล่าวข้างต้น หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จึงได้กำหนดให้คณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในแปดกลุ่มสาระการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยองค์ความรู้ ทักษะหรือกระบวนการเรียนรู้และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ซึ่งกำหนดให้ผู้เรียนทุกคนจำเป็นต้องเรียนรู้ มุ่งเน้นให้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลัก ดังนี้ จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) สอดคล้องกับ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ข) ที่กล่าวว่าทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มีความจำเป็นในการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ให้มีอยู่ในทุกระดับชั้น

แม้ว่าคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญต่อการพัฒนาทักษะต่างๆ แต่อย่างไรก็ตามการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยก็ยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ดังจะเห็นได้จากผลประเมินจากโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (PISA) พบว่า ผลการประเมินผลการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยยังแสดงว่ามีความอ่อนด้อยเมื่อเทียบกับนานาชาติ ใน PISA 2000 ถึง PISA 2012 พบว่าประเทศไทยมีคะแนนเฉลี่ยต่ำกว่าค่าเฉลี่ยองค์การเพื่อความร่วมมือและพัฒนาทางเศรษฐกิจ (OECD) (สุนีย์ คล้ายนิล และคณะ, 2549, 2550, 2551) สรุปแนวโน้มจากการประเมินพบว่าคณิตศาสตร์ยังคงมีแนวโน้มต่ำลงกว่าใน PISA 2000 การเพิ่มขึ้นของคณิตศาสตร์มีขึ้นเฉพาะช่วง PISA 2009 ถึง PISA 2012 เท่านั้นและที่สำคัญคณิตศาสตร์มีคะแนนต่ำที่สุดในบรรดาสามด้านที่ประเมิน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2554, 2556) ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมินความรู้และทักษะในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน จากการประเมินผลนานาชาติ (TIMSS) ซึ่งมีการประเมินไว้สองด้านคือ การประเมินเชิงสาระเนื้อหา คือ จำนวน พีชคณิต เรขาคณิต ข้อมูลและโอกาส และด้านพฤติกรรมการเรียนรู้ คือ ความรู้/ความเข้าใจ การประยุกต์ใช้ความรู้และการใช้

เหตุผล ทำให้ยืนยันถึงความอ่อนด้อยในด้านคุณภาพการเรียนรู้ของนักเรียนไทย ผลการประเมินใน TIMSS 2007 และ TIMSS 2011 พบว่าไทยได้คะแนนต่ำกว่าค่ามัธยฐาน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, 2556)

จากรายงานดังกล่าวการที่นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ สาเหตุอาจมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครูที่ไม่ส่งเสริมกระบวนการคิด ซึ่งจากการติดตามผล การประเมินการสอนของครูในหลายหน่วยงาน พบว่า ครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ มุ่งเน้นที่การสอนเนื้อหาและทักษะการคิดคำนวณ โดยการบอกวิธีทำ ให้ตัวอย่างและมุ่งให้นักเรียนทำได้ตามตัวอย่าง ไม่ให้โอกาสนักเรียนในการเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยการฝึกให้คิดวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลายและสร้างสรรค์ นับเป็นวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ไม่ส่งเสริมกระบวนการคิด ซึ่งการจัดการเรียนการสอนดังกล่าวเป็นการทำลายศักยภาพในการคิดของนักเรียน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555ข) นอกจากนี้นักเรียนจำนวนไม่น้อยยังไม่มีความสามารถเกี่ยวกับการแก้ปัญหา การแสดงหรืออ้างอิงเหตุผล การสื่อสารหรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่าง ๆ และ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในชีวิตประจำวันและในการศึกษาต่อได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555ค)

เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งมีความสำคัญต่อการดำเนินชีวิตของมนุษย์มาอย่างยาวนาน ในยุคปัจจุบันมนุษย์ก็ยังคงนำเรขาคณิตมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันอย่างมากมาย ดังเห็นได้จากเรขาคณิตมีบทบาทสำคัญทั้งต่อวิทยาศาสตร์ในหลายสาขารวมทั้งทางด้านศิลปะด้วย (Mammana and Villiani, 1998 cited in Dimakos, 2007: 87) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์จึงได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ 6 สาระ ซึ่งสาระเรขาคณิตก็เป็นสาระการเรียนรู้ที่สำคัญและจำเป็นต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับ ดังที่ปานทอง กุลนาถศิริ (2541: 3) ได้กล่าวไว้ว่า “...หลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ว่าในยุคสมัยใด จะมีการพัฒนาปรับปรุงอย่างไร เรขาคณิตจะต้องเป็นสาขาหนึ่งที่ผู้พัฒนาเห็นสมควรให้บรรจุลงในหลักสูตร...ธรรมชาติของวิชาเรขาคณิตเป็นวิชาที่เอื้อที่จะสอนให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่มีวิจารณญาณ ช่างสังเกต ช่างสำรวจ มีเหตุผล ดังนั้นหากผู้สอนได้จัดกิจกรรมที่เหมาะสมและถูกต้องก็จะช่วยให้เยาวชน เป็นเยาวชนที่มีคุณลักษณะดังกล่าว อันเป็นลักษณะที่พึงประสงค์ของชาติ เรขาคณิตจึงเป็นเนื้อหาที่มีความสำคัญและจำเป็นเนื้อหาหนึ่ง ที่จะต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับ...”

เรขาคณิตได้ถูกกำหนดเป็นสาระหลักในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีส่วนเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของมนุษย์เราอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในชีวิตจริงเพื่อทำความเข้าใจหรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว ซึ่งเรขาคณิตเป็นศาสตร์สาขาหนึ่งที่เน้นเรื่องการคิดและการให้เหตุผล ซึ่งทั้งการคิดและการให้เหตุผลเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ความรู้อื่น ๆ ดังนั้นในการพัฒนาการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตจำต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับการคิดและการให้เหตุผล ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต จึงควรมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถนำความรู้เรขาคณิตไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันให้ได้ นอกจากนี้เรขาคณิตช่วยพัฒนาความคิดและความสามารถในการให้เหตุผล อันจะนำไปสู่ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ ซึ่งเป็นการพัฒนาความเข้าใจทางเรขาคณิตขั้นสูงต่อไป การพัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถดังกล่าว จำเป็นที่

ผู้สอนจะต้องเข้าใจถึงการพัฒนาการคิดและการให้เหตุผลตลอดจนแนวทางการพัฒนา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2545ข)

จากความสำคัญของเรขาคณิตดังกล่าว การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต จึงควรมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถนำความรู้เรขาคณิตไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้แล้วสิ่งหนึ่งที่ต้องให้ความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิต คือ การสอนเขียนพิสูจน์ เพราะการพิสูจน์ถือเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่สุดที่ใช้ในเรขาคณิต (Dimakos, 2007: 1) สอดคล้องกับที่เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 3) ได้กล่าวโดยสรุปว่า “สิ่งที่เป็นหัวใจของการเรียนเรขาคณิตคือการพิสูจน์ เพราะการพิสูจน์นั้นจะทำให้นักเรียนฝึกรู้จักการใช้เหตุผล รู้จักวิเคราะห์แก้ไขปัญหาอย่างมีระบบ” อีกทั้งในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงนักเรียนจะต้องมีความสามารถในด้านการพิสูจน์เห็นคุณค่าและตระหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์ (ขวัญ เพียซ้าย, 2547:1)

ในการพัฒนาการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตจำเป็นต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับการคิดและการให้เหตุผล ดังนั้นการจัดกิจกรรมการเรียนที่เน้นให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์และเน้นการให้เหตุผลจากการเรียนเนื้อหาเรขาคณิต จึงมีความสอดคล้องกัน ซึ่งจะช่วยพัฒนาการให้เหตุผลของนักเรียน โดยควรเริ่มจากการส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล จากกิจกรรมที่ผสมผสานการคิดและการให้เหตุผลควบคู่กันไป โดยใช้การคิดวิเคราะห์ หาความสัมพันธ์ของแนวคิดและสรุปแนวคิดจากสถานการณ์ที่กำหนด (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2545ข) ซึ่งข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการเรียนเรขาคณิต นักเรียนจะต้องเริ่มเรียนจากการรับรู้และระลึกถึงรูปลักษณะหรือรูปทรงภายนอกจากนั้นวิเคราะห์สมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น ๆ ต่อจากนั้นก็หาความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตลักษณะต่าง ๆ เพื่อหาข้อสรุปแล้วนำสมบัตินั้นไปใช้ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยต่อไป (National Council of Teacher of Mathematics: 1989)

การจัดการเรียนการสอนในปัจจุบันยังไม่ได้ตอบสนองต่อการพัฒนาศักยภาพทางเรขาคณิตของผู้เรียน ดังที่วัฒนา มณีวงศ์ (2542) ได้กล่าวไว้ว่า “...เนื้อหาเรขาคณิตถือว่ามีความสำคัญแต่ในปัจจุบันพบว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นปัญหามากสำหรับครูสอนคณิตศาสตร์...นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาเป็นเหตุผลในการพิสูจน์ นักเรียนขาดทักษะในการให้เหตุผล...” เนื่องจากการสอนเรขาคณิตนั้น เน้นไปที่สัญลักษณ์ที่เป็นทางการ การพิสูจน์ตามรูปแบบ การเรียกชื่อที่ได้จากการท่องจำ ผู้เรียนแทบไม่มีโอกาสได้มีประสบการณ์เกี่ยวกับความเข้าใจในเรขาคณิตอย่างแท้จริง รวมไปถึงไม่ได้มีโอกาสใช้การให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งจะทำให้เรียนรู้เรขาคณิตอย่างมีความหมาย (เจนสมุทร แสงพันธ์, 2550: 3 – 16) สอดคล้องกับที่ Carroll (1998: 398 – 403) ได้พบว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษามักขาดประสบการณ์ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต ผู้สอนควรจะหาวิธีการแก้ไขจุดบกพร่องตรงจุดนี้ จุดที่ควรพิจารณาสำหรับผู้สอนไม่ใช่เพียงแต่ให้ผู้เรียนพิสูจน์ได้เท่านั้น แต่ควรสร้างความเคยชินกับเรขาคณิต การนำสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลประกอบการแก้ปัญหา และการเขียนพิสูจน์เรขาคณิต รวมทั้งสร้างความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง เพื่อให้ผู้เรียนสามารถประมวลความคิดของการพิสูจน์ได้ ซึ่งจะเป็นกุญแจสำคัญนำไปสู่การประยุกต์การพิสูจน์และการคิดวิเคราะห์

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าเพื่อหาแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยมีความสนใจใน

เทคนิคพรู้ฟแมปปิงของ Linares (2008) ซึ่งเป็นเทคนิคที่คิดขึ้นมาเพื่อใช้ในการสอนการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีแนวคิดพื้นฐานมาจากเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนกลับของ Solow (2002) ในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการสร้างพรู้ฟแมปปิง ซึ่งเป็นแผนที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการคิดในการเขียนพิสูจน์และได้เห็นพัฒนาการในการพิสูจน์ โดยเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลังของ Solow เริ่มจากกระบวนการย้อนหลัง โดยการตั้งคำถามหลักซึ่งเป็นคำถามเพื่อหาบทสรุปของข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คำถามหลักที่ใช้จะเป็นนามธรรมและปราศจากสัญลักษณ์ใด ๆ เพื่อไม่ให้ติดอยู่กับเรื่องจำเพาะเจาะจง เมื่อได้คำถามหลักแล้วต่อมาจึงจะเป็นการหาคำตอบของคำถามหลักเพื่อให้มีทางเลือกที่นำไปสู่กระบวนการไปข้างหน้า โดยเขียนข้อความที่เป็นผลที่ได้มาจากเหตุโดยตรงเพื่อให้มีทางเลือกที่จะใช้ในการพิสูจน์ โดยการกลับไปพิจารณาข้อมูลที่กำหนดให้ การตัดสินใจว่าจะดำเนินต่อไปในทิศทางใดไปข้างหน้าหรือย้อนหลัง ขึ้นอยู่กับว่าทิศทางใดทำให้การให้เหตุผลก้าวหน้า โดยจะต้องทำกลับไปกลับมาระหว่างกระบวนการทั้งสองจนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จลง ส่วนพรู้ฟแมปปิง เป็นแผนที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการคิดในการเขียนพิสูจน์ ข้อความจะถูกปิดล้อมอยู่ในวงรี และมีลูกศรชี้เข้าหาวงรีซึ่งเป็นการระบุเหตุผลของข้อความ แทนคำถามหลักด้วยก้อนเมฆความคิด ขณะที่ดำเนินการไปตามขั้นตอนต่าง ๆ ของเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เส้นทางระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับทฤษฎีบทและบทสรุปจะปรากฏขึ้นในที่สุด หลังจากค้นพบเส้นทางแล้วนำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

จากการศึกษางานวิจัยของ Linares (2008: 2-3) ที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคพรู้ฟแมปปิง พบว่าผลของการใช้พรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนเรขาคณิตมัธยมศึกษาที่มีผลต่อความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต งานวิจัยนี้เกิดขึ้นในโรงเรียนมัธยมศึกษา แคลิฟเนีย การศึกษาครั้งนี้ทดลองกับนักเรียนห้องเรียนเรขาคณิตมัธยมศึกษา 32 คน ที่มีประชากรที่หลากหลายชาติพันธุ์ และนักเรียนมีความหลากหลายในสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมที่แตกต่างกัน การเรียนการสอนครั้งนี้ใช้เวลา 6 สัปดาห์ นักเรียนได้เรียนรู้ถึงขั้นตอนในการสร้างพรู้ฟแมปปิง และนำมาใช้ในการทำงานกลุ่ม งานคู่ การบ้าน และในการทดสอบ กิจกรรมนี้เกิดขึ้น 2-3 ครั้งต่อสัปดาห์ ครูสังเกตติดตามการมีส่วนร่วมของนักเรียนในการช่วยเหลือซึ่งกันและกันในห้องเรียนในระหว่างการเขียนพิสูจน์ วิธีการนี้เปิดโอกาสให้ได้มีการอภิปรายร่วมกันระหว่างนักเรียนกับครู นักเรียนเกิดกระบวนการคิดและพบข้อผิดพลาดอย่างเปิดเผย ผลที่ได้พบว่า นักเรียนมีความเพลิดเพลินในกระบวนการนี้มากกว่ารูปแบบการพิสูจน์ที่แบ่งเป็นสองคอลัมน์โดยตรงและประสบความสำเร็จในการพิสูจน์มากขึ้นในตอนท้ายของการเรียนการสอน ขั้นตอนในการจัดหาวิธีการในการสื่อสารเกี่ยวกับการพิสูจน์ ผ่านกระบวนการคิด ผ่านการมองเห็นแผนภาพกระบวนการคิด ช่วยส่งเสริมการอภิปราย เกี่ยวกับวิธีการคิดเชิงกลยุทธ์เกี่ยวกับการเขียนพิสูจน์ ถึงแม้นักเรียนไม่ได้รับการปรับปรุงในส่วนของการพิสูจน์การสร้าง แต่ก็เพิ่มประโยชน์ในส่วนที่มีการอภิปรายร่วมกันเพิ่มขึ้นเกี่ยวกับกลยุทธ์การเขียนพิสูจน์ และความเชื่อมั่นของนักเรียนในการเขียนพิสูจน์

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น เป็นที่น่าสนใจหากผสมผสานเทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต น่าจะส่งผลทำให้เกิดการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยลักษณะของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต จะสอดแทรกในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์

แบบปกติซึ่งประกอบไปด้วย ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป โดยขั้นนำเป็นขั้นที่ครูช่วยทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน และจัดกิจกรรมโน้มน้าวและจูงใจนักเรียนเข้าสู่บทเรียน ในส่วนของขั้นสอนเป็นขั้นที่ครูเสนอประเด็นให้นักเรียนได้เรียนรู้จนได้แนวคิด และจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกันผ่านการคิดด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม โดยครูเลือกใช้ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่ได้นำแนวคิดไปประยุกต์ใช้ ครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิดและปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เริ่มต้นจากกระบวนการย้อนกลับจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ตามด้วยกระบวนการไปข้างหน้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ จากนั้นจึงทำกลับไปกลับมาทั้งสองกระบวนการ จนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จ และขั้นสรุปเป็นขั้นที่สรุปรวบยอดความรู้ที่เรียนมาทั้งหมด โดยนักเรียนร่วมกันสรุป ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ และมอบหมายงานและแบบฝึกหัดให้ไปทำต่อ

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง เส้นขนาน เนื่องจากเป็นเนื้อหาที่มีความเกี่ยวข้องกับการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีการพิสูจน์ทฤษฎีบทและปัญหาทางเรขาคณิตโดยใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต และเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนต่อไป

คำถามการวิจัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต จะช่วยพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ให้ดีขึ้นได้หรือไม่ อย่างไร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต กับ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ
3. เพื่อศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

สมมติฐานการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต มีรายละเอียดดังนี้

Linares (2008: 2-3) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ผลของการใช้พรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนเรขาคณิตมัธยมศึกษาที่มีผลต่อความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต งานวิจัยนี้มีประโยชน์กับการเรียนการสอนเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษา พรู้ฟแมปปิงเป็นเทคนิคในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นแผนภาพที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการคิดของนักเรียนในการเขียนพิสูจน์ ข้อความที่พิสูจน์ถูกปิดล้อมอยู่ในวงกลม และมีลูกศรที่กำกับทฤษฎีบทหรือบทนิยามที่เหมาะสมชี้เข้าหาวงกลม นักเรียนจะได้เชื่อมต่อแนวคิดที่สอดคล้องกันและได้เห็นพัฒนาการในการพิสูจน์ งานวิจัยนี้เกิดขึ้นในโรงเรียนมัธยมศึกษา แคลิฟิเนีย การศึกษาครั้งนี้ทดลองกับนักเรียนห้องเรียนเรขาคณิตมัธยมศึกษา 32 คน ที่มีประชากรที่หลากหลายชาติพันธุ์ และนักเรียนมีความหลากหลายในสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมที่แตกต่างกัน การเรียนการสอนครั้งนี้ใช้เวลา 6 สัปดาห์ นักเรียนได้เรียนรู้ถึงขั้นตอนในการสร้างพรู้ฟแมปปิง และนำมาใช้ในการทำงานกลุ่ม งานคู่ การบ้าน และในการทดสอบ กิจกรรมนี้เกิดขึ้น 2-3 ครั้งต่อสัปดาห์ ครูสังเกตติดตามการมีส่วนร่วมของนักเรียนในการช่วยเหลือซึ่งกันและกันในห้องเรียนในระหว่างการเขียนพิสูจน์ วิธีการนี้เปิดโอกาสให้ได้มีการอภิปรายร่วมกันระหว่างนักเรียนกับครู นักเรียนเกิดกระบวนการคิดและพบข้อผิดพลาดอย่างเปิดเผย ผลที่ได้พบว่า นักเรียนมีความเพลิดเพลินในกระบวนการนี้มากกว่ารูปแบบการพิสูจน์ที่แบ่งเป็นสองคอลัมน์โดยตรงและประสบความสำเร็จในการพิสูจน์มากขึ้นในตอนท้ายของการเรียนการสอน ขั้นตอนในการจัดหาวิธีการในการสื่อสารเกี่ยวกับการพิสูจน์ ผ่านกระบวนการคิด ผ่านการมองเห็นแผนภาพกระบวนการคิด ช่วยส่งเสริมการอภิปราย เกี่ยวกับวิธีการคิดเชิงกลยุทธ์เกี่ยวกับการเขียนพิสูจน์ ถึงแม้นักเรียนไม่ได้รับการปรับปรุงในส่วนของการพิสูจน์การสร้าง แต่ก็เพิ่มประโยชน์ในส่วนที่มีการอภิปรายร่วมกันเพิ่มขึ้นเกี่ยวกับกลยุทธ์การเขียนพิสูจน์ และความเชื่อมั่นของนักเรียนในการเขียนพิสูจน์

Ranald Nall Bell (1988: 754A-755A) ได้ศึกษาการใช้วิธีสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์เรขาคณิตอย่างมีแบบแผน ว่าเป็นวิธีการสอนให้แสดงทักษะการคิดหรือไม่ ผลการทดลองพบว่า ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในการเพิ่มการแสดงทักษะการคิดเมื่อเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ยังค้นพบวิธีการสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนมีผลกับนักเรียนบ้างเป็นจำนวนเล็กน้อย สำหรับนักเรียนที่ชอบใช้การเขียนพิสูจน์เป็นข้อความเป็นตอน ๆ ลงมามากกว่าจะใช้การเขียนพิสูจน์ที่เป็นแบบแผนโดยแบ่งสองคอลัมน์

Raynold (1976 cited in Thomson, 2000: 478) ทำการศึกษาการพิสูจน์ทางอ้อมในวิชาเรขาคณิตเกี่ยวกับเรื่องเส้นขนานและมุมภายใน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประมาณ 14% สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประมาณ 70% สามารถเขียนพิสูจน์ได้และมี 12-18% จากทุกระดับชั้นสามารถพิสูจน์ได้ถึงจุดที่เกิดการขัดแย้ง (Contradiction) แต่ไม่รู้วิธีที่จะทำการพิสูจน์ต่อไปให้จบกระบวนการพิสูจน์

สุภาพร ฟองจันทร์ตา (2553) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้เทคนิคการนึกภาพและใช้สี โรงเรียนแม่แตง จังหวัดเชียงใหม่ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยนักเรียนสามารถเขียนข้อความแสดงการพิสูจน์ได้อย่างต่อเนื่องสัมพันธ์กัน และให้เหตุผลประกอบข้อความได้อย่างสมเหตุสมผล คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในการทำแบบทดสอบเท่ากับ 20.86 คะแนน จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 70.47 ของคะแนนทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดี

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทำให้ผู้วิจัยตั้งสมมติฐานในการวิจัยครั้งนี้ ดังต่อไปนี้

1. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขอบเขตการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐมเขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ เส้นขนาน ในรายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

3. ตัวแปรที่ศึกษามีดังนี้

3.1 ตัวแปรต้น คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3.2 ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. การเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต หมายถึง การแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทและปัญหาทางเรขาคณิต โดยการเขียนให้เห็นอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล สื่อความหมายได้อย่างชัดเจนตามกระบวนการพิสูจน์ โดยอาศัยบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต มาใช้ในการอ้างอิงอย่างสมเหตุสมผล

2. เทคนิคพรู้ฟแมปปิง (proof mapping technique) หมายถึง เทคนิคการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการคิดด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม ตามแนวคิดของ Linares (2008) โดยพัฒนาการให้เหตุผลให้บรรลุความสำเร็จและเผยให้เห็นถึงกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลังที่จะช่วยในการจัดการกับความคิดในขณะที่ดำเนินการโดยใช้เทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลังของ Solow (2002) และรวมถึงการสร้างพรู้ฟแมปปิงเพื่อให้มองเห็นแนวทางในภาพรวม และสามารถจดบันทึกกระบวนการคิดในขณะที่ทำได้ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

2.1 เทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง (forward-backward technique) หมายถึง เทคนิคที่ใช้ในการพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข ตามแนวคิดของ Solow (2002) ซึ่งเป็นรูปแบบที่พบในทฤษฎีบททางเรขาคณิตในระดับชั้นมัธยมศึกษา โดยเทคนิคนี้จะใช้วิธีการไปข้างหน้า–ย้อนหลัง (forward-backward method) ในการให้เหตุผลสำหรับการพิสูจน์ ซึ่งประกอบไปด้วย กระบวนการย้อนหลัง (backward process) ซึ่งเป็นการคิดวิเคราะห์จากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และ กระบวนการไปข้างหน้า (forward process) ซึ่งเป็นการคิดวิเคราะห์จากข้อมูลที่กำหนดให้ การตัดสินใจว่าจะดำเนินการต่อไปใน

ทิศทางใด ไปข้างหน้าหรือย้อนหลัง ขึ้นอยู่กับว่าทิศทางใดทำให้การให้เหตุผลก้าวหน้า โดยทำกลับไปกลับมาระหว่างกระบวนการทั้งสองจนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จลง โดยมีรายละเอียด ดังนี้

2.1.1 กระบวนการย้อนหลัง (backward process) เป็นการคิดวิเคราะห์ข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยการตั้งคำถามหลัก (key question) ซึ่งเป็นการตั้งคำถามว่า บทสรุปของข้อความที่ต้องการพิสูจน์จะเกิดขึ้นได้อย่างไร คำถามหลักที่ใช้จะเป็นนามธรรมและปราศจากสัญลักษณ์ใด ๆ เพื่อไม่ให้หลงติดอยู่กับเรื่องจำเพาะเจาะจงของปัญหา ต่อมาจึงหาคำตอบของคำถามหลักโดยหาแบบที่เป็นนามธรรมก่อน แล้วจึงค่อยประยุกต์ใช้กับเรื่องจำเพาะเจาะจงของปัญหา โดยกระบวนการย้อนหลังจะใช้เมื่อพบข้อความที่ได้สร้างขึ้นมาใหม่จากคำตอบของคำถามหลัก

2.1.2 กระบวนการไปข้างหน้า (forward process) เป็นการคิดวิเคราะห์ข้อมูลที่กำหนดให้โดยการพิจารณาจากคำตอบของคำถามหลัก เพื่อให้มีทางเลือกที่จะใช้ในการพิสูจน์โดยการกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้และเขียนข้อความที่เป็นผลจากสิ่งที่กำหนดให้โดยตรง โดยกระบวนการไปข้างหน้าจะใช้เมื่อพบสิ่งที่กำหนดให้มีความเกี่ยวข้องกับคำตอบของคำถามหลัก

2.2 พรู้ฟแมปปิง (proof mapping) หมายถึง แผนที่ที่มีวงรีวงรอบข้อความทางคณิตศาสตร์ ระบุการให้เหตุผลสำหรับข้อความต่าง ๆ ด้วยลูกศรระหว่างวงรี และแทนคำถามหลักด้วยก้อนเมฆความคิด (thought cloud) ในขณะที่ดำเนินไปตามขั้นตอนต่าง ๆ ของเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เส้นทางระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับทฤษฎีบทและบทสรุปจะปรากฏขึ้นในที่สุด หลังจากค้นพบเส้นทางแล้วให้นำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งในที่นี้ผู้วิจัยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงของ Linares (2008) แทรกในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ โดยมีรายละเอียดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

3.1 ขั้นนำ เป็นขั้นที่ครูช่วยทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน และจัดกิจกรรมโน้มน้าวและจูงใจนักเรียนเข้าสู่บทเรียน

3.2 ขั้นสอน เป็นขั้นที่ครูเสนอประเด็นให้นักเรียนได้เรียนรู้จนได้แนวคิด และจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกันผ่านการคิดด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม โดยครูเลือกใช้ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่ได้นำแนวคิดไปประยุกต์ใช้ ครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิด และปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เริ่มต้นจากกระบวนการย้อนหลังจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ตามด้วยกระบวนการไปข้างหน้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ จากนั้นจึงทำกลับไปกลับมาทั้งสองกระบวนการจนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

1) ให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่นำมาเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้

2) ให้นักเรียนร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการย้อนหลัง เริ่มจากการเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ไว้ด้านล่างสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี

3) ให้นักเรียนร่วมกันตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงโดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์

4) ให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิง ด้านบนของลูกศรเส้นทึบชี้ลงล่างไปยังข้อความที่ต้องการพิสูจน์

5) ให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนสิ่งที่กำหนดให้ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี

6) ให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของสิ่งที่กำหนดให้ลงในพรู้ฟแมปปิงโดยใส่ลูกศรเส้นทึบชี้ลงมาเข้าหาสิ่งที่กำหนดให้ดังกล่าว

7) ให้นักเรียนร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยอาจใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้ จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ กระบวนการไปข้างหน้า จะเป็นการเขียนข้อความที่เป็นผลจากสิ่งที่กำหนดให้โดยตรง ระบุการให้เหตุผลสำหรับข้อความด้วยลูกศรเส้นทึบ ระบุสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคำตอบของคำถามหลักด้วยลูกศรเส้นประ ส่วนกระบวนการย้อนหลัง จะเป็นการเขียนข้อความที่ได้สร้างขึ้นมาใหม่จากคำถามหลัก

8) ให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาอีกครั้งว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้งโดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้

9) ให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ นำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

3.3 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่สรุปรวบยอดความรู้ที่เรียนมาทั้งหมด โดยนักเรียนร่วมกันสรุป ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ และมอบหมายงานและแบบฝึกหัดให้ไปทำต่อ

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต หมายถึง การอธิบายที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการหาข้อสรุป โดยมีการพิจารณาข้อมูลจากโจทย์หรือปัญหาที่กำหนดให้ วิเคราะห์และเลือกใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต เพื่อนำมาใช้ประกอบการอ้างอิงและให้เหตุผลได้อย่างถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ ซึ่งวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยผู้วิจัยวัดแยกออกเป็น 3 องค์ประกอบ ดังนี้

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

5. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยมีลักษณะกิจกรรมเน้นการบรรยาย อธิบายเนื้อหา

6. นักเรียน หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

ประโยชน์ที่ได้รับ

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้รับประโยชน์ ดังนี้

1. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง เส้นขนาน โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังจะนำเสนอดังนี้

1. เทคนิคพรู้ฟแมปปิง
    - 1.1 ความเป็นมาของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง
    - 1.2 ความหมายของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง
    - 1.3 แนวคิดพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคพรู้ฟแมปปิง
    - 1.4 แนวคิดการจัดกิจรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง
2. การเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต
    - 2.1 ความหมายของการพิสูจน์
    - 2.2 ความสำคัญของการพิสูจน์
    - 2.3 ประเภทของการพิสูจน์
    - 2.4 กระบวนการพิสูจน์
    - 2.5 ความหมายของการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต
    - 2.6 การสอนพิสูจน์ทางเรขาคณิต
    - 2.7 ข้อเสนอแนะการพิสูจน์เรขาคณิต
    - 2.8 การพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม
3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
    - 3.1 ความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.4 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
    - 3.5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล
    - 3.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    - 4.1 งานวิจัยต่างประเทศ
    - 4.2 งานวิจัยในประเทศ

1. เทคนิคพรู้ฟแมปปิง

1.1 ความเป็นมาของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง

การสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการไตร่ตรองด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม ช่วยพัฒนาการอ้างเหตุผลที่ประสบความสำเร็จ โดยการเผยให้เห็นกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลัง ซึ่งตำราเรขาคณิตหรือวารสารคณิตศาสตร์ที่ตีพิมพ์งานทั้งหมดที่นักคณิตศาสตร์ใช้ในขณะที่พวกเขาสร้างการพิสูจน์ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาจะเป็นของหายากทีเดียว การเริ่มต้นอย่างผิดพลาด ข้อความคาดการณ์เบื้องต้น และการอ้างเหตุผลที่ไปไม่ถึงไหน สิ่งเหล่านี้ถูกละออกเพื่อความสะดวก ผลลัพธ์ที่ประสบความสำเร็จในที่สุดเท่านั้นที่ได้รับการนำเสนอต่อโลก สำหรับนักเรียนที่ใหม่ต่อการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ที่สำเร็จเรียบร้อยดูคล้ายกับปัญหาเลขคณิตและพีชคณิตที่พวกเขาเคยทำมาในอดีต และดังนั้นพวกเขาจึงประหลาดใจเมื่อพวกเขาไม่สามารถสร้างการพิสูจน์ขึ้นมาในลักษณะเดียวกัน กล่าวคือโดยการประยุกต์ใช้กฎต่าง ๆ เท่านั้น เมื่อได้รับการสอน นักเรียนอาจจะเข้าใจแต่ละขั้นตอนและการให้เหตุผลของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แต่การสร้างการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวเองมักจะเป็นการพ้นวิสัยสำหรับพวกเขา

ทำอย่างไรจึงเป็นการดีที่สุดที่จะช่วยให้นักเรียนสร้างการพิสูจน์ได้ด้วยตัวเองเป็นความท้าทายที่ Linares เผชิญในชั้นเรียนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาในปีการศึกษา 2007-2008 นักเรียนของเธอประสบความลำบากในการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อความทางเรขาคณิตให้สำเร็จ แม้ว่าจะเพียรพยายามหลายครั้งโดยใช้วิธีการสอนแบบต่าง ๆ (Linares, 2008) นักเรียนส่วนมากเริ่มต้นด้วยข้อความที่กำหนดให้และรูปที่กำหนดให้ และจากนั้นจึงระบุสิ่งที่สามารถหาได้อย่างง่ายดายจากสิ่งเหล่านั้น เมื่อพวกเขาได้ดึงเอาสารสนเทศทั้งหมดจากข้อความและรูปภาพที่กำหนดให้แล้ว นักเรียนมักจะติดขัดอยู่ตรงนั้น ไม่สามารถสังเคราะห์สารสนเทศเพิ่มเติมที่จำเป็นต่อการพิสูจน์ให้สำเร็จ ในช่วงแรกของวิชาเรขาคณิต มีเปอร์เซ็นต์จำนวนน้อยมากของนักเรียนที่สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ครบถ้วนและถูกต้องได้ โดยทั่วไปนักเรียนจะสร้างการอ้างเหตุผลเพียงบางส่วน การอ้างเหตุผลที่มีขั้นตอนไม่ถูกต้อง หรือการอ้างเหตุผลที่มีขั้นตอนที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ในขณะนั้น แม้ว่าพวกเขาต้องการประสบความสำเร็จในการเขียนการพิสูจน์ นักเรียนเหล่านี้ตะเกียกตะกายไปมา อันที่จริงแล้ว ในเรื่องของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต พวกเขาดูเหมือนจะหลงทาง

ในการเรียนรู้ว่าจะสร้างการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร นักเรียนควรจะศึกษาเทคนิคที่ใช้โดยนักคณิตศาสตร์มืออาชีพที่นำทางตัวเองผ่านกระบวนการดังกล่าวเป็นประจำ นักคณิตศาสตร์โดยทั่วไปจะใช้วิทยาการศึกษาสำนึก (heuristics) เพื่อพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ และ Solow (2002) ได้ระบุลำดับของมันที่สามารถใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิธีการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง (forward-backward method) ของเขาได้รับการแนะนำสำหรับใช้พิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข ซึ่งเป็นรูปแบบที่พบบ่อยที่สุดสำหรับทฤษฎีบททางเรขาคณิตในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา

ในระหว่างที่ทำตามวิธีการไปข้างหน้า-ย้อนหลังของ Solow สามารถเป็นงานที่หนักหน่วงได้แม้แต่กับนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยที่มีแรงบันดาลใจ เป็นภาระหนักแก่ทั้งความจำระยะสั้นและระยะยาวของพวกเขา ผู้เขียนเป็นห่วงว่านักเรียนมัธยมจะมีความลำบากในการจัดการกับความคิดของพวกเขาในระหว่างกระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง ด้วยเหตุผลนี้ Linares จึงพัฒนาเทคนิคพรู้ฟแมปปิง ที่ทำ

ให้นักเรียนสามารถจดบันทึกกระบวนการการคิดของพวกเขาในขณะที่พวกเขาทำตามเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลังของ Solow ดังนั้นจึงลดภาระต่อความจำใช้งานของพวกเขา

1.2 ความหมายของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง

Linares and Smith (2009: 261) กล่าวว่า พรู้ฟแมปปิง จะวงรอบข้อความทางคณิตศาสตร์ด้วยวงรี ระบุการให้เหตุผลสำหรับข้อความต่าง ๆ ด้วยลูกศรระหว่างวงรี และแทนคำถามหลักด้วยก้อนเมฆความคิด (thought cloud) ในขณะที่นักเรียนดำเนินไปตามขั้นตอนต่าง ๆ ของเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เส้นทางระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ของทฤษฎีบทกับบทสรุปของมันจะปรากฏขึ้นในที่สุด หลังจากค้นพบเส้นทางแล้ว นักเรียนจึงแปลงพรู้ฟแมปปิงของพวกเขาไปเป็นรูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

จากที่ได้กล่าวมาสรุปได้ว่า เทคนิคพรู้ฟแมปปิง หมายถึง เทคนิคการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการคิดด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม ตามแนวคิดของ Linares (2008) โดยพัฒนาการให้เหตุผลให้ประสบความสำเร็จโดยการเผยให้เห็นถึงกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลัง ในการจัดการกับความคิดในขณะที่ทำตามเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลังของ Solow (2002) โดยใช้การสร้างพรู้ฟแมปปิงเพื่อให้มองเห็นแนวทางในภาพรวม และสามารถจดบันทึกกระบวนการคิดในขณะที่ทำได้

1.3 แนวคิดพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคพรู้ฟแมปปิง

Linares คิดค้นเทคนิคพรู้ฟแมปปิงขึ้นมาเพื่อใช้ในการสอนการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยมีแนวคิดพื้นฐานมาจากเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนกลับของ Solow ในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์

ในเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง แรกสุดนักเรียนจะตั้ง คำถามหลัก (key question) ซึ่งถามว่า บทสรุปของข้อความจะเกิดขึ้นได้อย่างไร ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเป้าหมายคือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนคู่ด้วย" คำถามหลักจะถามว่าข้อสรุปที่ต้องการคือ "n^2 เป็นจำนวนคู่" นั้น จะสามารถแสดงให้เห็นได้อย่างไร Solow แนะนำว่าคำถามหลักควรจะเป็นนามธรรมและปราศจากสัญลักษณ์ใด ๆ ในทำนอง "เราจะแสดงว่าตัวเลขหนึ่งเป็นจำนวนคู่ได้อย่างไร" แทนที่จะเป็น "เราจะแสดงว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ได้อย่างไร" เขาให้เหตุผลว่าคำถามแบบนามธรรมจะทำให้สามารถเรียกใช้ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ได้ โดยไม่หลงติดอยู่กับเรื่องจำเพาะเจาะจงหรือรายละเอียดปลีกย่อย

เมื่อได้ตั้งคำถามหลักแล้ว หน้าที่ของนักเรียนคือพยายามหาคำตอบ Solow แนะนำว่าแรกสุดให้ตอบคำถามหลักแบบนามธรรม และจากนั้นจึงประยุกต์ใช้กับเรื่องจำเพาะเจาะจงของปัญหา คำตอบแบบนามธรรมของคำถามหลักข้างต้นอาจจะเป็น "เราสามารถแสดงว่าตัวเลขหนึ่งเป็นจำนวนคู่ได้ถ้ามันเป็นจำนวนเท่าของ 2" และคำตอบที่ประยุกต์ใช้กับเรื่องจำเพาะเจาะจงของปัญหาอาจจะเป็น "เราสามารถแสดงว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ได้ถ้า $n^2 = 2k$" เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ถึงตอนนี้นักเรียนมีทางเลือกที่จะดำเนินไปตามกระบวนการไปข้างหน้าด้วยการกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ ("n เป็นจำนวนคู่") และเขียนข้อความที่เป็นผลมาจากมันโดยตรง ("เนื่องจาก n เป็นจำนวนคู่ n=2j โดยบทนิยาม") หรือประยุกต์ใช้กระบวนการย้อนหลังกับข้อความที่เพิ่งสร้างขึ้นใหม่จากคำถามหลัก ("เราจะแสดงว่าตัวเลขหนึ่งเป็น

จำนวนเท่าของ 2 ได้อย่างไร") การตัดสินใจว่าจะดำเนินต่อไปในทิศทางใด ไปข้างหน้าหรือย้อนหลัง ขึ้นกับว่าทางใดทำให้การอ้างเหตุผลก้าวหน้าไป จากนั้นนักเรียนจะต้องกลับไปกลับมาระหว่างกระบวนการทั้งสองจนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จลง

1.4 แนวคิดการจัดกิจรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง

พรู้ฟแมปปิงได้รับการใช้แบบนำร่องในชั้นเรียนวิชาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาของ Linares (2008) พรู้ฟแมปปิงได้รับการพัฒนาขึ้นผ่านการสนทนาทั้งชั้นเรียน เป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ทำร่วมกันโดยครูและนักเรียน บทสนทนาต่อไปนี้แสดงตัวอย่างว่าพรู้ฟแมปปิงโดยทั่วไปสร้างขึ้นอย่างไร

