

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาวรรณคดีที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสาร ตำรา บทความ และงานวิจัยต่าง ๆ ซึ่งจะนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

- การแก้ปัญหา
- ปัญหาจิตศาสตร์
- การคิดแก้ปัญหาทางจิตศาสตร์
- กระบวนการคิดแก้ปัญหาจิตศาสตร์
- ความแตกต่างของกระบวนการคิดแก้ปัญหาจิตศาสตร์ในแต่ละบุคคล
- การวิเคราะห์กระบวนการคิดแก้ปัญหาจิตศาสตร์
- เทคนิคการคิดออกเสียง (Thinking Aloud)
- รูปแบบการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาจิตศาสตร์
- งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การแก้ปัญหา

เมื่อมนุษย์ต้องการบรรลุถึงจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้อย่างแน่นอนแต่ถ้าจุดมุ่งหมายนั้น ยังไม่สามารถที่จะไปถึงได้อย่างสะดวกง่ายดาย ย่อมเกิดปัญหา ดังนั้นการแก้ปัญหา เป็น สิ่งจำเป็นที่มนุษย์ใช้เมื่อไม่อาจจะบรรลุจุดมุ่งหมายที่แน่นอนได้ ซึ่งสอดคล้องกับ

คาร์ล (Karl 1969) กล่าวว่า การคิดแก้ปัญหาเป็นการคิดหาทางแก้ไขอุปสรรค ที่เกิดขึ้น เพื่อให้บรรลุถึงจุดมุ่งหมาย บางครั้งเราตั้งจุดมุ่งหมายเอาไว้ แต่มีอุปสรรคมา ขัดขวางไม่ให้สำเร็จบรรลุเป้าประสงค์จึงเกิดปัญหานั้น

ในทัศนะของบอร์น เอกสตรานด์ และโดมิโนสกี (Borne, Ekstrand and Dominoski, 1971: 9) การแก้ปัญหานั้นเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสดงความรู้ ความคิด จากประสบการณ์ก่อน ๆ และสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในปัจจุบัน โดยนำมาเรียงลำดับใหม่ เพื่อผลของความสำเร็จในจุดมุ่งหมายเฉพาะอย่าง

โรเบิร์ต (Robert L. 1988, 424) ได้แสดงความเห็นว่าการแก้ปัญหาเป็น การคิดที่มีจุดมุ่งหมายโดยตรงไปสู่วิธีแก้ปัญหาเฉพาะ นั้นเกี่ยวข้องกับข้อมูลทั้งหมดในการ โต้ตอบ และเลือกเฉพาะวิธีการที่เป็นไปได้

แนวคิดดังกล่าวข้างต้นอาจสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาเป็นพฤติกรรมมนุษย์ที่ใช้โต้ตอบ กับสถานการณ์ที่ไม่อาจจะบรรลุจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้อย่างแน่นอนได้ โดยนำประสบการณ์ ความรู้ ที่ผ่านมาใช้เพื่อจะให้ได้จุดมุ่งหมายที่ต้องการ

### ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ก็เป็นสถานการณ์หรือคำถาม ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ซึ่ง ต้องการคำตอบแต่ไม่สามารถตอบได้ทันทีจะต้องมีวิธีการที่เหมาะสม ใช้ความรู้ประสบการณ์ และการตัดสินใจ มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายท่าน ดังเช่น บรคเนอร์ (Bruckner, 1957) กล่าวว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเป็นสถานการณ์ ที่เกี่ยวกับปริมาณที่นักเรียนไม่สามารถตอบได้ทันที โดยวิธีที่เคยชิน และสิ่งที่เป็นปัญหาของ นักเรียน เมื่อเวลานี้อาจจะไม่ใช่ปัญหาในวันนี้ก็ได้

แอนเดอร์สัน และฟินเกอร์ (1973) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเป็น สถานการณ์ หรือคำถามที่ต้องการวิธีการแก้ไข หรือหาคำตอบ ซึ่งผู้ตอบจะทำได้ต้องมีวิธี การที่เหมาะสม ใช้ความรู้ประสบการณ์ และการตัดสินใจ โดยพร้อมมูล

ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถาม ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ คำตอบ ที่ต้องการจะต้องเกี่ยวข้องกับปริมาณ แต่ไม่สามารถตอบได้ทันที จะต้องใช้ความรู้ประสบ- การณ์ การตัดสินใจแก้ไขด้วยวิธีการที่เหมาะสม (ชมนาด สิบศรี, 2532)

ไตรรงค์ เจนการ (2531) ให้ความเห็นว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์รวมไปถึง ปัญหาที่เป็นภาษาไทย (word problem) กับปัญหาที่เป็นเรื่องราวและปัญหาที่เป็นคำพูด (verbal problem) ปัญหาที่เป็นภาษา ปัญหาที่เป็นเรื่องราวและปัญหาที่เป็นคำพูดมีชื่อ เรียกรวมกันว่า โจทย์ปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นสถานการณ์หรือ คำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ คำตอบที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณด้วย โจทย์ปัญหาทาง คณิตศาสตร์เป็นปัญหาคณิตศาสตร์ที่จำลองปัญหามาอยู่ในรูปของข้อความซึ่งรวมลักษณะของปัญหาที่เป็น ภาษาไทย ปัญหาที่เป็นเรื่องราวและปัญหาที่เป็นคำพูดซึ่งอาจปรากฏในหนังสือเรียน หรือเป็น ปัญหาที่พบในหนังสือทั่วไป

## การคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ส่งเสริมให้นักเรียนพัฒนาความคิดและการวิเคราะห์อย่างมีระบบ และวิธีการเพื่อให้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ถึงชีวิตจริง ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน การฝึกคิดแก้ปัญหาจะช่วยให้รู้จักวิธีแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ ดังคำกล่าวของ (Mark, 1965) ที่ว่า คณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับปัญหาต่าง ๆ คือ ปัญหาที่สำคัญทั้งหลายในชีวิตประจำวัน มักจะเกี่ยวกับปริมาณและข้อมูลทางคณิตศาสตร์และนอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังได้จัดรูปแบบทางสมองสำหรับการแก้ปัญหา โครงสร้างในการแก้ปัญหา การฝึกคิดแก้ปัญหาจะช่วยให้รู้จักวิธีแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งสอดคล้องกับ คักดา บุญโต (2527) ได้ให้ความคิดเห็นว่า คณิตศาสตร์ คือกระบวนการทางความคิด คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ประกอบด้วยส่วนสำคัญสองส่วน ส่วนหนึ่งได้แก่การสำรวจค้นหาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ซึ่งเรียกว่า กระบวนการอุปนัย อีกส่วนหนึ่งได้แก่ การตรวจสอบเพื่อยืนยันความสัมพันธ์ที่ค้นหาได้นั้นเป็นจริง ซึ่งเรียกว่า กระบวนการนรนัย

เวล (WirI, 1973) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า วิธีการหรือเทคนิคในการแก้ปัญหา เป็นจุดที่สำคัญมากกว่าการได้คำตอบของโจทย์ปัญหานั้น

ครุฑ (KruIik, 1977) ให้ความคิดเห็นในเรื่องนี้ว่า การแก้ปัญหาเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอน ครูจะต้องสร้างสถานการณ์เพื่อให้ผู้เรียนได้เผชิญกับปัญหา เพื่อที่จะให้เขาได้ค้นหาและวินิจฉัยพิจารณาให้ได้มาซึ่งคำตอบ บางครั้งอาจจะไม่ได้คำตอบตามที่เขาคาดหวังไว้ก็ตาม แต่มันไม่ใช่เป็นสิ่งที่สำคัญเท่ากับการที่ผู้เรียนได้ฝึกทักษะ หรือการพิจารณา ซึ่งก็หมายความว่า วิธีการค้นหาคำตอบของปัญหา เป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบในการแก้ปัญหา

จากที่กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่า การคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น มีความสำคัญยิ่ง การฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะช่วยให้นักเรียนพัฒนากระบวนการทางความคิด ซึ่งมีความสำคัญที่วิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหามากกว่าคำตอบที่ได้จากโจทย์ปัญหานั้น

## กระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายสูงสุดของวิชาคณิตศาสตร์ โดยมีมุ่งเน้นที่กระบวนการคิดแก้ปัญหา ซึ่งเป็นเรื่องที่ซับซ้อน การสอนและการฝึกฝน เพื่อให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหานั้น องค์ประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เสียก่อน ดังจะเห็นได้ว่ามีผู้ศึกษา และให้ข้อคิดเกี่ยวกับกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หลายท่าน อาทิเช่น

จอห์นสัน และซิง (Johnson and Sising, 1967) มีความคิดเห็นว่า กระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ประกอบด้วย การมองเห็นภาพ การจินตนาการ การจัดกระทำอย่างมีทักษะ การวิเคราะห์ การสรุปในเชิงนามธรรมและการเชื่อมโยงความคิด

ไฮเมอร์ และ ทรูบลัด (Heimer and Trueblood, 1977) ได้กล่าวถึง องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายประการ คือ เทคนิคการรู้ค่าศัพท์ การรู้ค่าศัพท์ในโจทย์คำถามจะช่วยให้เด็กมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา ครูอาจจะช่วยฝึกฝนให้นักเรียนได้มีความรู้ค่าศัพท์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มให้มากขึ้น โดยการจัดหาเกมหรือกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้ค่าศัพท์มาให้นักเรียนเล่น นอกจากนี้แล้วนักเรียนจะต้องมีทักษะการคำนวณ การแยกแยะข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง การหาความสัมพันธ์ของข้อมูล การคาดคะเนคำตอบ การเลือกใช้วิธีจัดการกระทำกับข้อมูลอย่างถูกต้อง ความสามารถในการหาข้อมูลเพิ่มเติมและการแปลความหมายของโจทย์

เลสเตอร์ (Lester, 1977) กล่าวว่า ผลงานของไซมอน (Simon, Herbert A., 1975) ซึ่งไซมอนได้เสนอแนวคิดการแก้ปัญหาไว้ในปี 1975 ณ การประชุมประจำปี ของสมาคมวิจัยทางการศึกษาของอเมริกาว่า วิธีการจัดการกระทำข้อมูล ในปัจจุบันสามารถเปลี่ยนแปลงวิธีการคิด และวิธีการเรียนได้ ในข้อเสนอแนะของเขาได้เขียนคำแนะนำบางประการที่ได้จากการวิจัยทางด้านจัดการกระทำข้อมูล ซึ่งผลวิจัยนี้ เกี่ยวกับการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยตรงดังนี้ คือ

