



บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

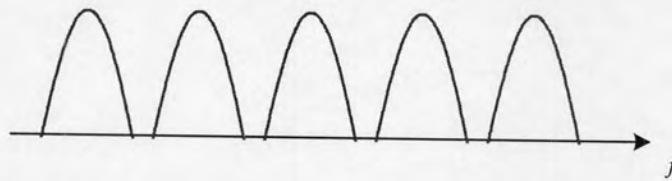
เนื้อหาในบทนี้แบ่งเป็นสองส่วนหลักอันจะเป็นพื้นฐานสำคัญในการนำมาใช้ในการออกแบบระบบของวิธีการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ในบทถัดไป โดยในส่วนแรกจะกล่าวถึงรายละเอียดของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอ รวมถึงแบบจำลองทางเครื่องรับและเครื่องส่งของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอ รายละเอียดการตรวจหาสัญญาณข้อมูลด้วยตัวตรวจหาที่เครื่องรับแบบต่างๆ รูปแบบของช่องสัญญาณที่ใช้ในการจำลองระบบ ปังจัยและปัญหาที่ส่งผลกระทบต่อสมรรถนะของระบบ สำหรับส่วนในส่วนที่สองนั้นจะกล่าวถึงรายละเอียดทฤษฎีพื้นฐานของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ (convex optimization problem) รูปแบบของกรวยอันดับสอง (second-order cone : SOC) การคำนวณหาค่าตอบเมื่อปัญหาอยู่ในรูปแบบปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ ซึ่งอาศัยวิธีจุดภายใน (interior-point method) วิธีการวัดสมรรถนะของระบบ

2.1 การมอดูเลตแบบหลายคลื่นพาห์ (multi-carrier modulation) [6], [7], [18]

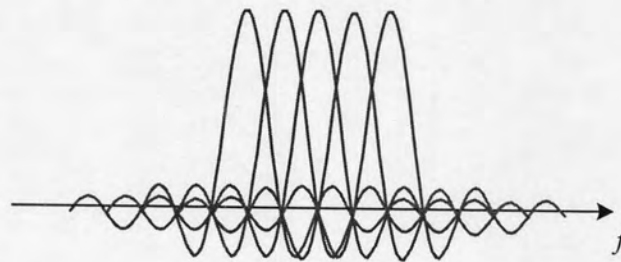
พื้นฐานของการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์นั้น กระแสของข้อมูลที่จะทำการส่งซึ่งเป็นข้อมูลที่มีอัตราความเร็วสูง (high-rate data stream) นั้นจะถูกแบ่งเป็นกระแสของข้อมูลย่อยขนานกัน โดยทำให้แต่ละกระแสข้อมูลย่อยนั้นมีอัตราความเร็วต่ำ (low-rate data stream) สายของข้อมูลย่อยที่ขนานกันนี้จะถูกกล้ำสัญญาณ (modulate) ด้วยความถี่ที่แตกต่างกัน ทำให้เมื่อมองโดยรวมทั้งระบบแล้ว อัตราการส่งข้อมูลด้วยการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์นั้นจะมีอัตราการส่งข้อมูลที่สูงกว่าการมอดูเลชันด้วยคลื่นพาห์เดียว กล่าวคือโดยการให้อัตราการส่งในแต่ละกระแสข้อมูลย่อยในการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์ เท่ากับอัตราการส่งของกระแสข้อมูลในการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียว สำหรับระบบโอเอฟดีเอ็มนั้นเป็นกรณีของการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์ เมื่อระยะห่างทางความถี่ของแต่ละคลื่นพาห์ย่อยนั้นอยู่ติดกันมากที่สุดที่เป็นไปได้ ทำให้การมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์นั้นใช้แบนวิดที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียว และทนทานต่อการเกิดเฟดดิ้งแบบเลือกความถี่อันเนื่องมาจากคาบเวลาของข้อมูลที่ส่งในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยนั้น มีความยาวมากกว่าการแผ่ประวิงเวลา (delay spread) ของช่องสัญญาณเมื่อทำการเปรียบเทียบกับวิธีการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียว การมอดูเลชันในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยนั้นทำได้โดยการอาศัยแปลงฟูริเยร์ผกผันแบบไม่ต่อเนื่อง (inverse discrete Fourier transform : IDFT) โดยในทางปฏิบัติสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยขั้นตอนวิธีการแปลงฟูริเยร์ผกผันอย่างรวดเร็ว (inverse fast Fourier transform : IFFT) สเปกตรัมการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียวกับแบบหลายคลื่นพาห์แสดง ดังรูปที่ 2.1



สเปกตรัมของการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียว



สเปกตรัมของการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์ชนิดไม่มีการซ้อนทับ



สเปกตรัมของการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์ชนิดมีการซ้อนทับ ดังเช่นในระบบโอเอฟดีเอ็ม

รูปที่ 2.1 สเปกตรัมการมอดูเลชันแบบคลื่นพาห์เดียว กับแบบหลายคลื่นพาห์

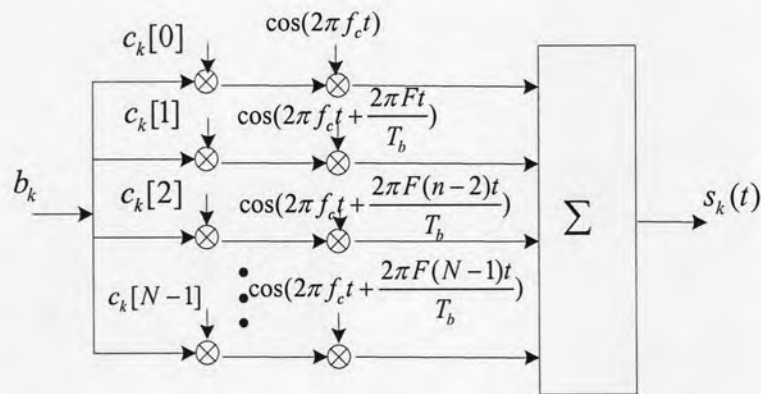
การมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์นั้นจะถูกนำมาใช้ร่วมกับการแผ่สเปกตรัมด้วยรหัสแผ่ในระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอที่จะกล่าวถึงต่อไป

2.1 แบบจำลองระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ [2], [6], [7]

ระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ (multicarrier CDMA : MC-CDMA) [2] เป็นการนำเทคนิคการแผ่สเปกตรัม และการมอดูเลชันแบบหลายคลื่นพาห์ย่อยมาใช้ร่วมกัน โดยจะกล่าวถึงรายละเอียดของแบบจำลองทั้งเครื่องส่งและเครื่องรับได้ดังนี้

2.1.1 แบบจำลองเครื่องส่ง (transmitter model)

แบบจำลองของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอที่เครื่องส่ง แสดงดังรูป 2.2 เมื่อกำหนดให้ $b_k = \{+1, -1\}$ แทนข้อมูลของผู้ใช้รายที่ k และ $\mathbf{c}_k = (c_k[0], c_k[1], \dots, c_k[N-1])^T$ แทนรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละราย สามารถอธิบายกระบวนการส่งสัญญาณที่เครื่องส่งได้ดังนี้ สัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละราย b_k จะถูกสำเนาเท่ากับจำนวนคลื่นพาห่อย่อยที่ใช้เท่ากับ N จากนั้นจะถูกนำไปคูณด้วยรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละรายซึ่งมีค่าแตกต่างกัน $\mathbf{c}_k = (c_k[0], c_k[1], \dots, c_k[N-1])^T$ จากนั้นจะถูกนำไปมอดูเลชันเข้ากับคลื่นพาห่อย่อยซึ่งมีระยะห่างระหว่างคลื่นพาห่อย่อยที่ติดกันเท่ากับ F/T_b



รูปที่ 2.2 แบบจำลองเครื่องส่งของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอ

พิจารณาจากรูปที่ 2.2 สามารถเขียนสมการของสัญญาณส่ง $s_k(t)$ ของผู้ใช้รายที่ k ได้ดังนี้

$$s_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_k[i] b_k \cos(2\pi t (f_c + i \frac{F}{T_b})) p_{T_b}(t - kT_b) \quad (2.1)$$

เมื่อกำหนดให้ f_c คือ ความถี่ของคลื่นพาห่อย่อยสำหรับคลื่นพาห่อย่อยลำดับที่ศูนย์ และ $p_{T_b}(t)$ แทนสัญญาณอิมพัลส์ขนาดหนึ่งหน่วย (unit pulse) ที่มีค่าอยู่ในช่วงเวลา $[0, T_b]$