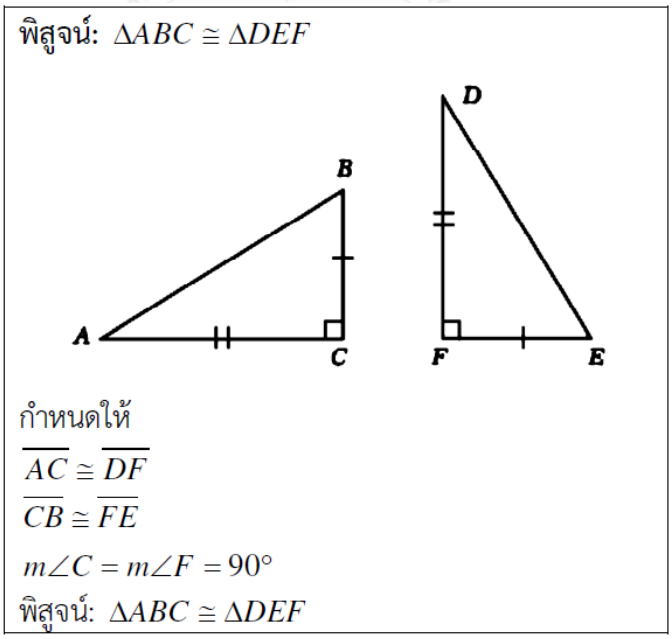
บทสนทนาระหว่างครูกับชั้นเรียนที่แสดงตัวอย่างของเทคนิคพรู้ฟแมปปิง

ครู [วาดรูปและเขียนชื่อสามเหลี่ยม 2 รูปดังแสดงใน**รูปที่ 1** กล่าวถึงสิ่งที่จะพิสูจน์ และระบุสิ่งที่กำหนดให้]: ดูสามเหลี่ยมสองรูปที่ครูเพิ่งวาดนี่ มันเท่ากันทุกประการหรือเปล่า

มาร์ค [พยักหน้า]: ดูเหมือนจะใช่ครับอาจารย์ แต่ก็ยากที่จะบอกเพราะรูปหนึ่งมันถูกหมุนไปครับ

ครู: ดี มันอาจจะเท่ากันทุกประการ แต่เรายังไม่แน่ใจเนื่องจากการที่มันถูกจัดวาง วันนี้ครูต้องการแสดงให้พวกคุณเห็นว่าจะใช้พรู้ฟแมปปิงเพื่อจูงใจคุณและคนอื่น ๆ ให้ยอมรับว่ามันเท่ากันทุกประการจริงได้อย่างไร อย่าลืมว่าการพิสูจน์เป็นเพียงการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยลำดับของข้อความและการให้เหตุผล และสามารถใช้เพียงแค่บทนิยามและทฤษฎีบทก่อนหน้านี้เท่านั้น เพื่อเป็นเหตุผลสำหรับขั้นตอนต่าง ๆ ในการพิสูจน์ อะไรคือข้อความที่เรากำลังพยายามพิสูจน์ [ชี้ไปที่**รูปที่ 1**]

เจนนิเฟอร์: สามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม DEF



รูปที่ 1 แสดงปัญหาที่ให้นักเรียนใช้พรู้ฟแมปปิงเพื่อทำให้การพิสูจน์สำเร็จ
(Linares and Smith, 2009: 261)

ครู: ถูกต้อง และข้อความที่เราพยายามพิสูจน์จะเป็นข้อความสุดท้ายในการพิสูจน์ของเราเสมอ ดังนั้นเราจึงเริ่มต้นพรู้ฟแมปปิงของเราด้วยการเขียนสิ่งที่เราต้องการแสดงไว้ข้างล่างสุด และเขียนวงรีล้อมรอบมัน [ดู**รูปที่ 2**]

ในเมื่อตอนนี้เราเขียนสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์ลงไปแล้ว เราจะทำย้อนกลับและพยายามคิดถึงขั้นตอนที่อยู่ก่อนหน้าขั้นตอนสุดท้ายโดยการถามตัวเองว่า "เราจะแสดงถึงสิ่งนี้ได้อย่างไร" เมื่อทำย้อนกลับ คำถามหลักที่จะทำให้ได้ข้อความก่อนหน้านี้จะเริ่มต้นด้วยวลี "เราจะแสดงอย่างไร" หรือ "เราจะพิสูจน์อย่างไร" เสมอ ถ้าพวกคุณจะต้องเดาตอนนี้โดยไม่ต้องคิด คุณจะกล่าวว่าคำถามหลักสำหรับข้อความนี้คืออะไร [ชี้ไปยังวงรีใน**รูปที่ 2**]

ซีซาร์: เราจะสามารถพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม DEF ได้อย่างไร
ครู: เดาได้ดี [เขียนคำถามหลักที่เป็นตัวเลือกของซีซาร์บนกระดาน] คำถามของคุณช่วยให้เราคิดเกี่ยวกับขั้นตอนก่อนหน้านี้ แต่มีเรื่องหักมุมอีกอย่างหนึ่งเกี่ยวกับการตั้งคำถามหลักที่ครูยังไม่ได้บอกพวกคุณ ถ้าคุณตั้งคำถามที่เจาะจงเกินไป จะเป็นการยากที่จะคิดออกว่าจะต้องทำอย่างไรต่อไป อันที่จริงแล้ว เราสามารถดำเนินต่อไปในการพิสูจน์ได้ถ้าเรามองดูที่ข้อความสุดท้ายแล้วถามคำถามแบบทั่วไปเกี่ยวกับมัน นั่นคือคำถามที่ไม่ใช้ชื่อหรือสัญกรณ์อย่างเจาะจง มีใครอยากลองดูบ้างมั้ย
มาร์กี้: เราจะสามารถพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมแรกเท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยมที่สองได้อย่างไร
เจฟ: เราจะสามารถพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการได้อย่างไร
ครู: ดีมาก [เขียนคำถามหลักทั้งคู่ที่มาร์กี้และเจฟเสนอแนะบนกระดาน] นี่เป็นคำถามหลักแบบทั่วไปทั้งคู่ เราใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงของเราโดยใส่มันในก้อนเมฆ เชื่อมเข้ากับข้อความที่เรากำลังพยายามพิสูจน์ เพื่อที่จะเน้นว่าเราต้องการพิจารณาแบบทั่วไปเกี่ยวกับสามเหลี่ยม มีใครขัดข้องหรือเปล่าถ้าครูจะรวมคำถามหลักของมาร์กี้และเจฟเข้าด้วยกัน แล้วเพิ่มคำว่า ใด ๆ เข้าไป [ครูวาดรูปก้อนเมฆความคิดและเขียนว่า "เราจะสามารถพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ เท่ากันทุกประการได้อย่างไร" (ดู**รูปที่ 2**)]

รูปที่ 2 แสดงขั้นตอนแรกของกระบวนการสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยการตั้งคำถามหลัก
(Linares and Smith, 2009: 261)

การเขียนและการเน้นคำถามหลักในพรู้ฟแมปปิงเป็นการสร้างเกณฑ์กำหนด (touchstone) ที่มองเห็นได้ให้แก่นักเรียน คำถามหลักไม่เพียงแต่ช่วยให้นักเรียนเริ่มต้นการพิสูจน์ได้เท่านั้น แต่ถ้าพวกเขา

หลงทางไปในระหว่างกระบวนการ คำถามหลักก็ยังอยู่ที่นั่นเพื่อช่วยให้พวกเขาเพ่งความสนใจและเพ่งความสนใจซ้ำอีกกับองค์ประกอบหลักที่สำคัญของการอ้างเหตุผล

ครู: โอเค ในเมื่อเรามีคำถามหลักอยู่บนพรู้ฟแมปปิงของเราแล้ว เราจะพยายามตอบมัน ทฤษฎีบทอะไรบ้างที่ทำให้เราสามารถแสดงว่าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการได้

ชู: ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

มาร์ค: ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

เจฟ: มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

มาร์กี้: มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

[ในขณะที่นักเรียนแต่ละคนกล่าวชื่อทฤษฎีบทออกมา ครูเขียนลูกศรลงล่างที่ชี้ไปยังข้อความสุดท้ายและเขียนกำกับลูกศรด้วยตัวย่อของทฤษฎีบท ดู**รูปที่ 3**]

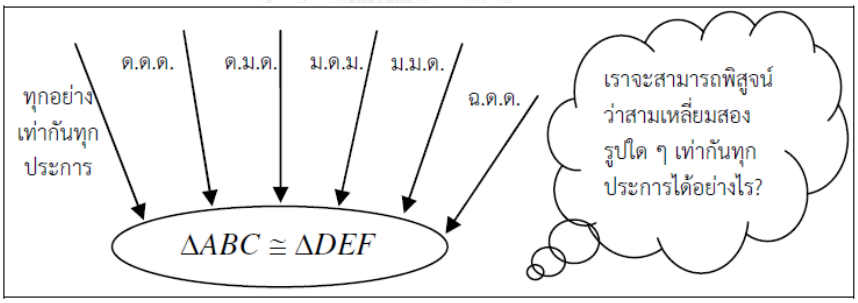
ครู: มีอีกมั้ย

มาร์กี้ [อย่างลังเล]: ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

ครู: ใช่แล้ว มีอีกหรือเปล่า ครูจะแนะให้ว่าคือทฤษฎีบทแรกสุดที่เราเรียนกัน

ซีซาร์: ทุกอย่างเท่ากันทุกประการ

ครู: ถูกต้อง สังเกตว่าลูกศรแต่ละลูกแทนวิธีที่เป็นไปได้ที่จะแสดงว่าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ที่จุดนี้เราไม่รู้ว่าอันไหนที่เราจะใช้ในที่สุด เราจึงต้องเขียนมันออกมาทั้งหมด

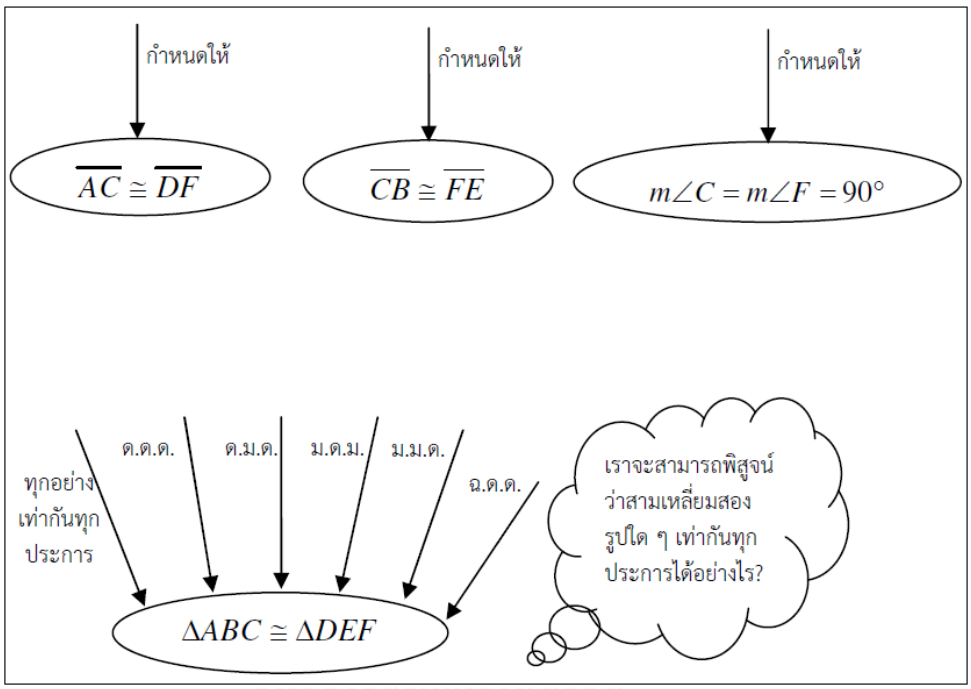


รูปที่ 3 แสดงคำตอบที่เป็นไปได้ของคำถามหลักได้รับการเพิ่มเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงด้วยลูกศรเส้นทึบ (Linares and Smith, 2009: 262)

การสร้างการพิสูจน์ที่ประสบความสำเร็จต้องการความรู้เกี่ยวกับบทนิยาม สัจพจน์ สมมติฐาน และทฤษฎีบทที่นำมาใช้ได้ การตอบคำถามหลักอย่างครบถ้วนในระหว่างการสร้างพรู้ฟแมปปิงจะกระตุ้นให้นักเรียนจดจำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องได้อย่างรวดเร็วและเข้าใจบริบท อันที่จริงแล้วจากการฝึกหัดซ้ำ ๆ เกี่ยวกับการพิสูจน์การเท่ากันทุกประการของสามเหลี่ยม นักเรียนจะแข่งกันโดยอัตโนมัติว่าใครจะระบุทฤษฎีบทการเท่ากันทุกประการที่เกี่ยวข้องทั้ง 6 ทฤษฎีบทออกมาได้เร็วที่สุด หรือถ้ามีตกหล่นไปสัก 1-2 ทฤษฎีบท ใครจะสามารถเพิ่มเติมได้เร็วที่สุด

ครู: ที่จุดนี้ในพรู้ฟแมปปิงของเรา เราได้ทำทุกอย่างที่สามารถทำย้อนหลังกลับมาได้ ตอนนี้เราจะเปลี่ยนทิศทางและไปดูสิ่งที่กำหนดให้ เราเริ่มต้นด้วยสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้นสิ่งเหล่านั้นควรจะอยู่ที่

ตอนต้นของพรู้ฟแมปปิง เนื่องจากสิ่งที่กำหนดให้แต่ละอย่างเป็นข้อความ แต่ละอันควรจะเรียงไว้ข้างบนและล้อมรอบด้วยวงรีของมันเอง นอกจากนี้ เนื่องจากข้อความเหล่านี้เป็นข้อเท็จจริงที่ให้แก่เรา เหตุผลสำหรับแต่ละข้อความจึงเป็นเพียง "กำหนดให้" ดังนั้น เช่นเดียวกับก่อนหน้านี้ เราจะใช้ลูกศรชี้ลงล่างเพื่อแสดงเหตุผลว่าเหตุใดข้อความที่ถูกวงล้อมไว้จึงเกิดขึ้น [เขียนข้อความที่กำหนดให้ในสมมติฐานของทฤษฎีบทไว้ด้านบนของพรู้ฟแมปปิง ลากเส้นวงล้อมมันไว้ และเพิ่มลูกศรที่เขียนกำกับไว้ว่า "กำหนดให้" ดังแสดงใน**รูปที่ 4**] เอาละ เราสามารถบอกอะไรได้บ้างเกี่ยวกับข้อความที่กำหนดให้ข้อความแรก: AC เท่ากันทุกประการกับ DF



รูปที่ 4 แสดงข้อมูล "กำหนดให้" ได้รับการเพิ่มเข้าไปในพรู้ฟแมปปิง
(Linares and Smith, 2009: 262)

มาร์ค: ผมไม่เข้าใจครับ อาจารย์หมายความว่าอะไร
ครู: โอเค ดูที่รูป [ชี้ไปที่สามเหลี่ยมรูปแรกใน**รูปที่ 1**] คุณสามารถบอกอะไรครูได้บ้างเกี่ยวกับ AC
มาร์ค: มันเป็นด้านของสามเหลี่ยม [หยุดพูด] อ๋อ AC กับ DF เป็นด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมทั้งสอง และมันเท่ากันทุกประการ

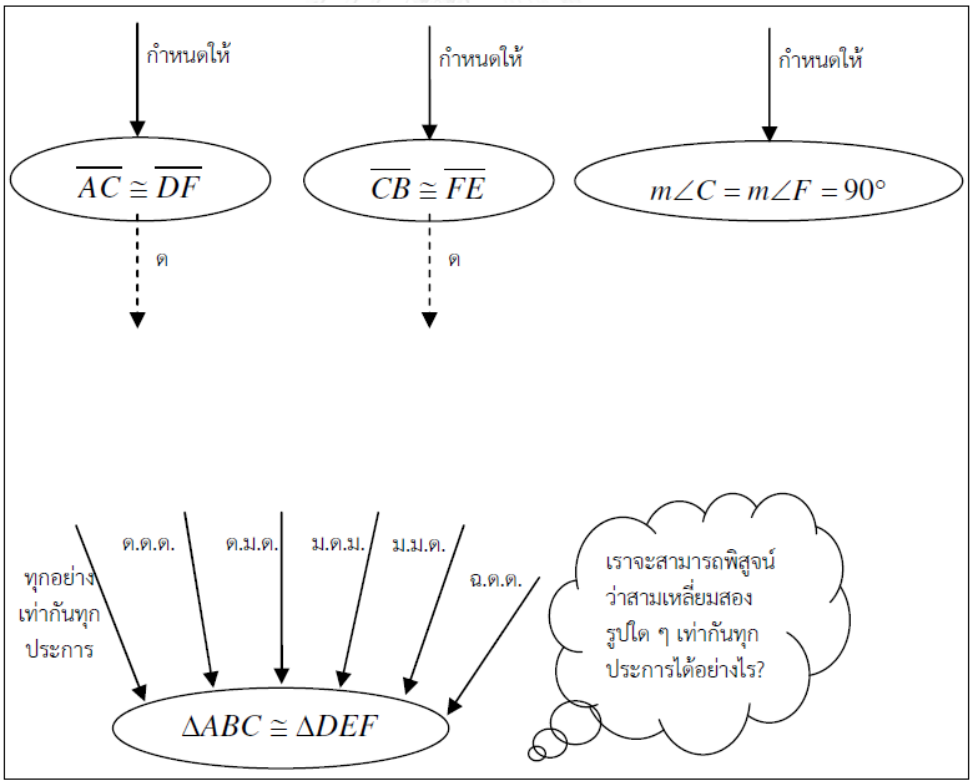
การกระตุ้นให้นักเรียนสร้างความเชื่อมโยงระหว่างรูปต่าง ๆ ในการพิสูจน์และในทฤษฎีบทจริง เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่จะทำให้พรู้ฟแมปปิงมีประสิทธิผล แม้ว่ารูปภาพต่าง ๆ จะปรากฏอยู่ในเทคนิคมาตรฐานสำหรับสร้างการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ พรู้ฟแมปปิงได้ให้ตัวแทนเชิงภาพของคำถามเพ่งความสนใจและกลุ่มของข้อความและเหตุผลที่เกี่ยวข้องกัน ที่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงเข้ากับรูปภาพได้ ในการสอนการพิสูจน์บางแนวทางอาจจะระบุคำถามเพ่งความสนใจและความเชื่อมโยงเป็นเพียงคำพูดในช่วงของการสนทนากับครูกับเพื่อนนักเรียนด้วยกัน หรือมันอาจได้รับการถามและ

ระบุในกระบวนการคิดภายในตัวของนักเรียนเท่านั้น ในเทคนิคพรู้ฟแมปปิง คำถามและความเชื่อมโยงจะได้รับการเขียนออกมาและแสดงเป็นแผนภาพอย่างชัดแจ้งในพรู้ฟแมปปิงเอง

ครู: ถูกต้อง สิ่งที่กำหนดให้บอกเราว่าด้านหนึ่งในสามเหลี่ยมรูปแรกเท่ากันทุกประการกับด้านที่สมนัยกันในสามเหลี่ยมรูปที่สอง และเนื่องจากเราทราบจากตอนก่อนหน้านี้ของพรู้ฟแมปปิงว่า มีทฤษฎีบทการเท่ากันทุกประการบางทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับด้านของสามเหลี่ยม จึงน่าจะเป็นการดีที่จะเขียนแสดงไว้ว่า สิ่งที่กำหนดให้ข้อแรกให้ข้อมูลเราเกี่ยวกับด้านที่เท่ากันทุกประการคู่หนึ่ง [วาดลูกศรเส้นประจากสิ่งที่กำหนดให้ข้อแรก และเขียนกำกับมันด้วย "ด" สำหรับด้าน ดู**รูปที่ 5**] แล้วสิ่งที่กำหนดให้ข้อสอง: CB เท่ากันทุกประการกับ FE ล่ะ

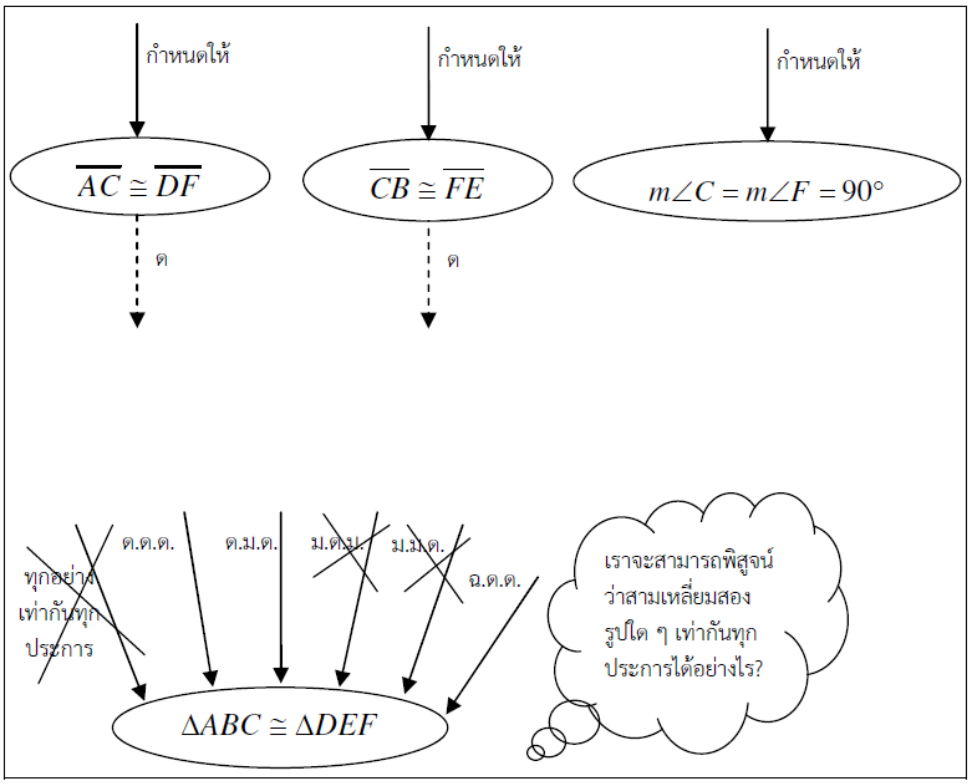
ชู: เหมือนกันครับอาจารย์ เป็นแค่ด้านที่ต่างกันอีกคู่หนึ่ง

ครู: ดี ถ้าอย่างนั้นเราจะเขียนแสดงมันแบบเดียวกัน [วาดลูกศรเส้นประจากสิ่งที่กำหนดให้ข้อสองและเขียนกำกับมันด้วย "ด"] เป้าหมายในการเขียนพรู้ฟแมปปิงคือหาเส้นทางจากสิ่งที่กำหนดให้ไปยังข้อสรุป ที่ผ่านมาเราได้ ด 2 ตัวจากสิ่งที่กำหนดให้แล้ว นั่นคือด้านที่เท่ากันทุกประการ 2 คู่สำหรับสามเหลี่ยมทั้งสอง ในด้านล่างของพรู้ฟแมปปิง เรามีวิธีการที่แตกต่างกัน 6 วิธีที่จะแสดงว่าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ จากสิ่งที่เราทราบ ทฤษฎีบทไหนที่ดูเหมือนจะเป็นไปได้น้อยที่สุดที่จะช่วยให้เราพบเส้นทางที่ถูกต้อง



รูปที่ 5 แสดงลูกศรเส้นประทำหน้าที่เตือนว่าคู่ของด้านที่เท่ากันทุกประการสองคู่ได้รับการบ่งชี้แล้ว (Linares and Smith, 2009: 263)

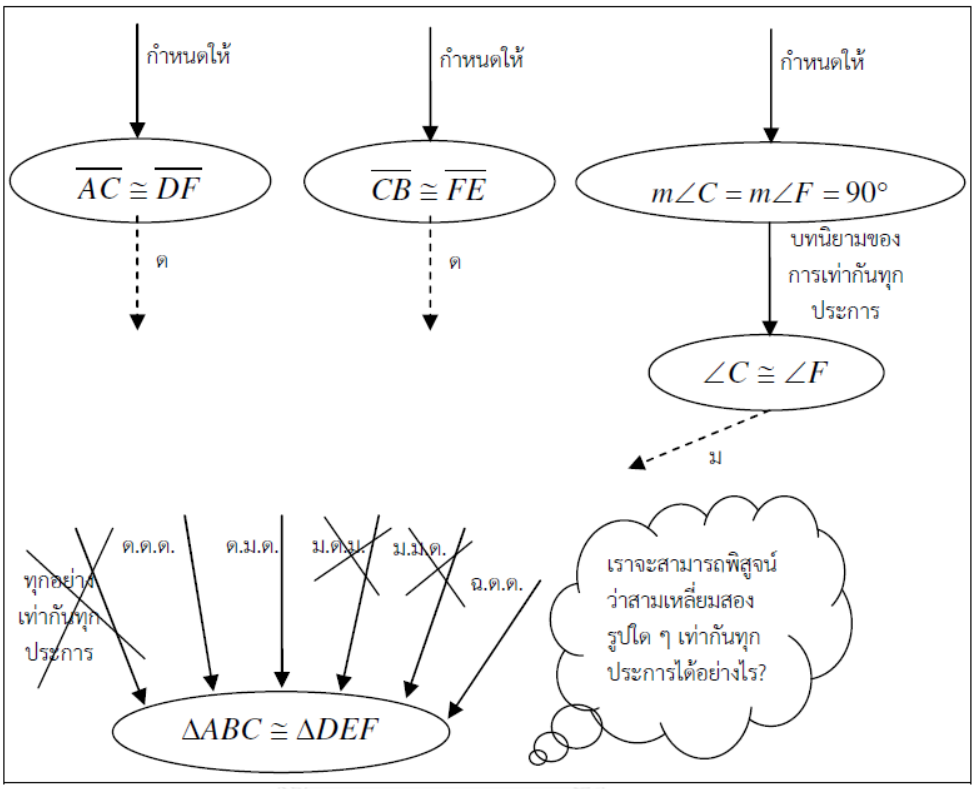
มาร์กี้: อืม เรายังไม่มีข้อมูลอะไรเลยเกี่ยวกับมุม ดังนั้น ม.ด.ม. และ ม.ม.ด. ดูเหมือนจะไม่ใช่
ครู: เป็นความเห็นที่ดี เราต้องการมุม 2 มุมเพื่อที่จะใช้ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบทนี้ ถ้าอย่างนั้นก็ควรจะขีดฆ่ามันออกในตอนนี้เนื่องจากมันไม่ใช่ทางเลือกที่ดี [เขียน X บนลูกศรที่เขียนว่า ม.ด.ม. และ ม.ม.ด. ดู **รูปที่ 6**] เราสามารถเอามันกลับมาใช้ในภายหลังได้ถ้าเรามีข้อมูลเกี่ยวกับมุมอีกสักหน่อย
ชู: ผมหวังว่าเราคงไม่ต้องแสดงว่าทุกส่วนประกอบเท่ากันทุกประการ นั่นน่าจะเป็นงานใหญ่เลยทีเดียว
ครู [หัวเราะ]: ใช่ แบบนั้นเราต้องแสดงว่าด้านทุกด้านและมุมทุกมุมเท่ากันทุกประการ มันดูไม่เหมือนกับว่าเรามีข้อมูลเหล่านั้นทั้งหมด ถ้าอย่างนั้นก็ควรจะขีดฆ่าอันนี้ออกด้วย ตอนนี้เราลดทางเลือกของเราลงเหลือแค่สาม ด.ด.ด., ด.ม.ด. และ ฉ.ด.ด. ดูสิ่งที่กำหนดให้ข้อสุดท้าย มันบอกอะไรแก่เรา



รูปที่ 6 แสดงเส้นทางการพิสูจน์ที่ไม่น่าจะเป็นไปได้ถูกกำจัดออก
(Linares and Smith, 2009: 263)

ซีซาร์: ทั้งมุม C และ F เป็นมุม 90 องศา
วาเนสสา: แต่นี่หมายความว่ามันเท่ากัน เอ่อ...หนูหมายความว่ามุมเหล่านี้มันเท่ากันทุกประการ
ครู: คุณทราบได้อย่างไร
วาเนสสา: ถ้ามุมสองมุมมีขนาดเท่ากัน มันจะเท่ากันทุกประการ
ครู: นี่เป็นบทนิยามหรือทฤษฎีบท
มาร์ค: นี่เป็นบทนิยามของการเท่ากันทุกประการ

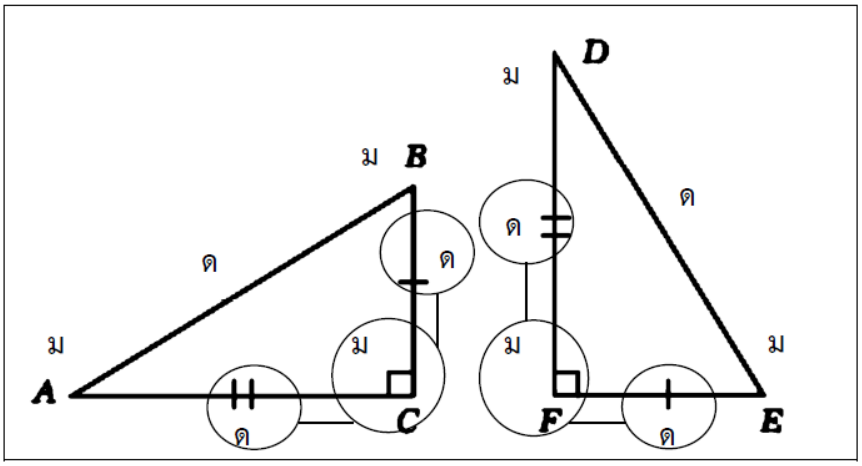
ครู: ดี ดังนั้นเราสามารถวาดลูกศรจากสิ่งที่กำหนดให้ข้อสุดท้ายและเขียนข้อความใหม่ว่ามุม C เท่ากันทุกประการกับมุม F [ดู**รูปที่ 7**] สิ่งนี้ให้อะไรแก่เรา
มาร์กี้: มุมเท่ากันสองมุม ตอนนี้เรามี ม แล้ว



รูปที่ 7 แสดงการใช้บทนิยามของการเท่ากันทุกประการเพื่อแสดงว่ามุมทั้งสองเท่ากันทุกประการ (Linares and Smith, 2009: 263)

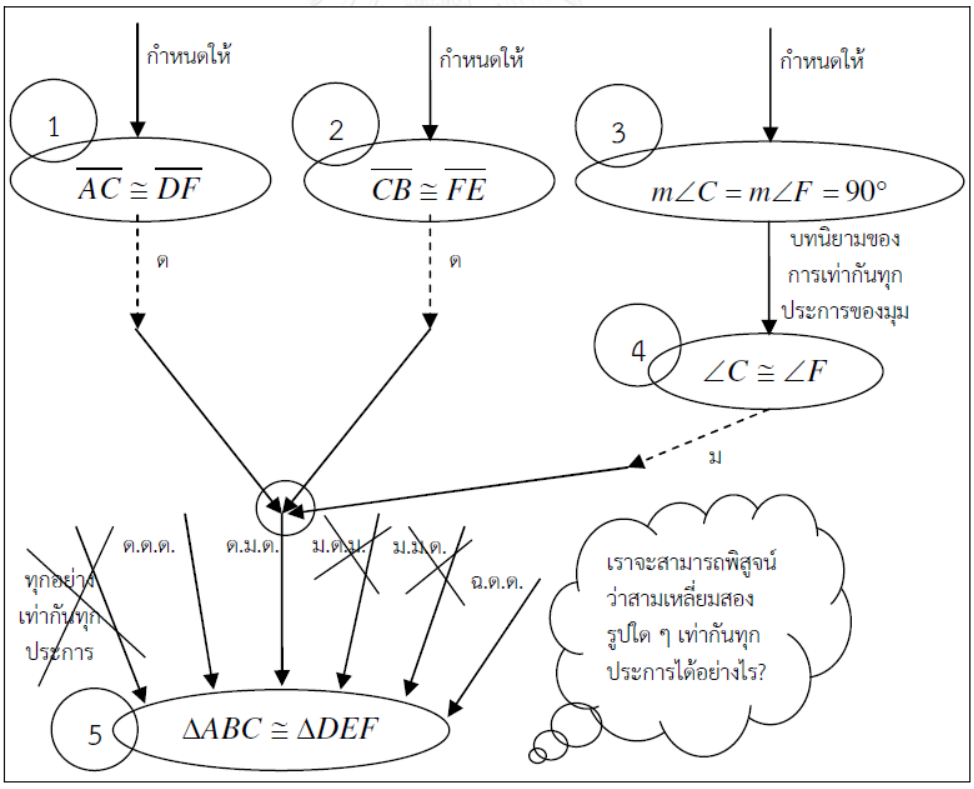
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ครู: ถูกต้อง [วาดลูกศรเส้นประที่เขียนว่า ม ดังแสดงใน**รูปที่ 7**] ตอนนี้กลับไปที่รูปแล้วดูว่าเรารู้อะไรบ้าง [ชี้ไปที่ส่วนของเส้นตรง AC และ DF ใน**รูปที่ 8**] เราทราบว่ามันเท่ากันทุกประการ [เขียนกำกับส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นด้วยตัวอักษร S] และเราทราบว่าส่วนของเส้นตรงทั้งสองนี้เท่ากันทุกประการ [เขียนกำกับส่วนของเส้นตรง BC และ EF ด้วยตัวอักษร ม อีกตัวหนึ่ง] และมุมทั้งสองนี้เราเพิ่งแสดงว่ามันเท่ากันทุกประการ [เขียนกำกับมุม C และ F ด้วยตัวอักษร ม] นอกจากนี้สังเกตว่ามุม C เป็นมุมที่สร้างขึ้นโดยส่วนของเส้นตรง AC และ BC และมุม F เป็นมุมที่สร้างขึ้นโดยส่วนของเส้นตรง DF และ EF เส้นทางไหนที่เราต้องการเพื่อให้พรู้ฟแมปปิงเสร็จสมบูรณ์
ชั้นเรียน [พูดเกือบจะพร้อมกัน]: ด.ม.ด.



รูปที่ 8 แสดงแผนภาพการพิสูจน์แบบดั้งเดิมช่วยบ่งชี้สมมติฐานหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสม (Linares and Smith, 2009: 264)

ครู: ดี [ลากเส้นเชื่อมลูกศรเส้นประทั้งสามเข้าสู่เส้นทาง SAS ดังแสดงใน**รูปที่ 9**] ในเมื่อเราได้พบเส้นทางที่ถูกต้อง เราสามารถขีดฆ่าเส้นทางที่เราไม่ต้องการออก [ขีดฆ่า SSS และ HL] เยี่ยม เนื่องจากเราได้พบเส้นทางจากสิ่งที่กำหนดให้ไปยังข้อความสุดท้าย เราจึงได้พรู้ฟแมปปิงที่เสร็จสมบูรณ์



รูปที่ 9 แสดงพรู้ฟแมปปิงที่เสร็จเรียบร้อยจะให้โครงสร้างแก่การเขียนเรียบเรียงที่เป็นทางการมากขึ้น (Linares and Smith, 2009: 264)

ในระหว่างช่วงแรก ๆ ของการใช้พรู้ฟแมปปิงกับชั้นเรียน เมื่อนักเรียนค้นพบเส้นทางที่สมบูรณ์เส้นทางหนึ่งแล้ว พวกเขาจะแปลงเส้นทางนั้นไปเป็นการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ หลังจากที่นักเรียนคุ้นเคยกับวิธีการพรู้ฟแมปปิงมากขึ้น ครูจะท้าทายนักเรียนให้หาเส้นทางที่ถูกต้องเส้นทางที่สอง หรือบางทีอาจจะเส้นทางที่สาม นักเรียนทั้งชั้นประเมินข้อดีและข้อเสียของเส้นทางการพิสูจน์เหล่านี้ แบบฝึกหัดนี้มักจะเผยให้เห็นไม่เพียงแค่ว่า ข้อความหนึ่งอาจได้รับการแสดงให้เห็นจริงด้วยการพิสูจน์ที่ถูกต้อง 3 แบบหรือมากกว่า แต่ยังให้เห็นอีกว่าการพิสูจน์ที่มีจำนวนขั้นตอนเท่ากันสามารถเขียนเรียงลำดับต่าง ๆ กัน และบางครั้งการพิสูจน์ที่ยาวกว่าอาจจะเข้าใจได้ง่ายกว่าเนื่องจากมันมีคำอธิบายมากกว่า

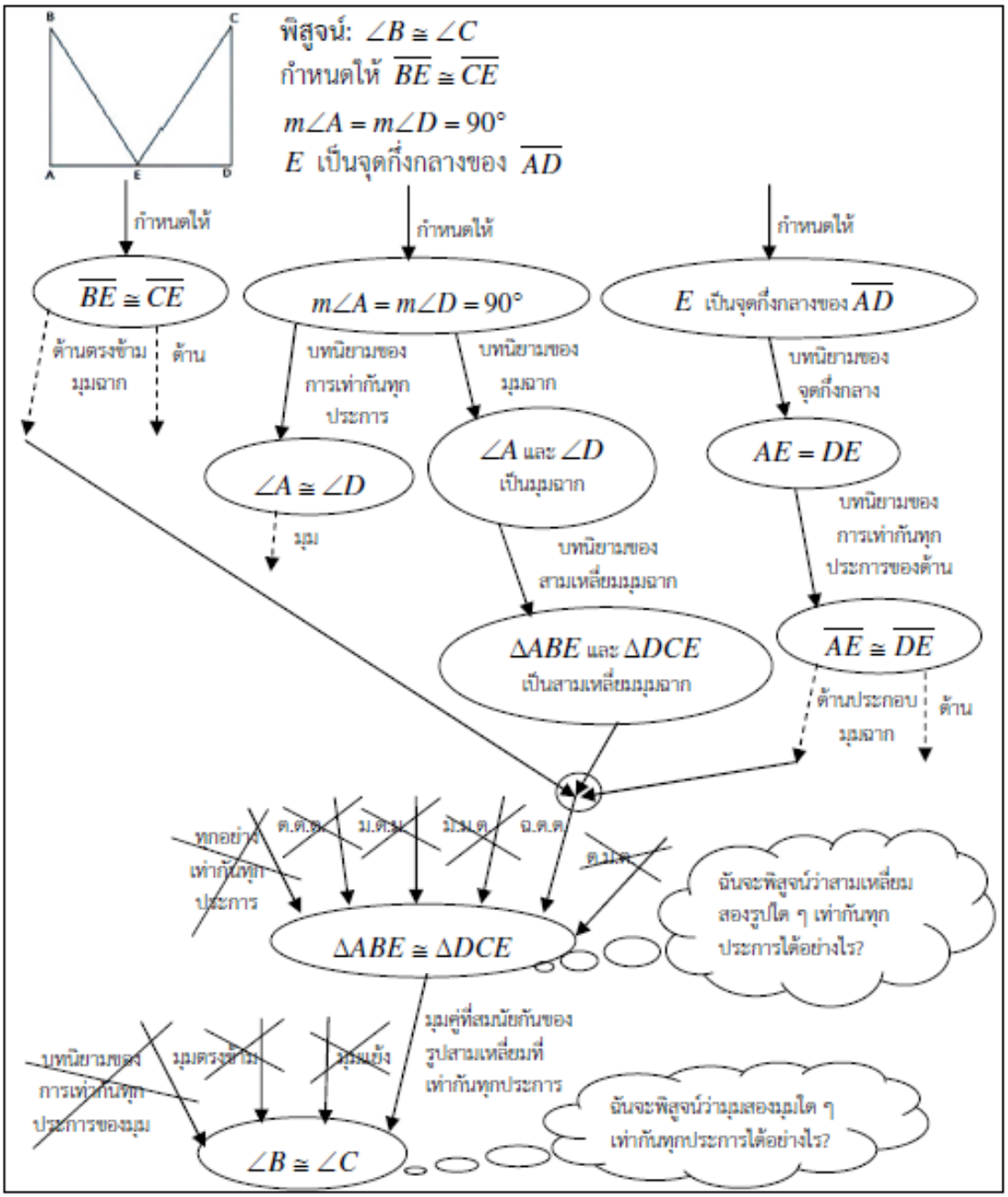
ครู: ถึงตอนนี้เราจำเป็นต้องเขียนพรู้ฟแมปปิงของเราในรูปแบบที่ 'สวยงาม' ซึ่งง่ายต่อการที่คนอื่นจะเข้าใจ เริ่มต้นด้วยการใส่หมายเลขให้แก่ข้อความที่วงล้อมไว้ทั้งหมด [เขียน 1,2,3 ข้าง ๆ สิ่งที่กำหนดให้ใน**รูปที่ 9**] จากนั้นเราจึงไล่ตามลูกศรเส้นทึบ (ไม่ใช่เส้นประ) ไปยังข้อความถัดไป [เขียนเลข 4 ข้าง ๆ ข้อความมุมเท่ากันทุกประการที่ได้จากสิ่งที่กำหนดให้ข้อ 3 และเขียนเลข 5 ข้าง ๆ ขั้นตอนสุดท้ายของการพิสูจน์] ในการเขียนการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ให้เสร็จเรียบร้อย เราเพียงแค่เรียงข้อความที่เราเพิ่งเขียนหมายเลขกำกับไว้ทางซ้าย และเขียนการให้เหตุผลสำหรับแต่ละข้อความไว้ทางขวา [ดู**รูปที่ 10**]

เมื่อเขียนพรู้ฟแมปปิงเสร็จเรียบร้อยแล้ว นักเรียนจะพบว่าการแปลงสารสนเทศที่ใช้ในการพิสูจน์ไปเป็นรูปแบบการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์เป็นแบบฝึกหัดแทบจะไม่มีอะไรเลยซึ่งเป็นเรื่องง่าย ๆ โดยการเขียนหมายเลขกำกับวงรีตามลำดับทางตรรกะ และจากนั้นจึงคัดลอกข้อความและเหตุผลที่เกี่ยวข้องกัน (ข้อความกำกับบนลูกศร)

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	1. กำหนดให้
2. $\overline{CB} \cong \overline{FE}$	2. กำหนดให้
3. $m\angle C = m\angle F = 90°$	3. กำหนดให้
4. $\angle C \cong \angle F$	4. บทนิยามของ การเท่ากันทุกประการของมุม
5. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	5. ด.ม.ด.