1. องค์ประกอบที่สำคัญของทักษะการแก้ปัญหา อยู่ที่ความสามารถในการรู้ถึงลักษณะที่เด่นที่สำคัญของปัญหานั้นได้อย่างรวดเร็ว และความสามารถในการเชื่อมโยงลักษณะนี้เข้ากับขั้นตอนของการแก้ปัญหา

2. กระบวนการของความเข้าใจประกอบด้วย กระบวนการสร้างตัวแทน (representation) จากนามธรรมมาเป็นรูปธรรมจากสถานการณ์ของปัญหา ปัญหาส่วนใหญ่สามารถนำมาสร้างตัวแทนได้หลาย ๆ ทางความยากของปัญหาก็คือ ผลจากการที่เราเลือกตัวแทนตัวใดตัวหนึ่งนั่นเอง ซึ่งทักษะของการหาตัวแทนที่ดีของปัญหานั้นน่าจะสอนและเรียนกันได้ แต่ในปัจจุบันยังไม่มีการสอนในลักษณะนี้อย่างเป็นระบบ

เวสต์ (West, 1977) กล่าวว่า นักเรียนที่สามารถบอกคำตอบของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง อาจจะไม่สามารถบอกกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องก็ได้ กล่าวคือ นักเรียนที่คิดด้วยวิธีการที่ผิดอาจจะได้คำตอบที่ถูกต้องก็ได้ และนอกจากนี้เขาชี้ให้เห็นถึงสาเหตุที่นักเรียนไม่สามารถจะทำข้อสอบที่เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องไว้ 3 ประการคือ

1. นักเรียนไม่สามารถเข้าใจในข้อความที่เป็นโจทย์ปัญหา
2. นักเรียนไม่สามารถเปลี่ยนโจทย์ปัญหามาเป็นประโยคสัญลักษณ์



### ทางคณิตศาสตร์ได้

#### 3. นักเรียนไม่สามารถคำนวณตามที่โจทย์ต้องการได้

นอกจากนี้ ซาลิวสกี (Zalewski, 1978) ได้ศึกษาองค์ประกอบที่ช่วยในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่าสิ่งที่เป็้องค์ประกอบ คือ ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์ ความสามารถในการจัดกระทำ ความเข้าใจในการอ่าน การตีความ คำศัพท์ กราฟและตาราง มโนคติทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Concepts) และทักษะในการคิดคำนวณ

แนวคิดข้างต้นอาจสรุปได้ว่า องค์ประกอบของกระบวนการคิดแก้ปัญหา คณิตศาสตร์นั้นหลายประการเช่น องค์ประกอบทางด้านสติปัญญา นักเรียนต้องมีความสามารถในการวิเคราะห์ ตีความ แยกแยะสิ่งที่เกี่ยวข้องและสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้อง ถึงโจทย์ปัญหา หาความสัมพันธ์ของข้อมูล ตลอดจนความสามารถในการคิดคำนวณองค์ประกอบต่าง ๆ เหล่านี้ ควรจะได้รับการส่งเสริม และพัฒนาให้ดียิ่งขึ้น

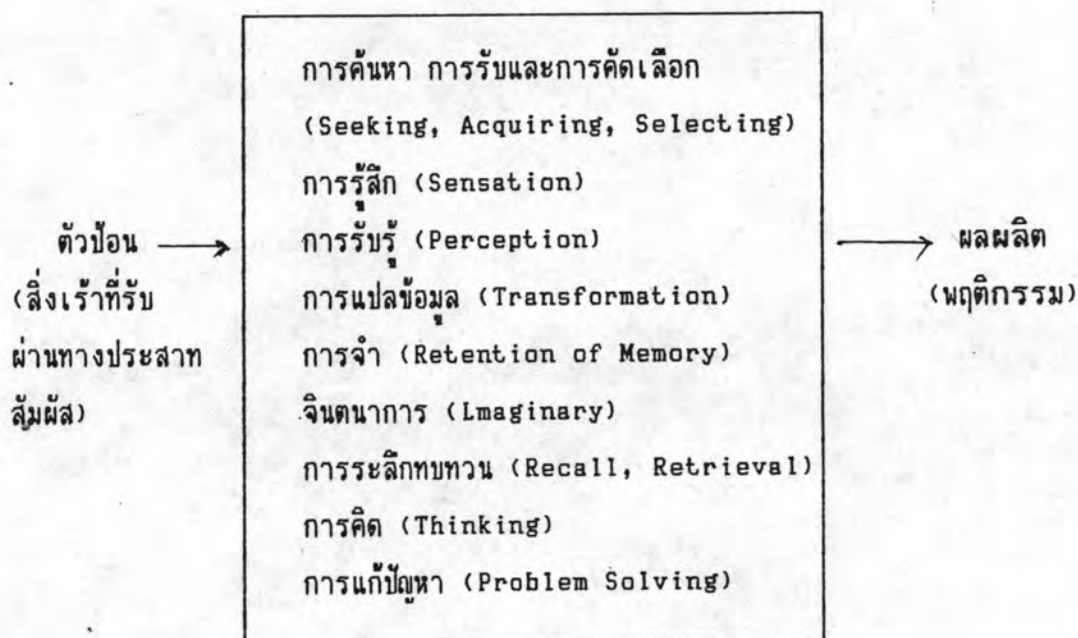
ความรู้ที่จะใช้อธิบายกระบวนการแก้ปัญหาเป็นเรื่องที่ลึกซึ้งเป็นนามธรรม เพราะกระบวนการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในสมอง เรียกว่า กระบวนการทางปัญญา (Cognitive process) การทำความเข้าใจกับกระบวนการแก้ปัญหาจึงต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการทางปัญญาก่อน โดยใช้พื้นฐานความรู้ทางจิตวิทยาของนักจิตวิทยากลุ่มปัญญานิยม (cognitivism) และกลุ่มพฤติกรรมนิยม (behaviorism) มีมโนทัศน์พื้นฐานที่ควรเข้าใจ คือ มโนทัศน์เกี่ยวกับกระบวนการทางปัญญา และรูปแบบจำลองของกระบวนการแก้ปัญหา (ยูรวันน์ คล้ายมงคล, 2534)

ในแง่ของกระบวนการทางปัญญาที่ถือว่าเป็นแนวทางสำคัญในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวทฤษฎีของการประมวลผลข้อมูล (Information processing) และการจำลองการทำงาน ของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังที่กรมวิชาการ กองวิจัยการศึกษา (2531) ได้นำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับแนวความคิดที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าเอกสาร ผลงานวิจัย และจากการประชุมระดมความคิด ของนักวิชาการสาขาต่าง ๆ ในประเด็นที่เกี่ยวกับความหมายของกระบวนการทางปัญญา ลักษณะกระบวนการทางปัญญา รูปแบบของการประมวลผลข้อมูล และแนวทางใช้กระบวนการทางปัญญา เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอน ดังนี้คือ

กระบวนการทางปัญญา หมายถึง กระบวนการภายในสมองที่เกี่ยวข้องกับการค้นพบ การคัดเลือก การรับรู้ การจำ การคิดและการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยผ่านทางประสาทสัมผัส และแสดงออกมาเป็นพฤติกรรม

นักจิตวิทยากลุ่มปัญญานิยม (Cognitivism) ซึ่งมีความสนใจในเรื่องของกระบวนการคิดอันจะนำไปสู่การแก้ปัญหาที่มีความเชื่อว่าข้อมูลทางจิตวิทยา คือพฤติกรรมที่สังเกตได้ มนุษย์ได้ความรู้โดยประสาทสัมผัส สิ่งที่เข้ามาทางประสาทสัมผัสจะโยงสัมพันธ์ (Associate) กับการตอบสนอง ความรู้ที่ได้ก็คือ ผลการโยงสัมพันธ์ ความรู้นี้จะรวม

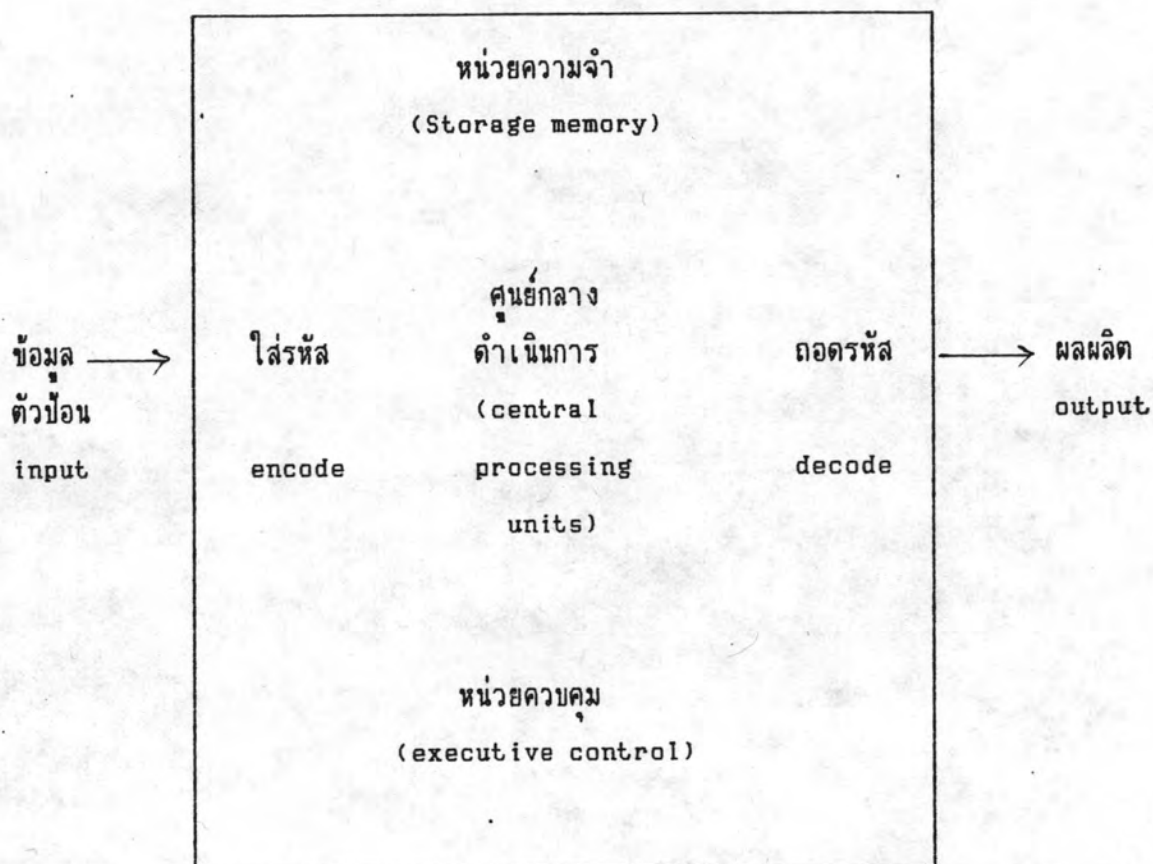
กันเข้าเป็นความรู้ที่ซับซ้อนและยังได้เห็นว่าสมองมีบทบาทสำคัญในการเรียนรู้ กระบวนการทางปัญญาเป็นกระบวนการภายในสมอง ซึ่งอาจสรุปหน้าที่ของกระบวนการทางปัญญาได้ดังแผนภูมิที่ 1



