สำนักงานวิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2
ทฤษฎี Limit Equilibrium

2.1 กล่าวนำ

วิธีวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินที่เป็นที่นิยมในปัจจุบันได้แก่ วิธี Limit Equilibrium และวิธี Finite Element Method ซึ่งทั้ง 2 วิธีจำเป็นต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

ทฤษฎีที่ใช้เป็นหลักในการเขียนโปรแกรมนี้ เลือกใช้ ทฤษฎี Limit Equilibrium (LEM.) เนื่องจากมีการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนมากนัก รวมถึงหลักการ และสมมุติฐานของทฤษฎีสามารถที่จะทำความเข้าใจได้ไม่ยากนัก

วิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินซึ่งใช้ ทฤษฎี Limit Equilibrium มีอยู่หลายวิธีเช่น Frictional Circle ,Single – Multiple Wedge Method ,Method of Slices ,ฯลฯ

2.2 คำจำกัดความของค่าอัตราส่วนความปลอดภัย (FS.)

$$FS. = \frac{\tau_f}{\tau_m} \qquad (2.1)$$

τ_f = หน่วยแรงเฉือนวิบัติของดิน (Shear Strength of Soil)

τ_m = หน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้น (Mobilized Shear Stress)

2.3 สมมุติฐานของทฤษฎี Limit Equilibrium

1. พฤติกรรมของดินมีลักษณะเป็น Rigid – Perfectly Plastic Material ซึ่งการคำนวณจะไม่นำ ค่าการเสียรูปของมวลดิน (deformation) ก่อนการวิบัติมาพิจารณา ทั้งนี้มวลดินจะเกิดการวิบัติจากการเคลื่อนตัวแบบหมุน (rotate) หรือ ไถล (translate) ไปบนพื้นผิววิบัติ

2. พิจารณา สภาวะของหน่วยแรง (State of Stress) ขณะเกิดการวิบัติ คือ ค่าหน่วยแรงเฉือนของดิน (Shear stress : τ) มีค่าสูงสุดบนทุกๆจุดของพื้นผิววิบัติ หรือมีค่าเท่ากับค่ากำลังรับแรงเฉือน (Shear strength : τ_f)

3. ใช้ Mohr – Coulomb Failure Criteria เป็นแบบจำลองพฤติกรรมของดิน ซึ่งต้องการค่า soil parameter 2 ค่า คือ c' (หน่วยแรงยึดเหนี่ยวประสิทธิผล : effective cohesion) และ ϕ' (มุมเสียดทานประสิทธิผล : effective frictional angle)

$$\tau_f = c' + \sigma' \cdot \tan\phi' \qquad (2.2)$$

โดยที่ σ' = หน่วยแรงกระทำในแนวตั้งฉากกับฐาน slice (Effective Normal Stress)

ทั้งนี้ สมการ ที่ 2.2) สามารถแสดงในรูปของแรงที่กระทำต่อชิ้นดิน (slice) ได้ดังนี้

หอสมุดกลาง สำนักงานวิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$T_f = c'L + (N - U)\cdot\tan\phi' \qquad (2.3)$$