รูปที่ 10 แสดงการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ที่สำเร็จเรียบร้อยโดยใช้พรู้ฟแมปปิงที่ได้สร้างขึ้น (Linares and Smith, 2009: 264)

ในบทสนทนาระหว่างครูกับนักเรียนที่แสดงในที่นี้ เทคนิคพรู้ฟแมปปิงได้รับการแสดงตัวอย่างด้วยการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างง่าย ๆ แต่เทคนิคนี้สามารถขยายไปใช้กับปัญหาที่ซับซ้อนกว่าได้ โดยทั่วไปความซับซ้อนของการพิสูจน์จะเผยให้เห็นเมื่อคำถามหลักที่ตั้งขึ้นเป็นสิ่งแรกไม่ได้แนะให้เห็นถึงเส้นทางที่ชัดเจนจากสิ่งที่กำหนดให้ไปยังข้อสรุป ในกรณีดังกล่าว คำถามหลักคำถามแรกจะใช้แนะคำถามที่สอง ซึ่งอาจจะแนะคำถามที่สามต่อไปเรื่อย ๆ เป็นวัฏจักร จนกระทั่งเห็นเส้นทางได้ชัดเจน



รูปที่ 11 แสดงการพิสูจน์บางครั้งอาจจะต้องการคำถามหลักมากกว่าหนึ่งคำถาม (Linares and Smith, 2009: 265)

ตัวอย่างเช่นในพรู้ฟแมปปิงที่แสดงใน**รูปที่ 11** คำถามหลักคำถามแรก กล่าวคือ เราจะสามารถพิสูจน์ว่ามุมสองมุมใด ๆ เท่ากันทุกประการได้อย่างไร ทำให้เกิดเส้นทางการพิสูจน์ที่อาจจะเป็นไปได้ 4 เส้นทาง เมื่อพิจารณาแล้วพบว่า 3 เส้นทางไม่น่าจะเป็นไปได้ และเส้นทางจากสิ่งที่กำหนดให้ไปยังเส้นทางที่เหลืออยู่มองดูไม่ชัดแจ้งที่จุดนี้ ในการจัดการกับความไม่ชัดเจนนี้ ครูกับนักเรียนต้องถามตัวเองว่า "ทำอย่างไรจึงจะสรุปได้ว่ามุม B เท่ากันทุกประการกับมุม C โดยใช้ส่วนที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ" คำตอบที่เจาะจงสำหรับคำถามนี้ กล่าวคือ สามเหลี่ยม ABE เท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม DCE ได้รับการเพิ่มเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงเป็นข้อความที่ถูกวงล้อม และจากนั้นจึงใช้สร้างคำถามหลักที่เป็นแบบทั่วไปมากกว่าคือ "เราจะสามารถพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ เท่ากันทุกประการได้อย่างไร" เส้นทางที่ได้รับการบ่งชี้จากคำถามหลักคำถามใหม่นี้ได้รับการพิจารณา และเส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้จากสิ่งที่กำหนดให้ไปยังข้อความใหม่ได้รับการค้นพบ ทำให้แผนที่สำเร็จเรียบร้อย

การช่วยเหลือการคิดทางคณิตศาสตร์แบบไตร่ตรองด้วยตัวเอง

พรู้ฟแมปปิงดูเหมือนจะช่วยการคิดทางคณิตศาสตร์แบบไตร่ตรองด้วยตัวเองใน 2 ระดับประการแรก ในแง่ของการสนทนาในชั้นเรียน นักเรียนได้ฝึกหัดการตั้งคำถามทางคณิตศาสตร์กับครูและเพื่อนนักเรียนด้วยกัน เมื่อเวลาผ่านไป การฝึกหัดนี้จะกลายเป็นทักษะประจำตัว ประการที่สองพรู้ฟแมปปิงให้ตัวแทนเชิงภาพของกระบวนการคิดที่เกี่ยวข้องกับการสร้างการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักเรียนมีที่สำหรับวางตำแหน่งความคิดของพวกเขา ทั้งที่ช่วยให้การอ้างเหตุผลของพวกเขาก้าวหน้าต่อไปและทั้งที่ไม่ช่วย พรู้ฟแมปปิงกลายเป็นทั้งบันทึกและเกณฑ์กำหนดในขณะที่นักเรียนนำร่องเข้าไปในบริเวณที่ไม่เคยเข้าไปมาก่อน

การเขียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตดูเหมือนจะซับซ้อนมากกว่าที่การนำเสนอในการสอนแบบมาตรฐานจะทำให้คิดไป ต้องใช้กระบวนการคิดอย่างกว้างขวางและการพิจารณาอย่างมากเพื่อสร้างการพิสูจน์ขึ้นมา แต่นักเรียนโดยทั่วไปจะเห็นเพียงแค่รูปแบบสุดท้ายที่สำเร็จเรียบร้อยแล้ว เทคนิคพรู้ฟแมปปิงเผยให้เห็นกระบวนการคิดของนักเรียน ทั้งที่ผิดถูกทั้งหมด และให้หนทางแก่พวกเขาที่จะสำรวจความคิดทางคณิตศาสตร์ในเบื้องต้น

เมื่อทำการสร้างพรู้ฟแมปปิง นักเรียนยังได้เรียนรู้ที่จะรวบรวมความเป็นไปได้ทั้งหมดในการแสวงหาแนวทางที่ใช้ได้ เส้นทางต่าง ๆ ที่จะทำให้การพิสูจน์สำเร็จลง เมื่อได้แสดงในแผนภาพของพรู้ฟแมปปิงแล้ว จะสามารถได้รับการวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์โดยนักเรียนและคนอื่น ๆ จากนั้นจึงสามารถดำเนินไปตามแนวทางที่น่าจะเห็นผล และกำจัดแนวทางอื่น ๆ ออก ถ้าการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ประสบความสำเร็จประกอบด้วย การระบุแนวทางอธิบายที่เป็นไปได้ในขั้นแรก และการชั่งน้ำหนักข้อดีข้อเสียของแต่ละแนวทางแล้ว พรู้ฟแมปปิงจะให้วิธีการที่สนับสนุนและกระตุ้นการคิดดังกล่าวในชั้นเรียนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาแก่ครูผู้สอน

จากที่ได้กล่าวมาสรุปได้ว่า การจัดกิจรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง หมายถึง การจัดกิจกรรมการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงของ Linares (2008) แทรกในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

1) ให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่นำมาเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้

2) ให้นักเรียนร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการย้อนหลัง เริ่มจากการเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ไว้ด้านล่างสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี

3) ให้นักเรียนร่วมกันตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิง โดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์

4) ให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิง ด้านบนของลูกศรเส้นทึบชี้ลงล่างไปยังข้อความที่ต้องการพิสูจน์

5) ให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนสิ่งที่กำหนดให้ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี

6) ให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของสิ่งที่กำหนดให้ลงในพรู้ฟแมปปิง โดยใส่ลูกศรเส้นทึบชี้ลงมาเข้าหาสิ่งที่กำหนดให้ดังกล่าว

7) ให้นักเรียนร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยอาจใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้ จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ กระบวนการไปข้างหน้า จะเป็นการเขียนข้อความที่เป็นผลจากสิ่งที่กำหนดให้โดยตรง ระบุการให้เหตุผลสำหรับข้อความด้วยลูกศรเส้นทึบ ระบุสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคำตอบของคำถามหลักด้วยลูกศรเส้นประ ส่วนกระบวนการย้อนหลัง จะเป็นการเขียนข้อความที่ได้สร้างขึ้นมาใหม่จากคำถามหลัก

8) ให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาอีกครั้งว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้ง โดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้

9) ให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ นำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

2. การเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2.1 ความหมายของการพิสูจน์

Moore (1990: 51) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่า การพิสูจน์คือ ลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยค โดยเริ่มจากสมมติฐานไปจนถึงบทสรุป ซึ่งลำดับขั้นตอน ดังนี้ คือสมมติฐาน บทนิยาม หรือสัจพจน์ อาศัยสิ่งที่พิสูจน์มาแล้วและอาศัยกฎของการให้เหตุผล

Wilson (1993: 49) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่ใช้บทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงและการให้เหตุผลแบบนิรนัย ที่จะแสดงว่าข้อความนั้นสมเหตุสมผล

Morash (1991: 143) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือลำดับประโยคที่แต่ละประโยคสมเหตุสมผล โดยอาศัยสัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์มาแล้วใช้เป็นข้ออ้าง

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การพิสูจน์ หมายถึง การแสดงเหตุผลนิรนัยที่สมเหตุสมผล และสามารถเรียงลำดับขั้นตอนของเหตุผลได้โดยอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทหรือข้อความที่ได้พิสูจน์มาแล้ว และกฎการให้เหตุผลที่เป็นพื้นฐานทางตรรกศาสตร์

2.2 ความสำคัญของการพิสูจน์

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 3) กล่าวโดยสรุปว่า การพิสูจน์ทำให้นักเรียนฝึกการใช้เหตุผล รู้จักวิเคราะห์แก้ไขปัญหาอย่างมีระบบ

พัฒนี อุดมกะวานิช (2541: 1) กล่าวโดยสรุปว่า การมีแนวคิดทฤษฎีใหม่ ๆ ย่อมเป็นผลจากการศึกษาทฤษฎีบทที่มีอยู่ว่ามีแนวคิดมาอย่างไร และใช้การพิสูจน์ในการยืนยันความถูกต้อง

ขวัญ เพียซ้าย (2547: 1) กล่าวโดยสรุปว่า การเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงนักเรียนจะต้องมีความสามารถในด้านการพิสูจน์เห็นคุณค่าและตระหนักในความสำคัญของการพิสูจน์

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการพิสูจน์มีความสำคัญหลายประการ ทั้งความสำคัญต่อการศึกษาในระดับสูง เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการให้เหตุผลตลอดจนเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทต่าง ๆ

2.3 ประเภทของการพิสูจน์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 5) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยคเงื่อนไข แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง
2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริง

โดยทั่วไป การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงนั้น ต้องให้เหตุผลเพื่อแสดงว่า เมื่อเหตุเป็นจริงแล้วเหตุนั้นทำให้ผลเป็นจริงเสมอ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้แล้วอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงและสมบัติต่าง ๆ อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือหลายอย่างประกอบกันมาให้เหตุผลเพื่อสรุปให้ได้ว่าผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

สำหรับ การพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริงนั้น มีวิธีง่าย ๆ คือ ยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริง เรียกตัวอย่างเช่นนี้ว่า ตัวอย่างค้าน

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง และการพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริง

2.4 กระบวนการพิสูจน์

ศิริจันทร์ เวสารัชศาต (2551: 32-35) กล่าวว่าการพิสูจน์ข้อความที่เป็นประโยคเงื่อนไขออกเป็น 2 วิธี ดังนี้

1. การพิสูจน์ตรง (Direct Proof) คือการพิสูจน์ที่เริ่มต้นพิสูจน์จากเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ จากนั้นอาศัยบทนิยาม กฎ ทฤษฎี สัจพจน์ หรือข้อความที่เคยได้พิสูจน์มาแล้วก่อนหน้ามาอ้างอิงจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

2. การพิสูจน์อ้อม (Indirect proof or proof by Contradiction) เป็นการพิสูจน์ที่ทำได้โดยการสมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์ให้เป็นเท็จ แล้วดำเนินการพิสูจน์ไปจนกระทั่งเกิดข้อขัดแย้งขึ้น

กรรณิการ์ กวักเพชูรย์ (2542: 52-58) กล่าวว่าการพิสูจน์ข้อความที่ในแบบ $p \rightarrow q$ สามารถทำได้ 3 วิธี คือ วิธีตรง (direct proof) วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof) และ วิธีข้อขัดแย้ง (contradiction proof) อีกทั้งยังสรุปการพิสูจน์ทั้ง 3 แบบไว้ดังนี้

1. วิธีตรง
สมมติ p เป็นจริง
⋮ (ส่วนของการพิสูจน์)
ดังนั้น q

2. วิธีการแย้งสลับที่
สมมติ ~q เป็นจริง
⋮ (ส่วนของการพิสูจน์)
ดังนั้น ~p

3. วิธีข้อขัดแย้ง
สมมติ p และ ~q เป็นจริง
⋮ (ส่วนของการพิสูจน์)
ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าการพิสูจน์ทำได้ 3 วิธีคือ การพิสูจน์โดยวิธีตรง การพิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ และการพิสูจน์โดยวิธีข้อขัดแย้ง

2.5 ความหมายของการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

สุเทพ ทองอยู่ (2534) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่ยืนยันว่าผลสรุปนั้นเป็นผลสรุปที่แน่นอน จากข้ออ้างการให้เหตุผลจะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ ถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแล้วผลสรุปต้องเป็นจริงด้วย แต่ถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแต่ผลสรุปเป็นเท็จก็จะถือว่าเป็นการให้เหตุผลนั้นไม่สมเหตุสมผล

ธนูชัย ภูอุดม (2524: 1 อ้างถึงใน นวลศรี ชำนาญกิจ, 2550: 28) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตต้องมีการพิสูจน์ทฤษฎีบท และนำตัวทฤษฎีบทไปใช้อ้างในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น ๆ หรือโจทย์ปัญหา

Jeff Calareso (2003: online) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Geometric Proof) เป็นการพิจารณาข้อความว่าเป็นจริงหรือเท็จโดยใช้ตรรกะ ข้อเท็จจริง และการอนุมาน

SparkNotes (2015: online) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Geometric Proof) เป็นการอธิบายตามลำดับขั้นตอนโดยใช้ บทนิยาม (Definition) สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axiom) สัจพจน์ (Postulates) และทฤษฎีบท (Theorem) ที่ได้พิสูจน์กล่าวหน้านี้แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นข้อความทางเรขาคณิต

นายจำเริญ อนันตธรรมรส (2553: 10) กล่าวว่า ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ เป็นความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ปัญหาทางเรขาคณิตอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล สื่อความหมายได้อย่างชัดเจนตามกระบวนการพิสูจน์ โดยอาศัยบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต เข้ามาช่วยแก้ปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทและปัญหาทางเรขาคณิต โดยการเขียนให้เห็นอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล สื่อความหมายได้อย่างชัดเจนตามกระบวนการพิสูจน์ โดยอาศัยบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต มาใช้ในการอ้างอิงอย่างสมเหตุสมผล

2.6 การสอนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ยุพิน พิพิธกุล (2539: 64-65 อ้างถึง นาตยา น้ำจิตตรง, 2546: 16-18) กล่าวถึงวิธีสอนพิสูจน์เรขาคณิตโดยแยกเป็น 3 ลักษณะคือ

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังนี้

1.1 หาวิธีการให้ผู้เรียนได้ค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

1.2 ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล

1.3 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1.4 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้อใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมด้วยทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด มีขั้นตอนดังนี้

2.1 ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผลหรือสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกแยะได้ จะต้องพยายามฝึกจนกว่าจะแยกได้

2.2 เขียนรูปประกอบ

2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์หรือใช้วิธีวิเคราะห์ร่วมกับสังเคราะห์ ซึ่งต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง มีขั้นตอนดังนี้

3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อมๆกัน อย่าสอนจนจบแล้วก็มาถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ขึ้นอยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

จากการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า วิธีสอนพิสูจน์เรขาคณิต ควรแยกออกเป็น 3 ลักษณะ คือ การสอนทฤษฎีบท การพิสูจน์แบบฝึกหัด และการสอนบทสร้าง

2.7 ข้อเสนอแนะการพิสูจน์เรขาคณิต

พรรณทิพย์ ม้ามณี (2520: อ้างถึง วัฒนา มณีวงศ์, 2542: 19) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้ละเอียดแล้วแยกแยะว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้และต้องการพิสูจน์อะไร
2. เขียนรูปในแบบทั่ว ๆ ไป โดยปราศจากความลำเอียง
3. รูปที่เขียนพยายามให้ชัดเจนเพื่อง่ายแก่การพิสูจน์
4. พยายามเลี่ยงการใช้คำคลุมเครือ
5. เลือกหาวิธีการที่เหมาะกับสิ่งที่ต้องการหา
6. ใช้นิยาม อนิยาม สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้วเท่านั้นในการพิสูจน์
7. อย่าให้สิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นเหตุผลในการพิสูจน์
8. แถลงเหตุผลที่จะใช้ให้ง่าย สั้นและชัดเจน

Gustafson and Frisk (1991: 64-65) ได้ให้ข้อเสนอแนะอื่น ๆ ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตดังนี้

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันทุกประการ ไม่จำเป็นต้องจำหมายเลยทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เพียงแต่ทำความเข้าใจในสิ่งที่ทฤษฎีบทกล่าวไว้เท่านั้น แล้วพยายามเขียนด้วยภาษาของตนเอง อย่าใช้วิธีท่องจำ เพราะไม่มีข้อความใดใช้สำหรับพิสูจน์ทฤษฎีบทได้ทุกทฤษฎีบท แต่สามารถนำลำดับขั้นดังต่อไปนี้ไปใช้เป็นแนวทางได้

1. อ่านตัวทฤษฎีบทอย่างรอบคอบ ทำความเข้าใจคำแต่ละคำที่ปรากฏในตัวทฤษฎีบท
2. เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์
3. สร้างรูปแสดงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ
4. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ แล้วค้นหา บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่กล่าวถึงก่อนหน้านี้ ซึ่งจะช่วยให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้
5. บางครั้งอาจจำเป็นต้องมีการลากเส้นเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์ แต่ต้องแน่ใจว่าสามารถทำเช่นนั้นได้
6. เขียนการพิสูจน์โดยระบุเหตุผลประกอบในแต่ละข้อตามรูปแบบการพิสูจน์

Cheng & Lin (2006) ได้ให้ข้อแนะนำในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตดังต่อไปนี้

1. เนื้อหาทางเรขาคณิตเป็นเนื้อหาที่มีความเกี่ยวข้องกับรูปภาพ ดังนั้นรูปภาพที่จะนำเสนอในหัวข้อการพิสูจน์ควรจะมีการใช้สี เพื่อให้นักเรียนเห็นความแตกต่าง ๆ เพื่อเป็นการนำเสนอส่วนประกอบต่าง ๆ
2. จากโจทย์ปัญหา นักเรียนควรศึกษาจนเกิดความเข้าใจ และทำการใช้ปากกาเน้นในข้อความที่สำคัญ
3. จากการอ่านคำถามนักเรียนควรสร้างรูปภาพตามเงื่อนไขที่กำหนดให้
4. จากภาพที่กำหนดให้ นักเรียนควรนำสี มาใช้ในการแสดงองค์ประกอบของรูปที่มีขนาดต่างกัน ก็ใช้สีที่แตกต่างกัน

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าข้อเสนอแนะการพิสูจน์เรขาคณิต ควรจะอ่านโจทย์ให้ละเอียด เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ สร้างรูปแสดงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เลือกวิธีการที่เหมาะสมกับสิ่งที่ต้องการ ใช้นิยาม อนิยาม สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้วเท่านั้นในการพิสูจน์ ในการลากเส้นเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์ ต้องแน่ใจว่าสามารถทำเช่นนั้นได้ และเขียนพิสูจน์โดยระบุเหตุผลประกอบในแต่ละข้อตามรูปแบบการพิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันทุกประการ ไม่จำเป็นต้องจำหมายเลยทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เพียงแต่ทำความเข้าใจในสิ่งที่ทฤษฎีบทกล่าวไว้เท่านั้น แล้วพยายามเขียนด้วยภาษาของตนเอง

2.8 การพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม

กรมวิชาการ (2511: 48, 54-55 อ้างถึง เยาวเรศ สิงหนันท์, 2533: 30) ได้กล่าวว่าการเขียนพิสูจน์นั้น นิยมเขียนตามแบบฟอร์ม (Formal proof) ซึ่งมีวิธีการทำเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. ลอกโจทย์หรือข้อความที่เป็นตัวทฤษฎีบท
2. เขียนรูปตามที่โจทย์กำหนด และใส่ตัวอักษรกำกับจุด
3. แยกโจทย์หรือทฤษฎีบทออกเป็นสองตอน ตอนหนึ่งเป็นเหตุหรือเป็นตอนที่โจทย์ให้อีกตอนหนึ่งเป็นผลหรือเป็นตอนที่ต้องการพิสูจน์
4. กรณีที่พิสูจน์ไม่ได้ จะต้องมีเส้นอื่นมาเพิ่มเติมนอกเหนือจากไปจากที่โจทย์ให้เพื่อจะได้พิสูจน์ได้ เส้นที่เพิ่มขึ้นให้ลากด้วยเส้นไข่ปลา หรือใช้ดินสอสี กรณีเช่นนี้นักเรียนจะได้พบในตอนต่อไป
5. ขั้นของการพิสูจน์ ให้เรียบเรียงข้อความที่พิสูจน์ได้ไว้ทางซีกซ้ายของหน้ากระดาษ และใส่เลขหมายกำกับไว้เป็นข้อ ๆ สำหรับเหตุผลนั้นเขียนไว้ทางซีกขวา ซึ่งมีเลขหมายเดียวกันกับข้อความที่พิสูจน์ได้
6. การสร้างรูป ถ้าโจทย์ไม่กำหนดโดยเฉพาะแล้ว ต้องสร้างเป็นรูปทั่วไป เช่น เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะสร้างให้เส้นตรงตั้งฉากกันไม่ได้ หรือโจทย์กำหนดว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เราต้องสร้าง ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามไม่เท่ากัน จะสร้างเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือสามเหลี่ยมมุมฉากไม่ได้ ทั้งนี้ เพราะเส้นตั้งฉากหรือสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือสามเหลี่ยมมุมฉากมีลักษณะพิเศษ ซึ่งเส้นอื่นหรือสามเหลี่ยมไม่มี
7. ข้อความที่นำมาพิสูจน์ ต้องมีเหตุผลอ้างทุกตอน เหตุผลที่นำมาอ้างในข้อความที่พิสูจน์ ได้แก่
   - ก. สิ่งที่โจทย์ให้
   - ข. นิยามต่างๆ
   - ค. สัจพจน์
   - ง. ข้อความของทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่าการพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม เป็นการพิสูจน์ที่มีรูปแบบในการพิสูจน์แบ่งออกเป็น การเขียนในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และขั้นของการพิสูจน์ โดยซีกซ้ายเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ซีกขวาเป็นข้อความที่เป็นเหตุผล

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3.1 ความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

National Council of Teacher of Mathematics (1989: 81) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นการสร้างข้อคาดเดา และตรวจสอบข้อคาดเดาจากสถานการณ ที่กำหนด จำเป็นต้องใช้การให้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและนิรนัย

Krulik and Rudnick (1993: 3) ได้กล่าวว่า ความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนสามารถสร้างข้อคาดเดา หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ ปัญหา แล้วแสดงถึงเหตุผล อธิบายข้อสรุป และยืนยันข้อสรุปนั้น

O' Daffer and Thornquist (1993: 43) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และให้ความหมายเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึง การใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิด และความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

Alice and Shirel (1994: 114) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้การแก้ปัญหามีความสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหา หรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้ หากปราศจากการให้เหตุผล จึงกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

Pretage (2002: 26) ได้ให้ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลไว้ว่า เป็นการที่นักเรียนสามารถค้นหาคำตอบ และตัดสินความถูกต้องได้ รวมถึงการพัฒนาแนวคิดเป็นข้อสรุปทั่วไป การโต้แย้ง และการพิสูจน์

Leighton and Sternberg (2004: 11) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการในการสร้างข้อสรุป ทุกสิ่งทุกอย่างที่ทำและคิดจะเกี่ยวข้องกับการสร้างข้อสรุป นั่นคือ เมื่อเราเรียนรู้วิเคราะห์ ตัดสิน สรุปอ้างอิง ประเมิน จะต้องมีการสร้างข้อสรุปจากข้อมูลและความเชื่อเสมอ

ทิศนา แขมมณี (2544: 14) ได้กล่าวว่า การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมายเพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริงและพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัยซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อยๆ ดังนี้

1. สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้
2. สามารถใช้เหตุผลแบบนิรนัย หรืออุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้
3. สามารถใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัย และอุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้

อัมพร ม้าคนอง (2547: 97) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นการโยงความสัมพันธ์ เชิงตรรกในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการให้เหตุผลมีความสำคัญมาก เนื่องจากในกระบวนการให้เหตุผล ผู้เรียนต้องใช้การคิดหลายลักษณะ เช่น การคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ คิดไตร่ตรอง คิดอย่างมีวิจารณญาณ เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง และข้อมูลการให้เหตุผลของผู้เรียนยังมีความสำคัญโดยอาจทำให้ผู้สอนสามารถดำเนินการในสิ่งต่อไปนี้

1. อธิบายระดับพัฒนาการของผู้เรียนในการเรียนมโนทัศน์เฉพาะใดๆ

2. ระบุความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน หรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนพร้อมทั้งเหตุผล

3. วิเคราะห์แนวคิดใหม่ ๆ (Emerging ideas) ที่เกิดจากการให้เหตุผลของผู้เรียนเพื่อที่จะขยายความและอภิปรายร่วมกับผู้เรียนคนอื่นๆ

4. ระบุโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematics structure) หรือประเภทของปัญหาที่จำเป็นสำหรับการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายของผู้เรียน

5. จัดหาสถานการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน

6. ตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมและวัฒนธรรมในห้องเรียนที่มีต่อความคิด และความเข้าใจของผู้เรียน

ณัฐิกานต์ รักนาค (2552: 45) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหา และสถานการณ ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผนตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม การคิดอย่างมีเหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองให้เกิดการเรียนรู้สิ่งใหม่ในการทำงาน และการดำรงชีวิต

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555) ได้กล่าวไว้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริง หรือสถานการณ์ใหม่

จากความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลประกอบไปด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ และความสามารถในการอธิบายข้อสรุป โดยใช้ข้อมูลในการสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

3.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

Alice and Shirel (1999: 114) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหาวิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากการให้เหตุผลกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

Baroody (1993: 2-60) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้สรุปได้ว่าการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นเพราะการให้เหตุผลช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนานอกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริงกฎและการดำเนินการ การเน้นการให้เหตุผลช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สามารถให้เหตุผลได้อย่างเป็นระบบและมีความหมายและทักษะการให้เหตุผลในคณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ไปใช้ในสาขาอื่น ๆ ได้

Kahney (1993: 103) ได้กล่าวเกี่ยวกับการให้เหตุผลว่าเป็นวิธีการที่คนเราจะสร้างตัวแทนหรือทำความเข้าใจปัญหา

Stiggins (1997: 6) ได้กล่าวว่าการทำความเข้าใจโดยใช้เหตุผลช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี ในบางโอกาสเราต้องใช้การให้เหตุผลในลักษณะการวิเคราะห์เพื่อจะดูว่าส่วนปลีกย่อยต่าง ๆ เข้ากับ

ภาพโดยรวมของสิ่งนั้นหรือไม่ในบางโอกาสเราต้องใช้การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบเพื่อให้เข้าใจความเหมือนกับความแตกต่าง

National Council of Teacher of Mathematics (2000: 29) ได้กำหนดให้การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์และกล่าวว่าการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจะเป็นแนวทางในการพัฒนาให้เกิดการแสดงออกถึงความเข้าใจอันลึกซึ้งเกี่ยวกับปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวางและได้กล่าวถึงวิชาคณิตศาสตร์กับการให้เหตุผลว่าจุดเน้นของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในแต่ระดับดังนี้

ระดับอนุบาล-เกรด 4 เน้นการให้เหตุผลที่ให้นักเรียน

1. หาผลสรุปทางคณิตศาสตร์
2. ใช้ความรู้สมบัติความสัมพันธ์และรูปแบบต่างๆในการอธิบายแนวคิด
3. ให้เหตุผลเกี่ยวกับคำตอบและกระบวนการในการหาคำตอบ
4. ใช้รูปแบบและความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในการวิเคราะห์สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์
5. เชื่อว่าคณิตศาสตร์มีความสมเหตุสมผล

เกรด 5–8 เน้นการให้เหตุผลที่ให้นักเรียน

1. มีความเข้าใจและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย
2. สามารถทำความเข้าใจและประยุกต์ใช้กระบวนการให้เหตุผลเชิงมิติสัมพันธ์
3. สร้างและตรวจสอบข้อคาดเดาและข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
4. ให้เหตุผลในความคิดของตนเอง
5. เห็นความสำคัญของการให้เหตุผลว่าเป็นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์

เกรด 9-12 สนับสนุนให้นักเรียนได้ขยายทักษะการให้เหตุผลโดยมุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. สร้างและตรวจสอบข้อคาดเดา
2. ยกตัวอย่างคัดค้านได้
3. แสดงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล
4. ตัดสินข้อโต้แย้งด้วยเหตุและผล
5. อ้างเหตุผลอย่างง่ายได้

ปิยวดี วงษ์ใหญ่ (2548: 1) ได้กล่าวว่าการสอนคณิตศาสตร์ในลักษณะของความเป็นเหตุเป็นผลจะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์เกิดความมั่นใจเชื่อว่าคณิตศาสตร์ที่มีเหตุผลและนักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้และเขายังสามารถที่จะค้นพบอะไรใหม่ ๆ ได้เองด้วยนักเรียนที่เรียนด้วยความเข้าใจและมีเหตุผลจะตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่อาศัยการให้เหตุผลอย่างมีระบบและจะเป็นการพัฒนาพื้นฐานแนวการเรียนรู้คณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ ซึ่งจะมีคุณค่าต่ออนาคตของผู้เรียน

จากความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญมากต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ช่วยพัฒนาให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา การตัดสินใจและการหาข้อสรุป อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานการคิดในขั้นสูงเพื่อนำไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

3.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

O'Daffer (1990: 378) ได้เสนอว่าทักษะการให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมี 2 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวกับการใช้ข้อมูลในการสร้างหลักการใหม่ค้นหารูปแบบทั่วไป รูปแบบทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์สถานการณ์ อธิบายสมบัติและโครงสร้างต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นมโนมติ หรืออาจกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเกิดจากผลของกรณีเฉพาะหลาย ๆ อย่างแล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้รูปแบบการลงความเห็นที่สมเหตุสมผล ในการสรุปจากหลักฐานที่ปรากฏเป็นการพิสูจน์ข้อสรุป และตัดสินความถูกต้องของขั้นตอนการคิด การให้เหตุผลแบบนี้เป็นการให้เหตุผลที่เป็นระบบตรรกยะ เป็นการให้เหตุผลที่ใช้โครงสร้างคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน คือ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท อาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก แล้วจะได้ผลสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎเกณฑ์ที่เป็นหลักการที่เป็นจริง

Baroody (1993: 2 - 61) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ประเภท โดยเพิ่มการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึก (Intuitive Reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ จึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็น หรือจากความรู้สึกภายใน เหตุผลเชิงหยั่งรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏ หรือข้อสมมติฐาน ซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้ ส่วนอีก 2 ประเภทคือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยเขากล่าวว่า การให้เหตุผลทั้ง 3 ประเภท มีความสัมพันธ์กันคือ ในกระบวนการสืบค้นทางคณิตศาสตร์มักเริ่มต้นด้วยการสรุปจากการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึก หรือแบบอุปนัย ที่เรียกว่าการสร้างข้อคาดเดา แล้วตรวจสอบ พิสูจน์ข้อคาดเดา ซึ่งก็คือการให้เหตุผลแบบนิรนัย

Cooney and other (1999: 8 - 10) ได้เสนอการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 4 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ได้จากการสังเกตเห็นสิ่งที่ร่วมกันจากหลาย ๆ ตัวอย่าง หรือการทดลองซ้ำหลายครั้ง แล้วสรุปออกมาอย่างมีเหตุมีผลสนับสนุน

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลจากหลักการทั่วไปหรือหลักใหญ่ ๆ แล้วอ้างอิงไปยังที่ที่ต้องการ ที่มีความจำเพาะเจาะจง

3. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง ซึ่งสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนในการคำนวณเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านคำตอบที่ได้มา

4. การให้เหตุผลในเชิงปริภูมิ (Spatial Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่มีมิติ เป็น 2 มิติ หรือ 3 มิติ

อัมพร ม้าคนอง (2553: 50 - 53) ได้กล่าวไว้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีหลายลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก (Logical reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้การคิดเชิงตรรก ประกอบด้วยการให้เหตุผล 2 ประเภท ต่อไปนี้

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการคิดจากข้อเท็จจริงย่อย โดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญ หรือแบบแผนของสิ่งที่พบ เพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป การให้เหตุผลแบบนี้จึงใช้ข้อมูลที่เป็นจริงจากข้อมูลย่อย ๆ ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือเป็นการมองเห็นตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปแบบทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นการหาความสัมพันธ์จากสมาชิกบางส่วนในกลุ่ม เพื่ออ้างอิงไปใช้กับสมาชิกส่วนอื่นของกลุ่มเดียวกัน

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดแบบนิรนัย ซึ่งเป็นการคิดจากกฎเกณฑ์หลักการ หรือข้อสรุปทั่วไปสู่ข้อเท็จจริงย่อย การให้เหตุผลแบบนี้จึงเป็นการใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎหรือหลักเกณฑ์ทั่วไปที่ยอมรับกันว่าเป็นจริง โดยมีการพิสูจน์มาแล้ว เป็นหลักในการหาขอสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎหรือเกณฑ์นั้น

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วน ทั้งสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลข และข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น การหาค่าที่หายไป การเปรียบเทียบจำนวน การเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วน ซึ่งมีหลายลักษณะ ดังต่อไปนี้

2.1 การให้เหตุผลเชิงคุณภาพ (Qualitative reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วนและเศษส่วน เมื่อตัวเศษและ/หรือตัวส่วนของเศษส่วนเดิมเพิ่มขึ้น ลดลง หรือเท่าเดิม ซึ่งแบ่งเป็น 8 ประเภท ดังนี้

2.1.1 เมื่อตัวเศษและตัวส่วนเพิ่มขึ้น ไม่สามารถระบุค่าของเศษส่วนใหม่ได้

2.1.2 เมื่อตัวเศษเพิ่มขึ้น ตัวส่วนเท่าเดิม เศษส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น

2.1.3 เมื่อตัวเศษเพิ่มขึ้น ตัวส่วนลดลง เศษส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น

2.1.4 เมื่อตัวเศษเท่าเดิม ตัวส่วนเพิ่มขึ้น เศษส่วนมีค่าลดลง

2.1.5 เมื่อตัวเศษเท่าเดิม ตัวส่วนลดลง เศษส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น

2.1.6 เมื่อตัวเศษลดลง ตัวส่วนเพิ่มขึ้น เศษส่วนมีค่าลดลง

2.1.7 เมื่อตัวเศษลดลง ตัวส่วนเท่าเดิม เศษส่วนมีค่าลดลง

2.1.8 เมื่อตัวเศษและตัวส่วนลดลง ไม่สามารถระบุค่าของเศษส่วนใหม่ได้

การเปลี่ยนแปลงของเศษส่วนเมื่อตัวเศษและ/หรือตัวส่วนเปลี่ยนแปลงทั้ง 8 ประเภท สามารถแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดงการให้เหตุผลเชิงคุณภาพ

ตัวส่วน	**ตัวเศษ**		
	เพิ่มขึ้น	เท่าเดิม	ลดลง
เพิ่มขึ้น	ระบุไม่ได้	ลดลง	ลดลง
เท่าเดิม	เพิ่มขึ้น	เท่าเดิม	ลดลง
ลดลง	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	ระบุไม่ได้

การให้เหตุผลเชิงคุณภาพ เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการทำงาน 2 ลักษณะดังนี้

1. การเปรียบเทียบเชิงคุณภาพ เป็นการเปรียบเทียบระดับคุณภาพจากข้อมูลที่มีอยู่ เช่น วัวตัวแรกกินหญ้าหนึ่งกระสอบหมดในเวลา 4 วัน วัวตัวที่สองกินหญ้ากระสอบเดียวกันหมดในเวลา 5 วัน แสดงว่า วัวตัวแรกกินจุกว่าวัวตัวที่สอง

2. การบอกทิศทางของการเปลี่ยนแปลง เป็นการระบุทิศทางของการเปลี่ยนแปลง จากข้อมูลที่กำหนดให้ เช่น ในการตัดเสื้อเดือนนี้ ช่างตัดเสื้อใช้เวลามากกว่าเดิม แต่ได้จำนวนเสื้อน้อยกว่าเดิม แสดงว่า ความสามารถในการตัดเสื้อของช่างลดลง

2.2 การให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข แบ่งเป็น 2 ประเภทดังนี้

2.2.1 การระบุค่าของตัวแปร เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับที่มาของค่าของตัวแปรจากปัญหาสัดส่วน

2.2.2 การเปรียบเทียบเชิงตัวเลข เป็นการให้เหตุผลจากการเปรียบเทียบอัตราส่วน หรือเศษส่วน

2.3 การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (Spatial reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับมิติสัมพันธ์ หรือสิ่งที่ปรากฏในมิติต่าง ๆ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555: 41 - 45) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งแล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อนำมาหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปที่เชื่อได้ว่า น่าจะมีความถูกต้องน่าจะเป็นจริง และมีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง และยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนั้นว่า ข้อความคาดการณ์

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักคณิตศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ ประกอบด้วย 2 ส่วนที่สำคัญคือ ส่วนของเหตุหรือสมมติฐานและส่วนของผลหรือผลสรุป

จากการศึกษาประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญได้ 2 ประเภท คือ 1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย คือ การให้เหตุผลที่เกิดจากการสังเกตหรือการทดลองซ้ำหลายๆ ครั้ง เพื่อรวบรวมข้อมูลมาสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป และ 2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่นำเอาข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป ซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าเป็นความจริง มาอ้างอิงเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปใหม่ ๆ นอกจากนี้ยังมีประเภทของการให้เหตุผลอื่น ๆ ได้แก่ การให้เหตุผลในเชิงสัดส่วน การให้เหตุผลในเชิงปริภูมิ การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ และการให้เหตุผลในการประเมิน

3.4 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

National Council of Teacher of Mathematics (2000: 56) ได้ให้คำแนะนำสำคัญที่เกี่ยวข้องกับ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งเป็นมาตรฐานที่ส่งผลต่อศักยภาพหลักสูตรเรขาคณิตโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยคำแนะนำอย่างแรกเกี่ยวกับ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ไม่ควรสอนในชั้นเรียนเรขาคณิตแต่เพียงอย่างเดียว โปรแกรมการเรียนการสอนในทุกระดับชั้นควรจะช่วยให้นักเรียน

- รับรู้เหตุผลและการพิสูจน์ที่เป็นลักษณะพื้นฐานของคณิตศาสตร์
- สร้างและตรวจสอบข้อคาดเดาทางคณิตศาสตร์
- พัฒนาและประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ และ
- เลือกและใช้ได้หลากหลายชนิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลและขั้นตอนสำหรับการพิสูจน์