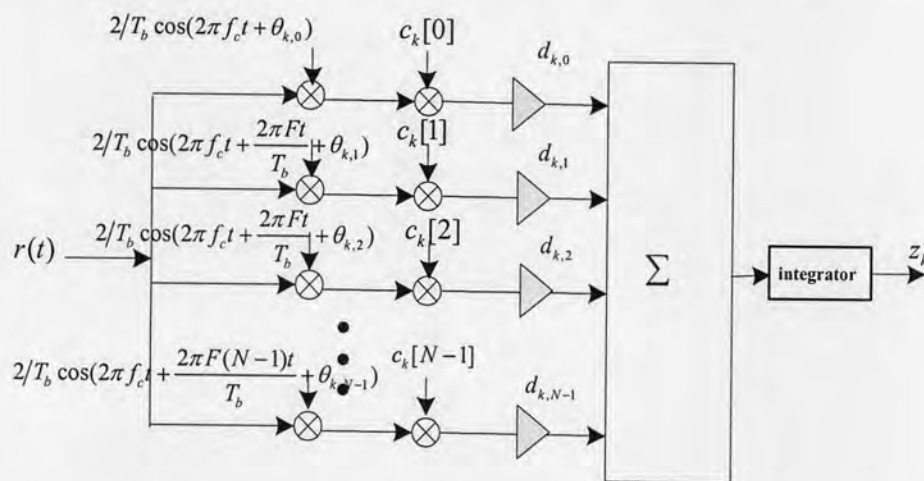
เมื่อพิจารณาจากหลักการการส่งสัญญาณของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอแล้ว จะเห็นว่าเป็นการนำเทคนิคการแผ่สเปกตรัมด้วยรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละราย โดยการแผ่ด้วยรหัสแผ่ในโดเมนความถี่ แล้วมอดูเลชันแต่ละคลื่นพาห่อย่อยโดยอาศัยการแปลงฟูริเยร์ผกผันแบบไม่ต่อเนื่อง โดยทางปฏิบัติจะใช้ขั้นตอนวิธีการแปลงฟูริเยร์ผกผันอย่างรวดเร็ว

2.1.2 แบบจำลองเครื่องรับ (receiver model)

ในส่วนของเครื่องรับในระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอนั้น สัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับ $r(t)$ จะประกอบด้วยสัญญาณของผู้ใช้ทุกรายรวมกัน โดยเมื่อพิจารณาระบบที่ประกอบด้วยผู้ใช้ทั้งหมด K ราย สัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับจะสามารถเขียนสมการได้ ดังนี้

$$r(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=1}^{N-1} \rho_{k,i} c_k[i] b_k \cos(2\pi t(f_c + i \frac{F}{T_b}) + \theta_{k,i}) + n(t) \quad (2.2)$$

เมื่อกำหนดให้ $\rho_{k,i}$ และ $\theta_{k,i}$ แทนสัมประสิทธิ์การลดทอนเชิงขนาด และเฟสที่เป็นผลอันเนื่องมาจากช่องสัญญาณของผู้ใช้รายที่ k สำหรับคลื่นพาห่อยุ่ลำดับที่ i^{th} โดยที่ $n(t)$ คือ สัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก (additive white Gaussian noise: AWGN) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีค่าความแปรปรวนเป็น σ_n^2 แบบจำลองเครื่องรับแสดงได้ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แบบจำลองเครื่องรับของระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอ

สามารถอธิบายกระบวนการทำงานที่เครื่องรับได้ดังนี้ สัญญาณที่รับได้จากผู้ใช้ทั้งหมดในระบบ $r(t)$ ผ่านกระบวนการของตัวกรองเข้าคู่ (match filter: MF) โดยพิจารณาต่อหนึ่งคลื่นพาห่อย่อย จากนั้นนำสัญญาณที่ได้มารวมกันเพื่อทำการตัดสินใจข้อมูล z_k โดยอาศัยคุณสมบัติเชิงตั้งฉากของรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละรายเพื่อแยกข้อมูลของผู้ใช้แต่ละรายออกจากกัน มีหลักการคือการนำรหัสแผ่ลำดับที่ i^{th} ของผู้ใช้รายที่ต้องการมาคูณกับสัญญาณคลื่นพาห่อยุ่ลำดับ i^{th} ทำให้ได้ข้อมูลเดิมที่ส่ง ในกรณีอุดมคติวิธีการนี้จะเป็นการหักล้างข้อมูลของผู้ใช้รายอื่นที่เหลือออกไป โครงสร้างของตัวกรองเข้าคู่ ประกอบไปด้วยเครื่องหาปริพันธ์ (integrator) และออสซิลเลเตอร์ซึ่งทำหน้าที่สร้างความถี่ของแต่ละคลื่นพาห่อย่อย นอกจากนี้ยังมีกระบวนการประมาณเฟสที่ผิดเพี้ยนไป $\theta_{k,i}$ ของผู้ใช้แต่ละรายเพื่อให้ออสซิลเลเตอร์สามารถประสานเวลา (syn-

chronize) กับสัญญาณที่ต้องการได้ สามารถเขียนสมการแสดงสัญญาณเมื่อผ่านกระบวนการดังกล่าว ได้ดังนี้

$$z_0 = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{k,i} b_k c_k[i] \frac{2}{T_b} \int_{kT_b}^{(k+1)T_b} \cos(2\pi t(f_c + i \frac{F}{T_b}) + \theta_{k,i}) \cdot \cos(2\pi t(f_c + i \frac{F}{T_b}) + \hat{\theta}_{0,i}) dt + \eta \quad (2.3)$$