หรือ $T_f = c'L + N'\cdot\tan\phi'$

T_f = กำลังรับแรงเฉือน หรือ แรงเฉือนวิบัติของดิน

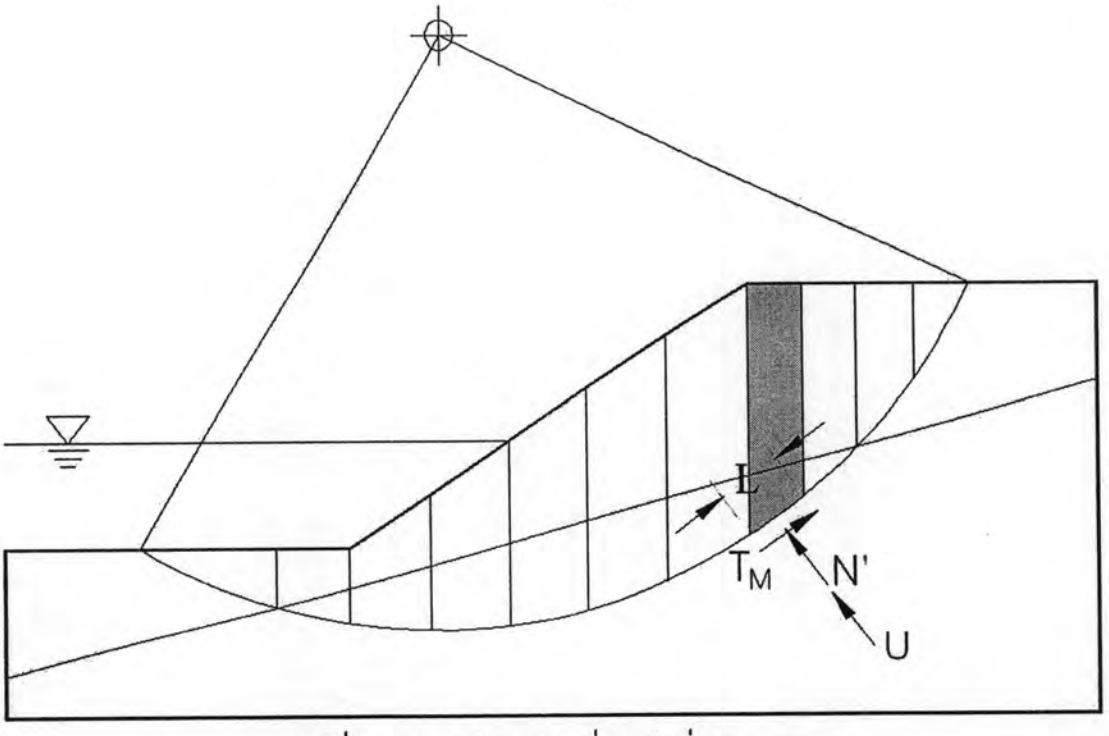
L = ความยาวของฐาน slice

N = แรงปฏิกริยาที่กระทำในแนวตั้งฉากกับฐาน slice

U = แรงดันน้ำที่ฐาน slice

จากสมการ 2.1) และ 2.2) สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง กำลังรับแรงเฉือน และ แรงเฉือนที่เกิดขึ้น (T_m)ได้ดังนี้

$$T_m = \frac{T_f}{FS.} \qquad (2.4)$$



รูปที่ 2.1 แรง N′ และ T_m ที่กระทำที่ฐาน slice

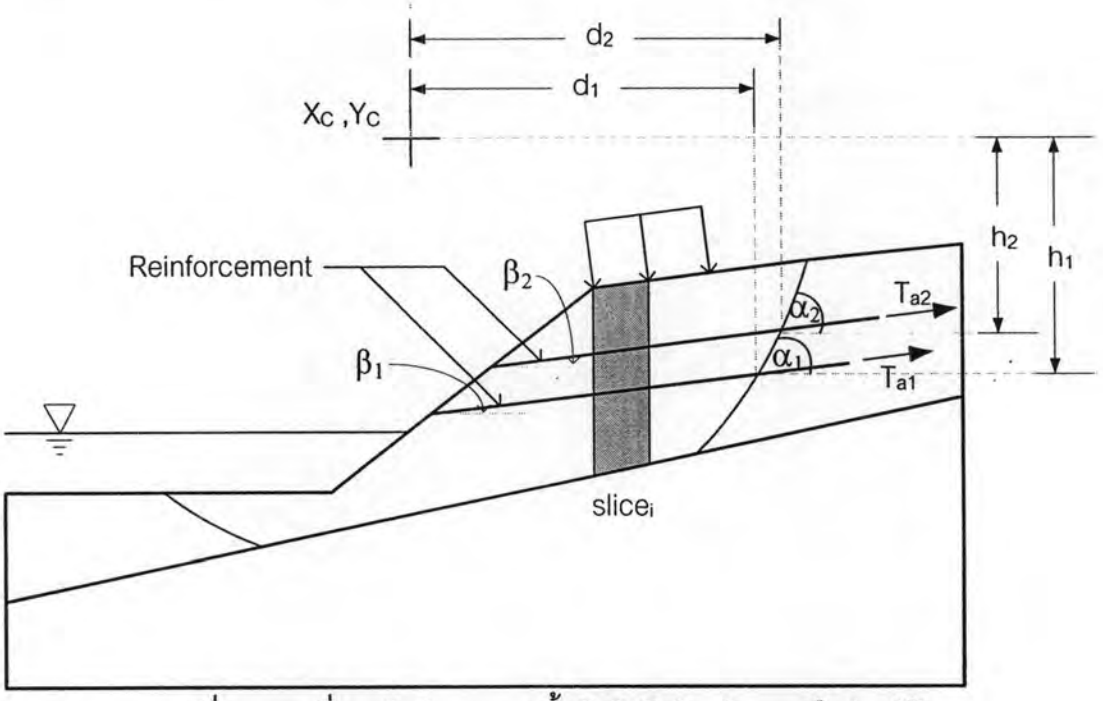
2.4 การวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินด้วยวิธี Limit Equilibrium : Method of Slices

สำหรับปัญหาซึ่งลาดดินมีหลายชั้นดิน หรือมีแรงภายนอกกระทำ การใช้วิธี Method of slices จะมีความเหมาะสมที่สุดเนื่องจากวิธี Method of slices จะแบ่งมวลดินเป็นชิ้นย่อยตามแนวดิ่ง (slice) โดยยึดตามลักษณะรูปร่างของลาดดิน ,ชั้นดิน และแรงภายนอกที่กระทำ (Surcharge และ น้ำหนักของน้ำ) และทำการคำนวณ ค่า N และ T_m ของแต่ละ slice (ซึ่งมีคุณสมบัติแตกต่างกัน) ทำให้การจำลอง state of stress มีความใกล้เคียงกับสภาพของลาดดินจริง มากยิ่งขึ้น