Wing and Arbab (1985: 6) กล่าวถึงกระบวนการการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (Geometric Reasoning) ไว้ว่า การให้เหตุผลทางเรขาคณิต คือกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการนิยามและการให้เหตุผลแบบนิรนัย เกี่ยวกับคุณสมบัติทางเรขาคณิต โดยใช้คุณสมบัติที่มีอยู่ภายในคุณสมบัตินั้นเป็นความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติทางเรขาคณิต และเป็นกฎข้อสรุปที่เกิดจากรวมคุณสมบัติเข้าด้วยกันในพื้นที่ทางเรขาคณิต

Duval (1998: 38-39) กล่าวถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (Geometric Reasoning) ไว้ว่า กระบวนการในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ประกอบด้วย 3 กระบวนการคือ

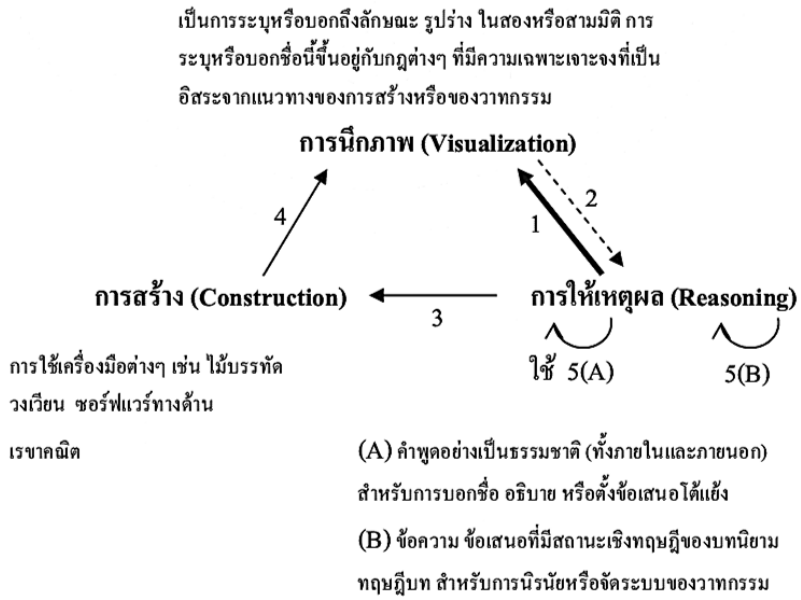
1. กระบวนการเกี่ยวกับการนึกภาพ (Visualization Processes) เป็นกระบวนการแสดงถึงการนึกภาพเกี่ยวกับข้อความทางเรขาคณิต หรือแก้ปัญหาตรวจสอบข้อเท็จจริงของปัญหาทางเรขาคณิตที่มีความซับซ้อน

2. กระบวนการเกี่ยวกับการสร้าง (Construction Processes) กระบวนนี้เกี่ยวข้องกับการใช้เครื่องมือต่าง ๆ ในการสร้างภาพ หรือวาดภาพลงบนกระดาษ

3. กระบวนการเกี่ยวกับการให้เหตุผล (Reasoning Processes) เป็นกระบวนการขยายความรู้ โดยการอธิบาย และการพิสูจน์

Duval เสนอแนะว่า กระบวนการต่าง ๆ เหล่านี้สามารถแสดงออกมาอย่างแยกขาดจากกันได้ ยกตัวอย่างเช่น การนึกภาพไม่จำเป็นจะขึ้นอยู่กับการสร้าง ในทำนองเดียวกัน การสร้างจะนำไปสู่การนึกภาพก็ได้ กระบวนการสร้างเป็นเพียงแค่การเชื่อมโยงระหว่างสมบัติต่าง ๆ ทางเรขาคณิตที่มีความเกี่ยวข้องกัน ในทำนองเดียวกันแม้ว่าการนึกภาพจะช่วยในการให้เหตุผล เพื่อหาข้อค้นพบทางการพิสูจน์ แต่ในบางครั้งการนึกภาพก็อาจจะทำให้เกิดความเข้าใจที่ผิดพลาดได้เช่นกัน

Duval ได้เสนอเกี่ยวกับกระบวนการในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตว่า “กระบวนการเชิงการรู้ทั้ง 3 กระบวนการถูกเชื่อมโยงเข้าด้วยกัน และการรวมกันในลักษณะนี้ก็เป็นสิ่งจำเป็นอย่างมากในการพัฒนาทักษะ และความสามารถทางเรขาคณิต” สำหรับความเชื่อมโยงระหว่างกระบวนการเชิงการรู้ทั้ง 3 กระบวนการสามารถแสดงออกได้ดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 12 แสดงปฏิสัมพันธ์ของกระบวนการในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
(สุภาภรณ์ ฟองจันทร์ตา, 2553: 13)

จากรูปภาพ ลูกศรแต่ละอันแสดงแนวทางหรือกระบวนการเชิงการรู้อันหนึ่งที่มีผลต่อการส่งเสริมกระบวนการอีกอันในขั้นต่อไป โดย Duval ได้ทำลูกศรที่สองให้เป็นเส้นประไว้ เพราะว่าการนึกภาพอาจจะไม่ได้ช่วยเรื่องการให้เหตุผลเสมอไปอย่างที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น สำหรับลูกศร 5A และ 5B แสดงถึงว่าการให้เหตุผลสามารถพัฒนาในแนวทางที่เป็นอิสระจากกระบวนการสร้าง หรือกระบวนการนึกภาพ

Yuanxin (Amy) Yang Alcocer (2003: online) กล่าวถึง การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยในเรขาคณิต โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นจุดเริ่มต้นของการพิสูจน์ที่ช่วยในการทดสอบสมมติฐาน ตัวอย่างเช่น เราสังเกตมุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นคู่ ๆ และมุมของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ ยกเว้นว่ามีมุมใดมุมหนึ่งที่มีขนาดใหญ่กว่ามุมอื่น ๆ ผ่านการให้เหตุผลแบบอุปนัย เราสามารถสรุปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มุมทุกมุมมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ แล้วรูปสามเหลี่ยมรูปมีความคล้ายกัน แต่สิ่งที่ได้นี้ยังเชื่อถือไม่ได้ขึ้นอยู่กับข้อเท็จจริง แต่จะเป็นสมมติฐานที่เราจะทดสอบเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง เราใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยในการเริ่มต้นสร้างข้อสรุปที่ถูกต้อง เราจะหาข้อเท็จจริงจากสิ่งที่เรารู้ ข้อเท็จจริงที่ว่ามีทฤษฎีบทอย่างเป็นทางการที่ได้รับการพิสูจน์มาแล้วที่ว่า รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความคล้ายกัน

SparkNotes (2015: online) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยเป็นสองขั้นตอนพื้นฐานของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทั้งคู่เป็นขั้นตอนที่มีประโยชน์ที่นำไปสู่ข้อสรุป และทั้งคู่มีความสำคัญต่อการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต การให้เหตุผลแบบนิรนัยถูกนำมาใช้มากกว่าการให้เหตุผลแบบนิรนัยในเรขาคณิต แต่ในทุกสิ่งทุกอย่างที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ รวมทั้งบางส่วนในเรขาคณิต กระบวนการในการให้เหตุผลแบบนิรนัยเกิดขึ้นได้หลังจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยที่นักคณิตศาสตร์ใช้ในการตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับสถานการณ์ที่กำหนด แต่หลังจากที่ได้รับการพิสูจน์ทดสอบสมมติฐานทางคณิตศาสตร์ที่สามารถตรวจสอบได้

จากที่ได้กล่าวมาสรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางเรขาคณิต หมายถึง การอธิบายที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการหาข้อสรุป โดยมีการพิจารณาข้อมูลจากโจทย์หรือปัญหาที่กำหนดให้ วิเคราะห์และเลือกใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต เพื่อนำมาใช้ประกอบการอ้างอิงและให้เหตุผลได้อย่างถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

3.5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล

Brandt (1984: 3) ได้มีการกล่าวถึงการสอนเพื่อพัฒนาทักษะการให้เหตุผลไว้ 3 ทาง คือ

1. แนวการสอนเพื่อให้คิด (Teaching for Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชาโดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของนักเรียน

2. แนวทางการสอนการคิด (Teaching of Thinking) การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำไปใช้ในการคิดโดยเฉพาะโดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรงแนวทางในการสอนนั้น จะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้จัดสร้างแนวทางการสอน

3. แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิด (Teaching about Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระการสอนโดยมุ่งให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเองโดยรู้ว่าตนกำลังทำอะไรต้องการรู้อะไรและในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่าการสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ของตนเองแนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาเพิ่มขึ้นโดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้ผู้เรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเพื่อเป็นแนวทางแก้ไขได้ตรงจุด

National Council of Teacher of Mathematics (2000: 345-346 อ้างถึงใน พงศธร มหาวิจิตร, 2550: 51) กล่าวว่าในการพัฒนาความคิดและการให้เหตุผลของนักเรียนควรทำเป็นประจำครูต้องมีความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นอย่างดีครูต้องจัดบรรยากาศในการเรียนคณิตศาสตร์ครูต้องแสดงให้เห็นความสำคัญของสิ่งที่รู้อย่างมีเหตุผลในเรื่องรูปแบบและข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์เพื่อประเมินความสมเหตุสมผลข้อเสนอที่ได้อภิปรายไว้นักเรียนต้องพัฒนาความเชื่อมั่นในความสามารถของการให้เหตุผลที่มีต่อคำถามที่มีเหตุผลทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ วิธีนี้ทำให้นักเรียนเชื่อว่าตรรกศาสตร์สำคัญกว่าอำนาจภายนอกในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

Rowan and Morrow (1993: 16 – 18) ได้กล่าวว่านอกจากการเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมที่เป็นการฝึกทักษะและพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแล้วยังได้ให้ข้อคิดเกี่ยวกับบรรยากาศในชั้นเรียนว่าเป็นสิ่งสำคัญมากครูต้องจัดบรรยากาศให้นักเรียนเห็นว่าการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่สำคัญมากกว่าการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องซึ่งบรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัวแต่เป็นบรรยากาศที่สนับสนุนและส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบายและแสดงเหตุผลของแนวคิดได้กระทำและสรุปพร้อมทั้งแสดงการยืนยันข้อสรุปของแนวคิดนั้น ๆ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 18) ได้ให้หลักการในการพัฒนาการให้เหตุผลว่ามีหลักการที่สำคัญดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น

2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม

3. ระดับการให้เหตุผลควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของผู้เรียน

4. การให้เหตุผลควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอตั่งแต่วัยก่อนอนุบาลจนถึงระดับมหาวิทยาลัยซึ่งควรจะปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย

5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล

6. ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

นอกจากจะต้องคำนึงถึงหลักการต่าง ๆ แล้วสิ่งที่ครูควรดำเนินการมีดังนี้

1. ตั้งเป้าหมายให้ชัดเจน ครูควรพิจารณาในรายละเอียดว่าระดับชั้นนั้น ต้องการให้นักเรียนมีความสามารถอะไรบ้างเช่นการให้เหตุผลการมีทักษะการนำไปใช้การตัดสินใจและสรุปผลได้มากน้อยเพียงใดครูควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้นมีความสำคัญมีคุณค่าในชีวิตของนักเรียนและต้องกำหนดการประเมินให้บรรลุเป้าหมาย

2. ปรับแนวคิดในการสอนการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลสามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกเรื่องโดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิดเองมากขึ้นเช่นจัดให้มีการอภิปรายถามให้นักเรียนเล่าความคิดชี้แจงเหตุผลประกอบซึ่งเป็นการแสดงเหตุผลอย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนได้เคยชินกับการคิดอย่างมีเหตุผลและการชี้แจงนี้จะเป็นโอกาสให้นักเรียนได้ย้อนกลับมาพิจารณาแนวคิดของตนเองทำความเข้าใจให้ชัดเจนขึ้นและปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผลตลอดจนประเมินเหตุผลของผู้อื่นว่าควรเชื่อถือหรือไม่เมื่อนักเรียนแสดงเหตุผลครูควรอาศัยการสรุปเหตุผลของนักเรียนปรับแต่งเหตุผลนั้นให้รัดกุมเพื่อให้นักเรียนได้ซึมซับวิธีการให้เหตุผลที่ดี

3. จัดกิจกรรมเพิ่มเติมครูควรเพิ่มเติมกิจกรรมนอกเหนือจากการสอนปกติเช่นจัดให้มีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ไม่ใช่เฉพาะโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนเท่านั้นให้มีการสร้างแบบรูปเองหรือการพิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้ให้นักเรียนได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้เชื่อมโยงกับวิชาอื่น ๆ เป็นต้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2545ก: 194–196) ได้กล่าวถึง แนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลว่าการฝึกให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลนั้นสามารถสอดแทรกได้ในการเรียนรู้ทุกเนื้อหาวิชาของคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ นอกจากนี้ยังได้เสนอแนะองค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักการให้เหตุผลดังนี้

1. ควรให้ผู้เรียนได้พบกับโจทย์หรือปัญหาที่ผู้เรียนสนใจเป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผล

2. ให้ผู้เรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่แสดงออกถึงความคิดเห็นในการให้เหตุผลของตนเอง

3. ผู้สอนช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่าเหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ขาดตกบกพร่องอย่างไร

การเริ่มต้นที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนรู้และเกิดทักษะในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ผู้สอนควรจัดสถานการณ์หรือปัญหาที่น่าสนใจให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติผู้สอนสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนและคอยช่วยเหลือโดยกระตุ้นหรือชี้แนะอย่างกว้าง ๆ โดยใช้คำถามกระตุ้นด้วยคำว่า“ทำไม” “อย่างไร” “เพราะเหตุใด” พร้อมทั้งให้ข้อคิดเพิ่มเติมอีก เช่น “ถ้า...แล้วผู้เรียนคิดว่า...จะเป็นอย่างไร” ถ้าผู้เรียนที่ให้เหตุผลไม่สมบูรณ์ผู้สอนจะต้องไม่ตัดสินด้วยคำว่า“ไม่ถูกต้อง” แต่อาจใช้ คำพูดเสริมแรงและให้กำลังใจว่าคำตอบที่ผู้เรียนตอบมามีบางส่วนที่ถูกต้องผู้เรียนคนใดจะให้คำอธิบายหรือให้เหตุผลเพิ่มเติมของ

เพื่อนได้อีกบ้างเพื่อให้ผู้เรียนมีการเรียนรู้ร่วมกันมากยิ่งขึ้นในการจัดการเรียนรู้ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดอย่างหลากหลายโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดควรเป็นปัญหาปลายเปิด (Open-Ended Problem) ที่ผู้เรียนสามารถแสดงความคิดเห็นหรือให้เหตุผลที่แตกต่างกันได้

อัครยา สังขจันทร์ (2543: 95-96) ได้กล่าวว่า การสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเป็นกระบวนการที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้พัฒนาการคิดใช้เหตุผลวิเคราะห์แสดงความคิดเห็นและแสวงหาความรู้ด้วยตนเองดังนั้นบทบาทของผู้สอนจึงไม่ใช่การจัดบทเรียนโดยคำนึงว่า “จะสอนอะไร” แต่เป็นการจัดบทเรียนต่าง ๆ โดยคำนึงว่า “จะให้นักเรียนเรียนรู้อะไร”

อัมพร ม้าคนอง (2547: 38) กล่าวว่าการฝึกให้ผู้เรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ควรทำในบริบททางคณิตศาสตร์ (Mathematical Contexts) เช่นในขณะเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ หรือทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ มากกว่าที่จะกระตุ้นให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญหรือให้เรียนรู้การให้เหตุผลเดี่ยว ๆ แยกจากสิ่งอื่น และผู้สอนไม่ควรคำนึงถึงคำตอบสุดท้ายเหล่านั้น แต่ควรให้ความสำคัญกับเหตุผลว่าทำไมผู้เรียนจึงได้คำตอบเหล่านั้น และคำตอบเหล่านั้น น่าจะถูกต้องหรือผิดเพราะเหตุใด เป็นต้นการที่ให้ผู้เรียนได้อธิบายหรือชี้แจ้งเหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ผู้สอนบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้ (National Council of Teacher of Mathematics, 1991)

จากแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรเริ่มส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการคิดการวิเคราะห์และการสรุปแนวคิดอย่าง สมเหตุสมผล ภายใต้บรรยากาศที่สนับสนุนให้มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดและแก้ปัญหาร่วมกัน โดยใช้กิจกรรมที่เน้นให้เกิดการฝึกคิดและการให้เหตุผลควบคู่กันไปตามสถานการณ์ที่กำหนดให้

3.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล

Krulik and Rudnick (1993) อธิบายถึงเทคนิคการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การสังเกต โดยครูควรเดินรอบ ๆ ห้อง เพื่อสังเกตความสามารถในการให้เหตุผล ขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหากับกลุ่มเพื่อนในห้องเรียน

2. การทดสอบ ไม่ควรใช้ข้อสอบแบบเลือกตอบ แต่ควรเป็นข้อสอบที่ให้นักเรียนได้ แสดงเหตุผล เพื่อดูการตัดสินใจของนักเรียนซึ่งควรเป็นคำถามปลายเปิด

สมเดช บุญประจักษ์ (2540) กล่าวถึงพฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผล ดังนี้

1. ความสามารถในการวิเคราะห์และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล

1.1 อธิบายความหมายของคำศัพท์เฉพาะได้

1.2 แสดงถึงความสัมพันธ์ของข้อมูลและแทนความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่เหมาะสม

1.3 คาดเดาคำตอบของปัญหาและตรวจสอบข้อคาดเดาอย่างมีเหตุผล

2. ความสามารถในการหาข้อสรุป

2.1 สรุปแนวคิดในการการแก้ปัญหาได้

2.2 อธิบายเหตุผลสำหรับผลสรุปนั้นได้

3. ความสามารถในการแสดงข้อสรุป ยืนยันข้อสรุปของแนวคิด

3.1 ตรวจสอบข้อสรุปของแนวคิดในการการแก้ปัญหา

3.2 อธิบายการได้มาซึ่งข้อสรุปของแนวคิดในการแก้ปัญหา

3.3 ขยายข้อสรุปไปสู่รูปทั่วไปได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 50-52) ได้กล่าวว่าการประเมินความสามารถในการให้เหตุผล นอกจากจะพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลผู้ประเมินควรคำนึงถึงความสามารถในด้านต่อไปนี้ด้วย

1. การใช้พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการให้เหตุผล
2. การใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์สร้างข้อคาดเดาสิ่งที่จะเกิดขึ้น
3. การประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์
4. การเลือกใช้รูปแบบหรือวิธีการที่หลากหลายในการให้เหตุผลหรือพิสูจน์

ในการประเมินผลควรจะคำนึงถึงจุดมุ่งหมายในการประเมินว่าประเมินเพื่ออะไรเช่น

- ประเมินเพื่อใช้เป็นข้อมูลในการจัดการเรียนการสอนกล่าวคือเพื่อให้รู้ว่านักเรียนพร้อมที่จะเรียนคณิตศาสตร์เรื่องนั้น ๆ หรือไม่เพื่อนำมาใช้คาดการณ์เกี่ยวกับการเรียนรู้ของผู้เรียนแล้วนำมาออกแบบกิจกรรมการประเมินเพื่อจุดประสงค์ในลักษณะนี้จะประเมินด้วยการวิเคราะห์เก็บข้อมูลเป็นรายละเอียดในแง่มุมต่าง ๆ ตามที่ต้องการทราบ

- ประเมินเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลการประเมินเพื่อจุดประสงค์นี้อาจใช้การให้คะแนนทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลซึ่งครูอาจใช้การประเมินแบบองค์รวมโดยใช้เกณฑ์ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วหรืออาจจะตั้ง เกณฑ์ขึ้นเองจากประสบการณ์จริงที่พบได้จากนักเรียน การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลใช้วิธีการให้คะแนนแบบกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน (Rubric) เพื่อมุ่งหวังที่จะขจัดปัญหาที่จะเกิดจากการให้คะแนนป้องกันความลำเอียงและเสริมสร้างความเป็นธรรมตลอดจนสร้างระบบการประเมินที่จะนำไปสู่การพัฒนา

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 121–123) ได้กล่าวเกี่ยวกับเกณฑ์การประเมินผู้เรียนด้านการให้เหตุผล ในการจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 และช่วงชั้นที่ 4 เพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียนด้านการให้เหตุผล ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 แสดงเกณฑ์การประเมินเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียนด้านการให้เหตุผล ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คะแนน/ความหมาย	**ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น**
4/ดีมาก	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล
3/ดี	มีการอ้างอิงถูกต้องบางส่วน และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2/พอใช้	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1/ควรแก้ไข	มีความพยายามในการเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
0/ต้องปรับปรุง	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

กรมวิชาการ (2546: 121-124) ได้กำหนดเกณฑ์การประเมินการให้คะแนนการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะ/กระบวนการให้เหตุผล ไว้ดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงเกณฑ์การให้ผลการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะ/กระบวนการให้เหตุผลของกรมวิชาการ

ระดับคะแนน/ความหมาย	ผลการทำข้อสอบอัตนัย	ความสามารถในการให้เหตุผล
4/ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล
3/ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วน และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2/พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้อง	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1/ต้องปรับปรุง	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่แสดงวิธีทำและคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
0/ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลเป็นการพิจารณาความสามารถในการพิจารณาข้อมูล วิเคราะห์ อ้างอิง และให้เหตุผล เพื่อหาข้อสรุปปัญหา ซึ่งในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดเป็นข้อสอบแบบอัตนัย เพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ในส่วนเกณฑ์การให้คะแนนแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบิคที่ได้สร้างขึ้นเอง ซึ่งผู้วิจัยแยกออกเป็น 3 องค์ประกอบ ดังนี้

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Linares (2008: 2-3) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ผลของการใช้พรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนเรขาคณิตมัธยมศึกษาที่มีผลต่อความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต งานวิจัยนี้มีประโยชน์กับการเรียนการสอนเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษา พรู้ฟแมปปิงเป็นเทคนิคในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นแผนภาพที่แสดงให้เห็นถึงกระบวนการคิดของนักเรียนในการเขียนพิสูจน์ ข้อความที่พิสูจน์ถูกปิดล้อมอยู่ในวงกลม และมีลูกศรที่กำกับทฤษฎีบทหรือบทนิยามที่เหมาะสมชี้เข้าหาวงกลม นักเรียนจะได้เชื่อมต่อแนวคิดที่สอดคล้องกันและได้เห็นพัฒนาการในการพิสูจน์ งานวิจัยนี้เกิดขึ้นในโรงเรียนมัธยมศึกษา แคลิฟเนีย การศึกษาครั้งนี้ทดลองกับนักเรียนห้องเรียนเรขาคณิตมัธยมศึกษา 32 คน ที่มีประชากรที่หลากหลายชาติพันธุ์ และนักเรียนมีความหลากหลายในสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมที่แตกต่างกัน การเรียนการสอนครั้งนี้ใช้เวลา 6 สัปดาห์ นักเรียนได้เรียนรู้ถึงขั้นตอนในการสร้างพรู้ฟแมปปิง และนำมาใช้ในการทำงานกลุ่ม งานคู่ การบ้าน และในการทดสอบ กิจกรรมนี้เกิดขึ้น 2-3 ครั้งต่อสัปดาห์ ครูสังเกตติดตามการมีส่วนร่วมของนักเรียนในการช่วยเหลือซึ่งกันและกันในห้องเรียนในระหว่างการเขียนพิสูจน์ วิธีการนี้เปิดโอกาสให้ได้มีการอภิปรายร่วมกันระหว่างนักเรียนกับครู นักเรียนเกิดกระบวนการคิดและพบข้อผิดพลาดอย่างเปิดเผย ผลที่ได้พบว่า นักเรียนมีความเพลิดเพลินในกระบวนการนี้มากกว่ารูปแบบการพิสูจน์ที่แบ่งเป็นสองคอลัมน์โดยตรงและประสบความสำเร็จในการพิสูจน์มากขึ้นในตอนท้ายของการเรียนการสอน ขั้นตอนในการจัดหาวิธีการในการสื่อสารเกี่ยวกับการพิสูจน์ ผ่านกระบวนการคิด ผ่านการมองเห็นแผนภาพกระบวนการคิด ช่วยส่งเสริมการอภิปราย เกี่ยวกับวิธีการคิดเชิงกลยุทธ์เกี่ยวกับการเขียนพิสูจน์ ถึงแม้นักเรียนไม่ได้รับการปรับปรุงในส่วนของการพิสูจน์การสร้าง แต่ก็เพิ่มประโยชน์ในส่วนที่มีการอภิปรายร่วมกันเพิ่มขึ้นเกี่ยวกับกลยุทธ์การเขียนพิสูจน์ และความเชื่อมั่นของนักเรียนในการเขียนพิสูจน์

Garabedian (1981: 586-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง เรื่อง ผลของการพิสูจน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนในวิชาเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ในเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์ และความสามารถในการให้เหตุผลของทั้ง 2 กลุ่ม เพศหญิงมีความสามารถในการให้เหตุผลดีกว่าเพศชาย มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญระหว่างคะแนนการให้เหตุผลกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานและกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

Bobango (1988: 256-A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลแวนฮีลี่และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ซึ่งเป็นผลจากการสอนเขียนพิสูจน์ที่เป็นผลจากวิธีการสอนแบบเป็นลำดับขั้นตอน ผลการวิจัยพบว่า วิธีการสอนแบบเป็นลำดับขั้นตอนมีผลอย่างมีนัยสำคัญในการยกระดับทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ของนักเรียนในชั้นเรียนเรขาคณิตปกติโดยเป็นการยกระดับจากระดับ 1 ไปยังระดับ 2 มากกว่าการยกระดับอื่นๆ อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ไม่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหามาตรฐานและผลสำเร็จในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มที่ให้สิ่งกระทำการทดลองมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิต เรขาคณิตของแวนอีลี่กับผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหามาตรฐานของนักเรียน และมีความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่กับผลสำเร็จในการเขียนพิสูจน์

Chaiyasang (1989: 2137-A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิต และความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนไทย ผลการวิจัยพบว่า มีนักเรียนมากกว่า 50% ในแต่ละชั้นจากประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ยังมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ที่ระดับ 1 ในด้านความสามารถในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาโดยส่วนร่วมสรุปได้ว่าความสามารถด้านการพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 อยู่ในเกณฑ์ต่ำ

Senk (1983: 417-A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดตามโมเดลของแวนฮีลี่ ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐาน ผลการวิจัยพบว่ามี 30% ของนักเรียนที่เรียนการพิสูจน์ไม่มีความสามารถในการพิสูจน์ในตอนปลายปี จำนวน 40% มีทักษะในการพิสูจน์บ้าง และมีประมาณ 30% ที่มีผลสัมฤทธิ์ที่อยู่ในระดับมีความสามารถในการพิสูจน์ 75% ไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศของนักเรียนในผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์

Ranald Nall Bell (1988: 754A-755A) ได้ศึกษาการใช้วิธีสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์เรขาคณิตอย่างมีแบบแผน ว่าเป็นวิธีการสอนให้แสดงทักษะการคิดหรือไม่ ผลการทดลองพบว่า ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในการเพิ่มการแสดงทักษะการคิดเมื่อเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ยังค้นพบวิธีการสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนมีผลกับนักเรียนบ้างเป็นจำนวนเล็กน้อย สำหรับนักเรียนที่ชอบใช้การเขียนพิสูจน์เป็นข้อความเป็นตอน ๆ ลงมามากกว่าจะใช้การเขียนพิสูจน์ที่เป็นแบบแผนโดยแบ่งสองคอลัมน์

Raynold (1976 cited in Thomson, 2000: 478) ทำการศึกษาการพิสูจน์ทางอ้อมในวิชาเรขาคณิตเกี่ยวกับเรื่องเส้นขนานและมุมภายใน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประมาณ 14% สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประมาณ 70% สามารถเขียนพิสูจน์ได้และมี 12-18% จากทุกระดับชั้นสามารถพิสูจน์ได้ถึงจุดที่เกิดการขัดแย้ง (Contradiction) แต่ไม่รู้วิธีที่จะทำการพิสูจน์ต่อไปให้จบกระบวนการพิสูจน์

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปได้ดังนี้ มีการทดลองใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตเพื่อพัฒนาความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต แต่ยังไม่มีการทดลองเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และการใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ยังไม่แพร่หลายมากนักเนื่องจากยังเป็นเทคนิคใหม่

4.2 งานวิจัยในประเทศ

ยุวรรณดา พรหมนิวาส (2553) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และ ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และนักเรียนกลุ่มที่ได้รับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

สุภาพร ฟองจันทร์ตา (2553) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้เทคนิคการนึกภาพและใช้สี โรงเรียนแม่แตง จังหวัดเชียงใหม่ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดย

นักเรียนสามารถเขียนข้อความแสดงการพิสูจน์ได้อย่างต่อเนื่องสัมพันธ์กัน และให้เหตุผลประกอบข้อความได้อย่างสมเหตุสมผล คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในการทำแบบทดสอบเท่ากับ 20.86 คะแนน จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 70.47 ของคะแนนทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดี

เจนสมุทร แสงพันธ์ (2550) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาปลายเปิดเน้นการแก้ปัญหาในกลุ่มย่อย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 3 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คน โดยทำการวิเคราะห์โปรโตคอลและการบรรยายเชิงวิเคราะห์ ผลการวิจัยพบว่า สมาชิกภายในกลุ่มมีความพึ่งพาอาศัยกัน ต่างคนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกันในการทำงาน ในพฤติกรรมการอ่าน การตรวจสอบ การมองและการฟัง ไม่ปรากฏว่ามีกระบวนการเชิงการรู้ใดที่แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเลย

กรองทิพย์ พงษ์ลิมศรี (2535) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสอนพิสูจน์เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยกระบวนการแก้ปัญหา โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 100 คน โดยแบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 48 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 52 คน พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533) ได้ทำวิจัยเรื่อง ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6 ผลการวิจัยพบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนรัฐบาลมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเอกชน

จากการศึกษางานวิจัยในประเทศที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปได้ดังนี้ งานวิจัยที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตยังมีอยู่น้อยมาก ยังไม่พบว่ามีงานวิจัยใดที่ใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
    4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
    4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

โดยแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. ศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต เกี่ยวกับระเบียบวิธีวิจัย การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 แสดงแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	X	ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
C	ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	~X	ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง

C แทน กลุ่มควบคุม

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

~X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ จังหวัดนครปฐม

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้การเลือกแบบเจาะจง (purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 เนื่องจากเป็นโรงเรียนที่มีการจัดห้องเรียนแบบคละความสามารถ โดยผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อจัดเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมตามขั้นตอน ดังนี้

1. ผู้วิจัยนำคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 ของนักเรียนทั้ง 15 ห้อง มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)

2. ผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียนที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ใกล้เคียงกันมากที่สุดจำนวน 2 ห้อง ได้แก่ ห้อง ม.2/1 จำนวน 29 คน และ ห้อง ม.2/7 จำนวน 37 คน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 67.38 และ 65.76 ตามลำดับ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10.22 และ 10.17 ตามลำดับ

3. ผู้วิจัยนำค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของนักเรียนทั้งสองห้องมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของนักเรียนทั้งสองห้องด้วยการทดสอบความแตกต่างด้วยค่าที (t-test) พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีพื้นฐานความรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

4. ผู้วิจัยทำการจับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มตัวอย่าง ผลปรากฏว่า นักเรียนห้อง ม. 2/1 เป็นกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตและนักเรียนห้อง ม.2/7 เป็นกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ในระหว่างการทำวิจัย พบว่า นักเรียนห้อง ม. 2/1 จำนวน 29 คน มีนักเรียนอยู่ 6 คน ไม่สามารถร่วมการทดลองได้ตลอดโครงการ ทำให้เหลือกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 23 คน และนักเรียนห้อง ม. 2/7 จำนวน 37 คน มีนักเรียนอยู่ 14 คน ไม่สามารถร่วมการทดลองได้ตลอดโครงการ ทำให้เหลือกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุม จำนวน 23 คน โดยการทดลองในครั้งนี้เป็นการสอนเฉพาะเนื้อหาเน้นการเขียนพิสูจน์ ไม่ได้อยู่ในหลักสูตรโดยตรง จึงนำมาสอนนอกเวลาเรียนปกติ

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 2 ชนิด คือ

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วย แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบสัมภาษณ์

4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ที่ครอบคลุมสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง เส้นขนาน จำนวน 15 แผน รวมทั้งสิ้น 15 คาบ ใช้เวลาในการสอน 3 สัปดาห์ โดยผู้วิจัยมีแผนการดำเนินงาน ดังนี้

4.1.1 ศึกษาหลักการ จุดมุ่งหมายของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

4.1.2 ศึกษากรอบแนวคิดเกี่ยวกับเทคนิคพรู้ฟแมปปิง จากหนังสือ เอกสาร วารสาร และงานวิจัยต่างๆ

4.1.3 เลือกเนื้อหาจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยพิจารณาจากเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิต ซึ่งได้เนื้อหาเรื่อง เส้นขนาน

4.1.4 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล และการแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

4.1.5 เขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายคาบที่สอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ โดยผู้วิจัยสร้างขึ้นครอบคลุมเนื้อหาเรื่อง เส้นขนาน จำนวน 15 แผน 15 คาบ ซึ่งแต่ละแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบด้วยหัวข้อ ดังนี้ มาตรฐานการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/แหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ทั้งนี้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป

สำหรับเนื้อหาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน จำนวน 15 แผน 15 คาบ ผู้วิจัยได้นำเสนอไว้ ดังตารางที่ 5 และ 6

ตารางที่ 5 แสดงหัวข้อการเรียนรู้ และจำนวนคาบของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่	หัวข้อการเรียนรู้	จำนวนคาบ
1 – 3	เส้นขนานและมุมภายใน	3
4 – 7	เส้นขนานและมุมแย้ง	4
8 – 10	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน	3
11 – 15	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม	5
รวม		**15**

ตารางที่ 6 แสดงเนื้อหา และจำนวนคาบของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
1	เส้นขนานและมุมภายใน (1) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **สมบัติ** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°	1
2	เส้นขนานและมุมภายใน (2) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **สมบัติ** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°	1
3	เส้นขนานและมุมภายใน (3) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **สมบัติ** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน	1
4	เส้นขนานและมุมแย้ง (1) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน	1
5	เส้นขนานและมุมแย้ง (2) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน	1
6	เส้นขนานและมุมแย้ง (3) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน	1
7	เส้นขนานและมุมแย้ง (4) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน	1
8	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (1) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน	1

ตารางที่ 6 แสดงเนื้อหา และจำนวนคาบของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน (ต่อ)

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่	**เนื้อหา**	**จำนวนคาบ**
9	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (2) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน	1
10	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (3) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน	1
11	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (1) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **สมบัติ** มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน	1
12	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (2) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°	1
13	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (3) [นำไปใช้กับการพิสูจน์] **ทฤษฎีบท** ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°	1
14	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (4) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น	1
15	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (1) [พิสูจน์ทฤษฎีบทและนำไปใช้] **ทฤษฎีบท** ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ	1
รวม		**15**

4.1.6 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายคาบที่สร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข ตามข้อเสนอแนะดังนี้

ก. แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ยังไม่เห็นถึงเทคนิคพรู้ฟแมปปิง ให้ปรับลักษณะการตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้เห็นถึงเทคนิคพรู้ฟแมปปิง

ข. กิจกรรมที่จัดขึ้นในชั้นเรียนคล้ายกันทุกแผน ส่วนใหญ่นักเรียนไม่ค่อยมีส่วนร่วมกับกิจกรรม ให้ปรับกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมและให้ดูน่าสนใจมากขึ้น เช่น มีการร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิง

4.1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ปรับปรุงแล้วไปใช้จริงกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม ผู้วิจัยได้แสดงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 แสดงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	**กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)**
ขั้นนำ ครูช่วยทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน และจัดกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เรียน เพื่อโน้มน้าวและจูงใจนักเรียนเข้าสู่บทเรียน - ครูสนทนากับนักเรียนเพื่อสร้างความสนใจ ยกตัวอย่างที่มีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาบทเรียน - ครูตรวจสอบความรู้พื้นฐานของนักเรียน ทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน	
ขั้นสอน ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกัน โดยใช้ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่ได้นำแนวคิดไปใช้ ครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิด และปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้ได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เริ่มต้นจากกระบวนการย้อนกลับจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ตามด้วยกระบวนการไปข้างหน้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ จากนั้นจึงทำกลับไปกลับมาทั้งสองกระบวนการ จนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จ - ครูนำเสนอทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์ - ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการย้อนหลัง โดยเริ่มจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ เขียนข้อความไว้ด้านล่างสุดแล้วล้อมรอบด้วยวงรี - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ แล้วใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิง โดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ขณะเดียวกันครูจะทำหน้าที่ตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน	**ขั้นสอน** ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกัน โดยใช้แผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ ร่วมกันพิจารณาว่าเป็นผลที่เกิดจากเหตุใด โดยเริ่มจากผลเป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ทำไปเรื่อยจนกว่าจะเจอเหตุที่เป็นข้อมูลจากที่กำหนดให้ - ครูนำเสนอทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์ - ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ โดยเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ไว้ด้านบนสุดของแผนภาพ - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ โดยเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ไว้ด้านล่างสุดของแผนภาพ - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ โดยพิจารณาว่าเป็นผลที่เกิดจากเหตุใด โดยเริ่มจากผลเป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ทำไปเรื่อยจนกว่าจะเจอเหตุเป็นข้อมูลที่กำหนดให้ ครูจะตั้งคำถามดึงความรู้ของนักเรียน

ตารางที่ 7 แสดงขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (ต่อ)

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	**กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)**
- ครูให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และเขียนลูกศรละคำตอบ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี - ครูให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของข้อมูลที่กำหนดให้ ลงในพรู้ฟแมปปิง โดยเขียนไว้ด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลที่กำหนดให้ - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน - ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้ง โดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้ - ครูให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ แล้วนำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน	- ครูให้นักเรียนพิจารณาแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ที่ได้สร้างขึ้น นำข้อความและเหตุผลที่ได้ ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยเขียนจากด้านบนลงไปด้านล่าง ตามลำดับข้อความและเหตุผล โดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน
ขั้นสรุป ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้เรียนรู้มาทั้งหมด เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามข้อสงสัยโดยมีครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ และมอบหมายงานให้ทำเพื่อทบทวนและเพิ่มเติมความรู้ - ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ และเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัยเพื่อความเข้าใจมากยิ่งขึ้น - ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมเพื่อทบทวนและเพิ่มเติมความรู้ และมอบหมายงานเพิ่มเติมเป็นการบ้าน	

4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัยครั้งนี้ มี 3 ประเภท คือ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบสัมภาษณ์ โดยมีรายละเอียดของขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือ ดังนี้

4.2.1 การสร้างและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต จำนวน 2 ฉบับ คือ ฉบับก่อนการทดลอง และฉบับหลังการทดลอง ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย มีวิธีดำเนินการสร้างดังนี้

1) ศึกษาความหมาย นิยามเชิงปฏิบัติการและวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต จากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และข้อมูลทางอินเตอร์เน็ต

2) ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต จากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และข้อมูลทางอินเตอร์เน็ต

3) ศึกษาเนื้อหาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับก่อนการทดลอง และ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับระหว่างการทดลองและหลังการทดลอง

4) กำหนดกรอบการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตทั้ง 2 ฉบับ ตามคำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ ได้แก่

1) พิจารณาข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาเหตุผล

2) วิเคราะห์การเลือกใช้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตเพื่อนำมาใช้ประกอบการอ้างอิงได้อย่างถูกต้อง

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

5) สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ฉบับ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยแต่ละฉบับเป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัยจำนวน 10 ข้อ

6) สร้างเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ฉบับ การให้คะแนนแต่ละข้อ มีคะแนนเต็ม 8 คะแนน เกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยได้เสนอไว้ดังตารางที่ 8

ตารางที่ 8 แสดงเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	
เกณฑ์การให้คะแนน	**คะแนน**
เขียนข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้อง ครบถ้วน	2
เขียนข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้อง บางส่วน	1
เขียนข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่ได้เขียน	0

ตารางที่ 8 แสดงเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (ต่อ)

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	
เกณฑ์การให้คะแนน	**คะแนน**
เขียนบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้อง ครบถ้วน	2
เขียนบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้อง บางส่วน	1
เขียนบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่ได้เขียนอะไรเลย	0
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ	
เกณฑ์การให้คะแนน	**คะแนน**
เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง ครบถ้วน และเป็นไปตามลำดับ	4
- เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง บางส่วน และเป็นไปตามลำดับ **หรือ** - เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง ครบถ้วน แต่ไม่เป็นไปตามลำดับ **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป แต่แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง ครบถ้วน และเป็นไปตามลำดับ	3
- เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง บางส่วน แต่ไม่เป็นไปตามลำดับ **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป แต่แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง ครบถ้วน แต่ไม่เป็นไปตามลำดับ **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป แต่แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง บางส่วน และเป็นไปตามลำดับ	2

ตารางที่ 8 แสดงเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (ต่อ)

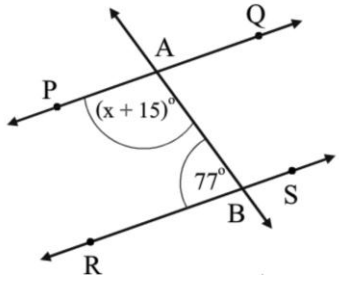
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ (ต่อ)	
เกณฑ์การให้คะแนน	**คะแนน**
- เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แต่แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตไม่ถูกต้อง **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป แต่แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง บางส่วน แต่ไม่เป็นไปตามลำดับ	1
- เขียนข้อสรุปได้ถูกต้อง แต่ไม่ได้แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป และแสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตไม่ถูกต้อง **หรือ** - เขียนข้อสรุปไม่ถูกต้องหรือไม่ได้เขียนข้อสรุป และไม่ได้แสดงการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต หรือไม่ได้เขียนอะไรเลย	0

7) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้ง 2 ฉบับ ไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องเหมาะสม ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงลักษณะแบบวัดให้น่าสนใจมากขึ้น ตอบง่ายขึ้น เช่น

ลักษณะเดิม

2. จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$, $R\hat{B}A = 77°$ และ $P\hat{A}B = (x+15)°$ จงหาค่า x พร้อมทั้งแสดงเหตุผล



.....