แผนภูมิที่ 1 แสดงลักษณะกระบวนการทางปัญญา

ตามแนวคิดที่นักจิตวิทยาเชื่อว่า กระบวนการทางปัญญาเป็นเรื่องกระบวนการภายในสมอง ซึ่งเป็นสิ่งที่มองเห็นหรือศึกษาโดยตรงไม่ได้ นอกจากจะอนุมานโดยทางอ้อมเอาไว้ได้เกิดกระบวนการภายในขึ้น โดยจะเกี่ยวข้องกับการค้นหา การเลือก การรับรู้ผ่านทางประสาทสัมผัส จนเกิดเป็นการรับรู้ขึ้นในจิต อาจมีการเปลี่ยนแปลงรูปของสิ่งที่รับรู้ออกมาผ่านกระบวนการใส่รหัส (Encode) และถอดรหัส (Decode) จนเกิดการจำ เกิดการคิด ซึ่งอาจอยู่ในรูปของจินตนาการและการแก้ปัญหาต่าง ๆ สิ่งเหล่านี้เชื่อว่าเป็นกระบวนการภายในจิต

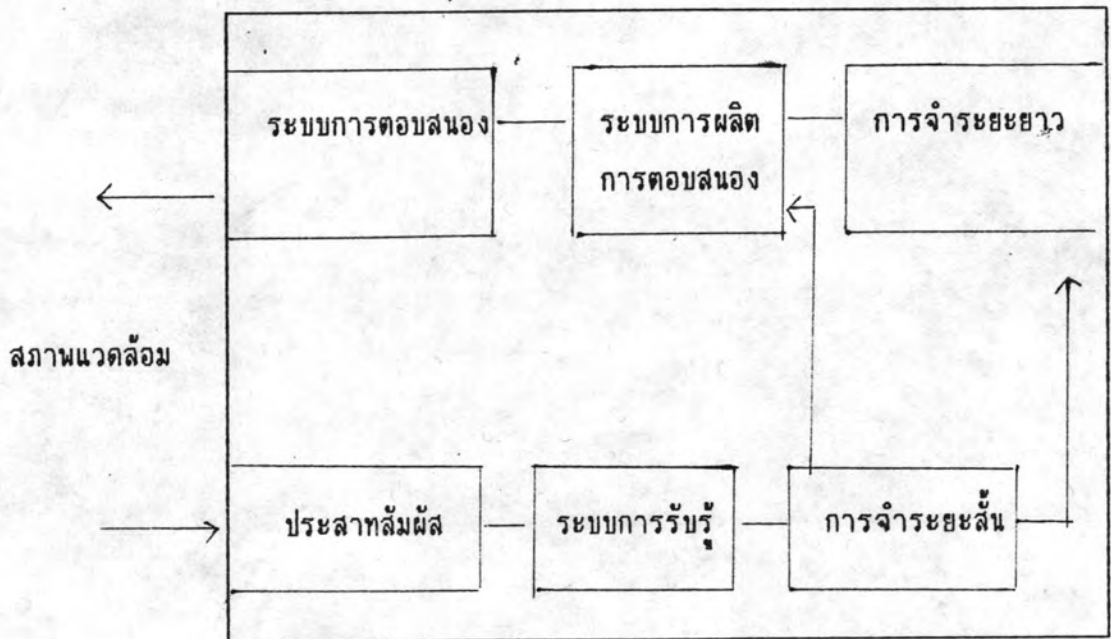
จากลักษณะกระบวนการทางปัญญาที่กล่าวมาแล้วนั้น ถ้ากล่าวโดยเน้นองค์ประกอบหลัก จะพบว่า มี 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นเนื้อหาสารสนเทศ (Information) ซึ่งจะเรียกว่าข้อมูล และส่วนที่เป็นกระบวนการจัดการกระทำกับข้อมูลเหล่านั้น ซึ่งอาจเรียกว่าส่วนประมวลข้อมูล (Processing) จากความคิดนี้สิ่งเร้าใจในรูปของสัญลักษณ์แทนของจริงหรือ การกระทำจะถูกรับเข้ามาเป็นข้อมูล สมองของมนุษย์จะทำหน้าที่เป็นเครื่องประมวลข้อมูล (Processor) คล้ายกับการทำงานของคอมพิวเตอร์ ดังในแผนภูมิที่ 2



แผนภูมิที่ 2 เปรียบเทียบการทำงานของคอมพิวเตอร์กับกระบวนการทางปัญญาตามแนวคิดของโมเดลการประมวลข้อมูล

แนวคิดนี้อธิบายการรับข้อมูลเข้ามาภายในจิตว่าต้องผ่านการแปลง ให้อยู่ในรูปของรหัส (Code) คล้ายระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้รหัสระบบเลขฐานสอง (Binary System-0, 1) แล้วมีระบบสมองส่วนกลางคล้ายศูนย์กลางดำเนินการ (CPU) ของคอมพิวเตอร์ที่ทำหน้าที่จัดการกระทำกับข้อมูล โดยการช่วยเหลือของระบบความจำ และระบบการควบคุมจนออกเป็นผลลัพธ์ของการคิดการแก้ปัญหา

Gagne (1984) เสนอโครงสร้างรูปแบบของการประมวลข้อมูล ดังแผนภูมิที่ 3

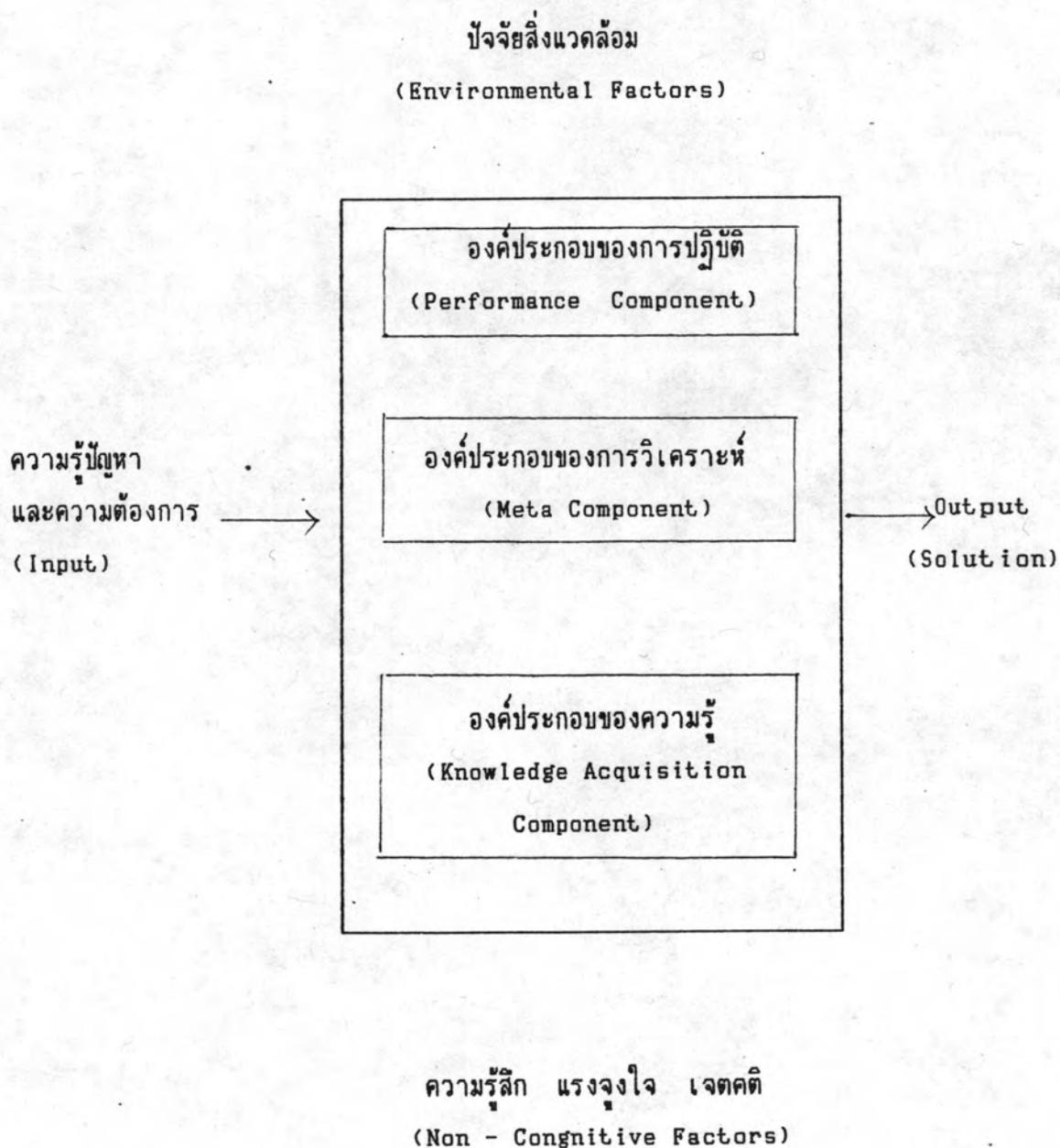


แผนภูมิที่ 3 รูปแบบของการประมวลข้อมูลตามความคิดของ Gagne

รูปแบบนี้แยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นสภาพแวดล้อมกับส่วนที่เป็นกายภาพของมนุษย์ Gagne มีความเชื่อว่า ส่วนที่เป็นกายภาพของมนุษย์นั้นมีระบบประสาทรับตัวป้อนเข้ามามีการรับรู้คือ การรับรู้ว่ามีอะไรเข้ามา เกิดเป็นความจำระยะสั้น และ ความจำระยะยาว แล้วเกิดการคิดปฏิกิริยาสนองตอบตามข้อมูลที่เข้ามาหรือตามความจำที่มีอยู่เดิม ซึ่งเป็นตัวที่จะแสดงออกมาเป็นพฤติกรรมตอบสนองต่อสิ่งแวดล้อม