Method of slices ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมได้แก่ Ordinary Method of slices (Fellenius or OMS.) ,Simplified Bishop's Method ,Spencer's Method และ Morgenstern and Price' Method

ซึ่งแต่ละวิธีมีความแตกต่างกันในเรื่อง สมมุติฐานของแรงลัพท์ระหว่างชิ้นดิน (Interslice Force) และจำนวนสมการสมดุลที่ใช้แก้ปัญหาเสถียรภาพของลาดดิน

2.5 Generalized Method of Slices

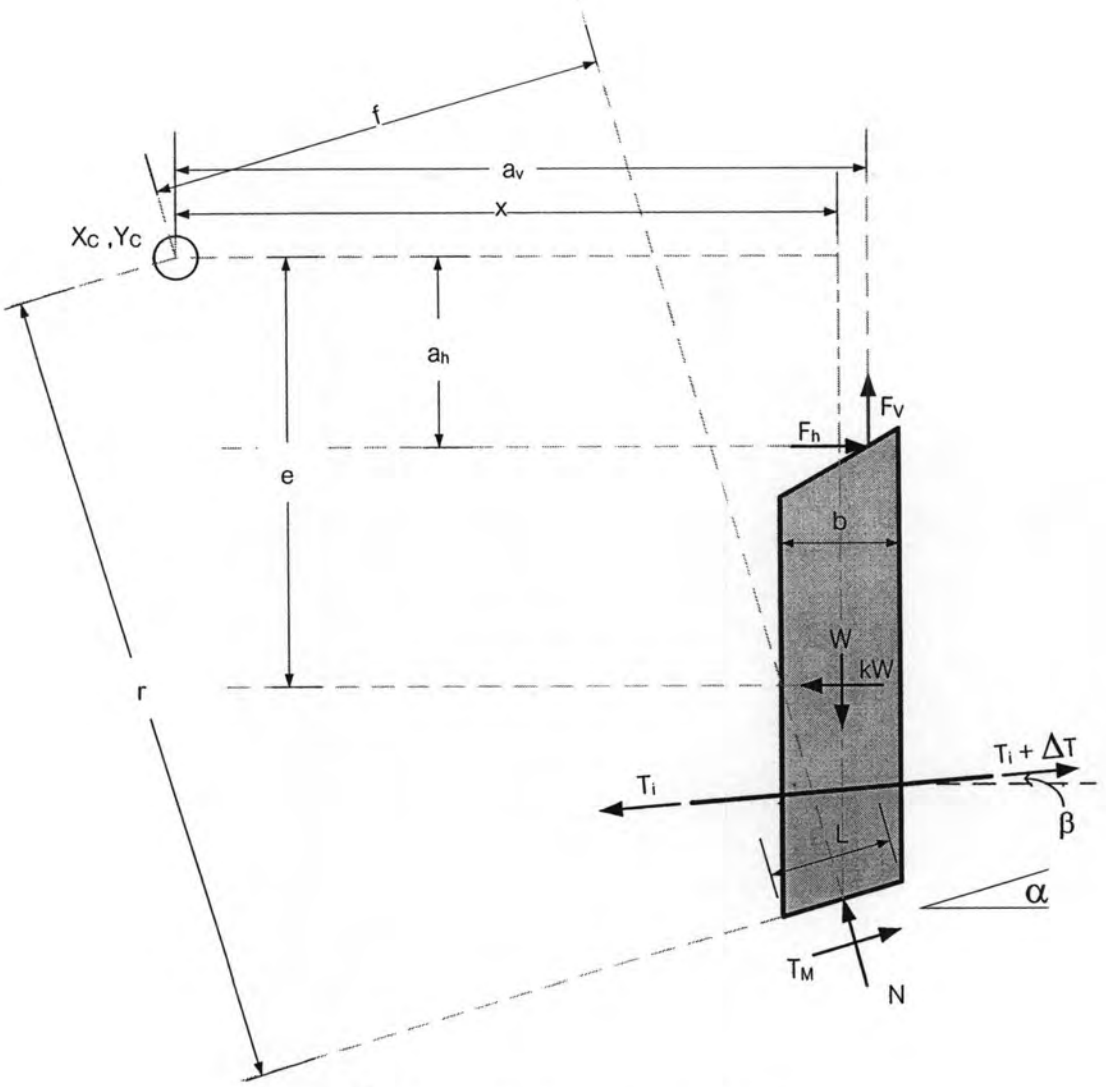


รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำต่อ slice , พื้นผิววิบัติเป็นเส้นตรงหรือส่วนโค้ง

Generalized Method of Slices คือวิธีวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินที่สมการสมดุลใช้ทั้งสมการสมดุลโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลาง (Overall Moment Equilibrium : $FS._M$) และสมการสมดุลแรงในแนวราบ (Overall Force Equilibrium : $FS._F$) ทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพของลาดดินได้ทั้งพื้นผิววิบัติส่วนโค้งวงกลม (Circular Arc) และ พื้นผิววิบัติแบบทั่วไป (General Surface)