.....

.....

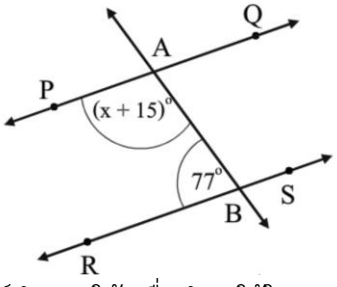
.....

.....

.....

แก้ไขเป็น

2. จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$, $R\hat{B}A = 77°$ และ $P\hat{A}B = (x+15)°$ จงหาค่า x พร้อมทั้งแสดงเหตุผล



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

3) แสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

Chulalongkorn University

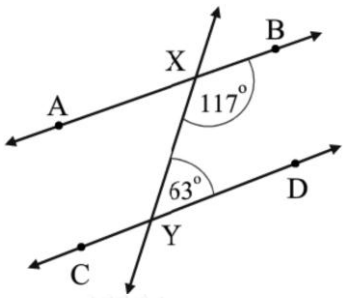
ข. เพิ่มตัวอย่างการทำแบบวัด เพื่อให้นักเรียนได้เห็นรูปแบบการตอบแบบวัดและได้คะแนนจากการตอบแบบวัดง่ายขึ้น

8) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ฉบับ ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความสอดคล้องของข้อคำถาม กับองค์ประกอบที่ต้องการวัดและความเหมาะสมด้านภาษาและการสื่อความหมายของข้อคำถาม ซึ่งผลการตรวจพิจารณาของผู้ทรงคุณวุฒิได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. ความสอดคล้องของภาษาที่ใช้ในแบบวัด ควรปรับปรุงลักษณะภาษาที่ใช้ในแบบวัดให้มีความถูกต้องชัดเจน เช่น

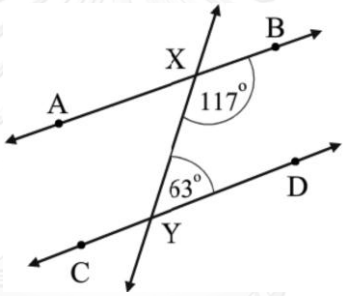
ลักษณะเดิม

1. จากรูป กำหนดให้ $B\hat{X}Y = 117°$ และ $D\hat{Y}X = 63°$ “ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ ” ข้อความนี้จริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



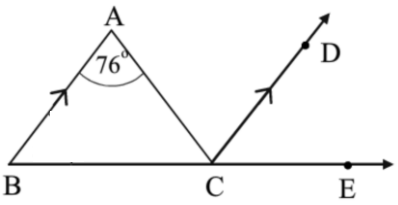
แก้ไขเป็น

1. จากรูป กำหนดให้ $B\hat{X}Y = 117°$ และ $D\hat{Y}X = 63°$ จงพิจารณาว่าข้อความ “ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ” เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



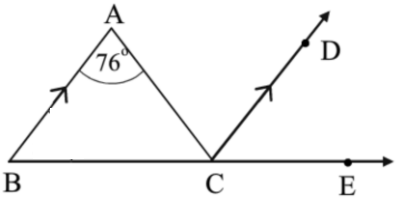
ลักษณะเดิม

3. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ และ $B\hat{A}C = 76°$ “ $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 114°$ ” ข้อความนี้จริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



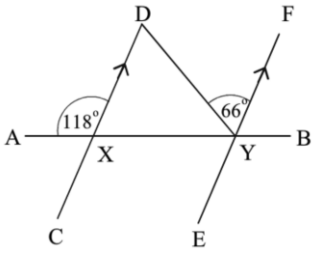
แก้ไขเป็น

3. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ และ $B\hat{A}C = 76°$ จงพิจารณาว่าข้อสรุป $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 107°$ เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



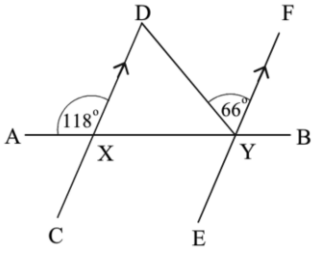
ลักษณะเดิม

5. บุรินทร์สำรวจเส้นขนาน จากรูป พบว่า $\overline{CD} \,//\, \overline{EF}$, $A\hat{X}D = 118°$ และ $D\hat{Y}F = 66°$ บุรินทร์จึงสรุปว่า " $X\hat{Y}D = 42°$ " ข้อความของบุรินทร์เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



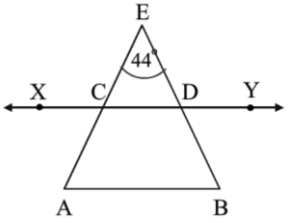
แก้ไขเป็น

5. บุรินทร์สำรวจเส้นขนาน จากรูป พบว่า $\overline{CD} \,//\, \overline{EF}$, $A\hat{X}D = 118°$ และ $D\hat{Y}F = 66°$ บุรินทร์จึงสรุปว่า $X\hat{Y}D = 56°$ ข้อสรุปของบุรินทร์เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



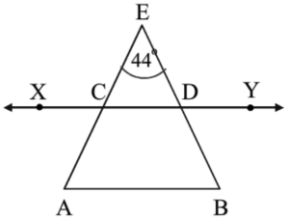
ลักษณะเดิม

7. กอล์ฟสำรวจรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จากรูป พบว่า ΔEAB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AE = BE$, $A\hat{E}B = 44°$ และ $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overline{AB}$ กอล์ฟจึงสรุปว่า " $E\hat{A}B = 63°$ " ข้อความของกอล์ฟเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



แก้ไขเป็น

7. กอล์ฟสำรวจรูปสามเหลี่ยม AEB จากรูป พบว่า ΔAEB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AE = BE$, $A\hat{E}B = 44°$ และ $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overline{AB}$ กอล์ฟจึงสรุปว่า $E\hat{A}B = 63°$ ข้อสรุปของกอล์ฟเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



ข. เฉลยแบบวัด ควรเปลี่ยนจากแบบความเรียงเป็นแบบข้อความแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผล โดยเขียนข้อความก่อนแล้วตามด้วยเหตุผลที่อยู่ในวงเล็บด้านหลัง

9) นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิทั้ง 2 ฉบับ ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสถาพรวิทยา โดยฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 10 ข้อ ไปทดลองใช้กับนักเรียนห้อง ม.3/2 จำนวน 19 คน และฉบับหลังการทดลอง จำนวน 10 ข้อ ไปทดลองใช้กับนักเรียนห้อง ม.3/1 จำนวน 21 คน แล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนด

10) นำผลการวิเคราะห์แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ฉบับ มาพิจารณาคัดเลือก ซึ่งหาค่าความเที่ยงของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) โดยมีเกณฑ์ความเที่ยงตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป แล้วนำมาหาค่าความยาก (p) อยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดดังนี้

คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนการทดลอง	ฉบับหลังการทดลอง
ค่าความเที่ยง	0.63	0.84
ค่าความยาก (p)	0.20 – 0.41	0.18 – 0.58
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.10 – 0.43	0.10 – 0.35

11) เลือกแบบทดสอบที่มีค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกตามเกณฑ์ข้อ 10) มาสร้างเป็นแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 5 ข้อ และฉบับหลังการทดลอง จำนวน 5 ข้อ ซึ่งมีค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ดังนี้

คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนการทดลอง	ฉบับหลังการทดลอง
ค่าความเที่ยง	0.65	0.70
ค่าความยาก (p)	0.30 – 0.41	0.34 – 0.58
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.20 – 0.40	0.25 – 0.35

12) นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ฉบับ ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

4.2.2 แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต มีลักษณะเป็นใบกิจกรรม ซึ่งสอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน เพื่อใช้ประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระหว่างเรียน โดยการประเมินการทำใบกิจกรรมของนักเรียน จะประเมินโดยใช้เกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยศึกษาพัฒนาการตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งดูในประเด็นดังนี้ 1) คะแนนแยกเป็นรายองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เพื่อเปรียบเทียบระหว่างเรียนในช่วงเวลา 3 ระยะ ว่ามีคะแนนเปลี่ยนแปลงอย่างไร 2) ศึกษาพฤติกรรมการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เพื่อดูพัฒนาการการเปลี่ยนแปลงแยกเป็นรายองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยวิเคราะห์จากผลงานการเขียนใบกิจกรรม ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างและหาคุณภาพ ดังนี้

1) ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต จากเอกสารตำราที่เกี่ยวข้องกับวิธีการและหลักการสร้าง แล้วกำหนดแนวทางในการออกแบบแบบวัดพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2) สร้างแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง เส้นขนาน ให้สอดคล้องกับแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตในขั้นสอน

3) นำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อตรวจพิจารณาความเหมาะสม ให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงแบบวัดให้ดูน่าสนใจมากขึ้น เช่น มีรูปประกอบคำถาม มีช่องให้นักเรียนเขียนได้ง่ายขึ้น

ข. ปรับลักษณะคำถามให้สอดคล้องกับเนื้อหาที่ใช้ในแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

4) นำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4.2.3 แบบสัมภาษณ์

แบบสัมภาษณ์ที่ใช้ในการทดลอง เป็นแบบสัมภาษณ์ที่มีแนวคำถามประกอบการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก (In – depth Interview) แนวคำถามจะกำหนดไว้เพียงกรอบหรือประเด็นที่จะสัมภาษณ์เท่านั้น โดยอาศัยกรอบและแนวคิดเป็นปัจจัยสำคัญในการตั้งประเด็นคำถาม และจะไม่เรียงลำดับคำถามก่อนหลังเหมือนที่กำหนดไว้ คำถามจะมีลักษณะเจาะลึกถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยผู้วิจัยเลือกสัมภาษณ์นักเรียนตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต องค์ประกอบละ 2 คน โดยพิจารณาถึงการเขียนแสดงวิธีทำตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างและหาคุณภาพ ดังนี้

1) วิเคราะห์องค์ประกอบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเพื่อสร้างประเด็นหรือข้อคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์

2) สร้างแบบสัมภาษณ์ กำหนดกรอบหรือประเด็นที่จะถาม (แนวคำถาม) เพื่อให้ทราบถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3) นำแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์เสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสมให้ข้อเสนอแนะ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. ลักษณะคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ ปรับให้เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบ

ข. ลักษณะคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ ปรับภาษาให้ดูเป็นกันเองมากขึ้น

4) นำแบบสัมภาษณ์ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างต่อไป

5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเองกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยมีขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

5.1 ขั้นเตรียมการ

5.1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม เนื้อหาเรื่องเส้นขนาน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

5.1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์และเอกสารที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

5.1.3 ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจาก คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลถึงผู้อำนวยการโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐม

5.2 ขั้นดำเนินการทดลอง

5.2.1 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม ก่อนการทดลองโดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำการทดสอบก่อนเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน

ผลคะแนนจากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้งสองห้องทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของ ห้อง ม.2/1 และ ม.2/7 เท่ากับ 15.04 และ 13.09 ตามลำดับ นำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องดังกล่าว ไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) พบว่า คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน

5.2.2 ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับกลุ่มทดลอง และดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม จำนวนทั้งสิ้น 15 คาบ คาบละ 50 นาที โดยในกลุ่มทดลองคาบแรกผู้วิจัยจะทำการสอนให้นักเรียนได้ฝึกการสร้างพรู้ฟแมปปิง ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผู้วิจัยจำเป็นต้องไปจัดนอกเวลาเรียนปกติ เนื่องจากวิธีการที่ใช้ไม่ได้เน้นในหลักสูตรปกติ แต่เป็นการเสริมความรู้จากหลักสูตรปกติ และเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนในระดับสูงขึ้นต่อไปในเรื่องของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

5.2.3 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองระหว่างการทดลอง 3 ระยะ โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน และทำการสัมภาษณ์นักเรียนตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

5.2.4 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม หลังการทดลองโดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำการทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน

5.3 ขั้นเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล 2 ลักษณะ คือ ข้อมูลเชิงปริมาณ และข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยข้อมูลเชิงปริมาณจะเก็บก่อนการทดลอง ระหว่างการทดลอง และหลังการทดลอง สำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ จะเก็บระหว่างการทดลอง โดยมีรายละเอียดดังนี้

5.3.1 ข้อมูลเชิงปริมาณ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยฉบับก่อนการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง เก็บข้อมูลในระยะก่อนการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม ฉบับระหว่างการทดลองใช้แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยเก็บท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15 กับกลุ่มทดลอง และฉบับหลังการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง โดยดำเนินการเมื่อสิ้นสุดการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

5.3.2 ข้อมูลเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลจากผลงานเขียนแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง และการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มทดลองตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยศึกษาการเขียนแสดงวิธีทำตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1) การทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมด 3 ครั้ง คือ ท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15

2) การสัมภาษณ์ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลการสัมภาษณ์หลังจากทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ 5, 10 และ 15 โดยทำการสัมภาษณ์นักเรียนในองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำผลการทดสอบจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 2 ระยะ ได้แก่ ระยะก่อนการทดลองและระยะหลังการทดลอง ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม มาวิเคราะห์ข้อมูลในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ส่วนการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยนำข้อมูลจากการทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และการสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง โดยมีรายละเอียดในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

6.1 การวิเคราะห์เชิงปริมาณ

1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test dependent)

2) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test independent)

3) ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 3 ระยะ ดังตารางที่ 9

ตารางที่ 9 แสดงระยะเวลาการวิเคราะห์ข้อมูลพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่	**เนื้อหา**	**จำนวนคาบ**
1	เส้นขนานและมุมภายใน (1)	1
2	เส้นขนานและมุมภายใน (2)	1
3	เส้นขนานและมุมภายใน (3)	1
4	เส้นขนานและมุมแย้ง (1)	1
5	เส้นขนานและมุมแย้ง (2) **วิเคราะห์ข้อมูลครั้งที่ 1 (ท้ายคาบที่ 5)**	1
6	เส้นขนานและมุมแย้ง (3)	1
7	เส้นขนานและมุมแย้ง (4)	1
8	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (1)	1
9	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (2)	1
10	เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน (3) **วิเคราะห์ข้อมูลครั้งที่ 2 (ท้ายคาบที่ 10)**	1
11	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (1)	1
12	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (2)	1
13	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (3)	1
14	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (4)	1
15	เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (5) **วิเคราะห์ข้อมูลครั้งที่ 3 (ท้ายคาบที่ 15)**	1
รวม		**15**

6.2 การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพจากการทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และการสัมภาษณ์ รายละเอียดมีดังนี้

1) การวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยนำข้อมูลที่รวบรวมจากใบกิจกรรม มาวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content analysis) เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลง 3 ระยะ

2) การวิเคราะห์ข้อมูลจากการสัมภาษณ์ ผู้วิจัยนำผลจากการสัมภาษณ์ของนักเรียนมาวิเคราะห์ลักษณะและพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามองค์ประกอบโดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content analysis) เพื่อพิจารณาในประเด็นต่างๆ ที่น่าสนใจและเกี่ยวข้องกับพัฒนาการ

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

7.1 สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

7.1.1 หาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับก่อนการทดลอง และหลังการทดลอง โดยใช้วิธีหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{s_t^2}\right\}$$

เมื่อ α แทน ค่าความเที่ยงของแบบวัด

k แทน จำนวนข้อสอบของแบบวัด

s_i แทน ความแปรปรวนของแบบวัดในแต่ละข้อ

s_t แทน ความแปรปรวนของแบบวัดทั้งหมด

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 128)

7.1.2 หาค่าความยาก (p) ของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับก่อนการทดลอง และหลังการทดลอง โดยใช้สูตรของวิทย์เนย์ และซาเบอร์ (Whitney and Sabers) ดังนี้

$$p = \frac{s_h + s_l - (n_t)(x_{min})}{n_t(x_{max} - x_{min})}$$

เมื่อ p แทน ค่าความยาก

S_h แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มสูง

S_l แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มต่ำ

x_{max} แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

x_{min} แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_t แทน จำนวนคนในกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 147-148)

7.1.3 หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับก่อนการทดลอง และหลังการทดลอง โดยใช้สูตรของวิทย์เนย์ และซาเบอร์ (Whitney and Sabers) ดังนี้

$$r = \frac{S_h - S_l}{n_h (x_{max} - x_{min})}$$

เมื่อ r แทน ค่าอำนาจจำแนก

S_h แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มสูง

S_l แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มต่ำ

x_{max} แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

x_{min} แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_h แทน จำนวนคนในกลุ่มสูง

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 147-148)

7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

วิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test) ของคะแนนแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Science)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียน โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามเทคนิคพรู้ฟแมปปิง โดยข้อมูลที่ได้มาจากการเก็บรวบรวมนำมาวิเคราะห์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ซึ่งผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ (การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต)

1.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test dependent)

1.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test independent)

1.3 การศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ในช่วงระหว่างเรียน โดยพิจารณาจากแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ (การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต)

ตอนที่ 2.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน

ตอนที่ 2.2 พัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

โดยผลการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละตอนมีรายละเอียด ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ (การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต)

1.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test dependent) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตารางที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

การทดสอบ	n	$\bar{x}$	s	t	p
ก่อนเรียน	23	15.04	4.194	14.791	.000*
หลังเรียน	23	33.09	3.437		

*p < .05

จากตารางที่ 10 พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน เท่ากับ 15.04 และ 33.09 ตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.194 และ 3.437 ตามลำดับ จากการทดสอบค่าที (t – test dependent) พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้การวิเคราะห์ค่าที (t – test independent) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตารางที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

การทดสอบ	n	$\bar{x}$	s	t	p
กลุ่มทดลอง	23	33.09	3.437	4.989	.000*
กลุ่มควบคุม	23	28.96	1.988		

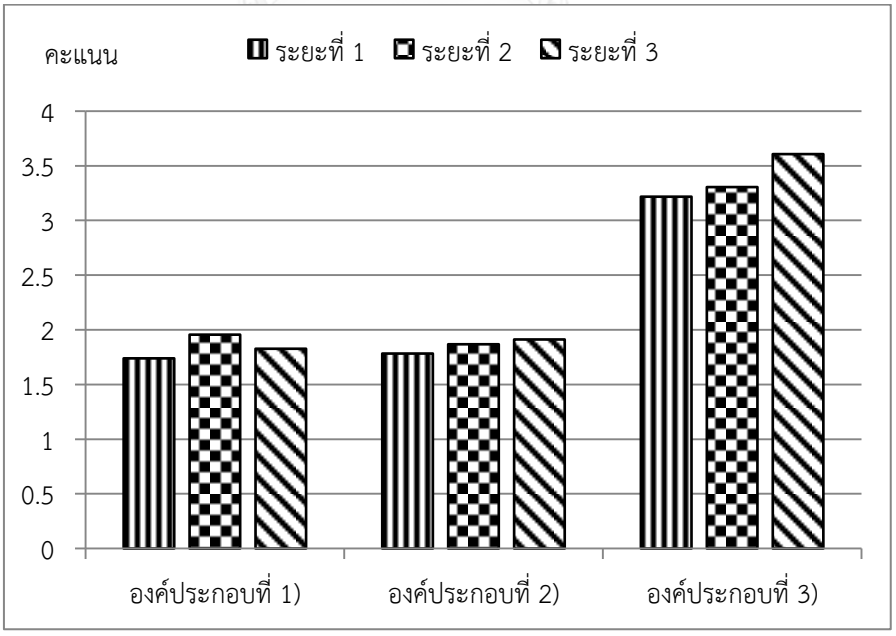
*p < .05

จากตารางที่ 11 พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและนักเรียนกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 33.09 และ 28.96 ตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 40 คะแนนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.437 และ 1.988 ตามลำดับ จากการทดสอบค่าที (t – test independent) พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของ นักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.3 การศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนโดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ในช่วงระหว่างเรียน โดยคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยและแสดงในรูปแผนภูมิแท่ง เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 3 ระยะ โดยพิจารณาตามรายองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตทั้ง 3 องค์ประกอบ ซึ่งได้นำเสนอในตารางที่ 12 และ รูปที่ 13

ตารางที่ 12 แสดงคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียน โดยพิจารณาตามรายองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่มีการเปลี่ยนแปลงของพัฒนาการใน 3 ระยะ

องค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	**ระยะการวิเคราะห์ข้อมูล**		
	ระยะที่ 1 (คาบที่ 5)	**ระยะที่ 2 (คาบที่ 10)**	**ระยะที่ 3 (คาบที่ 15)**
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล (คะแนนเต็ม 2 คะแนน)	1.74	1.95	1.83
2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล (คะแนนเต็ม 2 คะแนน)	1.78	1.87	1.91
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องสมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ (คะแนนเต็ม 4 คะแนน)	3.22	3.30	3.61



รูปที่ 13 แสดงแผนภูมิแท่งที่แสดงคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยพิจารณาตามรายองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่มีการเปลี่ยนแปลงของพัฒนาการใน 3 ระยะ

จากตารางที่ 12 และรูปที่ 13 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น โดยระยะที่ 2 เพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 ส่วนในระยะที่ 3 นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยลดลงจากระยะที่ 2 แต่ไม่ต่ำกว่าระยะที่ 1

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยค่อยๆ เพิ่มขึ้นเป็นลำดับ เมื่อเปรียบเทียบใน 3 ระยะ โดยระยะที่ 2 เพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 และระยะที่ 3 เพิ่มขึ้นจากระยะที่ 2

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นเป็นลำดับ โดยระยะที่ 3 นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยที่สูงกว่าระยะที่ 1 และระยะที่ 2 อย่างเห็นได้ชัด

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ (การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต)

ตอนที่ 2.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน

2.1.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

โรงเรียนที่ผู้วิจัยได้ทำการทดลองเป็นโรงเรียนมัธยมขนาดใหญ่พิเศษ ตั้งอยู่เลขที่ 53 หมู่ 2 ตำบลไร่ขิง อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐม เป็นโรงเรียนมัธยมศึกษาประเภทสหศึกษา สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ เปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีจำนวนห้องเรียน 80 ห้องเรียน แบ่งเป็นระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น 45 ห้องเรียน และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 35 ห้องเรียน มีจำนวนนักเรียนรวม 3,025 คน ในปีการศึกษา 2558 มีค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐานในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 คิดเป็นร้อยละ 30.05 ซึ่งสูงกว่าค่าเฉลี่ยระดับประเทศที่คิดเป็นร้อยละ 29.61

2.1.2 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับครู

ในปีการศึกษา 2559 มีจำนวนข้าราชการครูทั้งหมด จำนวน 121 คน สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี จำนวน 81 คน สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จำนวน 39 คน และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอก จำนวน 1 คน เป็นข้าราชการครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จำนวน 14 คน ซึ่งทั้งหมดเป็นผู้สำเร็จการศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์

ด้านภาระงานในการสอนของครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูแต่ละท่านได้รับมอบหมายให้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉลี่ยประมาณ 18 คาบต่อสัปดาห์ รายวิชาอื่นๆ เช่น กิจกรรมชุมนุม กิจกรรมลูกเสือ – เนตรนารี กิจกรรมจริยธรรม และมีภาระงานอื่นที่นอกเหนือจากงานสอน เช่น งานวัดผลทางการศึกษา งานวิชาการ งานปกครอง เป็นต้น

2.1.3 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน

ในปีการศึกษา 2559 มีจำนวนนักเรียนทั้งหมด 3,025 คน เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 559 คน นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีจำนวน 46 คน เป็นนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตจำนวน 23 คน และนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติจำนวน 23 คน ซึ่งจากการศึกษาประวัติส่วนตัวนักเรียน และสอบถามครูเพิ่มเติม พบว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างโดยส่วนใหญ่มีผลการเรียนอยู่ในระดับปานกลาง

ตอนที่ 2.2 พัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

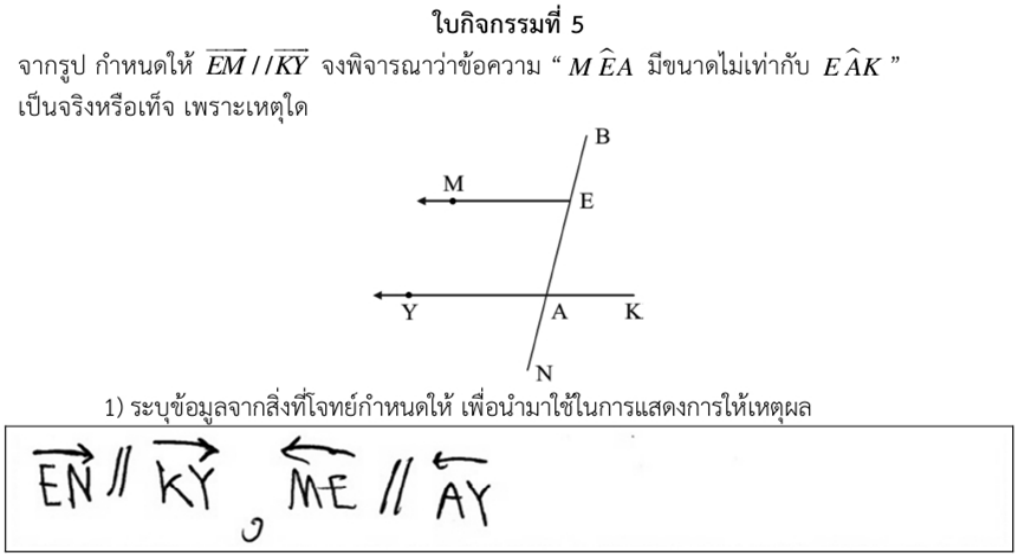
ในการศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์พัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยนำข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากการทำใบกิจกรรม มาวิเคราะห์ตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยแบ่งเป็น 3 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 (คาบที่ 1 – 5), ระยะที่ 2 (คาบที่ 6 – 10) และ ระยะที่ 3 (คาบที่ 11 – 15) โดยพิจารณาจากผลงานการทำใบกิจกรรมและผลการสัมภาษณ์หลังจากทำใบกิจกรรมท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15 โดยทำการสัมภาษณ์นักเรียนในแต่ละองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยมีรายละเอียดดังนี้

ระยะที่ 1 (คาบที่ 1 – 5)

ในการศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนในระยะที่ 1 ผู้วิจัยพิจารณาความสามารถของนักเรียนจากการทำใบกิจกรรม และผลการสัมภาษณ์ ตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 3 องค์ประกอบ ได้แก่ 1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล 2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล และ 3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ พบว่านักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 18 คน ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่จะใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และเขียนสิ่งที่พิจารณาได้เพิ่มเติมจากในรูป และมีนักเรียนจำนวน 4 คน ลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพียงอย่างเดียว โดยไม่ได้พิจารณาหรือเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในรูป แต่ก็ยังมีนักเรียนอยู่ 1 คน ที่เขียนสิ่งที่ไม่มีความเกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ดังแสดงในรูปที่ 14



รูปที่ 14 แสดงการเขียนสิ่งที่ไม่มีความเกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

เมื่อเรียกนักเรียนที่เขียนสิ่งที่ไม่ความเกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนไม่สามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยนักเรียนเขียนข้อความที่มีลักษณะใกล้เคียงกับสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้เพื่อหวังให้ได้คะแนน แสดงให้เห็นว่านักเรียนขาดการวิเคราะห์ และไม่พิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

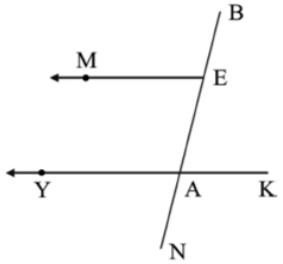
สำหรับองค์ประกอบที่ 1) ในระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องครบถ้วน ทั้งจากในข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากในรูป แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนแต่ข้อความที่โจทย์กำหนดให้เพียงอย่างเดียว และยังมีนักเรียนที่ขาดการวิเคราะห์ ไม่ตระหนักถึงสิ่งที่เขียนตอบ

2) ระบุทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

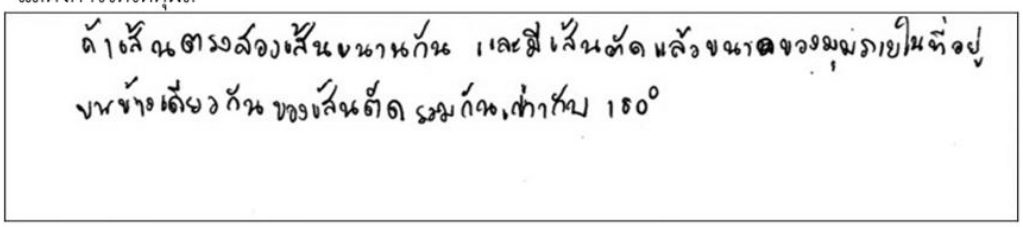
นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 18 คน ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ถูกต้องครบถ้วน ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่เขียนข้อความทฤษฎีบทโดยการเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน และมีนักเรียนจำนวน 4 คน ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลได้ถูกต้องบางส่วน เนื่องจากนักเรียนเขียนข้อความตามความเข้าใจ แต่ก็ยังมีนักเรียนอยู่ 1 คน ที่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ถูกต้อง โดยนักเรียนเลือกใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด ซึ่งที่ถูกต้องต้องเลือกใช้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 15

ใบกิจกรรมที่ 5

จากรูป กำหนดให้ $\overline{EM} // \overline{KY}$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $M\hat{E}A$ มีขนาดไม่เท่ากับ $E\hat{A}K$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



2) ระบุทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



รูปที่ 15 แสดงการเขียนข้อความทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แต่นักเรียนเลือกใช้ทฤษฎีบทไม่ถูกต้อง

เมื่อเรียกนักเรียนที่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ถูกต้อง มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยนักเรียนเลือกใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด เนื่องจากนักเรียนเข้าใจผิดว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่ได้พิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้อย่างรอบคอบทั้งจากในข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากในรูป ซึ่งที่ถูกต้องต้องเลือกใช้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าต้องใช้ทฤษฎีบทใดในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตแต่จำไม่ได้ต้องเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) ในระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องครบถ้วน เนื่องจากเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องบางส่วนโดยเขียนตามความเข้าใจ และมีนักเรียนที่เข้าใจผิดเกี่ยวกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จึงระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ถูกต้อง

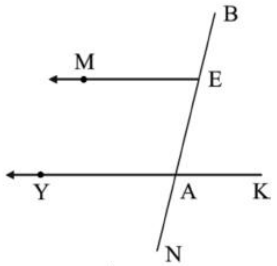
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 19 คน สามารถใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่จะนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้นำมาพิจารณาและแสดงการให้เหตุผลเป็นไปตามลำดับ และมีนักเรียนจำนวน 4 คน เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ ดังแสดงในรูปที่ 16

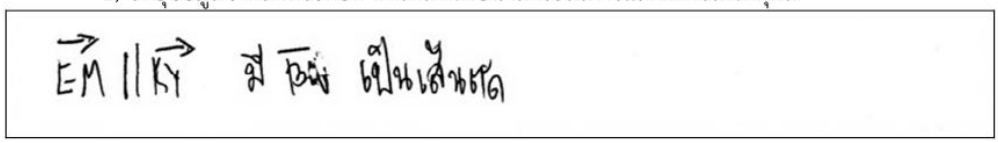
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ใบกิจกรรมที่ 5

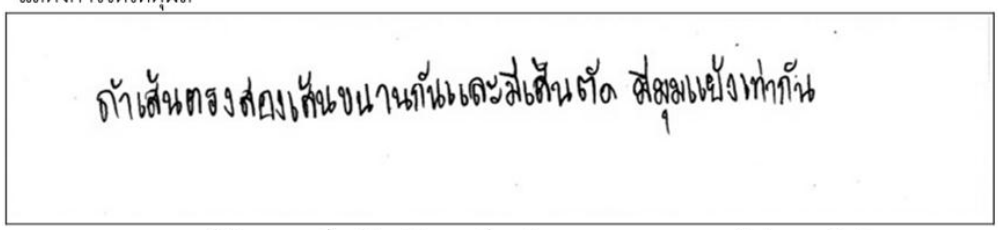
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EM} // \overleftrightarrow{KY}$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $M\hat{E}A$ มีขนาดไม่เท่ากับ $E\hat{A}K$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



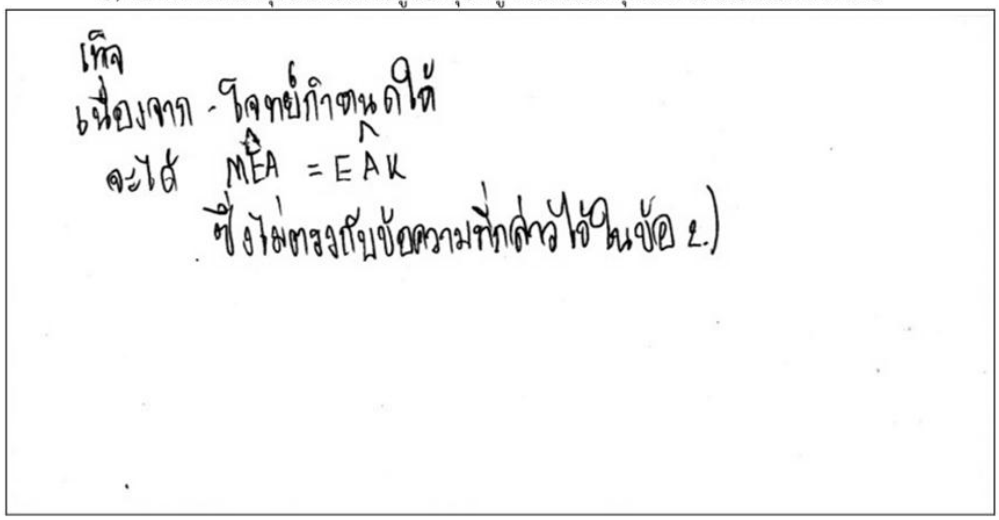
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ



รูปที่ 16 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ (กลุ่ม 4 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร แต่นักเรียนเข้าใจว่าได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้แล้วจึงไม่ได้นำมาเขียนใหม่อีกครั้ง และยังเข้าใจอีกด้วยว่าข้อสรุปที่ได้เป็นเท็จเพราะสิ่งที่ได้ไม่ได้เป็นไปตามทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนยังไม่เข้าใจในทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ และนักเรียนยังไม่เข้าใจวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ใหม่อีกครั้งเพียงเท่านั้น

สำหรับองค์ประกอบที่ 3) ในระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ เนื่องจากนักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้ใหม่อีกครั้งเพียงเท่านั้น แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้

จากรายละเอียดข้างต้น สรุปได้ว่า ในระยะที่ 1 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ทั้งจากในข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากในรูป แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนแต่ข้อความที่โจทย์กำหนดให้เพียงอย่างเดียว และมีนักเรียนที่ไม่มีความพยายามในการเขียนตอบ

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องครบถ้วน จากการเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็มีนักเรียนที่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องบางส่วนโดยเขียนตามความเข้าใจ และมีนักเรียนที่เข้าใจผิด จึงระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ถูกต้อง

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้

ระยะที่ 2 (คาบที่ 6 – 10)

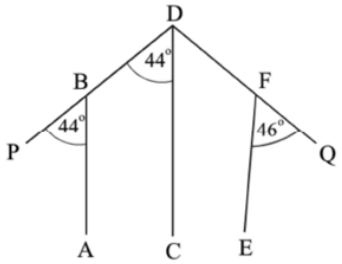
ในการศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนในระยะที่ 2 ผู้วิจัยพิจารณาความสามารถของนักเรียนจากการทำใบกิจกรรม และผลการสัมภาษณ์ ตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 3 องค์ประกอบ ได้แก่ 1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล 2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล และ 3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ พบว่านักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 22 คน ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่จะใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพียงอย่างเดียว และไม่ได้พิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในรูป แต่ที่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พิจารณาข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว แต่มีนักเรียนอยู่ 1 คนที่เขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ ดังแสดงในรูปที่ 17

ใบกิจกรรมที่ 10

จากรูป $P\hat{B}A = B\hat{D}C = 44°$ และ $Q\hat{F}E = 46°$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $\overline{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overline{CD}$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$P\hat{B}A = B\hat{D}C = 44°$

รูปที่ 17 แสดงการเขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ

เมื่อเรียกนักเรียนที่เขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ที่เขียนตอบลงไปเป็นสิ่งที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ส่วนสิ่งที่ไม่ได้เขียนตอบลงไปเป็นสิ่งที่ไม่ได้นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต นักเรียนคนดังกล่าวจึงเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ และเมื่อพิจารณาเกี่ยวกับการมีสมาธิในการทำงาน

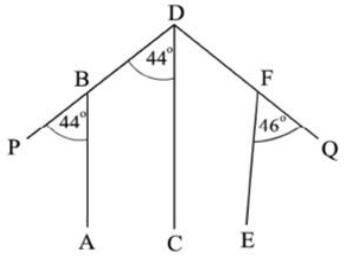
สำหรับองค์ประกอบที่ 1) ในระยะที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ยังใช้วิธีเดิม และเริ่มมีการคิดวิเคราะห์ มีนักเรียนเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พิจารณาจากข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

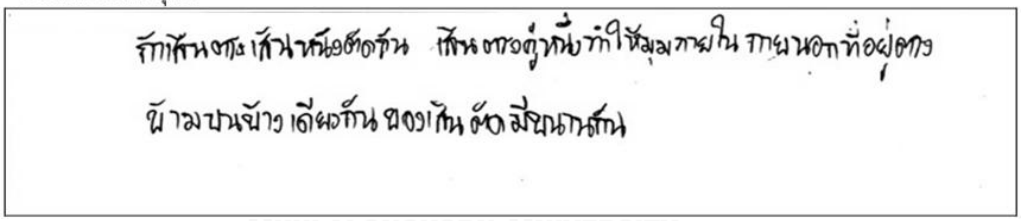
นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 20 คน ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ถูกต้องครบถ้วน ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่ยังคงเขียนข้อความทฤษฎีบทโดยการเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียนเหมือนเดิม แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจ และมีนักเรียนจำนวน 3 คน ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลได้ถูกต้องบางส่วน เนื่องจากนักเรียนเขียนข้อความตามความเข้าใจ ซึ่งมีนักเรียนบางคนเขียนข้อความทฤษฎีบทเข้าใจว่าเลือกใช้ทฤษฎีบทมุมภายนอกและมุมภายในมีขนาดเท่ากัน แต่เขียนข้อความถูกต้องบางส่วน ดังแสดงในรูปที่ 18