เมื่อกำหนดให้ $\hat{\theta}_{0,i}$ คือค่าเฟสของสัญญาณที่ต้องการสำหรับคลื่นพาห่อย่อยลำดับที่ i^{th} และเมื่อพิจารณาภายใต้ข้อสมมติว่าระบบสามารถทำการประมาณค่าลดทอนเชิงเฟสได้อย่างถูกต้อง หรือ $\hat{\theta}_{0,i} = \theta_{0,i}$ สัญญาณในสมการที่ (2.3) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$z_0 = a_0[k] \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{0,i} + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{i=0}^{N-1} b_k c_m[i] c_0[i] \rho_{k,i} \cos \phi_{k,i} + \eta \quad (2.4)$$

เมื่อ η แทนสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก แสดงได้ ดังนี้

$$\eta = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{kT_b}^{(k+1)T_b} n(t) \frac{2}{T_b} \cos(2\pi t(f_c + i \frac{F}{T_b}) + \hat{\theta}_{0,i}) dt \quad (2.5)$$

และ $\phi_{k,i} = \theta_{0,i} - \theta_{k,i}$ เมื่อพิจารณาสัญญาณข้อมูลที่ต้องการ จากสมการที่ (2.4) ประกอบไปด้วย 3 พจน์ โดยพจน์แรกเป็นส่วนของสัญญาณข้อมูลที่ต้องการ พจน์ที่ 2 จะเป็นส่วนของสัญญาณแทรกสอดจากผู้ใช้รายอื่น (multiple access interference: MAI) และพจน์สุดท้ายจะเป็นส่วนของสัญญาณรบกวน และเมื่อพิจารณาในกรณีอุดมคติที่ $\rho_{k,i}$ มีค่าคงที่ นั่นคือการลดทอนจากช่องสัญญาณเท่ากันหมดในทุกคลื่นพาห่อย่อย และ $\theta_{k,i} = 0$ หรือ ไม่เกิดการผิดเฟสขึ้น เมื่อสัญญาณเดินทางผ่านช่องสัญญาณ สมการที่ (2.4) จะสามารถลดรูปเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} z_0 &= Nb_0[k] + \sum_{k=1}^{K-1} b_k \rho_{k,i} \sum_{i=0}^{N-1} c_k[i] c_0[i] + \eta \\ &= Nb_0[k] + \eta \end{aligned} \quad (2.6)$$

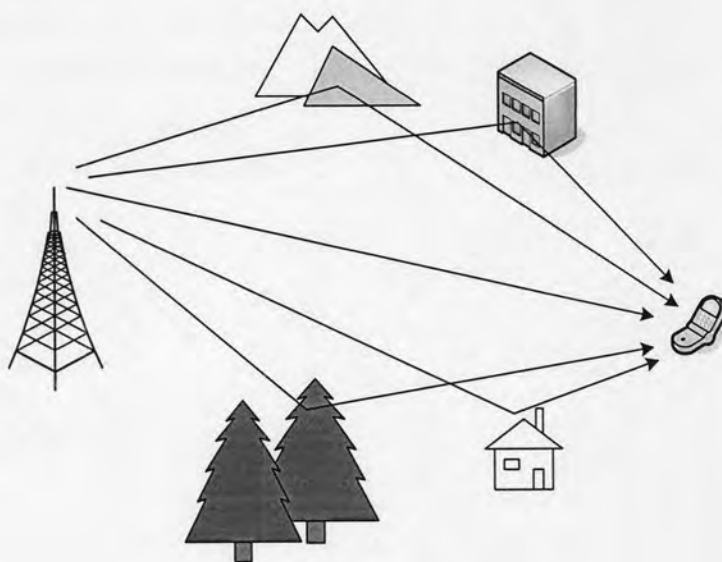
จากสมการที่ (2.6) สังเกตได้ว่าส่วนของสัญญาณรบกวนจากผู้ใช้รายอื่นจะถูกหักล้างไป เนื่องจากสมบัติเชิงตั้งฉากของรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละราย อย่างไรก็ตามในช่องสัญญาณจริงนั้นจะมีการลดทอนที่แต่ละคลื่นพาห่อย่อยไม่เท่ากัน รวมทั้งในผู้ใช้แต่ละรายที่แตกต่างกันด้วย ดังนั้นสัญญาณจากผู้ใช้รายอื่นจะรบกวนและส่งผลให้มีการตัดสินใจผิดพลาดของผู้ใช้ที่ต้องการผิดพลาดได้

2.2 ช่องสัญญาณของระบบการสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่ [6], [7], [19], [20]

ในระบบการสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่นั้น สัญญาณจากสถานีปลายทางหรือโทรศัพท์เคลื่อนที่ (terminal station : TS) และสถานีฐาน (base station : BS) จะติดต่อกันผ่านตัวกลางคืออากาศ ซึ่งเรียกว่า ช่องสัญญาณ (channel) ในการสื่อสารไร้สาย โดยช่องสัญญาณนี้จะทำให้สัญญาณข้อมูลที่ส่งผ่านระหว่าง โทรศัพท์เคลื่อนที่และสถานีฐานนั้นเกิดการลดทอนและเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม โดยขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของช่องสัญญาณในขณะนั้น สัญญาณที่ส่งออกมาเมื่อผ่านช่องสัญญาณจะได้รับผลกระทบจากปรากฏการณ์ต่าง เช่น เกิดการสะท้อน (reflection) การเลี้ยวเบน (diffraction) การกระเจิง (scattering) การเกิดปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ (Doppler effect) การเกิดปรากฏการณ์บดบัง (shadowing effect) เป็นต้น โดยในส่วนนี้จะกล่าวถึงลักษณะจากผลของปรากฏการณ์ต่างๆ และแบบจำลองของช่องสัญญาณในระบบการสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่

1. การแพร่กระจายพหุวิถี (multipath propagation)

ปรากฏการณ์การแพร่กระจายพหุวิธินั้นเกิดจาก การสะท้อน การเลี้ยวเบน และการกระเจิง อันเนื่องมาจากสัญญาณคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งออกจากโทรศัพท์เคลื่อนที่หรือสถานีฐานนั้น ถูกกระทบจากสิ่งกีดขวางทั้งที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ เช่น ดิน ไม้ ภูเขา และสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น เช่น อาคาร สิ่งปลูกสร้างต่างๆ ทำให้สัญญาณที่รับได้ที่ปลายทางนั้น จะเป็นผลรวมของสัญญาณ ซึ่งประกอบด้วยสัญญาณที่มาจากหลายทิศทาง ด้วยเวลาหน่วงที่แตกต่างกัน มีการลดทอน และเฟสที่แตกต่างกัน แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 การแพร่กระจายพหุวิถี

2. การบดบัง (Shadowing)

ปรากฏการณ์นี้เกิดจากสิ่งกีดขวางขนาดใหญ่ เช่น ภูเขา ตึก หรือกำแพง บดบังสัญญาณที่ส่งมา ส่งผลต่อความแรงหรือกำลังของสัญญาณที่รับได้ไม่ว่าจะลดลงหรือเพิ่มขึ้น และการเปลี่ยนแปลงของกำลังสัญญาณเนื่องจากการบดบังนี้ สามารถอธิบายโดยใช้การแจกแจงลอการิทึมปกติ (log-normal distribution)

3. การสูญเสียเนื่องจากระยะทาง (path loss)

เป็นปรากฏการณ์ที่ใช้อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลังสัญญาณเฉลี่ยที่ลดลง กับระยะห่างระหว่างสถานีฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้น สำหรับช่องสัญญาณแบบอากาศว่าง (free space) นั้นค่ากำลังสัญญาณเฉลี่ยจะแปรผกผันกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างสถานีฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่ แต่สำหรับช่องสัญญาณเมื่อพิจารณากรณีที่มีสัญญาณวิดีตรง (line of sight: LOS) ระหว่างสถานีฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่ จะพบว่า ค่ากำลังสัญญาณเฉลี่ยจะแปรผกผันกับกำลังสาม สี่ หรือ ห้าของระยะห่างระหว่างสถานีฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่

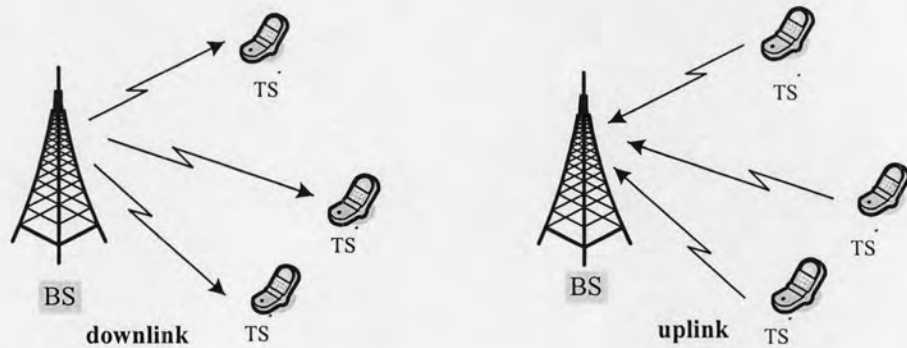
2.3.1 ข่ายเชื่อมโยงขาลง (downlink) และข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น (uplink)