Sternberg (1985) ได้เสนอรูปแบบของการประมวลผลข้อมูล ดังแผนภูมิที่ 4



แผนภูมิที่ 4 รูปแบบการประมวลผลข้อมูลตามความคิดของ Sternberg

ในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นเมื่อเขียนโจทย์ปัญหาให้นักเรียนทำหนึ่งข้ออย่างอิสระ โดยที่นักเรียนต้องทำด้วยตนเอง กระบวนการคิดของนักเรียนเป็นไปดังนี้

1. โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นภาษาที่ตาของนักเรียนจะจับอักษร และตัวเลขแสงจะไปกระทบกับอักษร และตัวเลขแล้วสะท้อนเข้าสู่ตา ตาจะรับแสง ซึ่งเป็นคลื่นโดยมีรีเซ็ปเตอร์ (Receptor) อยู่ในเรตินา (Retina) เป็นฉากรับภาพ (อักษรและตัวเลข) ซึ่งมีเซลล์ของตารับคลื่นเหล่านี้ไปรวมกันที่จุด ๆ หนึ่ง เป็นประสาทตา (Optic Nerve) แล้วส่งไปยังสมอง

2. คลื่นดังกล่าวจะถูกส่งไปยังสมองในบริเวณทัศนการ (Visual Area) อยู่ในซีรีบรัม (Cerebrum) กลับท่าย่อย ภายอักษรและตัวเลขจะถูกจัดกระทำในสมองซีกซ้าย โดยจะถามหน่วยความจำของสมองว่าอักษรและตัวเลขเหล่านี้อ่านว่าอย่างไร หมายความว่าอย่างไร ถ้าจำไม่ได้ หรือไม่เคยเรียนไม่เคยเห็น หรือไม่เคยถูกบันทึกไว้ในหน่วยความจำ นักเรียนก็จะตีความไม่ออกและคิดไม่ได้ในเวลาต่อมา

3. ถ้าจำได้ เรียกหน่วยความจำออกมาได้ ขึ้นต่อไปนักเรียนจะวิเคราะห์แยกแยะประเด็นของโจทย์ออกได้หรือไม่ ตอนนี้งยังเป็นภาระหน้าที่ของสมองซีกซ้าย แต่ก็อาจจะให้สมองซีกขวาช่วยส่งเคราะห์สลับกันไป จนได้รูปแบบของการแก้ปัญหา คำตอบของวิธีการแก้ปัญหาก็ปรากฏในสมองซีกขวา แต่การเรียงลำดับการเสนอวิธีการแก้ปัญหานั้นขั้นตอนจนได้คำตอบเป็นการกระทำของสมองซีกซ้าย

4. เมื่อได้รูปแบบของวิธีการแก้ปัญหา สมองซีกซ้ายจะสั่งกล้ามเนื้อให้เขียนตอบ แต่ถ้ายังไม่ถูกหรือกำลังคิด อาจจะมีการทลเลข นักเรียนอาจจะเขียนลงในกระดาษขณะตอนนี้จะให้หน่วยความจำ หน่วยตรรก โดยความสัมพันธ์ของการทำงานของสมองซีกซ้ายและขวาสลับกันไป

ทั้งหมดนี้เป็นกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ ที่อยู่ภายในสมองทั้งสิ้น แต่จะมีร่องรอยการคิดโดยอาศัยหน่วยความจำชั่วคราว คือ การเขียนลงในกระดาษทลเลขต่าง ๆ แต่นักเรียนบางคนอาจจะไม่ต้องอาศัยหน่วยความจำชั่วคราวจากเศษกระดาษแต่จำไว้ในสมองได้เลย โดยการคิดในใจ ทลไว้ในใจแล้วนำมาขบถลคณหรือหารได้เลย สมองซีกซ้ายมีหน้าที่ในการสรรหาถ้อยคำ วิเคราะห์ใช้เหตุใช้ผล คิดเชิงตรรกศาสตร์ โนม์เอียงเข้าหากฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ ส่วนสมองซีกขวามีหน้าที่ในการหารูปารูปแบบ สั่งเคราะห์ หยั่งรู้เอง คิดเชิงสร้างสรรค์ โนม์เอียงเข้าหากฎเกณฑ์ทางพลศึกษา ดนตรีและศิลปะ (กรมวิชาการ , กองวิจัยทางการศึกษา, 2531)

สำหรับขั้นตอนกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น มีผู้ศึกษาและเสนอความคิดไว้หลายทาง อาทิเช่น

ดีวี่ (Dewey, 1933) ได้เสนอกระบวนการคิดแก้ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอนคือ  
ขั้นเตรียมการ ขั้นวิเคราะห์ปัญหา ขั้นเสนอแนวทางในการแก้ปัญหา ขั้นตรวจสอบผลและ  
ขั้นนำไปประยุกต์ใช้

ฮิลตัน (Helton, 1958) ให้ความสำคัญในการแก้ปัญหา คือ  
วิธีการไม่ใช่คำตอบหลักการที่ถูกต้องจะนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องได้เอง และเขาได้เสนอแนะ  
ขั้นตอนของการแก้ปัญหา คืออ่านโจทย์ให้เข้าใจ เพื่อหาว่าโจทย์ต้องการอะไร ต้องการให้  
หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว หรือมากกว่านั้น กำหนดสัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่า หาความ  
สัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ที่สอดคล้องกันในโจทย์ปัญหา เขียนสมการ แก้สมการ ให้ความหมาย  
ของคำตอบ เช่น บอกหน่วย และตรวจสอบคำตอบ

เนอร์สัน (Person, 1961) เสนอความคิดเห็นว่า วิธีการที่ช่วยในการคิด  
แก้ปัญหาได้ดีควรจะเรียนรู้ให้เข้าใจอยู่ถูกต้องถึงวิธีการคิดแก้ปัญหา เรียนรู้การวิเคราะห์  
ปัญหาอย่างระมัดระวัง เรียนรู้ที่จะเขียนสมการ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง  
และเน้นว่าสิ่งสำคัญในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ คือการสร้างสมการให้ถูกต้อง เขาได้  
เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ คือ สมมติสัญลักษณ์ไม่ทราบค่าในโจทย์หรือแทน  
สิ่งที่ต้องการหา แล้วพยายามเขียนหรือแสดงพจน์ของตัว ไม่ทราบค่าตัวอื่นในรูปของตัวไม่  
ทราบค่าตัวอื่นในรูปของตัวไม่ทราบค่าตัวแรกที่กำหนด ต่อจากนั้นเขียนสมการให้ถูกต้อง  
โดยอาศัยความสัมพันธ์ของข้อมูล แล้วคิดคำนวณคำตอบที่ถูกต้อง โดยการแก้สมการ

เฟห์ร และฟิลลิปส์ (Fehr and Phillips, 1972) ให้ข้อคิดเห็นว่า สิ่ง  
ควรระมัดระวังในการคิดแก้ปัญหา คือ การตีความหมายของคำตอบ จะต้องพิจารณาถึงความ  
เหมาะสมกับสถานการณ์ นักเรียนบางคนสามารถหาคำตอบได้ แต่มิได้พิจารณาว่าคำตอบนั้น  
เหมาะสมเพียงใด เขาชี้ให้เห็นว่าการตีความหมายของคำตอบมีความสำคัญเท่า ๆ กับ การ  
หาคำตอบ เช่น ถ้านักเรียนตอบ 4.5 นักเรียนต้องถูกถามต่อไปว่า 4.5 หมายถึงอะไร  
คำตอบที่ถูกต้องก็คือ ด้านที่สั้นที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาว 4.5 ฟุต ในบางครั้ง  
คำตอบที่คำนวณได้ก็ไม่สามารถจะตอบได้ทันทีเสมอไป เช่นคำถามที่ว่า "ในการส่งนกพิราบ 138  
คน ไปยังสนามกีฬา โดยใช้รถโดยสารที่มีที่นั่ง 29 ที่นั่ง จะต้องใช้รถทั้งหมดกี่คัน" จาก  
ตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าต้องใช้วิธีการ ซึ่งคำนวณได้ดังนี้  $138 \div 29 = 4$  จากโจทย์  
ถามว่าใช้รถทั้งหมดกี่คัน จะตอบ 4 คันก็คงเป็นไปได้ว่า จำนวนรถจะเป็นเศษส่วน  
จะตอบ 4 คัน ก็คงไม่เพียงพอกับจำนวนนกพิราบ ดังนั้นคำตอบควรเป็น 5 คัน ซึ่งในการ  
ตอบคำตอบประเภทนี้ต้องอาศัยความถูกต้องและความเป็นไปได้ของสถานการณ์ของคำตอบด้วย

เลบลานซ์ (Leblance, 1977) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการคิดแก้  
ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 4 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจปัญหา การแก้ปัญหา การทบทวน  
ปัญหาและคำตอบ

ครูลิค (Kruлик, 1977) ได้เสนอแนะขั้นตอนของกระบวนการคิดแก้ปัญหา



ทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนั้นคือ แปลความปัญหาว่าถามเกี่ยวกับอะไร ต้องการค้นหาอะไร มีข้อมูลอะไรบ้างแล้ววาดรูปหรือเขียนรูปแบบประกอบ โดยกำหนดสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้าไปให้เหมาะสมขั้นตอนต่อไป จึงเชื่อมโยงข้อมูลที่มีอยู่แล้วกับข้อมูลที่ยังไม่มี มีปัญหาลักษณะคล้ายกันที่เราทราบคำตอบแล้วหรือไม่ ตั้งสมมติฐานหลาย ๆ ข้อและหาวิธีการต่าง ๆ มาทดสอบสมมติฐานแต่ละข้อนั้น ต่อจากนั้นจึงดำเนินการตามวิธีที่เลือกมาแล้วพิจารณาความเชื่อถือได้ของสมมติฐานแต่ละข้อ และตรวจสอบว่า มีความเชื่อถือได้และเป็นคำตอบที่ได้มาจากปัญหาที่กำหนดให้จริงหรือไม่

ขั้นตอนของกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เสนอมาข้างต้น สอดคล้องกับขั้นตอนกระบวนการคิดแก้ปัญหาของ พอลยา (Polya, 1977) ใน "How to Solve It" ซึ่งเขาได้เสนอแนะไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา สามารถระบุสิ่งที่ต้องการหาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ นั้น มีอะไรบ้าง สามารถเขียนภาพเพื่อช่วยให้เข้าใจในปัญหานั้นได้

2. ขั้นการวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่สามารถค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้กับสิ่งที่เราต้องการหา โดยอาศัยข้อมูลบางอย่าง ซึ่งอาจจะไม่ใช่ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาสนับสนุนความคิด อาทิเช่น ปัญหาที่เคยพบมาก่อนมีลักษณะคล้ายคลึงกับปัญหานี้หรือไม่ หรือพิจารณาจากบทนิยาม คุณสมบัติ ทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาก่อน ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องมีความรู้ที่จำเป็นในการแก้ปัญหา และได้รับการฝึกการคิดการให้เหตุผลมาอย่างดี