ใบกิจกรรมที่ 10

จากรูป $P\hat{B}A = B\hat{D}C = 44°$ และ $Q\hat{F}E = 46°$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $\overline{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overline{CD}$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



CHULALONGKORN UNIVERSITY

รูปที่ 18 แสดงการเขียนข้อความทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องบางส่วน โดยเขียนข้อความตามความเข้าใจ

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องบางส่วน (กลุ่ม 3 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยนักเรียนเลือกใช้ทฤษฎีบทมุมภายนอกและมุมภายในมีขนาดเท่ากัน นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าต้องใช้ทฤษฎีบทใดในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยการเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียนเหมือนในระยะที่ 1 แต่ก็มีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้นซึ่งมีทั้งที่เขียนข้อความถูกต้องครบถ้วนและเขียนข้อความถูกต้องบางส่วน

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) ในระยะที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ยังใช้วิธีเดิมในการระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจซึ่งมีทั้งที่เขียนข้อความถูกต้องครบถ้วนและเขียนข้อความถูกต้องบางส่วน และไม่มีมีนักเรียนที่เลือกใช้ทฤษฎีบทที่ไม่ถูกต้อง

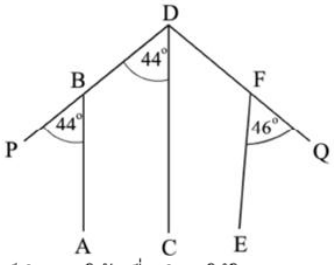
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 18 คน สามารถใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ ซึ่งแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับในระยะที่ 1 ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่จะนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้นำมาพิจารณาและแสดงการให้เหตุผลเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม และมีนักเรียนจำนวน 5 คน เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มีนักเรียนบางคนเขียนสิ่งที่ได้จากทฤษฎีบทถูกต้องแต่เขียนทฤษฎีบทที่ใช้ให้เหตุผลไม่ตรงกับทฤษฎีบทที่เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้ ดังแสดงในรูปที่ 19

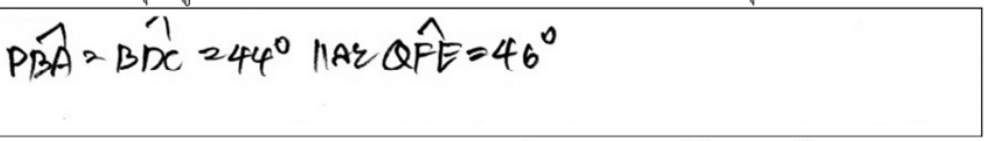
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ใบกิจกรรมที่ 10

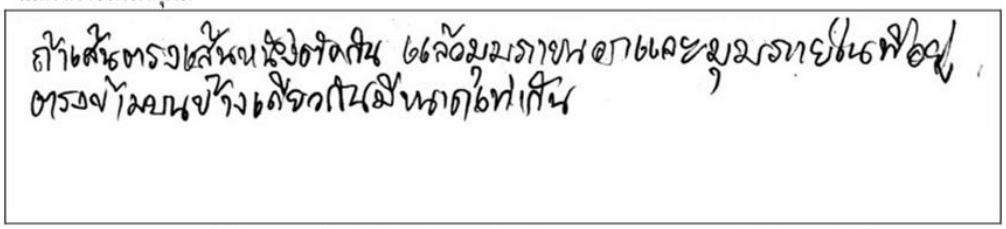
จากรูป $P\hat{B}A = B\hat{D}C = 44°$ และ $Q\hat{F}E = 46°$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $\overline{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overline{CD}$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



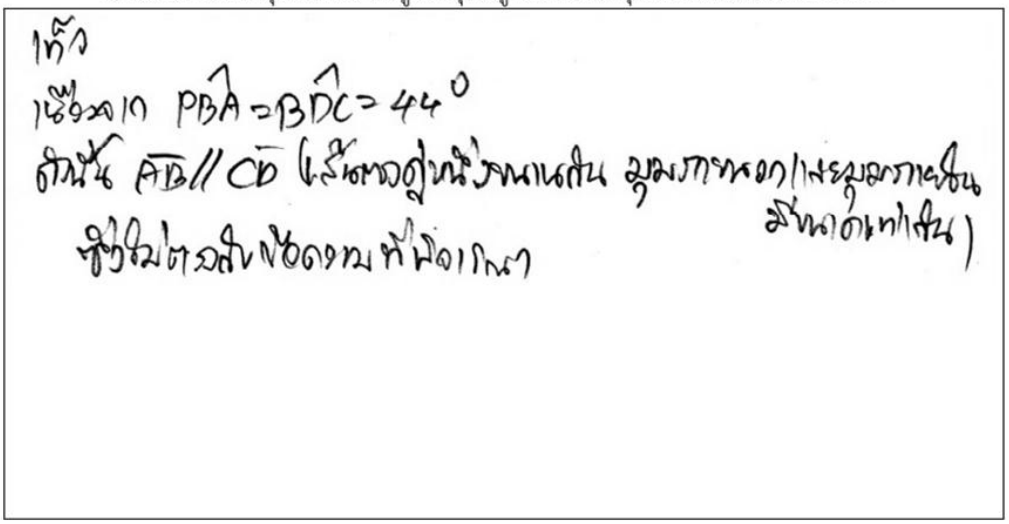
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ



รูปที่ 19 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่เขียนทฤษฎีบทให้เหตุผลไม่ตรงกับทฤษฎีบทที่เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (กลุ่ม 5 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร แต่นักเรียนเข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่จำเป็นต้องให้เหตุผลว่ากำหนดให้ ส่วนการให้เหตุผลนักเรียนบางคนเข้าใจว่าเขียนสิ่งที่ได้จากทฤษฎีบทได้เลยโดยไม่ต้องนำทฤษฎีบทที่ใช้มาให้เหตุผล นักเรียนบางคนยังไม่เข้าใจทฤษฎีบทที่ได้เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้จึงยังใช้ทฤษฎีบทที่ได้เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้ไม่เป็น และนักเรียนบางคนต้องการให้เหตุผลโดยเขียนทฤษฎีบทตามความเข้าใจแต่สิ่งที่เขียนกับไม่ตรงกับทฤษฎีบทที่เขียนระบุไว้ก่อนหน้านี้ นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่เริ่มเข้าใจว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลโดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง

สำหรับองค์ประกอบที่ 3) ในระยะที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม และเริ่มเข้าใจว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลโดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลได้ข้อสรุปถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และแสดงการให้เหตุผลแตกต่างกันไป

จากรายละเอียดข้างต้น สรุปได้ว่า ในระยะที่ 2 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 แต่นักเรียนเริ่มมีการคิดวิเคราะห์ มีนักเรียนเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พิจารณาจากข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนยังใช้วิธีเดิมในการระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน เหมือนในระยะที่ 1 แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้นซึ่งมีทั้งที่เขียนข้อความถูกต้องครบถ้วนและเขียนข้อความถูกต้องบางส่วน

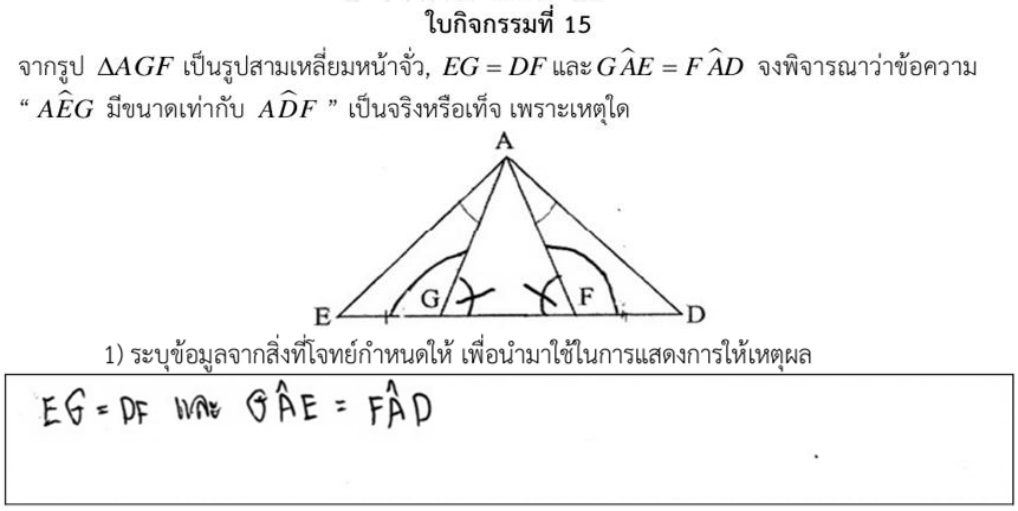
ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระยะที่ 3 (คาบที่ 11 – 15)

ในการศึกษาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนในระยะที่ 3 ผู้วิจัยพิจารณาความสามารถของนักเรียนจากการทำใบกิจกรรม และผลการสัมภาษณ์ ตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 3 องค์ประกอบ ได้แก่ 1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล 2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล และ 3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ พบว่านักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 19 คน ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่จะใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และมีการพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในรูปเพราะมีการขีดเส้นเพิ่มเติม แต่ที่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พิจารณาข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว และมีนักเรียนอยู่ 4 คนที่เขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่มีการขีดเส้นเพิ่มเติมในรูป ดังแสดงในรูปที่ 20



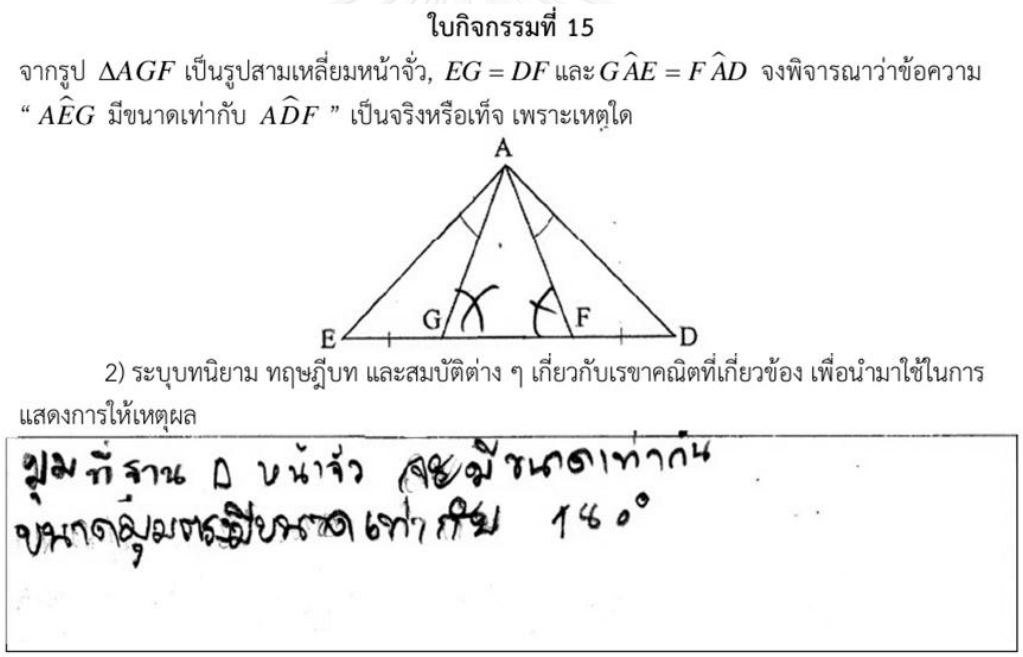
รูปที่ 20 แสดงการเขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่มีการขีดเส้นเพิ่มเติมในรูปเพื่อพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่เขียนข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่มีการขีดเส้นเพิ่มเติมในรูป (กลุ่ม 4 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยเมื่อถามคำถามให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ที่เขียนตอบมา พบว่านักเรียนบอกความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ที่เขียนตอบมาได้ถูกต้อง อีกทั้งระบุได้ว่าการขีดเส้นเพิ่มเติมในรูปนำไปใช้ประโยชน์ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้อย่างไร ในส่วนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ที่ไม่ได้เขียนตอบลงไป นักเรียนให้เหตุผลว่าเป็นข้อความที่ไม่ได้นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยตรงจึงไม่ได้เขียนตอบลงไป

สำหรับองค์ประกอบที่ 1) ในระยะที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 และระยะที่ 2 พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหมือนเดิม แต่จากการสังเกตผลงานเขียนของนักเรียน พบว่านักเรียนส่วนใหญ่เริ่มพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในรูปโดยการขีดเส้นเพิ่มเติม แต่ที่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้นั้นพิจารณาจากข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนทุกคนมีความพยายามในการเขียนตอบ

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 21 คน ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ถูกต้องครบถ้วนและครบทุกอย่าง ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่เขียนข้อความโดยการพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน เนื่องจากใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และมีนักเรียนจำนวน 2 คน ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ครบทุกอย่าง ดังแสดงในรูปที่ 21


ใบกิจกรรมที่ 15

จากรูป ΔAGF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, $EG = DF$ และ $G\hat{A}E = F\hat{A}D$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $A\hat{E}G$ มีขนาดเท่ากับ $A\hat{D}F$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

มุม ที่ จาน D บน หน้าจั่ว สอง มี ขนาด เท่ากัน
ขนาด มุม ตรงข้าม เท่า กัน 140°

รูปที่ 21 แสดงการเขียนข้อความบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตแต่เขียนไม่ครบทุกอย่าง

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ครบทุกอย่าง (กลุ่ม 2 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่านักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยเมื่อถามคำถามให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ของบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่เขียนตอบมา พบว่านักเรียนบอกความสัมพันธ์ของของบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่เขียนตอบมาได้ถูกต้อง อีกทั้งระบุได้ว่านำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้อย่างไร ในส่วนที่นักเรียนระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ครบทุกอย่าง นักเรียนให้เหตุผลว่าไม่รู้ว่าต้องใช้เหตุผลใดจึงไม่ได้เขียนตอบลงไป แต่นักเรียนรู้ว่าใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม อีกทั้งนักเรียนเขียนข้อความตามความเข้าใจของนักเรียน ไม่ได้เขียนข้อความโดยการพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) ในระยะที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 และระยะที่ 2 พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้น และมีการเขียนข้อความโดยการพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน เนื่องจากใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

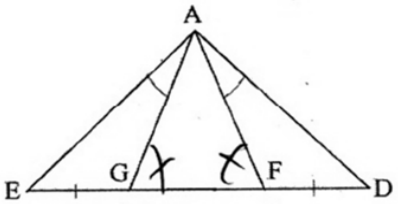
3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 23 คน สามารถใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ ในจำนวนนี้ส่วนใหญ่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน เนื่องจากใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และมีนักเรียนบางคนเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ดังแสดงในรูปที่ 22

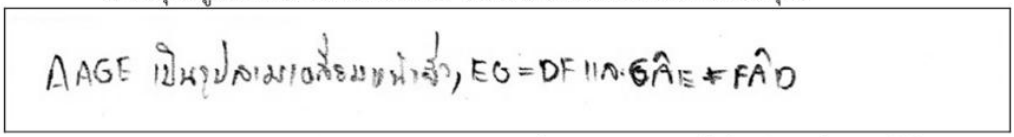
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ใบกิจกรรมที่ 15

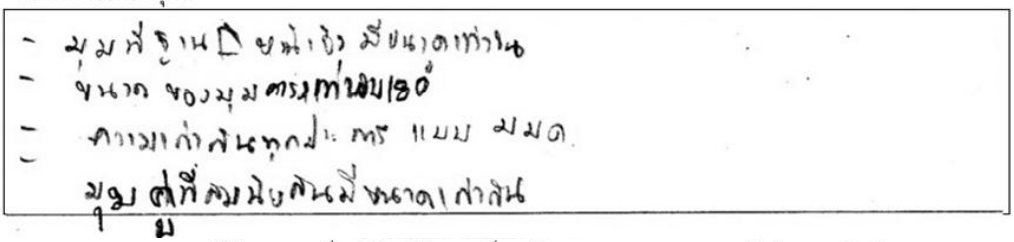
จากรูป ΔAGF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, $EG = DF$ และ $G\hat{A}E = F\hat{A}D$ จงพิจารณาว่าข้อความ " $A\hat{E}G$ มีขนาดเท่ากับ $A\hat{D}F$ " เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



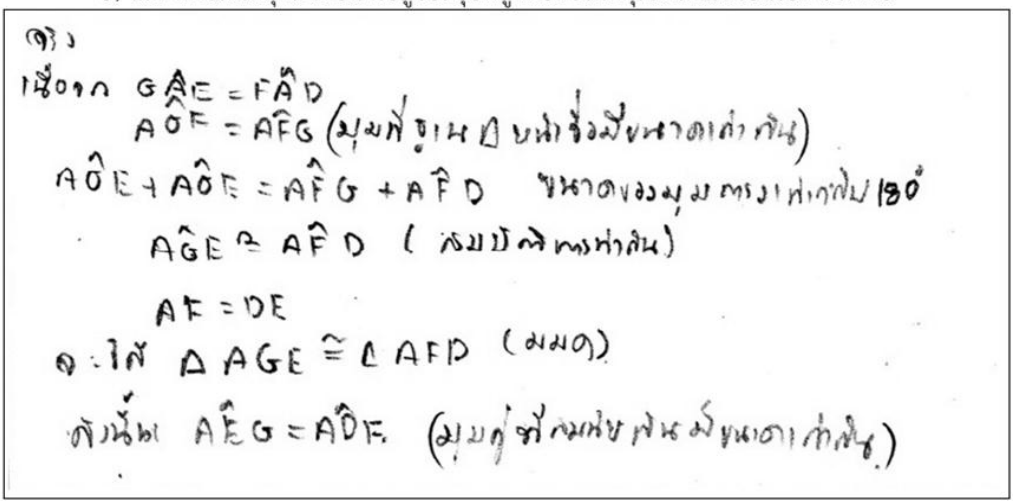
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล



3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ



รูปที่ 22 แสดงการเขียนข้อความให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

เมื่อสุ่มนักเรียนกลุ่มที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ (กลุ่ม 23 คน) มาทำการสอบถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ตอบ พบว่า นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าข้อความที่เขียนตอบนั้นคืออะไร โดยเมื่อถามคำถามให้นักเรียนอธิบายการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เขียนตอบมา พบว่านักเรียนอธิบายการให้เหตุผลโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตได้ถูกต้อง ครบถ้วน และเป็นไปตามลำดับ ในส่วนที่นักเรียนแสดงการให้เหตุผลโดยเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ นักเรียนให้เหตุผลโดยรู้ว่าต้องให้เหตุผลว่ากำหนดให้แต่ไม่ได้เขียนตอบลงไป และรู้ด้วยว่าใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลโดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ

สำหรับองค์ประกอบที่ 3) ในระยะที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 และระยะที่ 2 พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม และเข้าใจว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลโดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ และมีการเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน เนื่องจากใบกิจกรรมนี้มีความเกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

จากรายละเอียดข้างต้น สรุปได้ว่า ในระยะที่ 3 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 และระยะที่ 2 กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 แต่นักเรียนได้รับการฝึกฝนทำให้นักเรียนมีความพยายามในการเขียนตอบ มีการพิจารณาขีดเส้นเพิ่มเติมในรูปที่โจทย์กำหนดให้

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนยังใช้วิธีเดิมในการระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้น และมีการเขียนข้อความโดยการพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม แต่มีการเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

จากข้อมูลเชิงปริมาณและข้อมูลเชิงคุณภาพ สรุปได้ว่า องค์ประกอบทุกองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตมีพัฒนาการที่ดีขึ้นเป็นลำดับ โดยเมื่อพิจารณาในช่วงระหว่างเรียนใน 3 ระยะ พบว่า องค์ประกอบที่มีพัฒนาการดีขึ้นมากที่สุดคือ 3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ โดยมีคะแนนเฉลี่ยในระยะที่ 3 เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 ถึง 0.39 คะแนน ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 50 (2 คะแนน) พบว่าคะแนนเฉลี่ยในทุกระยะผ่านเกณฑ์ สอดคล้องกับข้อมูลเชิงคุณภาพจากผลงานและพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปในทางที่ดีขึ้น โดยนักเรียนใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตในการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ เพราะนักเรียนมีความเข้าใจในบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต และมีการเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

สำหรับองค์ประกอบที่มีพัฒนาการดีขึ้นในลำดับรองลงมา คือ 2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยในระยะที่ 3 เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 คิดเป็น 0.13 คะแนน โดยคะแนนเฉลี่ยค่อยๆ เพิ่มขึ้นเป็นลำดับ โดยระยะที่ 2 เพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 และระยะที่ 3 เพิ่มขึ้นจากระยะที่ 2 ทั้งนี้หากเปรียบเทียบคะแนนกับเกณฑ์ร้อยละ 50 (1 คะแนน) พบว่าคะแนนเฉลี่ยในทุกระยะผ่านเกณฑ์ สอดคล้องกับข้อมูลเชิงคุณภาพจากผลงานและพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปในทางที่ดีขึ้น โดยนักเรียนระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต ที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องครบถ้วน เพราะมีการเปิดดูข้อความในเอกสารประกอบการเรียน มีการเขียนข้อความตามความเข้าใจ และเขียนข้อความโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

สำหรับองค์ประกอบที่มีพัฒนาการดีขึ้นในลำดับน้อยที่สุด คือ 1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล โดยมีคะแนนเฉลี่ยในระยะที่ 3 เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นจากระยะที่ 1 คิดเป็นเพียง 0.09 คะแนน และยังพบว่าคะแนนเฉลี่ยในระยะที่ 3 ปรับตัวลดลงจากในระยะที่ 2 แต่ทั้งนี้หากพิจารณาเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 50 (1 คะแนน) พบว่า คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ในทุกระยะ สอดคล้องกับข้อมูลเชิงคุณภาพจากผลงานและพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปในทางที่ดีขึ้น โดยนักเรียนสามารถระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ทั้งจากในข้อความและรูปได้ดีขึ้น เพราะนักเรียนมีการพิจารณาทั้งจากในข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากในรูป

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต กับ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. เพื่อศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ จังหวัดนครปฐม

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้การเลือกแบบเจาะจง (purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครปฐม เขต 9 เนื่องจากเป็นโรงเรียนที่มีการจัดห้องเรียนแบบคละความสามารถ โดยผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อจัดเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมตามขั้นตอน ดังนี้

1. ผู้วิจัยนำคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 ของนักเรียนทั้ง 15 ห้อง มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)

2. ผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียนที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ใกล้เคียงกันมากที่สุดจำนวน 2 ห้อง ได้แก่ ห้อง ม.2/1 จำนวน 29 คน และ ห้อง ม.2/7 จำนวน 37 คน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 67.38 และ 65.76 ตามลำดับ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10.22 และ 10.17 ตามลำดับ

3. ผู้วิจัยนำค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของนักเรียนทั้งสองห้องมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของนักเรียนทั้งสองห้องด้วยการทดสอบความแตกต่างด้วยค่าที (t-test) พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

4. ผู้วิจัยทำการจับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มตัวอย่าง ผลปรากฏว่า นักเรียนห้อง ม. 2/1 เป็นกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตและนักเรียนห้อง ม.2/7 เป็นกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ คณิตศาสตร์แบบปกติ

ในระหว่างการทำวิจัย พบว่า นักเรียนห้อง ม. 2/1 จำนวน 29 คน มีนักเรียนอยู่ 6 คน ไม่สามารถร่วมการทดลองได้ตลอดโครงการ ทำให้เหลือกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 23 คน และนักเรียนห้อง ม. 2/7 จำนวน 37 คน มีนักเรียนอยู่ 14 คน ไม่สามารถร่วมการทดลองได้ตลอดโครงการทำให้เหลือกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุม จำนวน 23 คน โดยการทดลองในครั้งนี้เป็นการสอนเฉพาะเนื้อหาเน้นการเขียนพิสูจน์โดยตรง จึงนำมาสอนนอกเวลาเรียนปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งเป็น เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองและเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 15 แผน โดยใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 15 คาบ คาบละ 50 นาที

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบสัมภาษณ์ โดยรายละเอียดมีดังนี้

2.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ สำหรับฉบับก่อนการทดลอง และ เรื่อง เส้นขนาน สำหรับฉบับหลังการทดลอง ประกอบด้วย

2.1.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ใช้เวลา 60 นาที มีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.65 ค่าความยาก มีค่าตั้งแต่ 0.30 – 0.41 และค่าอำนาจจำแนก มีค่าตั้งแต่ 0.20 – 0.40

2.1.2 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 6 ข้อ ใช้เวลา 90 นาที มีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.70 ค่าความยาก มีค่าตั้งแต่ 0.34 – 0.58 และค่าอำนาจจำแนก มีค่าตั้งแต่ 0.25 – 0.35

2.2 แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต มีลักษณะเป็นใบกิจกรรมซึ่งสอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน เพื่อใช้ประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระหว่างเรียน มีใบกิจกรรมทั้งหมด 3 ชุด โดยการประเมินการทำใบกิจกรรมของนักเรียนจะประเมินโดยใช้เกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2.3 แบบสัมภาษณ์

แบบสัมภาษณ์ที่ใช้ในการทดลอง เป็นแบบสัมภาษณ์ที่มีแนวคำถามประกอบการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก (In – depth Interview) แนวคำถามจะกำหนดไว้เพียงกรอบหรือประเด็นที่จะสัมภาษณ์เท่านั้น โดยอาศัยกรอบและแนวคิดเป็นปัจจัยสำคัญในการตั้งประเด็นคำถาม และจะไม่เรียงลำดับ

คำถามก่อนหลังเหมือนที่กำหนดไว้ คำถามจะมีลักษณะเจาะลึกถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยผู้วิจัยเลือกสัมภาษณ์นักเรียนตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต องค์ประกอบละ 2 คน โดยพิจารณาถึงการเขียนแสดงวิธีทำตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเองกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยมีขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

1. ขั้นเตรียมการ

1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม เนื้อหาเรื่องเส้นขนาน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์และเอกสารที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

1.3 ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจาก คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลถึงผู้อำนวยการโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐม

2. ขั้นดำเนินการทดลอง

2.1 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม ก่อนการทดลองโดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำการทดสอบก่อนเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน

ผลคะแนนจากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้งสองห้องทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของ ห้อง ม. 2/1 และ ม.2/7 เท่ากับ 15.04 และ 13.09 ตามลำดับ นำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องดังกล่าว ไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) พบว่า คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน

2.2 ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับกลุ่มทดลอง และดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม จำนวนทั้งสิ้น 15 คาบ คาบละ 50 นาที โดยในกลุ่มทดลองคาบแรกผู้วิจัยจะทำการสอนให้นักเรียนได้ฝึกการสร้างพรู้ฟแมปปิง ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผู้วิจัยจำเป็นต้องไปจัดนอกเวลาเรียนปกติ เนื่องจากวิธีการที่ใช้ไม่ได้เน้นในหลักสูตรปกติ แต่เป็นการเสริม

ความรู้จากหลักสูตรปกติ และเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนในระดับสูงขึ้นต่อไปในเรื่องของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2.3 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองระหว่างการทดลอง 3 ระยะ โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน และทำการสัมภาษณ์นักเรียนตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2.4 ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม หลังการทดลองโดยผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1) ผู้วิจัยให้นักเรียนทำการทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

2) เมื่อนักเรียนทำแบบวัดเสร็จแล้ว ผู้วิจัยจะตรวจให้คะแนน

3. ขั้นเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล 2 ลักษณะ คือ ข้อมูลเชิงปริมาณ และข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยข้อมูลเชิงปริมาณจะเก็บก่อนการทดลอง ระหว่างการทดลอง และหลังการทดลอง สำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ จะเก็บระหว่างการทดลอง โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 ข้อมูลเชิงปริมาณ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยฉบับก่อนการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง เก็บข้อมูลในระยะก่อนการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม ฉบับระหว่างการทดลองใช้แบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยเก็บท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15 กับกลุ่มทดลอง และฉบับหลังการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง โดยดำเนินการเมื่อสิ้นสุดการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

3.2 ข้อมูลเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลจากผลงานเขียนแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง และการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มทดลองตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยศึกษาการเขียนแสดงวิธีทำตามองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1) การทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมด 3 ครั้ง คือ ท้ายคาบที่ 5, 10 และ 15

2) การสัมภาษณ์ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลการสัมภาษณ์หลังจากทำแบบวัดเพื่อดูพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ 5, 10 และ 15 โดยทำการสัมภาษณ์นักเรียนในองค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สรุปผลการวิจัย ดังนี้

1. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้นในทุกองค์ประกอบ โดยสามารถเรียงพัฒนาการจากมากไปหาน้อยได้เป็น 3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ 2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล และ 1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล เมื่อนำมาวิเคราะห์ตามองค์ประกอบ โดยแบ่งเป็น 3 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 (คาบที่ 1 – 5), ระยะที่ 2 (คาบที่ 6 – 10) และ ระยะที่ 3 (คาบที่ 11 – 15) รายละเอียดสรุปได้ดังนี้

ระยะที่ 1 (คาบที่ 1 – 5)

ในระยะที่ 1 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ทั้งจากในข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากในรูป แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนแต่ข้อความที่โจทย์กำหนดให้เพียงอย่างเดียว และมีนักเรียนที่ไม่มีความพยายามในการเขียนตอบ

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องครบถ้วน จากการเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็มีนักเรียนที่ระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตถูกต้องบางส่วนโดยเขียนตามความเข้าใจ และมีนักเรียนที่เข้าใจผิด จึงระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่ถูกต้อง

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับ แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับทฤษฎีบทที่ได้ระบุไว้ก่อนหน้านี้

ระยะที่ 2 (คาบที่ 6 – 10)

ในระยะที่ 2 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 แต่นักเรียนเริ่มมีการคิดวิเคราะห์ มีนักเรียนเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ครบ แต่นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ครบ เนื่องจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พิจารณาจากข้อความในโจทย์อย่างเดียวก็เพียงพอแล้ว

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนยังใช้วิธีเดิมในการระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน เหมือนในระยะที่ 1 แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้นซึ่งมีทั้งที่เขียนข้อความถูกต้องครบถ้วนและเขียนข้อความถูกต้องบางส่วน

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่เขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลที่ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง มีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้แต่ไม่ได้บอกเหตุผลของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระยะที่ 3 (คาบที่ 11 – 15)

ในระยะที่ 3 นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับระยะที่ 1 และระยะที่ 2 กล่าวคือ ในองค์ประกอบที่ 1) นักเรียนยังใช้วิธีลอกข้อความที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 แต่นักเรียนได้รับการฝึกฝนทำให้นักเรียนมีความพยายามในการเขียนตอบ มีการพิจารณาขีดเส้นเพิ่มเติมในรูปที่โจทย์กำหนดให้

สำหรับองค์ประกอบที่ 2) นักเรียนยังใช้วิธีเดิมในการระบุทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเปิดดูข้อความทฤษฎีบทในเอกสารประกอบการเรียน เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 แต่ก็เริ่มมีนักเรียนที่เขียนข้อความตามความเข้าใจมากขึ้น และมีการเขียนข้อความโดยการพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

ส่วนองค์ประกอบที่ 3) นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และใช้ทฤษฎีบทที่ถูกต้องในการแสดงการให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องและเป็นไปตามลำดับเหมือนเดิม เหมือนในระยะที่ 1 และระยะที่ 2 โดยแสดงการให้เหตุผลได้ถูกต้องครบถ้วนมากกว่าเดิม แต่มีการเขียนข้อความแสดงการให้เหตุผลโดยพิจารณาร่วมกันกับเพื่อนนักเรียน

อภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยขอนำเสนอการอภิปรายผลการวิจัย โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. จากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียน พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 1

การที่ผลวิจัยออกมาเช่นนี้ อาจเนื่องมาจาก เทคนิคพรู้ฟแมปปิง เป็นเทคนิคการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการคิดด้วยตนเองและเป็นกลุ่ม โดยพัฒนาการให้เหตุผลให้ประสบความสำเร็จโดยการเผยให้เห็นถึงกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลัง ในการจัดการกับความคิดในขณะที่ทำตามเทคนิคไปข้างหน้า-ย้อนหลัง โดยใช้การสร้างพรู้ฟแมปปิงเพื่อให้มองเห็นแนวทางในภาพรวม และสามารถจดบันทึกกระบวนการคิดในขณะที่ทำได้ ซึ่งมีรายละเอียดสนับสนุนดังนี้

ตลอดการทดลองผู้วิจัยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอน ทำให้นักเรียนเข้าใจถึงขั้นตอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการคิด พัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตให้ประสบความสำเร็จด้วยวิธีที่ง่ายขึ้นด้วยการสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เริ่มต้นจากกระบวนการย้อนหลังจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ตามด้วยกระบวนการไปข้างหน้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ การตัดสินใจว่าจะ

ดำเนินการต่อไปในทิศทางใด ไปข้างหน้าหรือย้อนหลัง ขึ้นอยู่กับว่าทิศทางใดทำให้การให้เหตุผลก้าวหน้า โดยทำกลับไปกลับมาระหว่างกระบวนการทั้งสองจนกระทั่งการพิสูจน์สำเร็จลง ซึ่งกระบวนการทำงานในการสร้างฟรู้ฟแมปปิงจะส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตมากขึ้น สอดคล้องกับ Linares (2008: 2-3) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ผลของการใช้พรู้ฟแมปปิงในการเรียนการสอนเรขาคณิตมัธยมศึกษาที่มีผลต่อความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งพบว่านักเรียนมีความเพลิดเพลินในกระบวนการนี้มากกว่ารูปแบบการพิสูจน์ที่แบ่งเป็นสองคอลัมน์โดยตรง และประสบความสำเร็จในการพิสูจน์มากขึ้น อีกทั้งในขั้นสอนครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิดและปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ครูคอยให้ความช่วยเหลือให้คำแนะนำ ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในความรู้ที่ตนเองมีอยู่นำไปสู่การให้เหตุผลเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ National Council of Teacher of Mathematics (2000: 262-267) ที่กล่าวว่า การให้นักเรียนทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ การให้อธิบายเหตุการณ์ต่างๆ อย่างเป็นเหตุเป็นผล นักเรียนจะมีเหตุผลของตนเองที่แตกต่างจากผู้อื่น และการให้นักเรียนได้อธิบายหรือชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน และที่สำคัญคือ นักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเอง

2. จากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 2

การที่ผลวิจัยออกมาเช่นนี้ อาจเนื่องมาจาก การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีความเหมาะสมกับการพัฒนาและส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกัน และมีการตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิด และปฏิบัติด้วยตนเอง โดยครูเลือกใช้ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่ได้นำแนวคิดไปประยุกต์ใช้ และมีการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ซึ่งประกอบไปด้วย 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป โดยแต่ละขั้นมีรายละเอียดสนับสนุนดังนี้

ขั้นนำ เป็นขั้นที่ครูช่วยทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน และจัดกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เรียนเพื่อโน้มน้าวและจูงใจนักเรียนเข้าสู่บทเรียน โดยครูจะสนทนากับนักเรียนเพื่อสร้างความสนใจ ยกตัวอย่างที่มีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาบทเรียน และตรวจสอบความรู้พื้นฐานของนักเรียน ทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ให้กับนักเรียน สอดคล้องกับ Bruner (1969) ที่กล่าวว่า ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนลงมือปฏิบัติ ส่งเสริมกระตุ้นการเรียนรู้ และสร้างแรงจูงใจ ครูต้องให้การช่วยเหลือ เตรียมคำถามที่ช่วยกระตุ้นความคิด

ขั้นสอน เป็นขั้นที่ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ร่วมกันเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกัน โดยใช้ทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตที่ได้นำแนวคิดไปใช้ ครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้คิด และปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้ได้แสดงความเข้าใจของตนเอง ครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิง ร่วมกันสร้างพรู้ฟแมปปิง โดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า-ย้อนหลัง เริ่มต้นจากกระบวนการย้อนกลับจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ตามด้วยกระบวนการไปข้างหน้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ จากนั้นจึงทำกลับไปกลับมาทั้งสองกระบวนการ จนกระทั่งการพิสูจน์

สำเร็จ โดยครูนำเสนอทฤษฎีบทหรือปัญหาทางเรขาคณิตให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์ ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการย้อนหลัง โดยเริ่มจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ เขียนข้อความไว้ด้านล่างสุดแล้วล้อมรอบด้วยวงรี ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ แล้วใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิง โดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ขณะเดียวกันครูจะทำหน้าที่ตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน ครูให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และเขียนลูกศรละคำตอบ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี ครูให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของข้อมูลที่กำหนดให้ ลงในพรู้ฟแมปปิง โดยเขียนไว้ด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลที่กำหนดให้ ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้ง โดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้ ครูให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ แล้วนำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน สอดคล้องกับ Linares (2008: 2-3) ที่ได้มีการสังเกตติดตามการมีส่วนร่วมของนักเรียนในการช่วยเหลือซึ่งกันและกันในห้องเรียนในระหว่างการเขียนพิสูจน์ วิธีการนี้เปิดโอกาสให้ได้มีการอภิปรายร่วมกันระหว่างนักเรียนกับครู นักเรียนเกิดกระบวนการคิดและพบข้อผิดพลาดอย่างเปิดเผย นอกจากนี้การเปิดโอกาสให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยการสร้างพรู้ฟแมปปิงจะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนและมีแนวคิดเป็นของตนเอง เป็นการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนเป็นอย่างดี ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ National Council of Teacher of Mathematics (2000: 271) ที่กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนที่ให้นักเรียนมีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้ มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียน ด้วยกัน มีโอกาสชี้แจงแนวคิด อธิบายเหตุผล และสื่อสารให้บุคคลอื่นเห็นด้วยกับแนวคิดของตนทั้ง การพูดและการฟัง กิจกรรมดังกล่าวจะช่วยให้นักเรียนได้สร้างความรู้ เรียนรู้ที่จะรับฟังแนวคิดใน ลักษณะต่างๆ และให้เกิดความชัดเจนในแนวคิดของตนเองซึ่งถือว่าเป็นกุญแจสำคัญในการส่งเสริม และพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้เรียนรู้มาทั้งหมด เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามข้อสงสัยโดยมีครูคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำ และมอบหมายงานให้ทำเพื่อทบทวนและเพิ่มเติมความรู้ โดยครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ และเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัยเพื่อความเข้าใจมากยิ่งขึ้น และให้นักเรียนทำใบกิจกรรมเพื่อทบทวนและเพิ่มเติมความรู้ และมอบหมายงานเพิ่มเติมเป็นการบ้าน สอดคล้องกับ ทิศนา แขมมณี (2548, 281 – 282) ที่กล่าวว่า การสรุปความรู้จะทำให้นักเรียนจัดสิ่งที่เรียนให้เป็นระบบระเบียบ เพื่อให้นักเรียนจดจำสิ่งที่เรียนรู้ได้ง่าย

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลจากการวิจัยในครั้งนี้ไปใช้

1.1 ระหว่างการทดลองผู้วิจัยพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต นักเรียนอาจมีศักยภาพในการสร้างพรู้ฟแมปปิงไม่เท่ากัน ครูผู้สอนจึงควรตั้งคำถามเพื่อดึงความรู้ของนักเรียน

1.2 ระหว่างการทดลองผู้วิจัยพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ครูผู้สอนควรใช้สื่อการเรียนรู้ที่มีข้อความและมีรูปภาพประกอบเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีการเรียนรู้ที่ดียิ่งขึ้น

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ระหว่างการทดลองผู้วิจัยพบว่าควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตในห้องเรียนปกติ เนื่องจากผู้วิจัยทดลองเน้นเฉพาะการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต จึงนำมาสอนนอกเวลาเรียนปกติ

2.2 ระหว่างการทดลองผู้วิจัยพบว่านักเรียนมีการเชื่อมโยงความรู้ในแต่ละทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ จึงควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กรมวิชาการ. (2546). คู่มือจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: กระทรวงศึกษาธิการ.

กรรณิการ์ กวักเพชูรย์. (2544). *หลักคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี. (2535). *การสอนพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา*. ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย

ขวัญ เพียซ้าย. (2547). *การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร.