สมการ $FS._M$ จะอยู่ในรูปแบบเดียวกันทั้งหมด สำหรับวิธีการวิเคราะห์ที่ มีสมมุติฐานว่าการวิบัติเป็นแบบเคลื่อนหมุน เช่น OMS. ,Bishop ,Spencer ,Morgenstern-Price เป็นต้น ดังแสดงในสมการที่ 2.5) และพิจารณารูปที่ 2.2 – 2.3) ประกอบ

สมการ $FS._F$ สำหรับวิธีการวิเคราะห์ที่ มีสมมุติฐานว่าการวิบัติเป็นแบบไถล เช่น Spencer ,Morgenstern-Price เป็นต้น แสดงในสมการที่ 2.6) และพิจารณารูปที่ 2.2 – 2.4) ประกอบ



รูปที่ 2.3 Free Body Diagram ของ $Slice_i$

$$FS_M = \frac{\sum_n \left[c'L + (N-U)\cdot \tan\phi'\right]\cdot r}{\sum_n Wx - \sum_n Nf + \sum_n kWe - \sum_n F_h a_h - \sum_n F_v a_v - \sum_m T_a(\cos\omega)h - \sum_m T_a(\sin\omega)d} \qquad (2.5)$$

n = จำนวน slice

m = จำนวนชั้นของ Reinforcement

W = น้ำหนัก slice (Total Weight)

k = สัมประสิทธิ์การสั่น (Seismic Coefficient)

F_h ,F_v = แรงกระทำภายนอกอันเกิดจาก Surcharge หรือ น้ำ

T_a = แรงดึงปลอดภัยตลอดอายุการใช้งานของวัสดุเสริมกำลัง

ΔT = แรงลัพท์ของวัสดุเสริมกำลังทุกชั้น ที่กระทำในแต่ละ slice

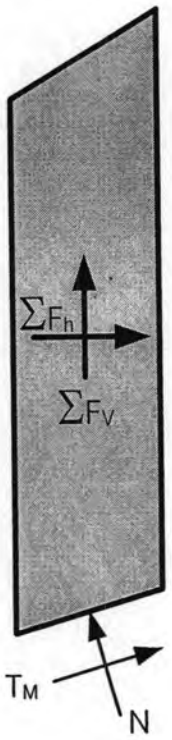
x ,f ,e ,a_h ,a_v ,h ,d = แขนของโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลาง

β = มุมเอียงของวัสดุเสริมกำลัง

α = มุมเอียงของฐาน slice ในตำแหน่งที่ วัสดุเสริมกำลัง ตัดผ่าน

ω = มุมเอียงของวัสดุเสริมกำลัง ที่ใช้ในการคำนวณ ถ้ากำหนดให้ T_a มีทิศทางขนานกับการวางตัวของวัสดุเสริมกำลัง $\omega = \beta$ แต่ถ้ากำหนดให้T_a มีทิศทางสัมผัสกับพื้นผิววิบัติ $\omega = \alpha$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ FS_F และค่า N เราสามารถรวมแรงที่กระทำต่อ slice ให้เป็น $\sum F_h$ และ $\sum F_v$ (ต่อ 1 slice) สำหรับการกำหนดให้การกระจายของแรงดึงบนวัสดุเสริมกำลังเป็นแบบลดลงเชิงเส้น ได้ตามสมการที่ 2.6 ก)



รูปที่ 2.4 Free Body Diagram ของ Slice เมื่อรวมแรงที่กระทำต่อ slice

$$FS_F = \frac{\sum_{n}\left[c'L + (N-U)\cdot\tan\phi'\right]\cdot\cos\alpha}{\sum_{n}(N\cdot\sin\alpha) - \sum_{n}(\sum F_h)} \qquad (2.6\ \text{ก})$$

โดยที่ $\sum F_h = F_h - kW + \Delta T_h$

$\sum F_v = -W + F_v + \Delta T_v$

ΔT_h = component of ΔT ในแนวราบ

ΔT_v = component of ΔT ในแนวดิ่ง

แต่ถ้ากำหนดให้การกระจายแรงการกระจายแรงดึงตามความยาวเป็นแบบคงที่ ดังแสดงใน สมการที่ 2.6 ข)

$$FS_F = \frac{\sum_{n}\left[c'L + (N-U)\cdot\tan\phi'\right]\cdot\cos\alpha}{\sum_{n}(N\cdot\sin\alpha) - \sum_{n}(\sum F_h) - \sum_{m}(T_a\cos\omega)} \qquad (2.6\ ข)$$