3. ขั้นการดำเนินการตามแผน สามารถพิจารณาแต่ละขั้นตอนถูกต้อง หรือยังสามารถพิสูจน์ได้ใหม่ว่า แผนที่เราวางไว้ในกาแก้ปัญหาถูกต้องหรือไม่

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา สามารถที่จะตรวจสอบคำตอบที่ได้ อธิบายเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าว พร้อมทั้งทบทวน และอภิปรายวิธีการแก้ปัญหา เพื่อช่วยให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาอื่น นอกจากนี้ ถ้ามีข้อบกพร่อง ในส่วนใดเราอาจพบ และแก้ไขได้ หรืออาจเกิดความคิดค้นแปลงวิธีการแก้ปัญหาให้ง่ายขึ้น และชัดเจนยิ่งขึ้น

จากกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่กล่าวมาข้างต้นนั้น สรุปเป็นแนวคิดในการพัฒนาการวัดกระบวนการแก้ปัญหา โดยยึดแนวทางของ พอลยา (Polya) ซึ่งพิจารณาเป็นพฤติกรรมในการแสดงออก โดยให้นักเรียนคิดออกเสียง ตามรายละเอียดของขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นการวางแผนแก้ปัญหา ขั้นการดำเนินการตามแผนหรือการคิดคำนวณ และ ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบกระบวนการแก้ปัญหา



### ความแตกต่างของกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแต่ละบุคคล

จากการเสนอแนวคิดกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่ามนุษย์มีวิธีการในการแก้ปัญหามากมาย ซึ่งอาจจะเหมือนกัน หรือแตกต่างกันก็ได้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ข้อเดียวกันที่กำหนดให้นักเรียนแก้ปัญหา จะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น แต่วิธีการที่นำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องอาจจะมีหลายวิธีแตกต่างกันไป เมื่อเร็ว ๆ นี้มีผู้สนใจศึกษา เกี่ยวกับความแตกต่างของแต่ละบุคคลในการนำความรู้ความเข้าใจไปใช้ในการคิดแก้ปัญหา มีการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษากระบวนการแก้ปัญหา โดยพยายามให้มีประสิทธิภาพในการเก็บข้อมูลที่เกี่ยวกับกระบวนการคิดแก้ปัญหา สามารถแยกแยะพฤติกรรมรายละเอียดที่แตกต่างกันของกลุ่มตัวอย่างที่แสดงออกโต้ตอบกับปัญหานั้น ทั้งในด้านการสังเกตและเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาโดยตรง อาทิเช่น บลุม และ โบรเดอร์ (Blöan and Broder, 1950) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสืบค้นกระบวนการในการแก้ปัญหา โดยให้ความเห็นว่าบุคคลจะมีความแตกต่างกันของการแก้ปัญหา 4 ลักษณะ คือ การเข้าใจในธรรมชาติของปัญหา , การเข้าใจในความคิดที่บรรจุในปัญหานั้น , ลักษณะทั่วไปในการเข้าสู่วิธีการของการแก้ปัญหา และทัศนคติที่มีต่อวิธีการที่นำไปแก้ปัญหานั้น

คอสไมเออร์ และ ลอฟลิน (Klausmeier and Loughlin, 1961) ได้ศึกษานำวิธีการที่มีประสิทธิภาพของการแก้ปัญหา วิธีหนึ่งที่มีลักษณะเฉพาะที่ใช้ในการทดสอบเพื่อศึกษาความแตกต่างในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาต่างกัน คือ ต่ำ ปานกลาง และสูง เขาและคณะ พบว่ามีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 อย่างมีนัยสำคัญ ในด้านวิธีการที่ใช้การแก้ปัญหาและการใช้เหตุผลมีนักจิตวิทยาอื่น ๆ ที่ประสงค์จะศึกษารายละเอียด โดยตรวจสอบขั้นตอนในการแก้ปัญหา มีเกณฑ์ของตรวจเช็คและเน้นขั้นตอนกระบวนการเป็นสิ่งสำคัญ สภาพของนักเรียนที่ได้รับการสอนการกระตุ้นให้คิดและแก้ปัญหาแล้วมุ่งพิจารณาถึงลักษณะการแก้ปัญหาภายนอกที่มองเห็นนั้นจะออกมาเป็นผลของความคิด (คำตอบ) ไม่นอเพียง มีบางส่วนที่สนใจและมุ่งพิจารณาถึงกระบวนการภายในเกี่ยวกับการนิยามปัญหา เกณฑ์ที่ใช้ในการเลือกหาวิธีการ ซึ่งมีความแตกต่างกัน รวมทั้งความแตกต่างกันเป็นรายบุคคลในกระบวนการคิด สิ่งเหล่านี้มีผลต่อการแก้ปัญหาโดยตรง และเป็นพัฒนาการในการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งควรได้รับการสนใจพฤติกรรมกระบวนการแก้ปัญหาส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กับสภาพของการเรียนรู้กฎนิยามต่าง ๆ การเอาใจใส่ และความคิดรวบยอดรวมทั้งประสบการณ์ที่ได้รับมาก่อนในแต่ละบุคคล การประสบความสำเร็จในการหาคำตอบของปัญหาด้วยวิธีการที่ผ่านมาจะทำให้เขารับและนำวิธีการเหล่านั้นมาเป็นแบบอย่าง หรือ

เป็นวิธีการทั่ว ๆ ไปที่จะนำไปใช้กับปัญหาอื่น ๆ

จากแนวความคิดข้างต้นที่กล่าวมาแล้ว สรุปได้ว่า มีความแตกต่างกันในแต่ละบุคคลของกระบวนการคิดแก้ปัญหาที่เขาเหล่านั้นแสดงออกมาสามารถที่จะศึกษาได้โดยกำหนดงาน หรือ ปัญหาที่เฉพาะสามารถสร้างความจริง โดยแท้ของแต่ละบุคคลในการใช้เทคนิคการแก้ปัญหา

### การวิเคราะห์พฤติกรรมการแก้ปัญหา

เมื่อเร็ว ๆ นี้ นักจิตวิทยาได้ใช้ผลงานที่น่าสนใจ ในการพบวิธีการวิเคราะห์หรือจัดแบ่งพฤติกรรมของผู้ที่แก้ปัญหาได้สำเร็จ และไม่สำเร็จ ซึ่งพัฒนารายละเอียดขั้นตอนและบันทึกลักษณะเฉพาะของพฤติกรรมที่ผู้แก้ปัญหาแสดงออกมาได้อย่างเพียงพอ อาทิ เช่น ผลงานของ บลูม และ โบรเดอร์ (Bloom and Broder, 1958) ซึ่งส่วนใหญ่ยอมรับว่าวิธีการที่เขาใช้ในการวิเคราะห์ค่อนข้างเป็นธรรมชาติ โดยกำหนดให้ผู้แก้ปัญหาแสดงกระบวนการคิดเป็นการพูดออกมาในขณะที่แก้ปัญหา ซึ่งไม่เหมือนกับการวิเคราะห์ทางด้านตัวเลขที่เน้นไปที่ผลของการคิดเทคนิคการวิเคราะห์นั้นเชื่อในเรื่องของความแตกต่างระหว่างบุคคลในการแก้ปัญหา เทคนิควิธีการที่นำมาใช้นั้นจะมีข้อจำกัดอยู่ที่จำนวนของกลุ่มตัวอย่างและมีการเปลี่ยนแปลงในวิธีการทดสอบรวมทั้งปัญหา โดยผู้เข้าสอบจะต้องเลือกบอกวิธีการที่เป็นแนวทางไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้องกับลักษณะของปัญหามากกว่าที่จะเป็นการค้นพบวิธีการใหม่ ๆ

การศึกษากระบวนการแก้ปัญหาของนักคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ เพื่ออธิบายการแก้ปัญหาจากกิจกรรมภายนอกไม่ได้ศึกษาเข้าไปในกระบวนการทางปัญญา โดยใช้เครื่องมือ เช่น การวิเคราะห์คำพูด เพื่อหากระบวนการที่ผู้แก้ปัญหาได้สำเร็จใช้หากระบวนการแก้ปัญหาที่นำไปสอนคนอื่น ๆ ได้ และเพื่อติดตามว่ากระบวนการแก้ปัญหาพัฒนาเมื่อไรและพัฒนาอย่างไร (Lester, 1980)

กระบวนการแก้ปัญหาที่ศึกษาแยกได้เป็น 2 ลักษณะ คือ "Heuristic" หมายถึงแผนการกระทำหรือลำดับการกระทำในการค้นหาทางแก้ปัญหา "Tool skills" หมายถึงทักษะที่เป็นเครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหา (Lester, 1980)

เทคนิคการศึกษากระบวนการแก้ปัญหา เทคนิคที่ใช้ศึกษากระบวนการแก้ปัญหาอย่างแพร่หลายมีอยู่ 4 วิธี คือ

1. Thinking Aloud วิธีนี้ให้ผู้แก้ปัญหาคิดในสิ่งที่คิดและคำถามที่ถามตัวเองออกมาขณะแก้ปัญหา อาจมีการใช้แถบบันทึกภาพ วิดีทัศน์บันทึกพฤติกรรมที่เกิดขึ้น มักนิยมใช้กับโปรโตคอล โค้ดดิ้ง (protocol coding) เพื่อบันทึกพฤติกรรมที่คาดหมาย การให้นักเรียนพูดสิ่งที่คิดออกมาขณะแก้ปัญหานี้ไม่เหมาะสมจะใช้กับนักเรียนไทย เพราะนักเรียนไทย

ปัจจุบันถูกฝึกให้คิดอย่างเจียบ ๆ

2. Introspection วิธีนี้ให้ผู้แก้ปัญหาวิเคราะห์ความคิดของคนในการแก้ปัญหา
3. Retrospection วิธีนี้ให้ผู้แก้ปัญหาวิเคราะห์ความคิดของคนหลังจากแก้ปัญหาได้แล้ว และมีการถกเถียงอภิปรายกันระหว่างผู้แก้ปัญหากับผู้สังเกตการแก้ปัญหา
4. Written problem-solving inventories เป็นการนำวิธีที่กล่าวมาแล้ว 1 วิธี หรือมากกว่ามาทำเป็นแบบฟอร์มให้ผู้แก้ปัญหาคอบ วิธีนี้สามารถใช้กับคนได้เป็นจำนวนมาก (Lester, 1980 อ้างใน สุรวุฒิ คล้ายมงคล, 2534)