เจนสมุทร แสงพันธ์. (2550). *การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาปลายเปิด: เน้นการแก้ปัญหาในกลุ่มย่อย*. รายงานการวิจัย คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

จำเริญ อนันตธรรมรส. (2553). *ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ณัฐิกานต์ รักนาค. (2552). *การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนตามแนวคิดการถ่ายโยงการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการเชื่อมโยงของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1*. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทิศนา แขมมณี. (2544). *วิทยาการด้านการคิด*. กรุงเทพมหานคร: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

_____. (2548). *รูปแบบการเรียนการสอน: ทางเลือกที่หลากหลาย*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ธนูชัย ภูอุดม. (2524). *การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาบัณฑิต*. ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

ปรีชา คุวินทร์พันธุ์. (2526). *รายงานผลการวิจัยโครงการจัดช่วงชั้นทางสังคมของกรุงเทพมหานคร*. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปานทอง กุลนาถศิริ. (2541). การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาในศตวรรษที่ 21. *วารสาร สสวท., 26*(กรกฎาคม-กันยายน): 3-5.

_____. (2543). ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM: Principle and Standards for School Mathematics ในปี ค.ศ. 2000. *วารสารคณิตศาสตร์, 44*(สิงหาคม-ตุลาคม): 4-18.

ปิยวดี วงษ์ใหญ่. (2548). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพมหานคร: เอส พี เอ็น การพิมพ์.

พงศธร มหาวิจิตร. (2550). กิจกรรมเสริมสร้างทักษะ/กระบวนการคณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้จำนวนและการดำเนินการและเรขาคณิต. *วารสารคณิตศาสตร์, 35*(สิงหาคม-ตุลาคม): 48-52.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2544). *การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2541). *หลักคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุวรรณดา พรหมนิวาส. (2553). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เยาวเรศ สิงหนันท์. (2533). *การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและเอกชนเขตการศึกษา 6*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วัฒนา มณีวงศ์. (2542). *ผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อความสามารถทางการเรียนเรขาคณิตและเห็นคุณค่าในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ศิริจันทร์ เวสารัชศาต. (2551). *คณิตศาสตร์พื้นฐาน*. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545ก). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: หน่วยการพิมพ์สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

_____. (2545ข). *เรขาคณิต*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพัฒนาธุรกิจ.

_____. (2547). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์*, กรุงเทพมหานคร: รากขวัญ.

_____. (2551). *ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: ส เจริญ การพิมพ์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *ผลการประเมิน PISA 2009 การอ่านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: ห้างหุ้นส่วนจำกัด อรุณการพิมพ์.

_____. (2555ก). *การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: ซีเอ็ดยูเคชั่น.

_____. (2555ข). *ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพเส้นทางสู่ความสำเร็จ*. กรุงเทพมหานคร: 3-คิว มีเดีย.

_____. (2555ค). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: 3-คิว มีเดีย.

_____. (2556). *ผลการประเมิน PISA 2012 คณิตศาสตร์ การอ่าน และวิทยาศาสตร์ บทสรุปสำหรับผู้บริหาร*. กรุงเทพมหานคร: แอดวานซ์ พริ้นติ้ง เซอร์วิส.

สมเดช บุญประจักษ์. (2540). *การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ*. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุเทพ ทองอยู่. (2534). *ปัญหาทางคณิตศาสตร์*. เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ. (2556). *รายงานสภาวการณ์การศึกษาไทยในเวทีโลก พ.ศ. 2556*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์พริกหวานกราฟฟิค จำกัด

สุนีย์ คล้ายนิล, ปรีชา เดชศรี, และอัมพลิกา ประโมจนีย์. (2549). *การเรียนรู้เพื่อโลกวันพรุ่งนี้ รายงานสรุปเพื่อการบริหาร*. กรุงเทพมหานคร: เอส พลัส พรีเพรส ซีสเท็ม.

_____. (2550). *บทสรุปเพื่อการบริหาร: การรู้เรื่องวิทยาศาสตร์ การอ่าน และคณิตศาสตร์ของนักเรียนวัย 15 ปี รายงานการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ PISA 2006*. กรุงเทพมหานคร: เซเว่น พริ้นติ้ง กรุ๊ป.

_____. (2551). *ความรู้และสมรรถนะทางวิทยาศาสตร์สำหรับโลกวันพรุ่งนี้*. กรุงเทพมหานคร: เซเว่น พริ้นติ้ง กรุ๊ป.

สุภาพร ฟองจันทร์ตา. (2553). *การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้เทคนิคการนึกภาพและใช้สี โรงเรียนแม่แตง จังหวัดเชียงใหม่*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

อัครยา สังขจันทร์. (2543). *การสอนเพื่อพัฒนาการใช้เหตุผล: คู่มือการเรียนการสอนการคิดวิเคราะห์วิจารณ์ คณะกรรมการส่งเสริมการเรียนการสอนเน้นการพัฒนาความคิดวิเคราะห์วิจารณ์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2547). *ประมวลบทความ หลักการ และแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

_____. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Chulalongkorn University

ภาษาอังกฤษ

Alice, F. A. and Shirel, Y. (1999). Mathematics Reasoning During Small-Group Problem Solving. *Developing Mathematics Reasoning in Grades K-12 1999 Yearbook*. Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

Baroody, A. J. (1993). *Problem Solving, Reasoning and Communication, K-8: Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmillan.

Bell, R. N. (1988). *The Use of Expository Writing as a Method of Teaching Critical Thinking Skill and Geometry*. Dissertation Abstracts International.

Bobango, J. C. (1988). *Van Hiele Levels of Geometry Though and Student Achievement in Standard Content and Proof Writing: The Effect of Phase-Based Instruction*. Dissertation Abstracts International.

Brandt, R. (1984). *Teaching of Thinking about Thinking*. Educational Leadership. (September): 3.

Bruner, L. S. (1969). *The Process of Education*. Massachusetts: Harvard University Press.

Carroll, W. M. (1998). Middle school students' reasoning about geometric situations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(March-April): 398-403.

Chaiyasang, S. (1989). *An Investigation into Level of Geometric Thinking and Ability to Construct Proof of Student in Thailand*. Dissertation Abstracts International.

Cheng, Y. H. & Lin, F. L. (2006). *Using Reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof*. Research Report in PME 30. Pague.

Cooney, T. J., and others. (1999). *Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education*. New Hamshire: Heinemann.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., and Choustoulakis, E. (2007). *Developing a Proof - Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students*. The Teaching Of Mathematics 2.

Duval, R. (1998). *Geometry from a Cognitive Point of View*. In C Mammana and V Villani(Eds), Perspective on the teacher of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Garabedian, C. (1981). *The Effects of Proof on Achievment and Reasoning Ability of Students in Geometry*. Dissertation Abstracts International.

Greenwood, J. J. (1993). On the Nature of Teaching and Assessing. Mathematical Power and Mathematical Think, *Arithematic Teacher, 41*(Nov 1993): 144-52.

Gustafson, D. R. & Peter D. F. (1991). *Element Geometry*. 3rd ed. New York: John Wiley & Son.

Jeff, C. (2003). *Geometric Proofs: Definition and Format* Retrieved May 23, 2015, from http://study.com/academy/lesson/geometric-proofs-definition-and-format.html

Kahney, H. (1993). *Problem solving: Current issues*. 2nd ed. Buckingham: Open University Press.

Krulik, S. and Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

_____. (1999). Innovative tasks to improve critical-and creative thinking skill. In L.V. Stiff & F.R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning In Grades K-12*: 138-145.

Leighton, N. C., and Sternberg, R. G. (2004). *The Nature of Reasoning*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Linares, L. and Smith P. (2009). *PROOF MAPPING*. MATHMATICS TEACHER Vol. 103, No 4 November 2009. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

Linares, L. (2008). *The Effects of a Proof Mapping Instructional Technique on High School Geometry Students and Their Ability to Write Geometric Proofs*. M.A. thesis, University of California, Davis.

Moore, R. C. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to do Mathematical Proofs*. Dissertation Abstracts International.

Morash R. P. Bridge to Abstract Mathematics. (1991). *Mathematical Proof and Structures*. 2nd ed. New York: Mc Graw-Hill

National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

_____. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

O'Daffer, P. and Thornquist, B. A. (1993). Critical Thinking Mathematics Reasoning and Proof. *In Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics*. New York: Macmillan.

O'Daffer, P. (1990). Inductive and Deductive Reasoning. *The Mathematics Teacher*.

Pretage, S. (2002). Mathematics 11-16. In Haggarty, L. (ed.), *Aspects of teaching secondary matgematics*: Perspectives on practice, pp. 24-37. London: Routledge Falmer.

Rowan, T. E. and Morrow, L. J. (1993). Implementing K-8 Curriculum and Evaluation Standards. *Arithmetic Teacher*: 16-18.

Senk, S. L. (1985). *How Well Do Students Write Geometry Proof?* The Mathematics Teacher.

Solow, D. (2002). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes*. New York, NY: John Wiley & Sons.

SparkNotes Editors. (2015). *SparkNote on Geometry: Inductive and Deductive Reasoning*. Retrieved May 23, 2015, from http://www.sparknotes.com/ math/geometry3/inductiveanddeductivereasoning/

_____. (2015). *SparkNote on Geometric Proofs*. Retrieved May 23, 2015, from http://www.sparknotes.com/math/geometry3/geometricproofs/

Stiggins, R. (1997). *Student-Centered Classroom Assessment*. Columbus, Ohio: Merrill.

Thomson, H. A. (2000). *Investigating and Representing Inquiry in a college Mathematics Course*. Dissertation Abstracts International.

Wilson, J. W. Fernandez, M. L. and Handaway N. (1993). *Mathematical Problem Solving*. In Research Ideas for the classroom. (High School Mathememtics). Edited by Prtricia S. wilson. New Yark: Macmillan Publishing Company.

Wing, J. and Arbab, F. (1985). *GEOMETRY REASONING: A NEW PARADIGM FOR PROCESSING GEOMETRIC INFORMATION*. Computer Science Department of The University of Southern California.

Yuanxin (Amy) Yang Alcocer. (2003). *Inductive & Deductive Reasoning in Geometry: Definition & Uses*. Retrieved May 23, 2015, from http://study.com/academy/ lesson/inductive-and-deductive-reasoning-in-geometry.html.

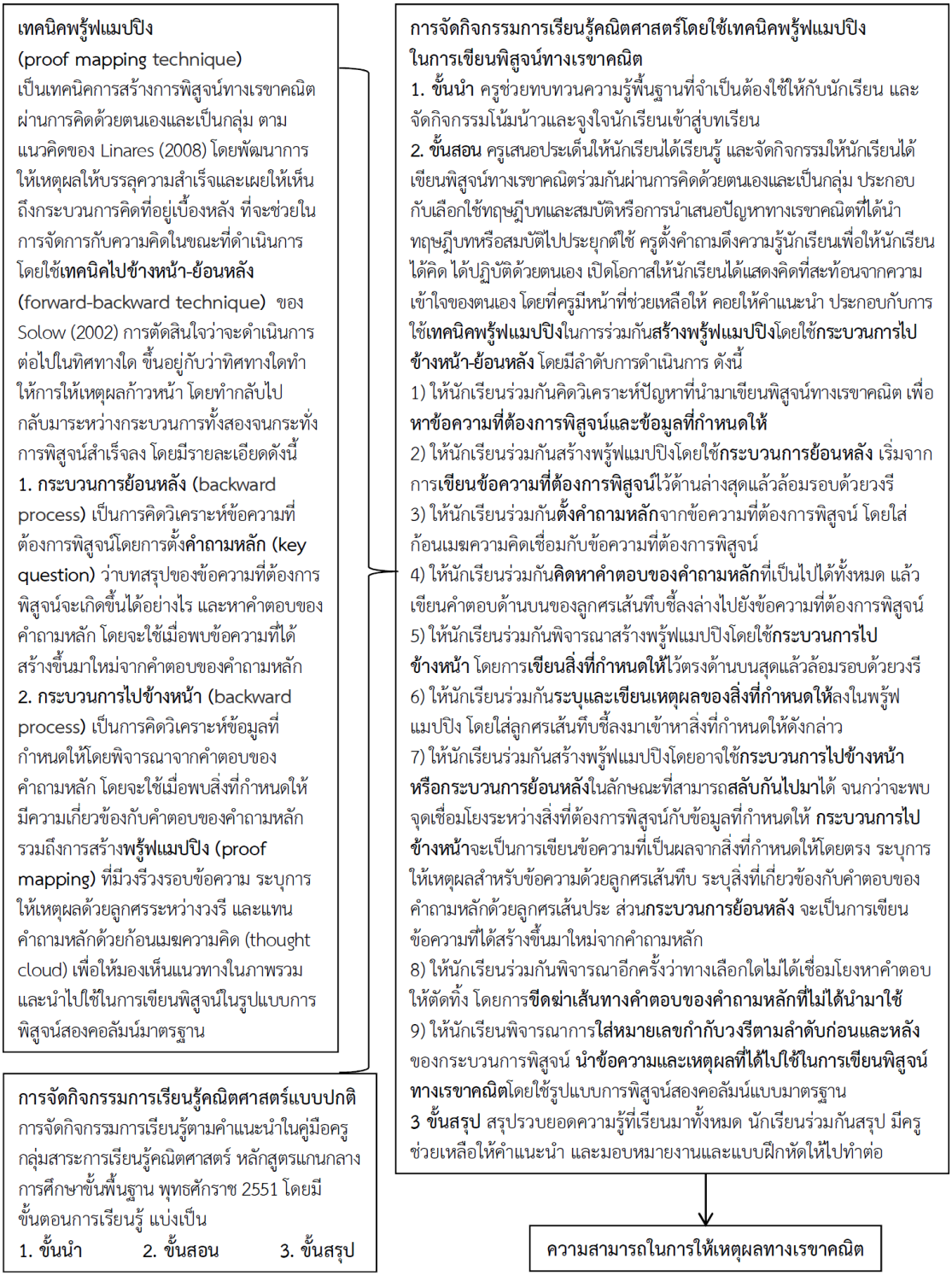
ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ก
กรอบแนวคิดการวิจัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

กรอบแนวคิดของการวิจัย



ภาคผนวก ข
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย
แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

1. อาจารย์ ดนัย ยังคง	ผู้เชี่ยวชาญพิเศษสาขาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
2. อาจารย์ ดร. ไพโรจน์ น่วมนุ่ม	อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. อาจารย์ วัฒนิตา นำแสงวานิช	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ค
หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60- 0569

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กุมภาพันธ์ 2560

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ ดนัย ยังคง

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายกมล นาคสุทธิ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยศวีร์ สายฟ้า)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565 ต่อ 6732
เบอร์โทรติดต่อนิสิตผู้วิจัย : 08-1889-6558 Email : kamon2534@hotmail.com

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน งานหลักสูตรและการจัดการเรียนฯ ฝ่ายวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โทร.82565-97 ต่อ 6732
ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60- 0570 **วันที่** กุมภาพันธ์ 2560
เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม

ด้วย นายกมล นาคสุทธิ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยศวีร์ สายฟ้า)
รองคณบดี

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน งานหลักสูตรและการจัดการเรียนฯ ฝ่ายวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โทร.82565-97 ต่อ 6732
ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60- 0571 **วันที่** กุมภาพันธ์ 2560
เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และรองคณบดี

ด้วย นายกมล นาคสุทธิ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ วัฒนิตา นำแสงวานิช เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ วัฒนิตา นำแสงวานิช เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยศวีร์ สายฟ้า)
รองคณบดี

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60-0567

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กุมภาพันธ์ 2560

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายกมล นาคสุทธิ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บข้อมูลด้วย แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ใบกิจกรรม แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบสัมภาษณ์ กับ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บข้อมูลวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยศวีร์ สายฟ้า)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรติดต่อนิสิตผู้วิจัย : 08-1889-6558 Email : kamon2534@hotmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60- 0568

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กุมภาพันธ์ 2560

เรื่อง ขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสถาพรวิทยา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายกมล นาคสุทธิ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต กับ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยศวีร์ สายฟ้า)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรติดต่อนิสิตผู้วิจัย : 08-1889-6558 Email : kamon2534@hotmail.com

ภาคผนวก ง
โครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 13 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

เนื้อหา	เนื้อหาย่อย	จำนวนข้อสอบ try out	จำนวนข้อสอบใช้จริง
ความเท่ากันทุกประการ	1. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต	2 ข้อ (1, 2)	1 ข้อ
	2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน	2 ข้อ (3, 4)	1 ข้อ
	3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม	2 ข้อ (5, 6)	1 ข้อ
	4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน	2 ข้อ (7, 8)	1 ข้อ
	5. การนำไปใช้	2 ข้อ (9, 10)	1 ข้อ

ตารางที่ 14 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

เนื้อหา	เนื้อหาย่อย	จำนวนข้อสอบ try out	จำนวนข้อสอบใช้จริง
เส้นขนาน	1. เส้นขนานและมุมภายใน	2 ข้อ (1, 2)	1 ข้อ
	2. เส้นขนานและมุมแย้ง	2 ข้อ (3, 4)	1 ข้อ
	3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน	2 ข้อ (5, 6)	1 ข้อ
	4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม	4 ข้อ (7, 8, 9, 10)	2 ข้อ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก จ
ผลการประเมินแบบวัดจากผู้ทรงคุณวุฒิ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 15 แสดงผลการประเมินความสอดคล้องและความเหมาะสมเฉลี่ยของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

รายการประเมิน	ความสอดคล้องของข้อคำถาม กับองค์ประกอบที่ต้องการวัด			ความเหมาะสมด้านภาษาและการสื่อสารความหมาย
	องค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต			
	1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องสมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ	
ข้อที่ 1	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 2	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 3	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 4	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 5	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 6	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 7	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 8	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 9	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 10	1.00	1.00	1.00	1.00

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 16 แสดงผลการประเมินความสอดคล้องและความเหมาะสมเฉลี่ยของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

รายการประเมิน	ความสอดคล้องของข้อคำถาม กับองค์ประกอบที่ต้องการวัด			ความเหมาะสมด้านภาษาและการสื่อสารความหมาย
	องค์ประกอบของความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต			
	1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล	3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องสมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ	
ข้อที่ 1	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 2	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 3	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 4	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 5	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 6	1.00	1.00	1.00	0.67
ข้อที่ 7	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 8	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 9	1.00	1.00	1.00	1.00
ข้อที่ 10	1.00	1.00	1.00	1.00

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ฉ
ผลการวิเคราะห์คุณภาพเครื่องมือ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 17 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 10 ข้อ (try out)

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก	ค่าความเที่ยง
1	0.41	0.43	0.63
2	0.33	0.15	
3	0.25	0.10	
4	0.41	0.23	
5	0.31	0.23	
6	0.20	0.10	
7	0.39	0.08	
8	0.31	0.28	
9	0.25	0.05	
10	0.30	0.25	

ตารางที่ 18 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง จำนวน 5 ข้อ (ใช้จริง)

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก	ค่าความเที่ยง
1	0.38	0.40	0.65
2	0.41	0.28	
3	0.33	0.30	
4	0.35	0.25	
5	0.30	0.20	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 19 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง จำนวน 10 ข้อ (try out)

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก	ค่าความเที่ยง
1	0.45	0.25	0.84
2	0.58	0.35	
3	0.53	0.33	
4	0.41	0.35	
5	0.48	0.35	
6	0.39	0.18	
7	0.33	0.30	
8	0.18	0.10	
9	0.33	0.25	
10	0.33	0.15	

ตารางที่ 20 แสดงคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง จำนวน 5 ข้อ (ใช้จริง)

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก	ค่าความเที่ยง
1	0.58	0.35	0.70
2	0.48	0.35	
3	0.48	0.35	
4	0.34	0.28	
5	0.34	0.25	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ช
ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง

1. แบบวัดฉบับนี้ เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยจำนวน 5 ข้อ ข้อละ 8 คะแนน

2. เวลาในการทำแบบวัด 1 ชั่วโมง

3. ในการตอบคำถาม ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ในแบบวัด

4. นักเรียนสามารถทดลงในพื้นที่ว่างของแบบวัดฉบับนี้ได้

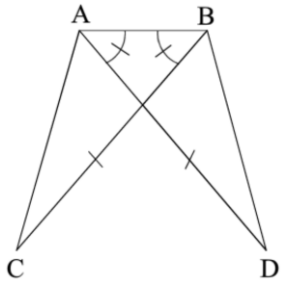
5. ให้นักเรียนทำแบบวัดให้ครบทุกข้อ และทำอย่างสุดความสามารถ

6. หากมีปัญหาใด ๆ โปรดสอบถามครูผู้คุมสอบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างการทำแบบวัด

0. จากรูป กำหนดให้ $BC = AD$ และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ จงพิจารณาว่าข้อสรุป $B\hat{A}C = A\hat{B}C$ เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$BC = AD$ และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

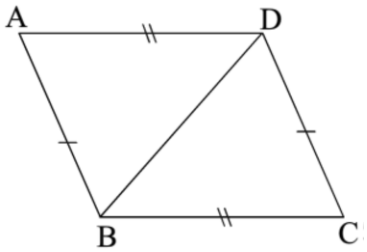
2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

- ความเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ม.ด. - มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

ข้อสรุปนี้เป็นจริง		
เนื่องจาก	$BC = AD$	(กำหนดให้)
	$A\hat{B}C = B\hat{A}D$	(กำหนดให้)
	$AB = BA$	($\overline{AB}$ เป็นด้านร่วม)
จะได้	$\Delta ABC \cong \Delta BAD$	(ด.ม.ด.)
ดังนั้น	$B\hat{A}C = A\hat{B}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

4. สงกรานต์สำรวจรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ สงกรานต์จึงสรุปว่า “เนื่องจาก $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ จะได้ว่า $B\hat{D}A = D\hat{B}C$ ” ข้อสรุปของสงกรานต์เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



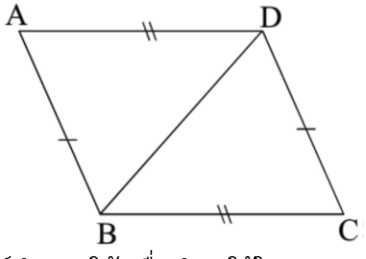
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

เฉลยตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับก่อนการทดลอง

4. สงกรานต์สำรวจรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ สงกรานต์จึงสรุปว่า “เนื่องจาก $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ จะได้ว่า $B\hat{D}A = D\hat{B}C$ ” ข้อสรุปของสงกรานต์เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$AB = CD$ และ $DA = BC$

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

- ความเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ด.ด. - มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

ข้อสรุปของสงกรานต์เป็นจริง		
เนื่องจาก	$AB = CD$	(กำหนดให้)
	$DA = BC$	(กำหนดให้)
	$BD = DB$	($\overline{BD}$ เป็นด้านร่วม)
จะได้	$\Delta ABD \cong \Delta CDB$	(ด.ด.ด.)
ดังนั้น	$B\hat{D}A = D\hat{B}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง

1. แบบวัดฉบับนี้ เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยจำนวน 5 ข้อ ข้อละ 8 คะแนน

2. เวลาในการทำแบบวัด 1 ชั่วโมง

3. ในการตอบคำถาม ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ในแบบวัด

4. นักเรียนสามารถทดลงในพื้นที่ว่างของแบบวัดฉบับนี้ได้

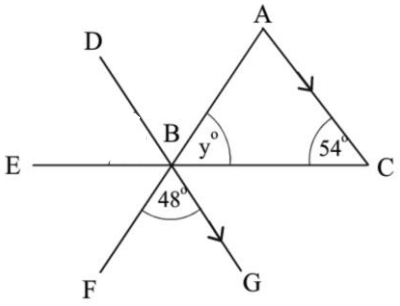
5. ให้นักเรียนทำแบบวัดให้ครบทุกข้อ และทำอย่างสุดความสามารถ

6. หากมีปัญหาใด ๆ โปรดสอบถามครูผู้คุมสอบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างการทำแบบวัด

0. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AC} \,//\, \overline{DG}$, $A\hat{C}B = 54°$, $G\hat{B}F = 48°$ และ $A\hat{B}C = y°$ จงพิจารณาว่าข้อสรุป $y = 54$ เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$\overline{AC} \,//\, \overline{DG}$ มี $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัด, $A\hat{C}B = 54°$, $G\hat{B}F = 48°$ และ $A\hat{B}C = y°$

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

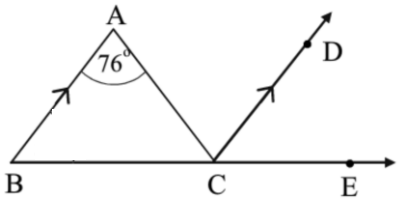
- ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน - ขนาดของมุมตรง เท่ากับ $180°$

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

ข้อสรุปนี้เป็นเท็จ เนื่องจาก $A\hat{C}B = 54°$ (กำหนดให้) จะได้ $G\hat{B}C = A\hat{C}B = 54°$ ($\overline{AC} \,//\, \overline{DG}$ มี $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัด ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) เนื่องจาก $G\hat{B}F = 48°$ และ $A\hat{B}C = y°$ (กำหนดให้) และ $A\hat{B}C + G\hat{B}C + G\hat{B}F = 180°$ (ขนาดของมุมตรง) จะได้ $y° + 54° + 48° = 180°$ (สมบัติของการเท่ากัน) ดังนั้น $y = 180 - 54 - 48 = 78$ ซึ่งไม่ตรงกับข้อสรุปที่พิจารณาที่ว่า $y = 54$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

2. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ และ $B\hat{A}C = 76°$ จงพิจารณาว่าข้อสรุป $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 107°$ เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

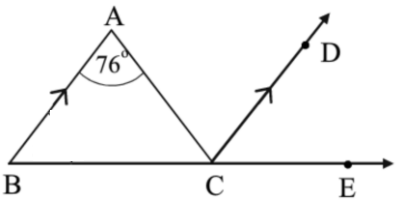
2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

เฉลยตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ฉบับหลังการทดลอง

2. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ และ $B\hat{A}C = 76°$ จงพิจารณาว่าข้อสรุป $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 107°$ เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ มี $\overline{AC}$ และ $\overline{BE}$ เป็นเส้นตัด และ $B\hat{A}C = 76°$

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

- ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน - ขนาดของมุมตรง เท่ากับ $180°$

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

ข้อสรุปนี้เป็นเท็จ เนื่องจาก $B\hat{A}C = 76°$ (กำหนดให้) $D\hat{C}A = B\hat{A}C = 76°$ ($\overline{AB} // \overrightarrow{CD}$ มี $\overline{AC}$ เป็นเส้นตัด ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) และ $A\hat{C}B + D\hat{C}A + E\hat{C}D = 180°$ (ขนาดของมุมตรง) ดังนั้น $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 180° - D\hat{C}A = 180° - 76° = 104°$ ซึ่งไม่ตรงกับข้อสรุปที่พิจารณาที่ว่า $A\hat{C}B + E\hat{C}D = 107°$

ภาคผนวก ซ
ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายคาบ

กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ **วิชา** คณิตศาสตร์พื้นฐาน **ระดับชั้น** มัธยมศึกษาปีที่ 2
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เส้นขนาน **ระยะเวลา** 50 นาที
คาบที่ 4 เส้นขนานและมุมแย้ง (1) **ครูผู้สอน** นายกมล นาคสุทธิ

มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

สาระที่ 3 :เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.2 :ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหา

ม.2/1 :ใช้สมบัติเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมและสมบัติของเส้นขนานในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 :ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 :มีความสามารถในการแก้ปัญหาการ ให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ม.1–3/1 :ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา

ม.1–3/2 :ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ม.1–3/3 :ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ม.1–3/4 :ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ม.1-3/5 :เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้: นักเรียนสามารถ

1. อธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้
2. ใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันในการพิสูจน์ได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ: นักเรียนสามารถ

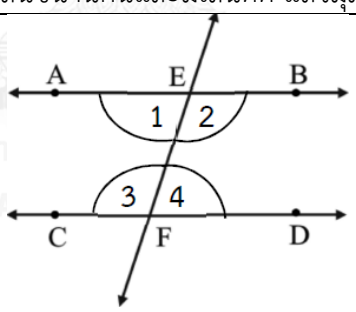
1. ให้เหตุผลและสรุปผลโดยใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้
2. นำเสนอวิธีการพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้

ด้านคุณลักษณะ: นักเรียน

1. ให้ความร่วมมือกับกิจกรรมภายในชั้นเรียน
2. มีความตั้งใจและมีความสนใจในกิจกรรม
3. กล้าคิดกล้าแสดงความคิดเห็นของตนเอง
4. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



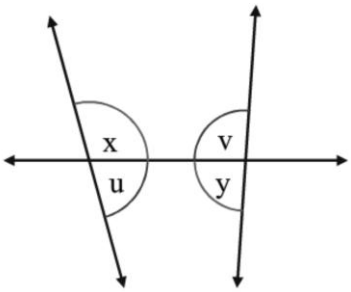
จากรูป $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ว่า $\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$

สาระการเรียนรู้

2. เส้นขนานและมุมแย้ง

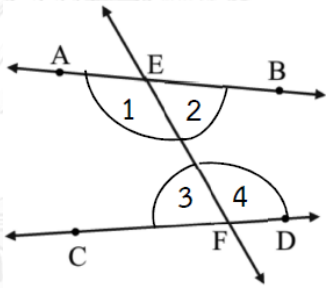
พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่าเป็น**มุมแย้ง** และ
เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่าเป็น**มุมแย้ง**

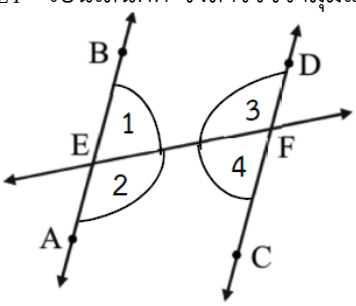
สำรวจมุมแย้ง

กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมคู่ใดเป็นมุมแย้ง



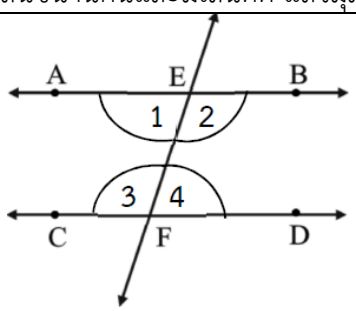
จากรูป $\hat{1}$ กับ $\hat{4}$ และ $\hat{2}$ กับ $\hat{3}$

กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมแย้งคู่ใดมีขนาดเท่ากัน



จากรูป $\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$

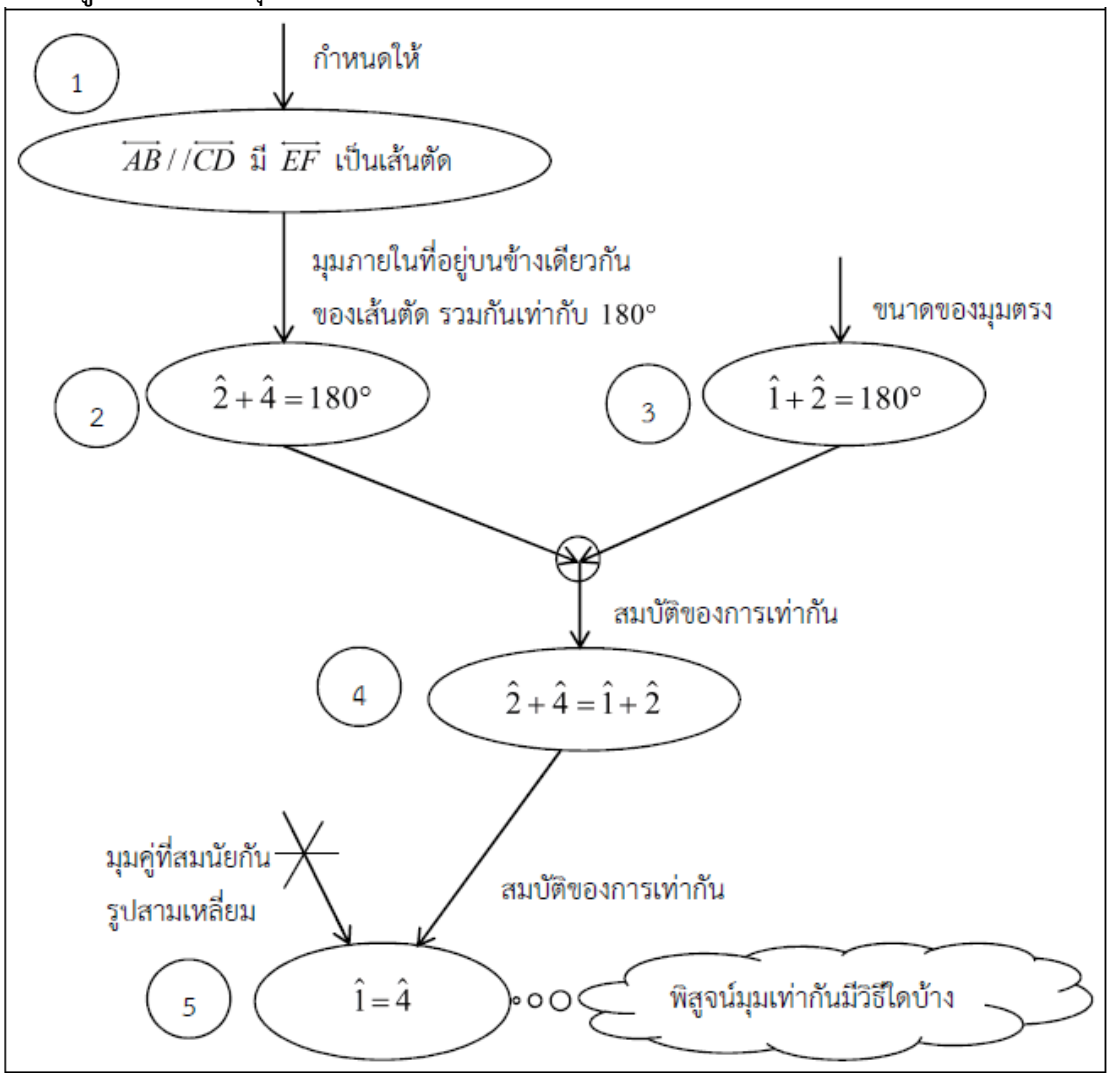
ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด

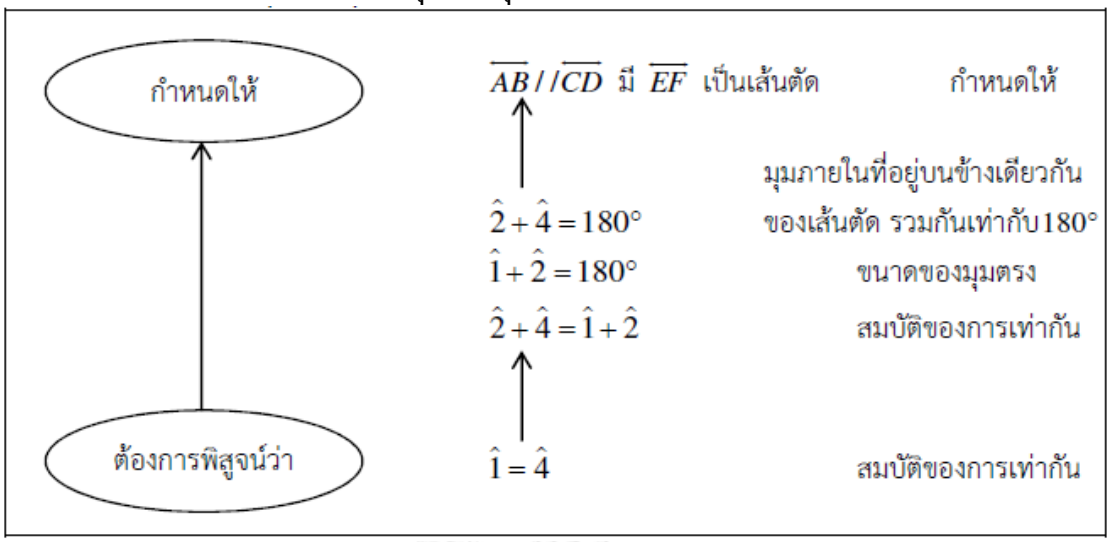
ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$

สร้างพรู๊ฟแมปปิง (กลุ่มทดลอง)



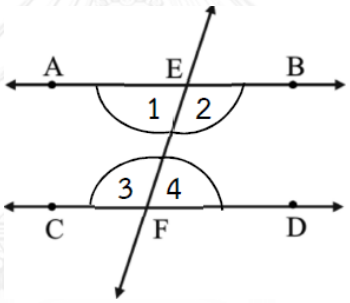
$\hat{2} = \hat{3}$ พิสูจน์ทำนองเดียวกัน

การมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (กลุ่มควบคุม)



$\hat{2}=\hat{3}$ พิสูจน์ทำนองเดียวกัน

เขียนพิสูจน์



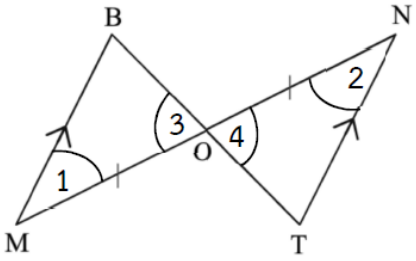
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1}=\hat{4}$ และ $\hat{2}=\hat{3}$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด	1. กำหนดให้
2. $\hat{2}+\hat{4}=180°$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกัน ของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ $180°$
3. $\hat{1}+\hat{2}=180°$	3. ขนาดของมุมตรง
4. $\hat{2}+\hat{4}=\hat{1}+\hat{2}$	4. สมบัติของการเท่ากัน
5. $\hat{1}=\hat{4}$	5. สมบัติของการเท่ากัน
6. $\hat{2}=\hat{3}$	6. พิสูจน์ทำนองเดียวกัน

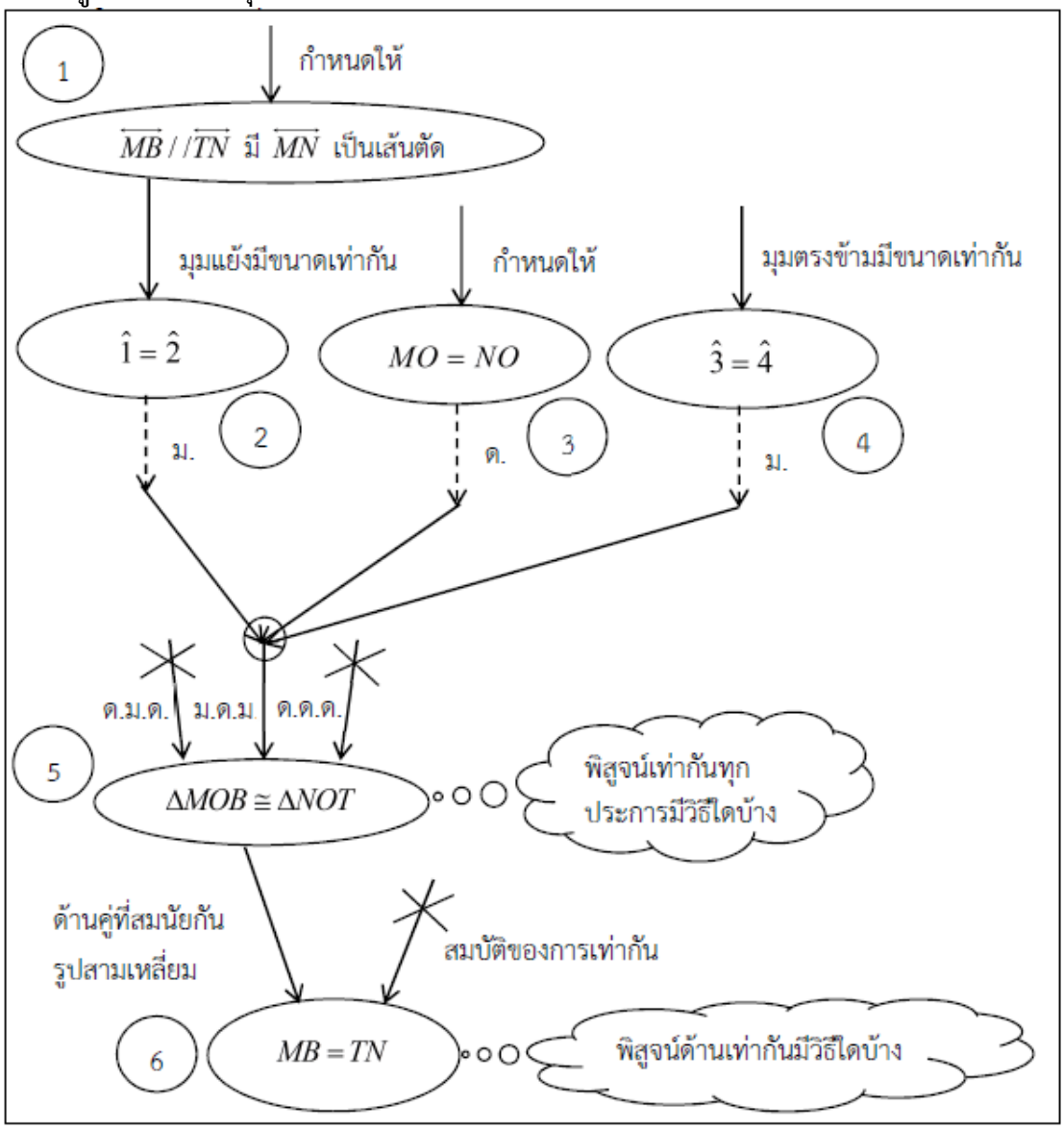
ข้อที่ 1 จากรูป กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ $MO = NO$ จงพิสูจน์ว่า $MB = NT$