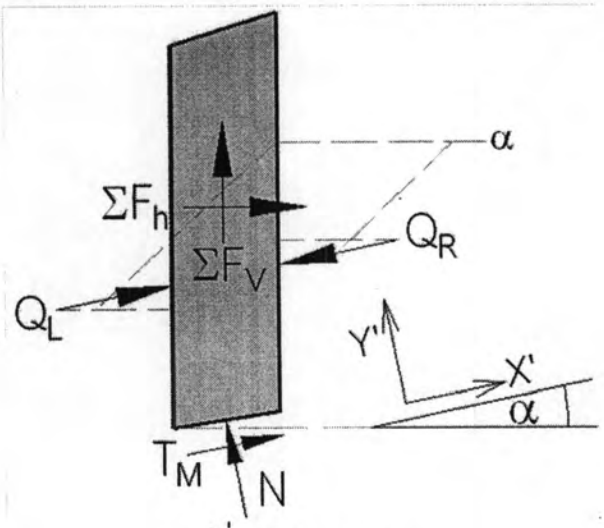
โดยที่ $\sum F_h = F_h - kW$

$\sum F_v = -W + F_v$

2.6 Ordinary Method of Slices (OMS. or Fellenius's Method)

1. สมมุติฐาน

Inter Slice Force (Q_L ,Q_R) มีทิศขนานกับ ฐานของ slice ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 OMS. slice

2. การคำนวณค่า N ใช้สมการสมดุลแรงในแนวแกนตั้งฉากกับพื้นผิววิบัติ ($\sum F_{Y'} = 0$)

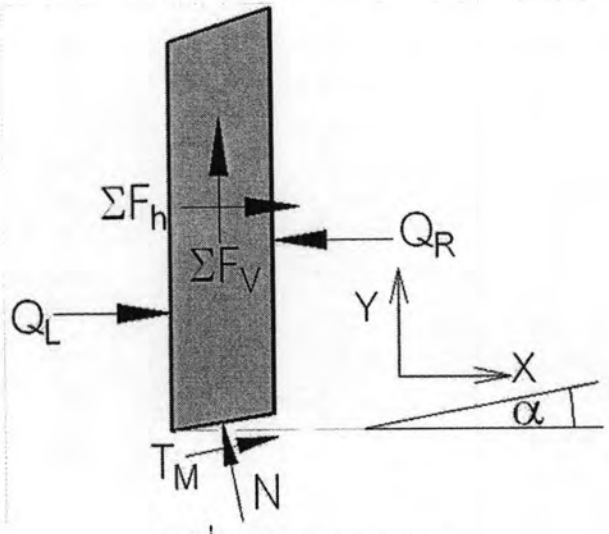
$$N = \sum F_h\cdot\sin\alpha - \sum F_v\cdot\cos\alpha \qquad (2.7)$$

3. $FS._{OMS} = FS._M$

2.7 Simplified Bishop's Method of slices

1. สมมุติฐาน

Inter Slice Force (Q_L ,Q_R) มีทิศในแนวราบ ดังแสดงในรูป 2.6



รูปที่ 2.6 Bishop's slice

2. การคำนวณค่า N ใช้สมการสมดุลแรงในแนวแกนดิ่ง ($\sum F_Y = 0$)

$$N=\left[-\sum F_v - \frac{c'L\sin\alpha - U\tan\phi'\sin\alpha}{FS} \right] \div M_\alpha \qquad (2.8)$$

โดยที่

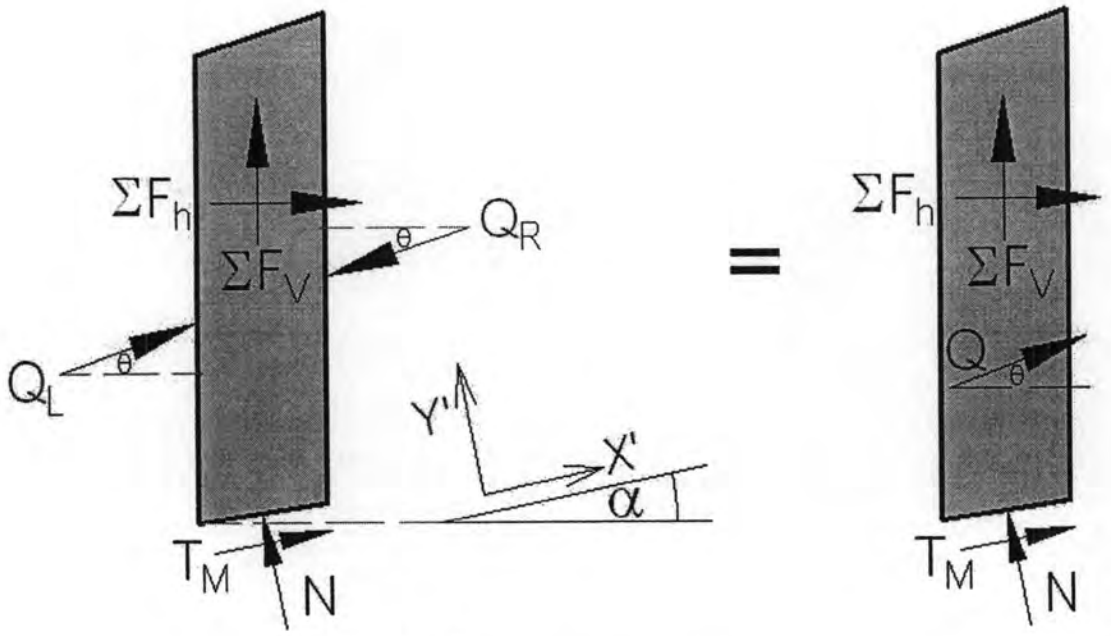
$$M_\alpha = \cos\alpha \cdot \left(1+\frac{\tan\alpha\tan\phi'}{FS} \right)$$