ในข่ายเชื่อมโยงขาลงนั้น เป็นการส่งสัญญาณจากสถานีฐานไปยังโทรศัพท์เคลื่อนที่ เมื่อพิจารณาสัญญาณที่รับได้ที่โทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้รายใดรายหนึ่งนั้น สัญญาณที่รับได้จะเป็นผลรวมของสัญญาณของผู้ใช้ทุกรายซึ่งถูกผลกระทบของช่องสัญญาณด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของช่องสัญญาณที่เหมือนกัน ดังนั้นค่าแอมพลิจูด (amplitude) และเฟส (phase) ของช่องสัญญาณของผู้ใช้ทุกรายจะเหมือนกัน แสดงข่ายเชื่อมโยงขาลง ดังรูปขำมือของรูปที่ 2.5 และสามารถเขียนลักษณะช่องสัญญาณในข่ายเชื่อมโยงขาลงได้ ดังนี้

$$\rho_{k,i} = \rho_{0,i} \quad \theta_{k,i} = \theta_{0,i} \quad , \forall k. \quad (2.7)$$

สำหรับในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้นเป็นการส่งสัญญาณจากโทรศัพท์เคลื่อนที่ไปยังสถานีฐาน เมื่อพิจารณาสัญญาณที่รับได้ที่สถานีฐาน สัญญาณที่รับได้จะเป็นสัญญาณที่ส่งมาจากโทรศัพท์เคลื่อนที่จากตำแหน่งที่แตกต่างกัน ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ คือ ค่าแอมพลิจูด และเฟสของช่องสัญญาณที่ถูกใช้กับผู้ใช้นั้นมีค่าแตกต่างกัน ส่งผลให้การแยกแยะสัญญาณของผู้ใช้แต่ละรายในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้นทำได้ยากกว่าในข่ายเชื่อมโยงขาลง แสดงข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น ดังรูปขำมือของรูปที่ 2.5 และสามารถเขียนลักษณะช่องสัญญาณในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นได้ ดังนี้

$$\{\rho_{k,i}\}_{i=0}^{N-1} \quad \{\theta_{k,i}\}_{i=0}^{N-1} = \theta_{0,i} \quad , k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (2.8)$$



รูปที่ 2.5 ข่ายเชื่อมโยงขาลง (downlink) และข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น (uplink)

ในวิทยานิพนธ์นี้พิจารณา ระบบ MC-CDMA ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น

2.3.2 แบบจำลองช่องสัญญาณ (channel model)

คุณลักษณะของช่องสัญญาณในระบบการสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่แสดงด้วยผลตอบสนองอิมพัลส์ช่องสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงทางเวลา (time-variant channel impulse response) เขียนแทนด้วย $h(\tau, t)$ หรือแสดงด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณ (time-variant channel transfer function) เขียนแทนด้วย $H(f, t)$ โดยผลตอบสนองอิมพัลส์ช่องสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงทางเวลานั้น แสดงผลตอบสนองของช่องสัญญาณที่เวลา t เมื่อป้อนอิมพัลส์ที่เวลา $t - \tau$ ช่องสัญญาณในระบบการสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่นั้นจะถูกสมมุติให้เป็นตัวแปรสุ่มจุดหนึ่งแถบกว้าง (wide-sense stationary random process) ซึ่งมีคุณลักษณะทางสถิติยังคงค่าในช่วงเวลาสั้นๆ ในระบบสื่อสารไร้สายโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่มีการแพร่กระจายหลายวิถีนั้น สัญญาณที่รับได้ คือค่าผลตอบสนองอิมพัลส์ช่องสัญญาณจะประกอบด้วยกลุ่มที่เกิดการกระเจิงด้วยวิถีต่างๆ L วิถี เขียนได้ ดังนี้

$$h(\tau, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \rho_l e^{j(2\pi f_{D,l}t + \theta_l)} \delta(\tau - \tau_l) \quad (2.9)$$

เมื่อ

$$\delta(\tau - \tau_l) = \begin{cases} 1, & \tau = \tau_l \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