### ทฤษฎีการคิดออกเสียง (The Theory of Thinking aloud)

ผู้ที่นำวิธีนี้ไปปฏิบัติได้อธิบายไว้ว่า วิธีนี้ส่วนใหญ่ได้มาจากประสบการณ์ แต่อย่างไรก็ตามสามารถที่จะอธิบายได้จากทฤษฎีประมวลผลข้อมูล (Information-processing) ของกระบวนการคิดออกเสียง (Ericsson and Simon, 1984 อ้างใน Posner, 1989) ทฤษฎีนี้เริ่มต้นด้วยข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่า กระบวนการที่ก่อให้เกิดการรายงานด้วยคำพูดเป็นส่วนย่อยของกระบวนการ ซึ่งเป็นพฤติกรรมทั้งหมดที่สามารถสังเกตได้และสามารถนำไปสู่การวิเคราะห์กระบวนการการข่าวสารประมวลผลข้อมูล ทฤษฎีนี้ยอมรับว่า การคงอยู่ของความจำระยะยาวและระยะสั้นนั้นถูกจำกัดข้อมูลที่เข้าไปนั้นเป็นลำดับต่อเนื่องกันและใช้เวลาสำหรับการกระตุ้น นอกจากนั้นยังมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ไขปัญหที่เกิดขึ้นในช่วงของปัญหาสามารถรวมอยู่ด้วยแต่ก็ไม่จำเป็น

สาระสำคัญของทฤษฎีการรายงานเป็นคำพูดก็คือ ผู้ที่ได้รับการทดสอบสามารถรายงานเป็นเนื้อหาของความจำระยะสั้นเท่านั้น มีวิธีการรายงานด้วยคำพูด 3 วิธี ดังนี้

1. เป็นการพูดโดยตรง (Direct Verblization) หมายถึง เป็นการพูดข่าวสารออกมาอย่างง่าย ๆ ซึ่งเป็นรหัสภาษาที่อยู่ในความจำระยะสั้นเรียบร้อยแล้ว เพราะผู้ที่ได้รับการทดสอบจะพูดออกมาตามที่คิด ดังนั้นการพูดไม่มีผลกระทบต่อเวลาในการทำงานหรือลำดับขั้นตอนกระบวนการของเขา ผู้ที่ได้รับการทดสอบจะพูดกับตัวเองอย่างธรรมชาติ ขณะกำลังแก้ปัญหาเป็นการแสดงออกมาด้วยภาษาโดยตรง ผู้ที่ได้รับการทดสอบจะได้รับการแนะนำหรือสอนให้รู้จักการพูดออกเสียงอย่างเป็นธรรมชาติ ขณะเดียวกันก็หลีกเลี่ยงการพยายามที่จะตอบหรือพูดอย่างถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งทั้งหมดนี้จะเป็นเงื่อนไขของการใช้ภาษาโดยตรง

2. การบันทึกเนื้อหาของความจำระยะสั้น (Recording the contents of STM) ประกอบกับในการรายงานเป็นคำพูด การอธิบายในเนื้อหาของความจำระยะสั้น เมื่อสิ่งเหล่านั้นยังไม่เป็นรหัสของถ้อยคำ ดังนั้นผู้ที่ได้รับการทดสอบได้รับการสอนให้พูดออกเสียงขณะกำลังปฏิบัติงานที่เกี่ยวข้องกับจินตนาการ อันอาจจะบันทึกได้ในบางส่วนของ การจำก่อนที่จะสามารถรายงานออกเป็นคำพูด ทฤษฎีกล่าวว่า กระบวนการบันทึกจะใช้เวลา

ร่วมกับกระบวนการแสดงออกในงานของเขา ในกรณีเช่นนี้เราจะคาดคะเนว่า การพูดต้องช้าลงแต่ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนลำดับขั้นตอนของกระบวนการ เพราะข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการทำนายนการใช้เวลาว่ากันว่า การพูดจะสิ้นสุดภายใต้ปริมาณงานที่สูง ซึ่งไม่ได้เป็นวิธีการอย่างธรรมชาติของกระบวนการข่าวสาร

3. การอธิบาย ที่ประกอบการรายงานเป็นคำพูด ซึ่งกำหนดกระบวนการที่นอกเหนือจากการบันทึกอย่างง่าย ตัวอย่างเช่น การถามให้ผู้รับการทดสอบอธิบายความคิดของเขา อาจจะมีผลต่อความพยายามของเขาในการอธิบายอย่างต่อเนื่องในเชิงสังเคราะห์ เมื่อกระบวนการถูกพูดถึงให้ได้เช่นเดียวกับผลของการสอนให้พูด เราคาดหวังว่าเวลาที่ใช้จะเพิ่มขึ้นและลำดับขั้นของกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาจะถูกกระบวนการอธิบายสำหรับตัวมันเองแล้วอาจจะหรือไม่อาจจะระมัดระวังในการรายงานถึงกระบวนการอย่างตั้งใจ ยิ่งไปกว่านั้นขึ้นอยู่กับงานที่ทำ ตัวของผู้รับการทดสอบและธรรมชาติของความพยายามในการอธิบาย

การแนะนำให้กลุ่มตัวอย่างรู้จักการอธิบายไม่เป็นไร ถึงแม้ว่าการอธิบายเป็นสิ่งที่น่าสนใจในส่วนของเขา ถ้าข้อมูลเบื้องต้นของเราได้มาโดยการบันทึกที่ถูกต้องของลำดับของข้อมูลที่แน่นอนในการปฏิบัติงาน เมื่อเป็นเช่นนั้นการพูดอีก 2 วิธีนี้จะดีกว่า (Michaelli Posner, 1989)

เทคนิควิธีการคิดออกเสียง (Thinking aloud Technique) เป็นวิธีหนึ่งที่กำลังแพร่หลายในหมู่นักศึกษา และนักจิตวิทยา ซึ่งมีความเชื่อในทฤษฎีกระบวนการข่าวสาร (Information processing) และการจำลองการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีผู้ทำการทดลองนำเทคนิคการคิดออกเสียงนี้ไปใช้ในการศึกษากระบวนการคิดแก้ปัญหา ของบุคคล อาทิเช่น

บรันค (Brunk, 1958) ได้ทำการศึกษากับกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กำหนดให้กลุ่มแรก พูดความคิดของเขาออกมาให้เหมือนกับที่เขาแก้ปัญหา และมีบ้างที่ไม่พูดหรือเงียบไปขณะที่เขาแก้ปัญหาอื่น ๆ กลุ่มที่ 2 ให้แก้ปัญหา เช่นเดียวกับกับกลุ่มที่ 1 แต่ไม่ต้องคิดออกเสียงผลที่ได้ชี้ให้เห็นว่า วิธีการคิดออกเสียงกับความชำนาญในการแก้ปัญหา มีความสัมพันธ์กันตัวอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนั้นกลุ่มตัวอย่างที่กำหนดให้คิดออกเสียงต้องการเวลาในการแก้ปัญหามาก และสิ่งที่เป็นพื้นฐานในงานของบรันค และผู้ร่วมงาน ลงความเห็นว่า กระบวนการคิดเป็นสิ่งซับซ้อนมากสามารถที่ศึกษาได้ โดยงานที่ใช้การคิดออกเสียง

โบรเวอร์แมน และลาซาร์ส (Broverman and Lazarus, 1958) เสนอแนวคิดที่ว่า โครงสร้างของความรู้อาจจะบังคับแทรกแซง (เข้าไปมีส่วนร่วม) การปฏิบัติงานของเขาเหล่านั้น โดยให้คิดออกเสียง ซึ่งจะมีผลต่อการปฏิบัติในการแก้ปัญหาของมนุษย์อย่างมีนัยสำคัญ

รุต (Roth, 1965) เป็นอีกผู้หนึ่งที่เสนอผลงานการทดลองของเขาที่ชี้ให้เห็นว่าการคิดออกเสียงมีผลกระทบบอย่างไม่มีนัยสำคัญ เขาศึกษากับนักศึกษาที่อยู่ในระดับต่ำกว่า



ปริญญาดริ โดยกำหนดให้กลุ่มตัวอย่างคิดออกเสียง ซึ่งกลุ่มตัวอย่างเหล่านั้นประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา เขาเชื่อว่าข้อสรุปของเขาอาจจะแตกต่างกับ ข้อสรุป ของบรันค (Brunk) ซึ่งอาจจะเป็นเพราะปัญหาที่เขาเลือกมาใช้ในการทดสอบ

แอทเรียแอน ดี กรท (Adrian de Groot) ได้เสนอแนวคิดว่าการวิเคราะห์กระบวนการคิด โดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงนั้น เป็นการจำลองรูปแบบ ของโปรแกรมของกระบวนการทางความรู้ การคิดใคร่ครวญ เป็นสิ่งที่ดีและนิยมกันมานานแล้ว ด้วยวิธีการที่ทันสมัย ของการวิเคราะห์บันทึกหลังสัมภาษณ์

คิลพาทริค , เพียเจท์ และไซมอน (Kilpatrick ,Paige and Simon, 1967) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาโดยตรง โดยใช้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการศึกษา งานของเขาทั้งหมด ใช้วิธีการทางคลินิก ซึ่งการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างเป็นรายบุคคล และถาม เขาให้คิดออกเสียงให้เหมือนกับที่เขาคิดหาวิธีการในการแก้ปัญหา จากผลงานของพอลยา (Polya) ใน "How to Solve It" ซึ่งแนะนำในเรื่องการตรวจเช็คลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา คิลพาทริค ได้พัฒนางานของพอลยา เป็นระบบรหัสสำหรับวิเคราะห์พฤติกรรมของนักเรียนที่พยายามในการแก้ปัญหา จุดสำคัญคือ ความแตกต่างระหว่างบุคคลของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งปรากฏให้เห็นเป็นแนวทางในการใช้วิธีลองผิด ลองถูก ในการแก้ปัญหา เช่นเดียวกับการ หลากหลายของวิธีการนิรนัย (deductive) คิลพาทริค เลือกปัญหา ซึ่งกลุ่มตัวอย่าง สามารถแก้ปัญหาได้ โดยใช้เลขคณิต หรือนิซคณิต ซึ่งต่างกับเพียเจท์ และไซมอน ปัญหา ที่ใช้ต้องเป็นปัญหาเฉพาะที่ไม่เคยพบวิธีการมาก่อนแต่เป็นการประยุกต์ในการตั้งสมการที่เป็น ตัวแทนของวิธีการในการแก้ปัญหา เขาเหล่านี้พิจารณาความสามารถของกลุ่มตัวอย่างใน เรื่องการใช้ข้อมูลสนับสนุน หรือแนวทางในการแก้ปัญหารวมทั้งสถานที่แท้จริงของลักษณะของ ปัญหา ซึ่งทำได้ดีในการแก้ปัญหาโดยใช้ถ้อยคำ ผลงานวิจัยของ เพียเจท์ และไซมอน ได้ ให้รายละเอียดว่าลักษณะของปัญหาที่ไม่มีวิธีการแก้ เนื่องจากสภาพของสถานการณ์ที่เป็นไป ไม่ได้ ของปัญหาเป็นประโยชน์อย่างมากทำให้ทราบความแตกต่างรายละเอียดบุคคลในการสืบค้น กระบวนการแก้ปัญหา