3. $FS._{BSP} = FS._M$

2.8 Spencer's Method

1. สมมุติฐาน

Inter Slice Force (Q_L ,Q_R) ทำมุมคงที่ค่าหนึ่ง (θ) สำหรับทุก slice และผลรวมของ Interslice force มีค่าเท่ากับ Q ดังแสดงในรูป 2.7



รูปที่ 2.7 Spencer's slice

2. การคำนวณค่า N เมื่อใช้สมการสมดุลแรงในแนวแกนตั้งฉากกับพื้นผิววิบัติ ($\sum F_{Y'} = 0$)

$$N = (\sum F_h \cdot \sin\alpha) - (\sum F_v \cdot \cos\alpha) + \{Q \cdot \sin(\alpha - \theta)\} \qquad (2.9)$$

โดยที่

$$Q = \frac{-(\sum F_v \sin\alpha) - (\sum F_h \cos\alpha) - \left(\frac{c'L}{FS}\right) + \left(\frac{((\sum F_v \cos\alpha) - (\sum F_h \sin\alpha) + U) \cdot \tan\phi'}{FS}\right)}{\cos(\alpha - \theta) + \left(\frac{(\sin(\alpha - \theta)) \cdot \tan\phi'}{FS}\right)}$$

3. $FS._{SPC} = FS._{M} = FS._{F}$

2.9 Morgenstern-Price' Method

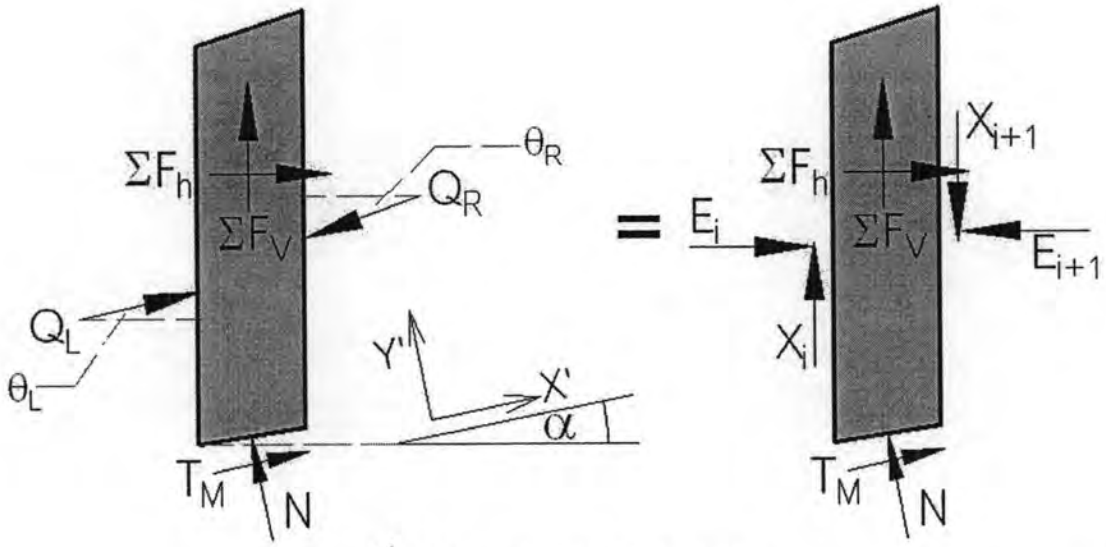
1. สมมุติฐาน

ทิศทางของ Inter Slice Force (Q_L ,Q_R) มีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ 2.10)

$$X/E = \lambda \cdot f(x) \qquad (2.10)$$

โดยที่ λ = scaling parameter

f(x) = ฟังก์ชันซึ่งขึ้นกับค่าระยะทางในแนวราบ x หรือ Interslice Force Function ; ถ้า f(x) = ค่าคงที่ วิธี Morgenstern-Price จะคำนวณค่า FS.ได้เท่ากับวิธี Spencer



รูปที่ 2.8 Morgenstern-Price' slice

2. การคำนวณค่า N เมื่อใช้สมการสมดุลแรงในแนวแกนตั้งฉากกับพื้นผิววิบัติ ($\sum F_{Y'} = 0$)

$$N = (\sum F_h + E_i - E_{i+1})\cdot\sin\alpha - (\sum F_v - \lambda f_{i+1}E_{i+1} + \lambda f_i E_i)\cdot\cos\alpha \qquad (2.11)$$

โดยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น(Boundary Condition) คือ $E_1 = E_{n+1} = 0$

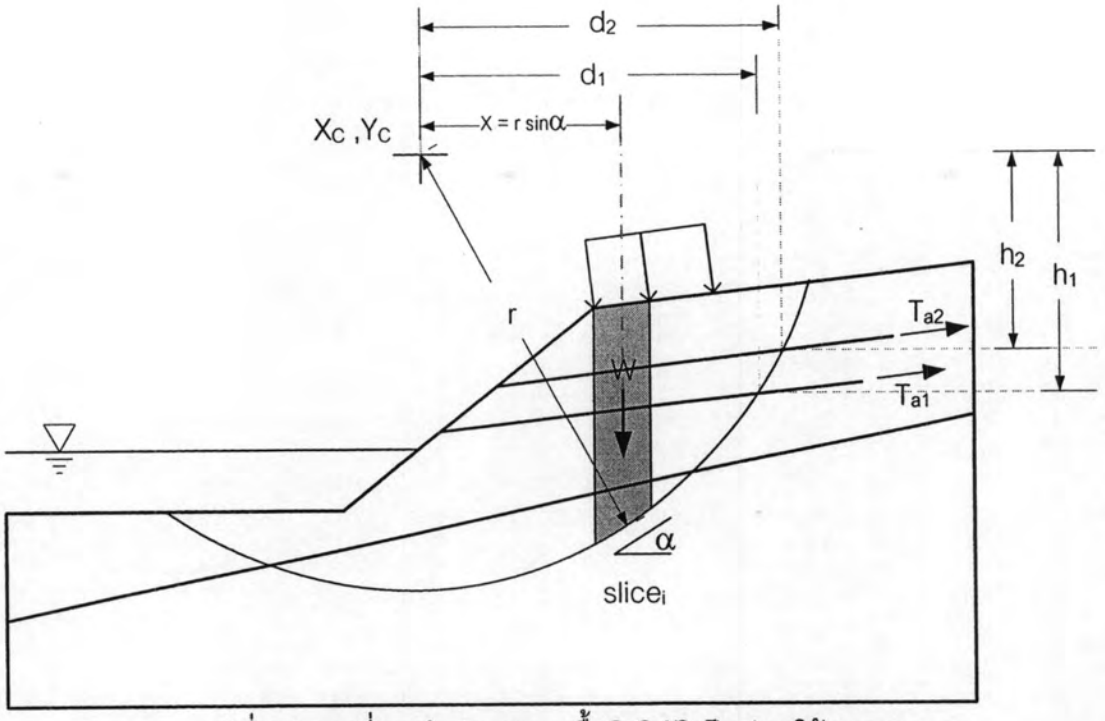
และสามารถคำนวณค่า E_i หรือ E_{i+1} ได้จากสมการที่ 2.12)

$$E_i\left[(\sin\alpha - \lambda f_i\cos\alpha)\cdot\tan\phi' + (\cos\alpha + \lambda f_i\sin\alpha)\cdot FS\right] =$$
$$E_{i+1}\left[(\sin\alpha - \lambda f_{i+1}\cos\alpha)\cdot\tan\phi' + (\cos\alpha + \lambda f_{i+1}\sin\alpha)\cdot FS\right] - \qquad (2.12)$$
$$(\sum F_v\cdot\sin\alpha + \sum F_h\cdot\cos\alpha)\cdot FS + (\sum F_v\cdot\cos\alpha - \sum F_h\cdot\sin\alpha + U)\cdot\tan\phi' - c'L$$

3. $FS._{M\text{-}P} = FS._M = FS._F$

2.10 Method of Slices สำหรับพื้นผิววิบัติแบบส่วนโค้งวงกลม

การวิเคราะห์เสถียรภาพของลาดดินที่มีพื้นผิววิบัติเป็นส่วนโค้งวงกลม (Circular Arc) เป็นส่วนย่อย (Subset) ของการวิเคราะห์แบบ Generalized Method of Slices เนื่องจากสามารถปรับเปลี่ยนหรือตัด พจน์บางพจน์จากสมการ $FS._M$ (2.5) ได้ เนื่องจาก ค่าแขนโมเมนต์ f จะมีค่าเท่ากับ 0 สำหรับทุก slice เนื่องจาก N จะมีทิศทางเข้าสู่ศูนย์กลางดังแสดงในรูปที่ 2.9 – 2.10)