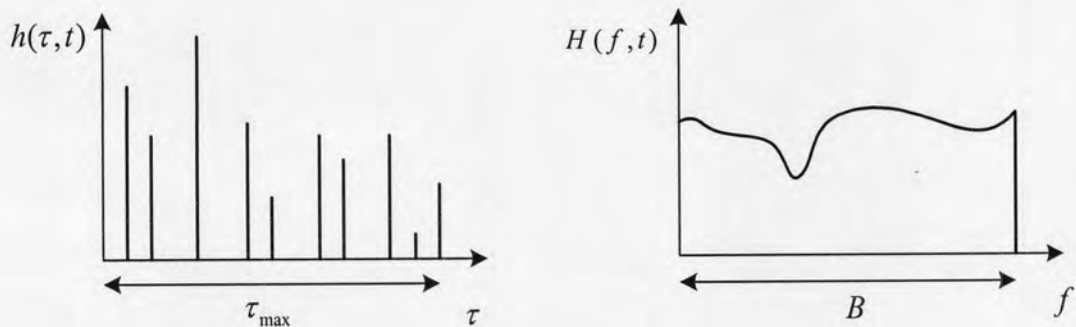
เมื่อกำหนดให้ ρ_l , $f_{D,l}$, θ_l และ τ_l แทนแอมพลิจูด ความถี่ดอปเพลอร์ เฟส และ เวลาหน่วงของการกระเจิง ที่วิถีลำดับที่ l เมื่อ $l=0,1,2,\dots,L-1$ คือจำนวนวิถีทั้งหมด L วิถี ซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณ $H(f,t)$ โดยเขียนได้ ดังนี้

$$H(f,t) = \sum_{l=0}^{L-1} \rho_l e^{j(2\pi(f_{D,l}t - f\tau_l) + \theta_l)} \quad (2.10)$$

โดยค่าเวลาหน่วง τ_l นั้นวัดโดยวัดเทียบจากสัญญาณวิถีแรกที่มาถึงเครื่องรับกับ เวลาหน่วงของสัญญาณวิถีอื่นถัดมา โดยค่าความถี่ดอปเพลอร์ เขียนได้ ดังนี้

$$f_{D,l} = \frac{vf_c \cos(\alpha_l)}{c} \quad (2.11)$$

โดยจะขึ้นอยู่กับความเร็วของสถานีปลายทาง v ค่าความเร็วของแสง c ความถี่ คลื่นพาห้อย่อย f_c มุมตกกระทบของคลื่นที่เข้ามาที่สายอากาศเครื่องรับ α_l ของวิถีลำดับที่ l โดย ค่าผลตอบแทนของอิมพัลส์ช่องสัญญาณซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณ แสดงดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ผลตอบแทนของอิมพัลส์ช่องสัญญาณ และฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณ

แบบจำลองช่องสัญญาณในระบบหลายคลื่นพาห้อย่อยนั้น สามารถจำลองได้ทั้งใน โดเมนเวลา หรือในโดเมนความถี่ โดยฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณไม่ต่อเนื่องจะถูกนำมาใช้กับ สัญญาณหลายคลื่นพาห้อย่อย เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} H_{n,i} &= H(nF_s, iT_s) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \rho_l e^{j(2\pi(f_{D,l}iT_s - nF_s\tau_l) + \theta_l)} \\ &= \rho_{n,i} e^{j\theta_{n,i}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

เมื่อฟังก์ชันถ่ายโอนช่องสัญญาณต่อเนื่อง $H(f,t)$ ถูกสุ่มตัวอย่างในทางเวลาที่อัตราสัญลักษณ์โอเอฟดีเอ็ม ด้วยอัตรา $1/T_s'$ และในโดเมนความถี่ที่ระยะห่างระหว่างคลื่นพาห่อย่อย F_s' โดยความยาว T_s' คือความยาวสัญลักษณ์ของโอเอฟดีเอ็ม ซึ่งรวมช่วงเวลาคู่กัน (guard interval) ข้อมูลสัญลักษณ์ของแต่ละคลื่นพาห่อย่อย ของสัญลักษณ์โอเอฟดีเอ็ม จะถูกคูณด้วยค่าแอมพลิจูดและเฟสของช่องสัญญาณในแต่ละคลื่นพาห่อย่อย โดยแบบจำลองช่องสัญญาณในทางความถี่จะใช้ประโยชน์ของตัวดำเนินการการแปลงฟูริเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง แบบจำลองช่องสัญญาณแบบพหุวิถีไม่ต่อเนื่องในระบบหลายคลื่นพาห่อย่อยซึ่งถูกนำมาใช้ย่อยในการจำลองระบบ เรียกว่าแบบจำลองช่องสัญญาณเฟดดิ้งไม่สัมพันธ์ (uncorrelated fading channel model) ค่าสัมประสิทธิ์เฟดดิ้งช่องสัญญาณสามารถสร้างแยกกันอย่างอิสระสำหรับในแต่ละคลื่นพาห่อย่อยในสัญลักษณ์ข้อมูลโอเอฟดีเอ็ม ซึ่งในช่องสัญญาณที่ไม่มีสัญญาณวิถีตรง ค่าแอมพลิจูดจะถูกสร้างจากการกระจายแบบเรย์ลี (Rayleigh distribution) ซึ่งจะเรียกช่องสัญญาณแบบนี้ว่าช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบเรย์ลีไม่สัมพันธ์ (uncorrelated Rayleigh fading channel)