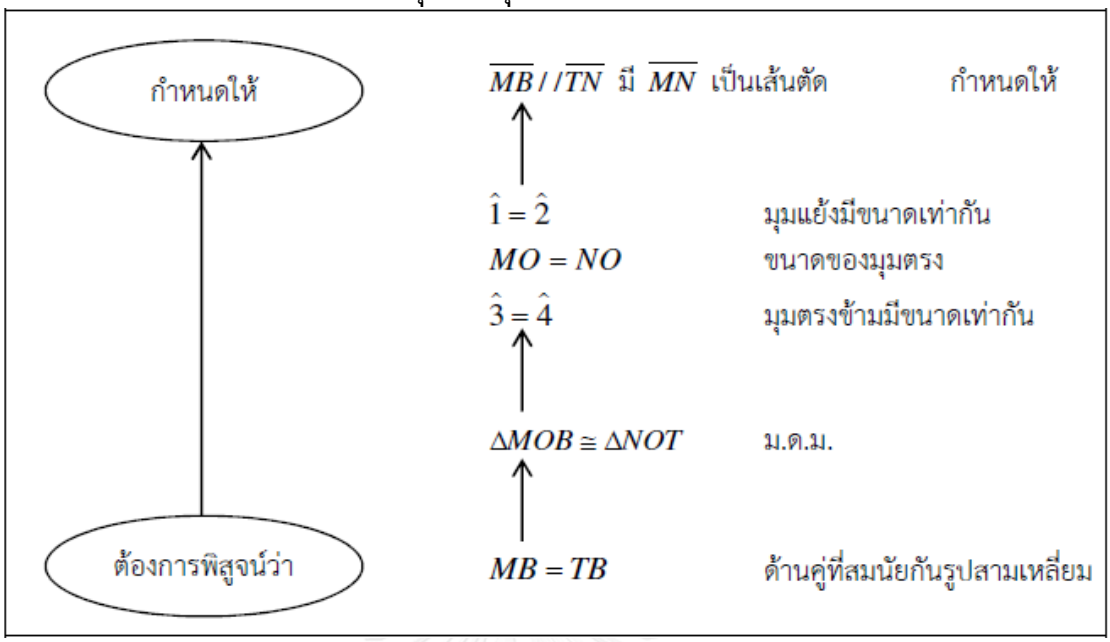
กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด และ $MO = NO$

ต้องการพิสูจน์ว่า $MB = NT$

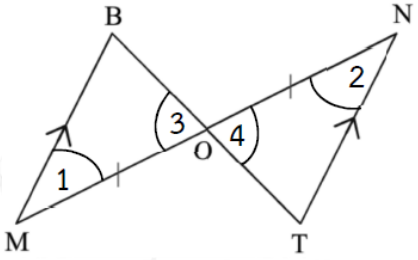
สร้างพรู้ฟแมปปิง (กลุ่มทดลอง)



การมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (กลุ่มควบคุม)



เขียนพิสูจน์



กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด และ $MO = NO$

ต้องการพิสูจน์ว่า $MB = NT$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด	1. กำหนดให้
2. $\hat{1} = \hat{2}$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
3. $MO = NO$	3. กำหนดให้
4. $\hat{3} = \hat{4}$	4. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
5. $\Delta MOB \cong \Delta NOT$	5. ม.ด.ม.
6. $MB = NT$	6. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน

กิจกรรมการเรียนรู้

<table>
<tr><th>กลุ่มทดลอง
(การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)</th><th>กลุ่มควบคุม
(การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)</th></tr>
<tr><td colspan="2">ขั้นนำ
1. ครูให้นักเรียนพิจารณาจากรูป พร้อมทั้งให้อธิบายความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องมุมแย้ง (จากรูป เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่าเป็นมุมแย้ง และ เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่าเป็นมุมแย้ง)
2. ครูให้นักเรียนสำรวจมุมแย้งจากรูป โดยกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด สำรวจว่ามุมคู่ใดเป็นมุมแย้ง ($\hat{1}$ กับ $\hat{4}$ และ $\hat{2}$ กับ $\hat{3}$)
3. ครูให้นักเรียนสำรวจมุมแย้งจากรูป โดยกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด สำรวจว่ามุมแย้งคู่ใดมีขนาดเท่ากัน ($\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$)
4. ครูกล่าวกับนักเรียนว่าคาบนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน (ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)</td></tr>
<tr><td>ขั้นสอน
1. ครูนำเสนอทฤษฎีบทเพื่อให้นักเรียนเขียนพิสูจน์ (ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
2. ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ โดยพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
-ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คืออะไร ($\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$)
-ข้อมูลที่กำหนดให้ มีอะไรบ้าง ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด)
3. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการย้อนหลัง โดยเริ่มจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($\hat{1} = \hat{4}$) เขียนข้อความไว้ด้านล่างสุดแล้วล้อมรอบด้วยวงรี
4. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ แล้วใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงโดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน</td><td>ขั้นสอน
1. ครูนำเสนอทฤษฎีบทเพื่อให้นักเรียนเขียนพิสูจน์ (ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
2. ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ โดยพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
-ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คืออะไร ($\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$)
-ข้อมูลที่กำหนดให้ มีอะไรบ้าง ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด)
3. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด) โดยเขียนไว้ด้านบนสุดของแผนภาพ
4. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($\hat{1} = \hat{4}$) โดยเขียนไว้ด้านล่างสุดของแผนภาพ</td></tr>
</table>

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)

-จากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($\hat{1} = \hat{4}$) ควรตั้งคำถามหลักว่าอะไร (พิสูจน์มุมเท่ากันมีวิธีใดบ้าง)
5. ครูให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และเขียนลูกศรละคำตอบ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
-คำตอบของคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีอะไรบ้าง
(มุมคู่ที่สมนัยกันรูปสามเหลี่ยม/สมบัติของการเท่ากัน)
6. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด) ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี
7. ครูให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของข้อมูลที่กำหนดให้ (กำหนดให้) ลงในพรู้ฟแมปปิง โดยเขียนไว้ด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลที่กำหนดให้
8. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
-จากข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด) นำไปสู่ข้อมูลใดได้บ้าง ($\hat{2} + \hat{4} = 180°$) [เขียนข้อความถัดลงมาด้านล่างล้อมรอบด้วยวงรี]
-เหตุผลสำหรับข้อมูลที่ได้ ($\hat{2} + \hat{4} = 180°$) คืออะไร (มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกัน$180°$) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่เชื่อมระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้กับข้อมูลที่ได้]
	5. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยพิจารณาว่าเป็นผลที่เกิดจากเหตุใด โดยเริ่มจากผลเป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($\hat{1} = \hat{4}$) ทำไปเรื่อยจนกว่าจะเจอเหตุเป็นข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด) โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้
	-จากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($\hat{1} = \hat{4}$) เป็นผลที่เกิดจากเหตุใด ($\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$ / $\hat{1} + \hat{2} = 180°$ / $\hat{2} + \hat{4} = 180°$) [เขียนข้อความถัดขึ้นไปด้านบนและเขียนลูกศรเส้นทึบชี้ขึ้นมาจากผลไปหาเหตุ]
	-เหตุของข้อความ $\hat{1} = \hat{4}$ คืออะไร (สมบัติของการเท่ากัน) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{1} = \hat{4}$]
	-เหตุของข้อความ $\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$ คืออะไร (สมบัติของการเท่ากัน) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$]
	-เหตุของข้อความ $\hat{1} + \hat{2} = 180°$ คืออะไร (ขนาดของมุมตรง) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{1} + \hat{2} = 180°$]
	-เหตุของข้อความ $\hat{2} + \hat{4} = 180°$ คืออะไร (มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกัน$180°$) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{2} + \hat{4} = 180°$]
	-จากข้อความ $\hat{2} + \hat{4} = 180°$ เป็นผลที่เกิดจากเหตุใด ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด ซึ่งเป็นข้อมูลที่กำหนดให้) [เขียนข้อความถัดขึ้นไปด้านบน และเขียนลูกศรเส้นทึบชี้ขึ้นมาจากผลไปหาเหตุ]
	-เหตุของข้อความ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด คืออะไร (กำหนดให้) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด]
	6. ครูให้นักเรียนพิจารณาแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ที่ได้สร้างขึ้น นำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยเขียน

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)

-จากข้อมูลที่มีสามารถเขียนข้อมูลใหม่จากคำตอบใดของคำถามหลักได้ (สมบัติของการเท่ากัน)
-ข้อมูลใหม่ที่ได้ คืออะไร ($\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$) [เขียนข้อความถัดขึ้นมาด้านบนล้อมรอบด้วยวงรี]
-เหตุผลของข้อมูลใหม่ที่ได้ ($\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$) คืออะไร (สมบัติของการเท่ากัน) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่เชื่อมระหว่างข้อมูลใหม่กับคำตอบคำถามหลักที่ใช้]
-จากข้อมูลที่มีอยู่ ($\hat{2} + \hat{4} = 180° / \hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$) ข้อมูลใหม่ที่ได้ คืออะไร ($\hat{1} + \hat{2} = 180°$) [เขียนข้อความล้อมรอบด้วยวงรี]
-เหตุผลของข้อมูลใหม่ที่ได้ ($\hat{1} + \hat{2} = 180°$) คืออะไร (ขนาดของมุมตรง) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาข้อมูล และเขียนลูกศรเชื่อมโยงข้อมูลทั้งหมด]
9. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้ง (มุมคู่ที่สมนัยกัน รูปสามเหลี่ยม) โดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้
10. ครูให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ แล้วนำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน [สำหรับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ $\hat{2} = \hat{3}$ ให้เขียนในช่องข้อความไว้ด้านล่านสุด และเขียนในช่องเหตุผลว่า พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน]
11. ครูนำเสนอปัญหาเพื่อให้นักเรียนเขียนพิสูจน์ (ข้อที่ 1 จากรูป กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ $MO = NO$ จงพิสูจน์ว่า $MB = NT$)
12. ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
	จากด้านบนลงไปด้านล่าง ตามลำดับข้อความและเหตุผล โดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน [สำหรับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ $\hat{2} = \hat{3}$ ให้เขียนในช่องข้อความไว้ด้านล่านสุด และเขียนในช่องเหตุผลว่า พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน]
	7. ครูนำเสนอปัญหาเพื่อให้นักเรียนเขียนพิสูจน์ (ข้อที่ 1 จากรูป กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ $MO = NO$ จงพิสูจน์ว่า $MB = NT$)
	8. ครูให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์ โดยพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ เพื่อหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์และข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน
	-ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คืออะไร ($MB = NT$)
	-ข้อมูลที่กำหนดให้ มีอะไรบ้าง ($\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด และ $MO = NO$)
	9. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด) โดยเขียนไว้ด้านบนสุดของแผนภาพ
	10. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยเขียนข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($MB = NT$) โดยเขียนไว้ด้านล่างสุดของแผนภาพ
	11. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างแผนภาพการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้โดยพิจารณาว่าเป็นผลที่เกิดจากเหตุใด โดยเริ่มจากผลเป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($MB = NT$) ทำไปเรื่อยจนกว่าจะเจอเหตุเป็นข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด) โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้
	-จากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($MO = NO$) เป็นผลที่เกิดจากเหตุใด ($\Delta MOB \cong \Delta NOT$) [เขียนข้อความ

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)
-ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คืออะไร ($MB = NT$) -ข้อมูลที่กำหนดให้ มีอะไรบ้าง ($\overline{MB} \,//\, \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด และ $MO = NO$) 13. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการย้อนหลัง โดยเริ่มจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($MB = NT$) เขียนข้อความไว้ด้านล่างสุดแล้วล้อมรอบด้วยวงรี 14. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาตั้งคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ แล้วใส่คำถามหลักเข้าไปในพรู้ฟแมปปิงโดยใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน -จากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ($MB = NT$) ควรตั้งคำถามหลักว่าอะไร (พิสูจน์ด้านเท่ากันมีวิธีใดบ้าง) 15. ครูให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบของคำถามหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วเขียนคำตอบลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และเขียนลูกศรละคำตอบ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน -คำตอบของคำถามหลักจากข้อความที่ต้องการพิสูจน์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีอะไรบ้าง (ด้านคู่ที่สมนัยกันรูปสามเหลี่ยม/สมบัติของการเท่ากัน) 16. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้า โดยการเขียนข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overline{MB} \,//\, \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด / $MO = NO$) ไว้ด้านบนสุดในพรู้ฟแมปปิงแล้วล้อมรอบด้วยวงรี โดยเขียนวงรีละข้อมูล 17. ครูให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของข้อมูลที่กำหนดให้ (กำหนดให้) ลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลที่กำหนดให้ โดยเขียนทุกวงรีข้อมูล	ถัดขึ้นไปด้านบน และเขียนลูกศรเส้นทึบชี้ขึ้นมาจากผลไปหาเหตุ] -เหตุของข้อความ $MO = NO$ คืออะไร (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยม) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $MO = NO$] -จากข้อความ $\Delta MOB \cong \Delta NOT$ เป็นผลที่เกิดจากเหตุใด ($\hat{3} = \hat{4}$ / $MO = NO$ / $\hat{1} = \hat{2}$) [เขียนข้อความถัดขึ้นไปด้านบน และเขียนลูกศรเส้นทึบชี้ขึ้นมาจากผลไปหาเหตุ] -เหตุของข้อความ $\Delta MOB \cong \Delta NOT$ คืออะไร (ม.ด.ม.) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\Delta MOB \cong \Delta NOT$] -เหตุของข้อความ $\hat{3} = \hat{4}$ คืออะไร (มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{3} = \hat{4}$] -เหตุของข้อความ $MO = NO$ คืออะไร (กำหนดให้) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $MO = NO$] -เหตุของข้อความ $\hat{1} = \hat{2}$ คืออะไร (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\hat{1} = \hat{2}$] -จากข้อความ $\hat{1} = \hat{2}$ เป็นผลที่เกิดจากเหตุใด ($\overline{MB} \,//\, \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด ซึ่งเป็นข้อมูลที่กำหนดให้) [เขียนข้อความถัดขึ้นไปด้านบน และเขียนลูกศรเส้นทึบชี้ขึ้นมาจากผลไปหาเหตุ] -เหตุของข้อความ $\overline{MB} \,//\, \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด คืออะไร (กำหนดให้) [เขียนไว้ด้านข้างข้อความ $\overline{MB} \,//\, \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด] 12. ครูให้นักเรียนพิจารณาแผนภาพการการมองกลับไปยังสิ่งที่กำหนดให้ที่ได้สร้างขึ้น นำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยเขียนจากด้านบนลงไปด้านล่าง ตามลำดับข้อความและเหตุผล โดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	**กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)**
17. ครูให้นักเรียนร่วมกันระบุและเขียนเหตุผลของข้อมูลที่กำหนดให้ (กำหนดให้) ลงในพรู้ฟแมปปิงด้านข้างของลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลที่กำหนดให้ โดยเขียนทุกวงรีข้อมูล 18. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสร้างพรู้ฟแมปปิงโดยใช้กระบวนการไปข้างหน้าหรือกระบวนการย้อนหลังในลักษณะที่สามารถสลับกันไปมาได้จนกว่าจะพบจุดเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับข้อมูลที่กำหนดให้ โดยครูตั้งคำถามดึงความรู้นักเรียน -จากข้อมูลที่กำหนดให้ ($\overline{MB}$ // $\overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด) นำไปสู่ข้อมูลใดได้บ้าง ($\hat{1} = \hat{2}$) [เขียนข้อความถัดลงมาด้านล่างล้อมรอบด้วยวงรี] -เหตุผลสำหรับข้อมูลที่ได้ ($\hat{1} = \hat{2}$) คืออะไร (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่เชื่อมระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้กับข้อมูลที่ได้] -จากรูปที่กำหนดให้ นำไปสู่ข้อมูลใดได้อีกบ้าง ($\hat{3} = \hat{4}$) [เขียนข้อความล้อมรอบด้วยวงรี] -เหตุผลของข้อมูลใหม่ที่ได้ ($\hat{3} = \hat{4}$) คืออะไร (มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาข้อมูล] -จากข้อมูลที่มีสามารถเขียนข้อมูลใหม่จากคำตอบใดของคำถามหลักได้ (ด้านคู่ที่สมนัยกันรูปสามเหลี่ยม) -ข้อมูลใหม่ที่ได้จากคำตอบของคำถามหลัก คืออะไร ($\Delta MOB \cong \Delta NOT$) [เขียนข้อความถัดขึ้นมาด้านบนล้อมรอบด้วยวงรี] -จากข้อมูลใหม่ที่ได้จากคำตอบของคำถามหลักแรก ($\Delta MOB \cong \Delta NOT$) ควรตั้งคำถามหลักที่สองว่าอะไร (พิสูจน์ความเท่ากันทุกประการมีวิธีใดบ้าง) [เขียนใส่ก้อนเมฆความคิดเชื่อมกับข้อมูลใหม่ที่ได้จากคำตอบของคำถามหลักแรก]	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคพรู้ฟแมปปิงในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต)	กลุ่มควบคุม (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)
-คำตอบของคำถามหลักที่สองที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีอะไรบ้าง (ด.ม.ด./ม.ด.ม./ด.ด.ด.) [เขียนด้านข้างลูกศรเส้นทึบที่ชี้ลงมาเข้าหาข้อมูลใหม่ที่ได้จากคำตอบของคำถามหลักแรกและเขียนลูกศรละคำตอบ] -จากข้อมูลที่มีอยู่สามารถใส่ลูกศรเส้นประเพื่อระบุว่าเกี่ยวข้องกับคำตอบของคำถามหลักที่สอง อะไรได้บ้าง ($\hat{1} = \hat{2}$ ระบุ ม./ $MO = NO$ ระบุ ด./ $\hat{3} = \hat{4}$ ระบุ ม.) [เขียนระบุด้านข้างลูกศรเส้นประชี้ลงมาด้านล่าง] -จากข้อมูลที่มีอยู่ที่เป็นลูกศรเส้นประ คำตอบของคำถามหลักที่สองที่ได้ คืออะไร (ม.ด.ม.) [เขียนลูกศรเส้นทึบเชื่อมโยงข้อมูลทั้งหมด] 19. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าทางเลือกใดไม่ได้เชื่อมโยงหาคำตอบให้ตัดทิ้ง (สมบัติของการเท่ากัน/ด.ม.ด./ด.ด.ด.) โดยการขีดฆ่าเส้นทางคำตอบของคำถามหลักที่ไม่ได้นำมาใช้ 20. ครูให้นักเรียนพิจารณาการใส่หมายเลขกำกับวงรีตามลำดับก่อนและหลังของกระบวนการพิสูจน์ แล้วนำข้อความและเหตุผลที่ได้ไปใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์แบบมาตรฐาน	
ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในคาบนี้ และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามข้อสงสัย 2. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4 เพื่อทบทวนและเพิ่มเติมความรู้ โดยนำมาส่งครูตอนท้ายคาบ	

สื่อ/แหล่งเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียน (กลุ่มทดลอง)
2. เอกสารประกอบการเรียน (กลุ่มควบคุม)
3. ใบกิจกรรม

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน	การประเมินผล (ผ่าน/ไม่ผ่าน)	
				กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ด้านความรู้					
1. นักเรียนสามารถอธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้	การตอบคำถามระหว่างการเขียนพิสูจน์ที่มีอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	คำถามระหว่างเขียนพิสูจน์ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง มากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
2. นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันในการพิสูจน์ได้	ตรวจการสร้างแผนผังที่มีอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	เอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนทำได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
ด้านทักษะ/กระบวนการ					
1. นักเรียนสามารถให้เหตุผลและสรุปผลโดยใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้	ตรวจคำตอบทุกคำถามที่มีอยู่ในใบกิจกรรมที่ 4	ใบกิจกรรมที่ 4	นักเรียนทำได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
2. นักเรียนสามารถนำเสนอวิธีการพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากันได้	ตรวจการเขียนพิสูจน์ที่มีอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	เอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนทำได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน	การประเมินผล (ผ่าน/ไม่ผ่าน)	
				กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ด้านคุณลักษณะ					
1. นักเรียนให้ความร่วมมือกับกิจกรรมภายในชั้นเรียน	ตรวจนับจำนวนเอกสารประกอบการเรียนที่ 4 ที่ให้นักเรียนทำส่งในคาบเรียน	เอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนทำส่งในคาบเรียนมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
2. นักเรียนมีความตั้งใจและมีความสนใจในกิจกรรม	การตอบคำถามระหว่างการสร้างแผนผังที่มีอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	คำถามระหว่างสร้างแผนผังในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง มากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
3. นักเรียนกล้าคิดกล้าแสดงความคิดเห็นของตนเอง	การตอบคำถามระหว่างกิจกรรมภายในชั้นเรียนในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	คำถามระหว่างทำกิจกรรมในเอกสารประกอบการเรียนที่ 4	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง มากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		
4. นักเรียนมีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย	ตรวจนับจำนวนใบกิจกรรมที่ 4 ที่ให้นักเรียนทำส่งในคาบเรียน	ใบกิจกรรมที่ 4	นักเรียนทำส่งในคาบเรียนมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด		

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

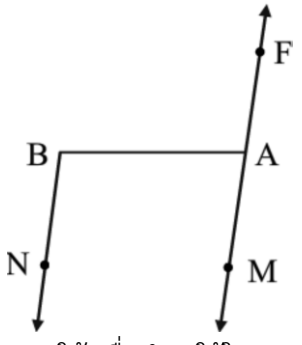
ลงชื่อ .....

(นายกมล นาคสุทธิ)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ใบกิจกรรมที่ 4

จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BN} \,//\, \overleftrightarrow{FM}$ จงหาว่า $F\hat{A}B$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด



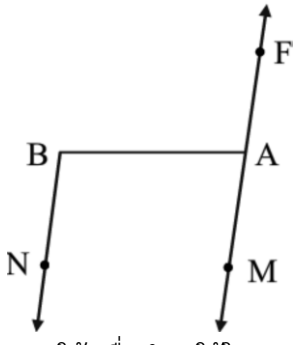
1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

เฉลยใบกิจกรรมที่ 4

จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BN} // \overleftrightarrow{FM}$ จงหาว่า $F\hat{A}B$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด



1) ระบุข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

$\overrightarrow{BN} // \overleftrightarrow{FM}$ มี $\overline{BA}$ เป็นเส้นตัด

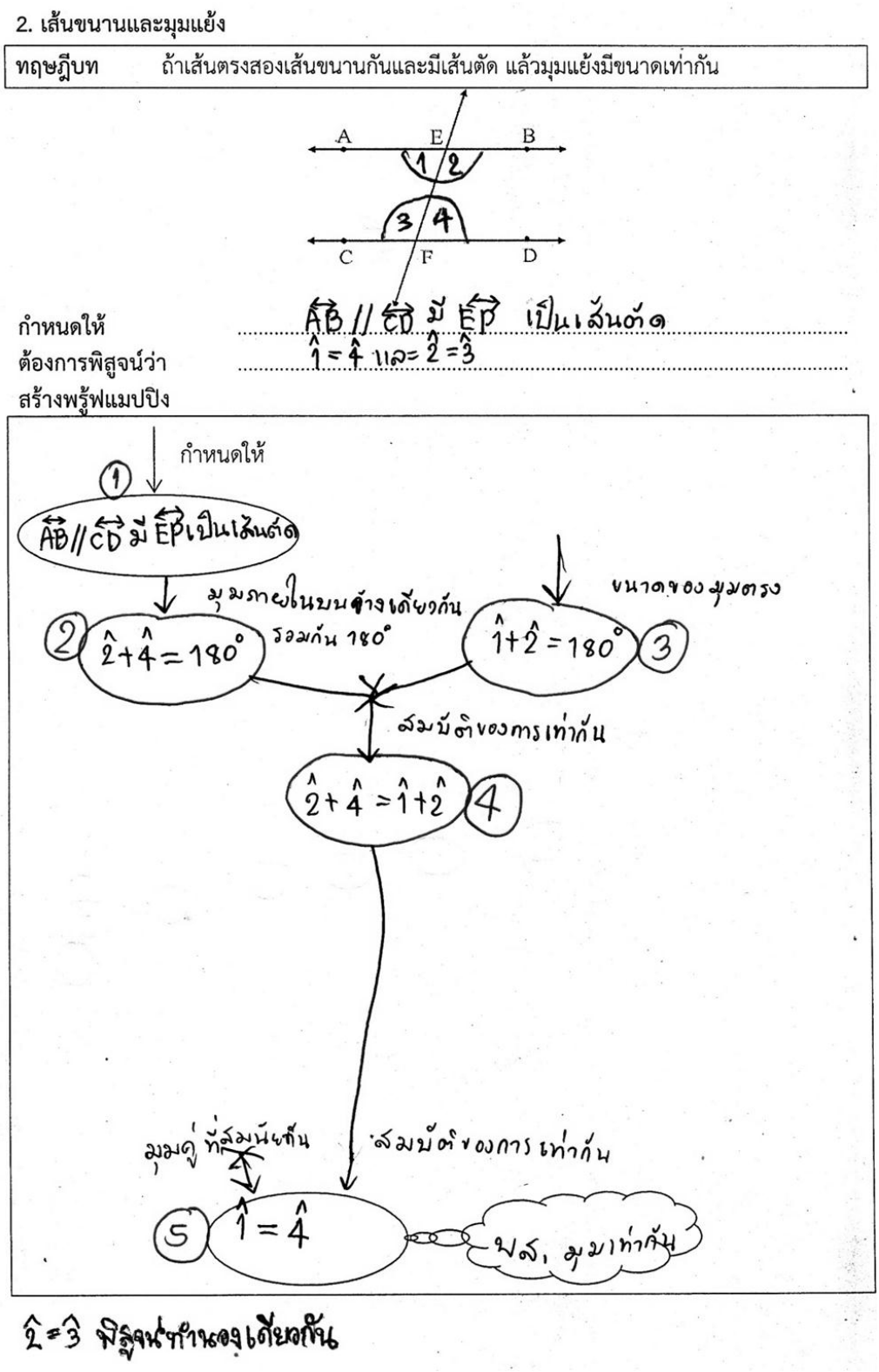
2) ระบุบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้ในการแสดงการให้เหตุผล

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3) แสดงการให้เหตุผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และเป็นไปตามลำดับ

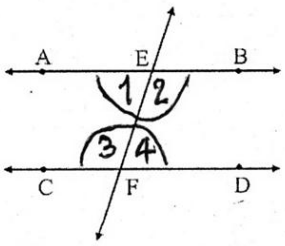
$N\hat{B}A$		
เนื่องจาก	$\overrightarrow{BN} // \overleftrightarrow{FM}$ มี $\overline{BA}$ เป็นเส้นตัด	(กำหนดให้)
ดังนั้น	$F\hat{A}B = N\hat{B}A$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างผลงานนักเรียน



รูปที่ 23 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน การสร้างพรู๊ฟแมปปิงเพื่อเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบท

เขียนพิสูจน์



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด

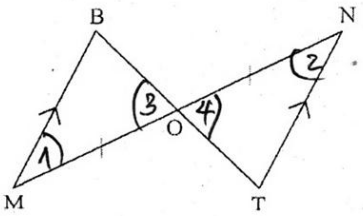
ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
(1) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด	(1) กำหนดให้
(2) $\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$	(2) มุมตายในบนข้างเดียวกัน รวมกัน 180°
(3) $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$	(3) ขนาดของมุมตรง
(4) $\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$	(4) สมบัติของการเท่ากัน
(5) $\hat{1} = \hat{4}$	(5) สมบัติของการเท่ากัน
(6) $\hat{2} = \hat{3}$	(6) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน

รูปที่ 24 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน การเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบทโดยใช้พรูฟแมปปิงที่สร้างขึ้น

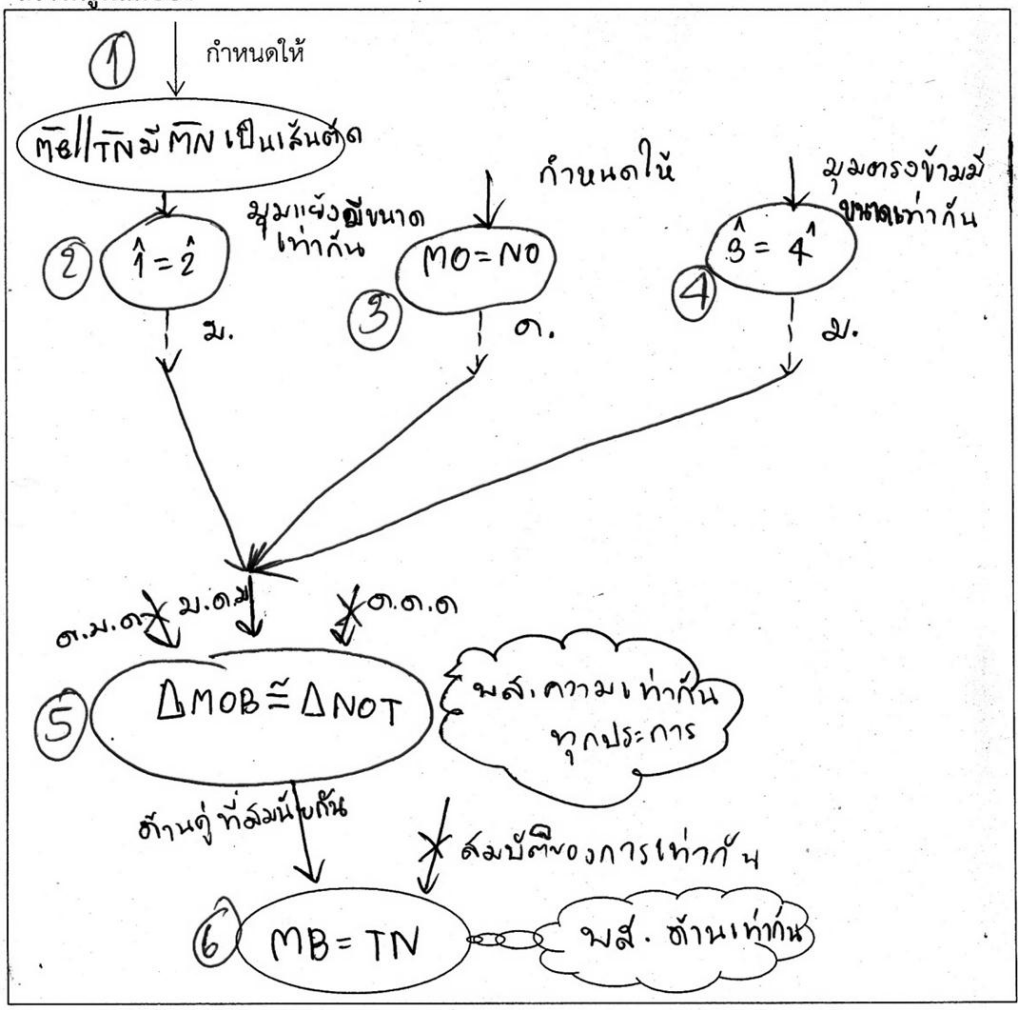
ข้อที่ 1 จากรูป กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ $MO = NO$ จงพิสูจน์ว่า $MB = NT$



กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด และ $MO = NO$

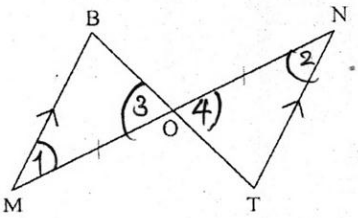
ต้องการพิสูจน์ว่า $MB = NT$

สร้างพรูฟแมปปิง



รูปที่ 25 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน การสร้างพรูฟแมปปิงเพื่อเขียนพิสูจน์ปัญหาข้อที่ 1

เขียนพิสูจน์



กำหนดให้ $\overline{MB} \parallel \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นต้ด ทล. $MO = NO$

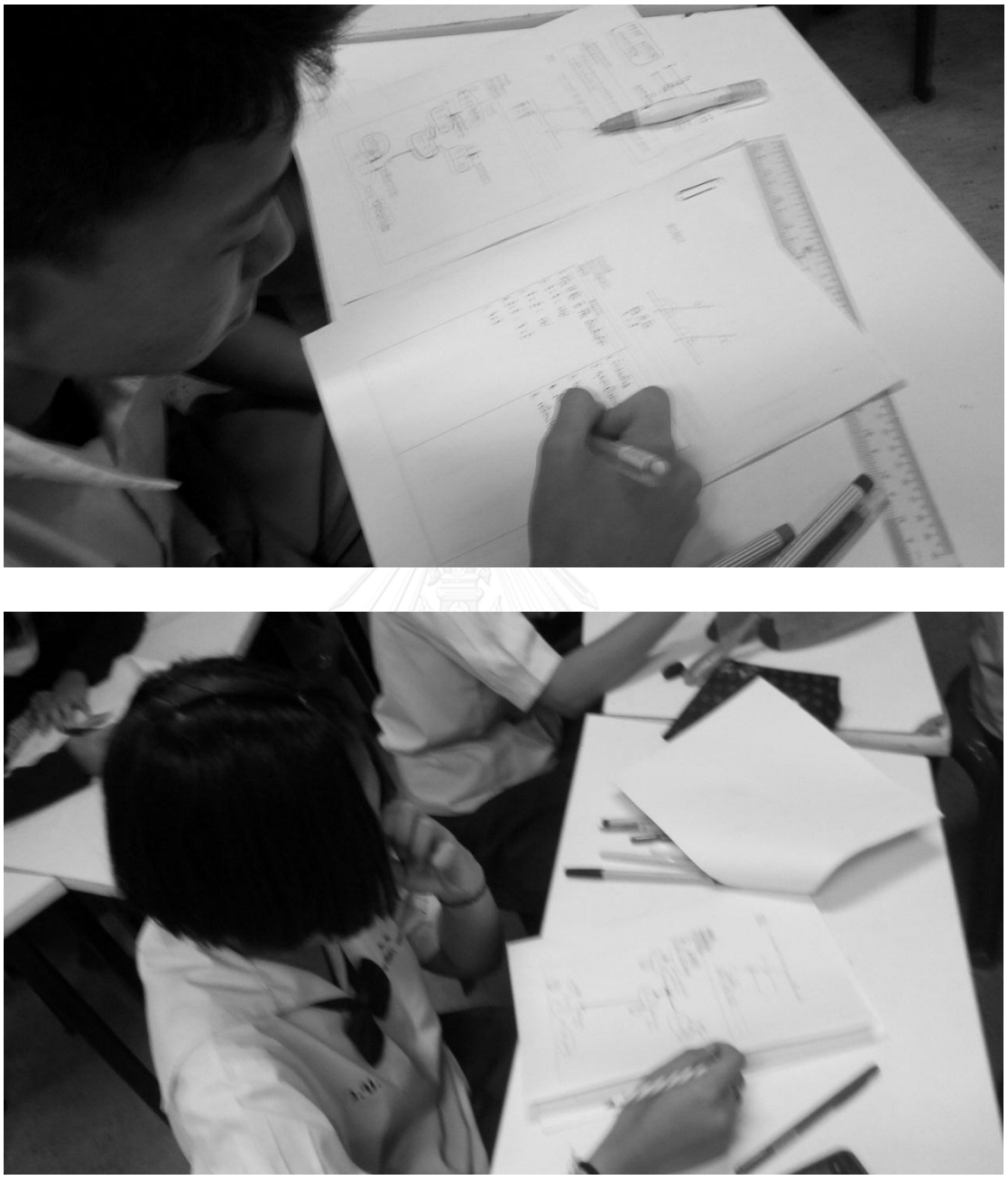
ต้องการพิสูจน์ว่า $MB = NT$

พิสูจน์

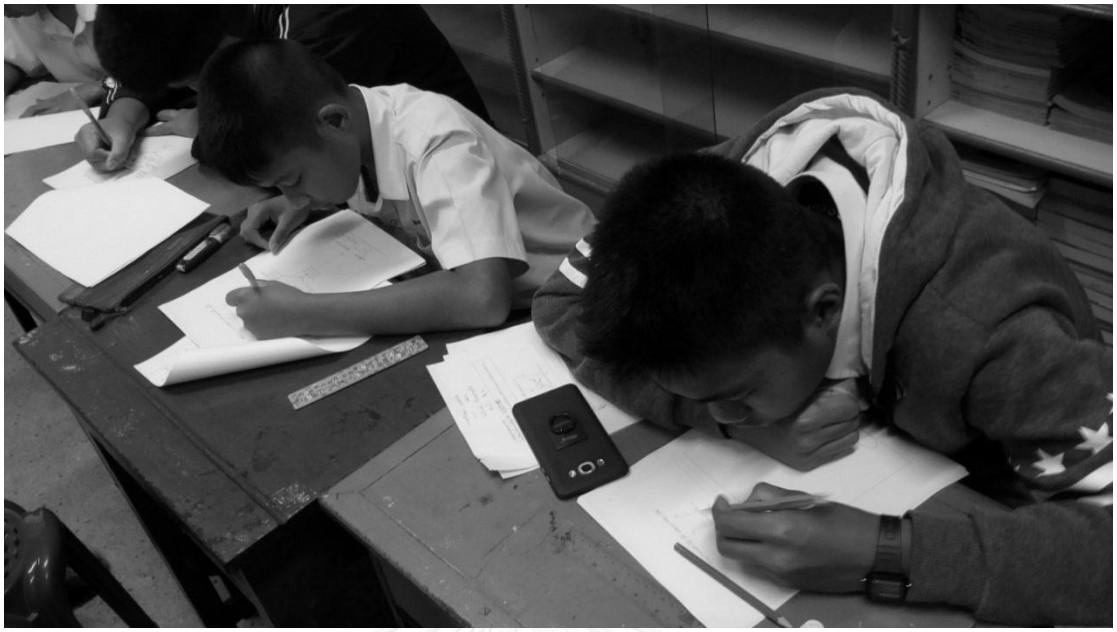
ข้อความ	เหตุผล
① $\overline{MB} \parallel \overline{TN}$ มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นต้ด	① กำหนดให้
② $\hat{1} = \hat{2}$	② มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
③ $MO = NO$	③ กำหนดให้
④ $\hat{3} = \hat{4}$	④ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
⑤ $\Delta MOB \cong \Delta NOT$	⑤ ม.ด.ม
⑥ $MB = TN$	⑥ ด้านคู่ที่สมนัยกัน

รูปที่ 26 แสดงตัวอย่างผลงานนักเรียนกลุ่มทดลองจากเอกสารประกอบการเรียน การเขียนพิสูจน์ปัญหาข้อที่ 1 โดยใช้พรูฟแมปปิงที่สร้างขึ้น

ตัวอย่างภาพการจัดกิจกรรม



รูปที่ 27 แสดงตัวอย่างภาพการจัดกิจกรรมนักเรียนกลุ่มทดลองสร้างพรู้ฟแมปปิง
เพื่อใช้ในการเขียนพิสูจน์เป็นรายบุคคล



รูปที่ 28 แสดงตัวอย่างภาพการจัดกิจกรรมนักเรียนกลุ่มทดลองสร้างพรู้ฟแมปปิง
เพื่อใช้ในการเขียนพิสูจน์ร่วมกันเป็นกลุ่ม

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายกมล นาคสุทธิ เกิดวันที่ 17 มิถุนายน พ.ศ.2534 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2555 และเข้าศึกษาต่อหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2556

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University