สเตเฟน (Stephen P. Norris, 1990) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ผลกระทบของ การล้วงเอาความจริงจากการรายงาน โดยคำพูดของการทดสอบภาคปฏิบัติการคิด วิเคราะห์วิจารณ์" โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 343 คน ซึ่งแบ่งเป็น 5 กลุ่ม เป็นกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม อีก 4 กลุ่มนั้นจะใช้วิธีการในการถาม ความจริงที่แตกต่างกัน คือ กลุ่มแรกให้คิดออกเสียงและทำเครื่องหมายลงบนกระดาษคำตอบ กลุ่มที่สอง ให้ทำเครื่องหมายลงบนกระดาษคำตอบก่อน และให้ตอบว่าทำไม่จริง เลือกคำตอบ นั้นทันทีที่เลือกคำตอบแล้ว กลุ่มที่สาม ให้ทำเครื่องหมายลงบนกระดาษคำตอบและถาม หลังจากทำเครื่องหมายเกี่ยวกับข้อคำถามนั้น กลุ่มที่ 4 มีลักษณะคล้ายกับกลุ่มที่ 3 และถามเพิ่มเติมรายละเอียดเกี่ยวกับหลักการทั่วไปในการเลือกคำตอบ กลุ่มที่ 5 ซึ่ง

เป็นการควบคุมให้ทดสอบ โดยใช้กระดาษ ดินสอ ไม่มีการสัมภาษณ์ เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบเลือกตอบ ซึ่งเป็นแบบทดสอบการคิดวิเคราะห์ที่วิจารณ์ได้กับเดี่ยวกั้ทุกกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ ในการปฏิบัติการทดสอบระหว่างกลุ่มตัวอย่าง 5 กลุ่ม ทั้งในเรื่องคุณภาพของการคิดระหว่าง 4 กลุ่ม ซึ่งกำหนดให้รายงานโดยคำพูดด้วยเหตุผลนี้ เป็นหลักฐานว่าการคิดที่รายงานออกมาเป็นคำพูด มีความตรงซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นในการทดสอบ และมีความหมายมากในการรวบรวมข้อมูล การพูดนั้นไม่ได้เปลี่ยนแปลงความคิด และการปฏิบัติของผู้สอบ

### สรุป

จากแนวคิดและผลงานที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคการคิดออกเสียง จะเห็นได้ว่าวิธีการคิดออกเสียงถูกนำมาใช้ได้ผลที่แท้จริง ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดแก้ปัญหา ข้อมูลที่ได้มีความหมายมาก และมีความเชื่อมั่นไม่เปลี่ยนแปลง ดังที่นักวิจัยทั้งหลายได้นำมาใช้

### รูปแบบการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เนื่องจากการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการวัดที่เน้นกระบวนการในการดำเนินการโต้ตอบกับปัญหา มากกว่าที่จะเน้นผลที่ได้รับจากการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นเพียงคำตอบที่ถูกต้องเท่านั้น ดังที่กล่าวข้างต้นแล้วว่ากระบวนการที่นักเรียนใช้ในการโต้ตอบปัญหา เพื่อนำไปสู่วิธีการแก้ปัญหาเป็นเรื่องซับซ้อน แต่สามารถวัดได้ ข้อมูลที่ได้จากการวัดมีประโยชน์มากทำให้เห็นถึงพัฒนาการการใช้ความรู้ในการแก้ไขโจทย์ปัญหา จากการสำรวจงานวิจัยในประเทศไทย ที่เกี่ยวกับกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยตรงนั้นมีน้อยมาก ส่วนใหญ่เป็นการศึกษาในเรื่องความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีรูปแบบการวัดที่เน้นผลลัพธ์ของการแก้ปัญหาในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยตรงนั้นเป็นการสอบแบบเขียนตอบ โดยใช้แบบทดสอบปรนัย ชนิดเลือกตอบ ซึ่งได้แก่ ไตรรงค์ เจนการ (2532) ได้ศึกษา "การพิสูจน์ร่องรอยกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์" โดยให้นักเรียนแสดงวิธีการคิดหาคำตอบในกระดาษคำตอบของทุกคนด้วย พร้อมทั้งร่องรอยการคิด คำแนวเหตุผล แล้วสอบถามเด็กเป็นรายบุคคลอีกครั้ง หลังจากสอบเสร็จเรียบร้อยแล้ว

ชมนาด สิบศรี (2533) ซึ่งเป็นการทดสอบโดยให้แบบสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ โดยกำหนดโจทย์ปัญหาสร้างคำถามเป็นขั้นตอนกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3 ข้อย่อยตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา ดังนี้ ขั้นวิเคราะห์ปัญหา , ขั้นวางแผนแก้ปัญหา และขั้นการคิดคำนวณ โดยมีตัวเลือกให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

รูปแบบการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบทดสอบอัตนัย ได้แก่

วิจิตรา กานกลาง (2532) ได้ศึกษาเรื่อง "กระบวนการคิด และความรู้สึก  
โครงการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนทางด้านความรู้ ความคิด" โดยใช้การศึกษาแบบ  
คลินิก (Clinical Approach) โดยให้นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทำข้อสอบอัตนัย และให้  
แสดงวิธีทำโดยทดเลขไว้ในช่องว่างด้านขวามือและทำการสัมภาษณ์ เพื่อศึกษาร่องรอยการ  
คิดของเด็กเป็นรายบุคคล เพื่อวิเคราะห์กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่กำลัง  
ศึกษาอยู่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

รูปแบบการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบทดสอบอัตนัยและนำรูปแบบ  
การคิดออกเสียงมาใช้ และมีรหัสวิเคราะห์กระบวนการคิด ได้แก่

เฟลเฮอร์ตี (Flaherty, 1974) ซึ่งพัฒนามาจากผลงานของ Polya ใน  
ขั้นตอนต่าง ๆ ของกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

จากรูปแบบการวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังที่กล่าวข้างต้นนั้น  
ผู้วิจัยได้นำมาพัฒนาเป็นรูปแบบวัดกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งมีแบบในการตรวจ  
เช็คขั้นตอนในการแก้ปัญหา เกณฑ์การให้คะแนน และหาคุณภาพของเครื่องมือนี้ พร้อมทั้ง  
เปรียบเทียบผลการใช้วิธีการวัด โดยการคิดออกเสียงในนักเรียนที่มีความสามารถต่าง  
ระดับกัน

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง กับกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์  
และรูปแบบการวัดความสามารถในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งในประเทศและ  
ต่างประเทศ งานวิจัยทางด้านความสามารถในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์  
โดยตรงแล้วมีน้อยมาก ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำเทคนิคการคิดออกเสียง  
มาใช้เพื่อศึกษากระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะเป็นงานวิจัยของต่างประเทศ  
เป็นส่วนใหญ่

## งานวิจัยในประเทศไทย

ไตรรงค์ เจนการ (2532) ได้ศึกษา "การนิพนธ์ร่องรอยกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์" โดยทดลองสอบเด็กด้วยปัญหาทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติกรุงเทพมหานคร จำนวน 3 โรงเรียน รวมทั้งสิ้น 116 คน ผลการสอบสิ่งที่ได้มา คือ กระจาษ คำตอบของเด็กทุกคนที่แสดงวิธีการจนได้คำตอบพร้อมกับร่องรอยการคิด ผู้วิจัยได้สอบถามเด็กเป็นรายบุคคลอีกครั้งหนึ่งโดยอาศัยร่องรอยการคิด และการแสดงวิธีทำในแต่ละตอนของเด็กเกือบทุกคน เด็กทุกคนจะเล่าและแสดงกระบวนการคิดซึ่งอีกครั้งตามลำดับจนได้คำตอบ ข้อค้นพบ คือ รูปแบบการคิด 6 แบบ คือ

1. เด็กอ่านโจทย์เข้าใจ รู้วิธีทำ คิดคำนวณได้ ถูกตามวิธีการได้คำตอบถูกต้อง

2. เด็กอ่านโจทย์เข้าใจ รู้วิธีทำว่าอย่างไร บอกถูกว่าทำอะไรก่อน หรือ หลังแต่ลงมือแล้วคำนวณไม่ถูกหรือถูกบางจุดเลยได้คำตอบผิด

3. อ่านโจทย์เข้าใจ แต่ไม่รู้วิธีทำที่ถูกจึงทำให้ได้คำตอบที่ผิดแม้จะมีความสามารถในการคิดคำนวณก็ตาม

4. เด็กเข้าใจ เพียงโจทย์อย่างเดียว นอกนั้นทำไม่ได้

5. เด็กคิดคำนวณได้อย่างเดียว โจทย์ที่ให้อ่านไม่เข้าใจ

6. ไม่รู้อะไรเลย บางที่อ่านหนังสือไม่ออก

ชมนาด สิบศรี (2533) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบความสามารถในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่ได้รับการอบรมเลี้ยงดูแตกต่างกัน" กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 456 คน โดยแบ่งเป็น 3 กลุ่ม คือ นักเรียนที่ได้รับการอบรมเลี้ยงดูแบบปล่อยปละละเลยแบบประชาธิปไตย มีความสามารถในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าแบบปล่อยปละละเลยและแบบปกป้องคุ้มครอง มากจนเกินไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นักเรียนที่ได้รับการอบรมเลี้ยงดูแบบปล่อยปละละเลย และแบบปกป้องคุ้มครองมากจนเกินไป มีความสามารถในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

วิจิตรา การกลาง (2532) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "กระบวนการคิดและความรู้สึกโครงการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน ทางด้านความรู้ ความคิด" ได้ศึกษาธรรมชาติของกระบวนการคิด ตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในด้านกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเสนอรูปแบบของการเรียนการสอนที่เอื้อต่อการวินิจฉัยกระบวนการและพัฒนากระบวนการคิดของเด็กกลุ่มตัวอย่างที่ใช้เป็นนักเรียนชั้นประถมปีที่ 6 ปีการศึกษา 2530 ของโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ จำนวน 289 คน โดย