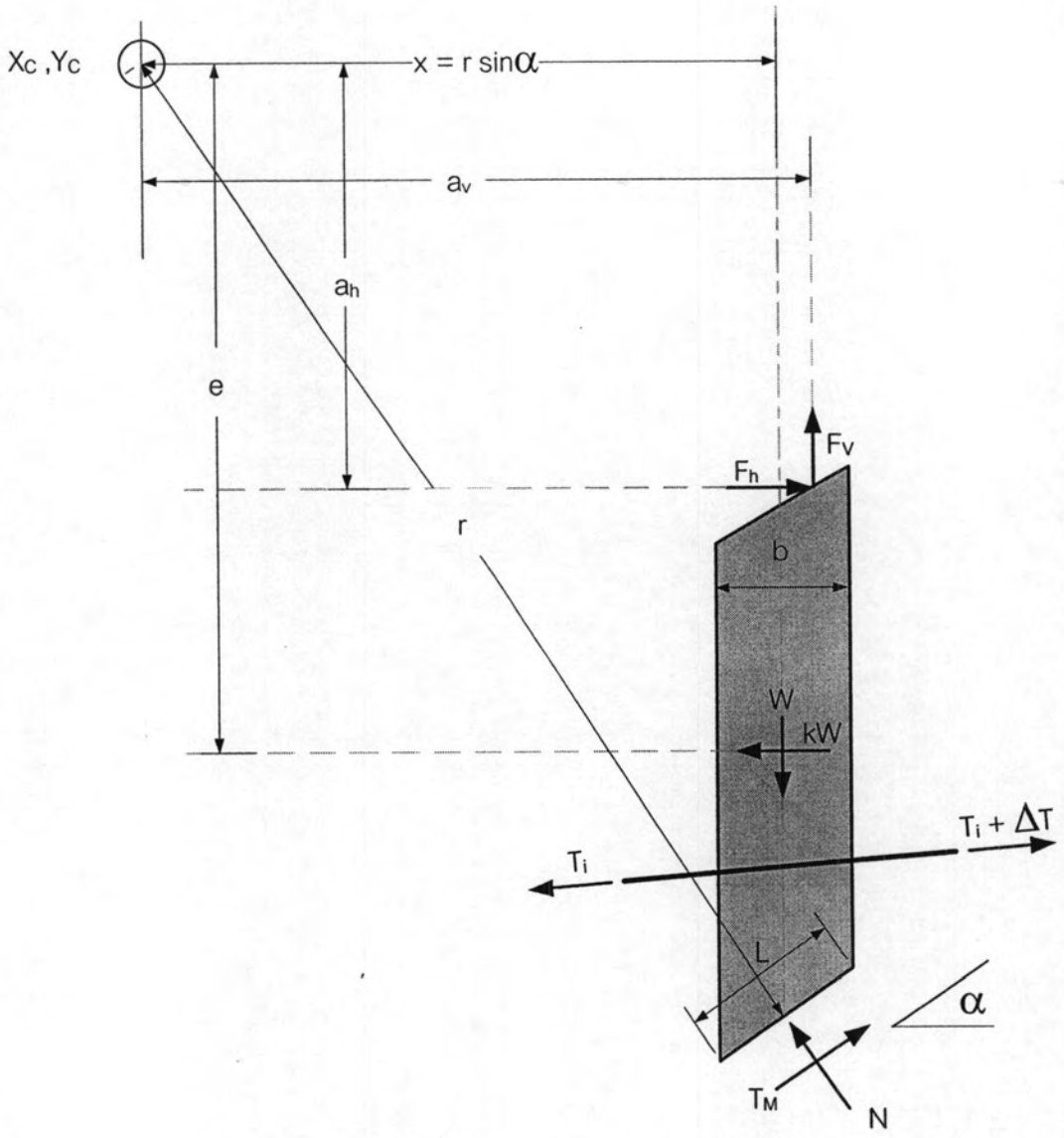
รูปที่ 2.9 แรงที่กระทำต่อ slice , พื้นผิววิบัติเป็นส่วนโค้งวงกลม

นอกจากนี้ พจน์ W·x ในสมการที่ 2.5) ก็สามารถเปลี่ยนเป็น $W \cdot r \cdot \sin\alpha$ เนื่องจากเมื่อ N มีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลาง $x = r \cdot \sin\alpha$ ดังนั้นสมการที่ 2.5) จะสามารถเขียนใหม่สำหรับพื้นผิววิบัติเป็นส่วนโค้งวงกลมได้ดังนี้

$$FS_M = \frac{\sum_n \left[c'L + (N-U)\cdot \tan\phi'\right]\cdot r}{\sum_n W r \cdot \sin\alpha + \sum_n kWe - \sum_n F_h a_h - \sum_n F_v a_v - \sum_m T_a(\cos\omega)h - \sum_m T_a(\sin\omega)d} \qquad (2.13)$$

หากไม่มีแรงกระทำภายนอกใดๆ กระทำต่อมวลดิน สมการที่ 2.13) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$FS_M = \frac{\sum_n \left[c'L + (N-U)\cdot \tan\phi'\right]\cdot r}{\sum_n W \cdot r \cdot \sin\alpha} \qquad (2.14)$$



รูปที่ 2.10 Free Body Diagram ของ Slice$_i$ กรณีพื้นผิววิบัติเป็นส่วนโค้งวงกลม