การสุ่มจากทุกภาค ๆ ละ 2 จังหวัด ในแต่ละจังหวัด โดยสุ่มเลือกโรงเรียนที่มีครูผ่านการอบรมการประเมินผล จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ได้โรงเรียนในเมือง 6 โรงเรียน และโรงเรียนในชนบท 5 โรงเรียน เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบ 3 ฉบับ คือ แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทั่วไป แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดเจตคติทั้งแบบสอบถามเกี่ยวกับปัจจัยแวดล้อมผลการวิจัย พบว่ากระบวนการคิดทั่วไปแต่ละขั้นมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ยกเว้นความคิดรวบยอดที่มีลักษณะเป็นอิสระ และควรได้รับการพัฒนาก่อนเพราะเป็นส่วนองความรู้พื้นฐาน การพัฒนากระบวนการคิดจะต้องจะกระทำให้ต่อเนื่องทั้งในด้านการแปลสถานการณ์ วางแผนยุทธศาสตร์ การปฏิบัติตาม การตรวจสอบและความคิดที่เป็นระบบ ส่วนกระบวนการคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น มีขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้ คือ 1. อ่านโจทย์เข้าใจ 2. แปลงภาษาโจทย์เป็นสัญลักษณ์ 3. บอกวิธีทำได้ 4. เขียนประโยชน์สัญลักษณ์ 5. คิดคำนวณ และ 6. หาคำตอบได้ ซึ่งในแต่ละขั้นตอนมีความสัมพันธ์เชื่อมโยงซึ่งกันและกัน มีความสัมพันธ์กับกระบวนการคิดทั่วไปด้วย และได้พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง คุณลักษณะที่จะต้องพัฒนา คือ การแปลงภาษาโจทย์เป็นสัญลักษณ์ การคิดคำนวณและการหาคำตอบส่วนในด้านกระบวนการคิดทั่วไปของเด็ก ส่วนใหญ่อยู่ในระดับพอใจคุณลักษณะที่จะต้องพัฒนา คือ การแปลสถานการณ์ และการปฏิบัติอย่างมีระบบ และผลการศึกษาตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถ ในด้านกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์นั้น พบว่ากระบวนการคิดทั่วไป เจตคติและการอบรมเลี้ยงดูต่างมีอิทธิพลต่อความสามารถ ในด้านกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของเด็ก โดยเฉพาะกระบวนการคิดทั่วไปในด้านการวางแผนกำหนดยุทธศาสตร์ การปฏิบัติอย่างมีระบบเป็นตัวแทนที่มีอิทธิพลต่อกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์สูงที่สุด รองลงมาคือ เจตคติในด้านการเข้าร่วมกิจกรรมที่ต้องใช้ความคิดและความกระตือรือร้นอยากรู้อยากเห็นและการอบรมเลี้ยงดูที่มีเหตุผลของผู้ปกครองตามลำดับ

สุวรรณ คัลายมงคล (2534) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การศึกษากระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร" โดยใช้กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานครที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 102 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 ประเภท คือ แบบวัดกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา (เอ็ม, อี, คิว) แบบสังเกตกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา และแบบสัมภาษณ์การใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหา ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา เพียง 3 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา การวางแผนแก้ปัญหา และการดำเนินการตามแผนแก้ปัญหา มีส่วนน้อยที่ทำครบ 4 ขั้นตอน คือ มีการทบทวนคำตอบและแผนการแก้ปัญหา นักเรียนมี

วิธีการเปรียบเทียบวิธีการหาทางเลือกที่มากที่สุด วิธีการเขียนรายงานและวิธีการลงมือ  
ลองดู แต่นักเรียนที่มีวิธีการคิดย้อนหลังมีจำนวนน้อยและนักเรียนยังขาดวิธีการสร้างตาราง

### งานวิจัยในต่างประเทศ

บลูม และโบรเดอร์ (Bloom and Broder, 1950) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ  
กระบวนการแก้ปัญหาของนิสิต กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนิสิตมหาวิทยาลัยชิคาโก 2 กลุ่ม คือ  
กลุ่มที่แก้ปัญหาสำเร็จ กับกลุ่มที่แก้ปัญหาไม่สำเร็จ เครื่องมือที่ใช้ได้แก่แบบสอบรวบยอด  
(Comprehensive examination) ข้อสอบประเภทนี้ไม่ได้เกี่ยวข้องกับเนื้อหาวิชาที่  
เรียนมาโดยตรงแต่เกี่ยวกับการนำความรู้ที่เรียนมาแล้วใช้ในการแก้ปัญหา ผลปรากฏว่า  
นิสิตกลุ่มที่แก้ปัญหาไม่สำเร็จจะเป็นกลุ่มที่มีความรู้แต่นำมาประยุกต์ (Apply) กับปัญหาใหม่  
ในข้อสอบไม่ได้ และไม่พยายามเข้าใจในแนวทางที่แนะไว้ให้ ไม่สามารถตัดสินใจได้ว่า  
สิ่งที่กำหนดให้นั้นมีรายละเอียดที่จำเป็นเพียงใด ไม่สามารถแยกแยะปัญหาออกเป็นข้อย่อย ๆ  
นิสิตกลุ่มนี้แม้แต่คิดว่าคนแก้ปัญหาไม่ได้เนื่องจากมีรายละเอียดไม่เพียงพอ

บัสเวลล์ และเคอร์ช (Buswell and Kersh, 1956) ได้ทำการวิจัยเรื่อง  
"การศึกษาความสามารถในการคิดแยกแยะสิ่งที่จะใช้ในการแก้ปัญหา" สิ่งที่จะใช้ในการ  
แก้ปัญหามี 3 ชนิด ได้แก่ ข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้อง ข้อเท็จจริงที่ไม่เกี่ยวข้องและราย  
ละเอียดที่จำเป็นแต่โจทย์มิได้กำหนดให้โดยใช้ปัญหาง่าย ๆ ดังตัวอย่าง "วันที่ 14 มิถุนายน  
นายสมิธกับลูกชาย ซึ่งมีอายุ 17 ปี ขับรถบรรทุกแถมจำนวนหนึ่ง เพื่อนำไปขายที่ตลาดด้วย  
ราคาปอนด์ละ 35 เซนต์ ถ้าแถมมีน้ำหนักเฉลี่ยตัวละ 60 ปอนด์ เขาจะได้รับเงินเป็น  
จำนวนเท่าไร" กลุ่มตัวอย่างประชากรที่ใช้ศึกษาเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา และนิสิต  
มหาวิทยาลัย เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูลคือ แบบทดสอบความสามารถในการคิด  
แยกแยะสิ่งที่จะนำไปแก้ปัญหาได้ ทุกคนเห็นว่าอายุของลูกชายและสถานที่เป็นข้อเท็จจริงที่  
ไม่เกี่ยวข้องและมีนักเรียนจำนวนน้อยมาก ที่มองเห็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องใช้ในการแก้ปัญหา  
แต่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้ คือ การที่จะหาคำตอบได้นั้นจะต้องรู้ว่าแถมที่นำไปขายนั้นมีกี่ตัว  
เขาจึงสรุปได้ว่าการที่นักเรียนขาดความสามารถในการแยกแยะเช่นนี้ เนื่องมาจากนักเรียน  
ได้รับการฝึกฝนการแก้ปัญหา โดยเน้นด้านทักษะเป็นส่วนใหญ่

เฟลเฮอร์ตี (Flaherty, 1974) ได้ทำการวิจัยเชิงทดลองเรื่อง  
"กระบวนการทางความรู้ความเข้าใจที่ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์" กลุ่มตัวอย่างเป็น  
นักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 100 คน แบ่งเป็น 4 กลุ่ม เพื่อเปรียบเทียบผลกระทบ  
ของวิธีการวัดและการฝึกหัดการแก้ปัญหามีผลต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หรือไม่ ผลการวิจัย  
พบว่า ในการวัดกระบวนการแก้ปัญหา โดยการคิดออกเสียง สามารถบ่งชี้ถึงความพยายามที่  
แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด ของนักเรียนมีความแตกต่างของคะแนนที่วัดโดยการคิดออกเสียง

กับวิธีการวัด โดยเขียนตอบ

เว็บบ์ (Webb, 1975) ได้ทำการวิจัยเรื่อง " การสำรวจกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ " กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ความสามารถทางความรู้ความจำ ได้แก่ ภาษา แบบการคิด มิติสัมพันธ์ เหตุผลและการแก้ปัญหา ผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการแก้ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง

ฮอลล์ (Hall, 1977) ได้ทำการวิจัยเรื่อง " การศึกษาผลของการสอนวิเคราะห์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ " กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 5 จำนวน 60 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 30 คน แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่คาดคะเนเก่ง 15 คน และคาดคะเนไม่เก่ง 15 คน กลุ่มทดลองได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์ เป็นเวลา 8 ชั่วโมงครึ่ง แล้วทำแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่วิเคราะห์ได้ดีกว่าจะแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีกว่า

ฟอร์ไซธ์ และแอนสเลย์ (Forsyth and Ansley, 1982) ได้ศึกษาค่าความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง (Construct Validity) ของแบบทดสอบการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ที่มีตัวเลือกเป็นกระบวนการคิด กับที่มีตัวเลือกเป็นผลสำเร็จที่เน้นความสำคัญของทักษะการคำนวณ โดยใช้แบบทดสอบ ITED (Iowa Tests of Educational Development) จำนวน 36 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนเกรด 9 และเกรด 11 จำนวน 9 โรงเรียน และในแต่ละโรงเรียนใช้วิธีจับคู่ (Matched pair) เพื่อให้กลุ่มหนึ่งใช้เครื่องคำนวณช่วยในการหาคำตอบ ผลการวิจัยปรากฏว่า ทักษะการคำนวณไม่มีผลต่อความตรงตามโครงสร้าง และคะแนนความสามารถของผู้สอบ และในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนใช้ทักษะในกระบวนการคิดมากกว่าทักษะการคำนวณ

จากผลการวิจัยที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่น่าสนใจมีผู้ศึกษามากมาย สิ่งที่สำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นกระบวนการภายในที่สามารถจะวัดและศึกษาได้ โดยใช้เครื่องมือที่มีลักษณะเฉพาะ สามารถนำสิ่งที่อยู่ภายในตัวบุคคลออกมาให้เห็นเป็นหลักฐานได้ เทคนิควิธีการที่นำมาศึกษากระบวนการคิดที่ได้รับความสนใจในปัจจุบันนี้ คือเทคนิคการคิดออกเสียง (Thinking aloud Technique)