2.4 ตัวตรวจหา (detector) [8], [21], [22], [23], [24]

ในการตรวจหาสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละรายที่รับได้ที่เครื่องรับเมื่อผ่านช่องสัญญาณในระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเออนั้น เครื่องรับที่ใช้ในการตรวจหาสัญญาณที่นิยมใช้ทั่วไป ได้แก่ ตัวตรวจหาแบบดีคอร์เรเลเตอร์ (decorrelator : DD) ตัวตรวจหาแบบให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด (minimum mean square error : MMSE)

เมื่อพิจารณาสัญญาณที่รับได้ในทางเบสแบนด์ทางความถี่ ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลของผู้ใช้ทุกรายซึ่งถูกคูณด้วยรหัสแผ่และค่าสัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณบวกกับสัญญาณรบกวนเขียนได้ ดังนี้

$$x_i[n] = \sum_{k=0}^{K-1} d_k[n]b_k[i] + \bar{n}[n] \quad (2.13)$$

เมื่อ

$$d_k[n] = z_k[n]c_k[n]$$

และกำหนดให้ $\mathbf{x}_i = (x_i[0], x_i[1], \dots, x_i[N-1])^T$ แทนสัญญาณที่รับได้ในทางเบสแบนด์ทางความถี่ $\bar{\mathbf{n}}_i = (\bar{n}_i[0], \bar{n}_i[1], \dots, \bar{n}_i[N-1])^T$ แทนสัญญาณรบกวน และ $\mathbf{b}_i = (b_0[i], b_1[i], \dots, b_K[i])^T$ แทนบิตข้อมูลลำดับที่ i^{th} สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{b}_i + \bar{\mathbf{n}}_i \quad (2.14)$$

โดยเมตริกซ์ฟิลเตอร์สำหรับผู้ใช้รายที่ k เขียนได้ดังนี้

$$y_k[i] = \sum_{n=1}^{N-1} d_k[n]^* x_i[n] \quad (2.15)$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= (\mathbf{D}_i)^H \mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{R} \mathbf{b}_i + (\mathbf{D}_i)^H \bar{\mathbf{n}}_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

โดย $\mathbf{R} = (\mathbf{D}_i)^H \mathbf{D}_i$ คือเมทริกซ์สหสัมพันธ์ (correlation matrix)

2.4.1 ตัวตรวจหาแบบดีคอร์รีเลเตอร์ (decorrelator detector : DD)

ตัวตรวจหาแบบดีคอร์รีเลเตอร์นั้นจะนำเวกเตอร์ของสัญญาณที่รับได้ \mathbf{y}_i เมื่อผ่านเมตริกซ์ฟิลเตอร์มาทำการคูณด้วยตัวตรวจหาเมทริกซ์ \mathbf{W} เพื่อให้ได้เวกเตอร์ของข้อมูลที่เกิดการตัดสินใจ $\hat{\mathbf{y}}_i$ ออกมา โดยเขียนได้ ดังนี้

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \mathbf{W} \mathbf{y}_i \quad (2.17)$$

โดยตัวตรวจหาแบบดีคอร์รีเลเตอร์นั้น ตัวตรวจหาเมทริกซ์เขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{W}_{DD} = \mathbf{R}^{-1} \quad (2.18)$$

ตัวตรวจหาแบบดีคอร์รีเลเตอร์นั้นเนื่องจากตัวตรวจหาเมทริกซ์ ไม่ได้นำผลของสัญญาณรบกวนมาพิจารณาด้วย ทำให้ตัวตรวจหาชนิดนี้ไปขยายสัญญาณรบกวน (enhance noise) โดยกรณีที่ค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน คืตัวตรวจหาชนิดนี้จะมีสมรรถนะที่ไม่ดี เพื่อปรับปรุงสมรรถนะให้ดีขึ้นจึงนำผลของสัญญาณรบกวนมาใช้ร่วมด้วยในตัวตรวจหาเมทริกซ์ ซึ่งเรียกว่าตัวตรวจหาแบบค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

2.4.2 ตัวตรวจหาแบบให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (minimum mean square error : MMSE)

ตัวตรวจหาแบบให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด นั้นเป็นการแก้ไขผลของการขยายสัญญาณรบกวนซึ่งเกิดในตัวตรวจหาแบบดีคอร์รีเลเตอร์ โดยการนำผลของสัญญาณรบกวนที่รับได้ที่เครื่องรับ คือค่าขนาดความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมาใช้ในตัวตรวจหาเมทริกซ์ เขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{W}_{MMSE} = (\mathbf{R} + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (2.19)$$

ตัวตรวจหาแบบให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด นั้นจะให้ผลของสมรรถนะที่ดีขึ้น กรณีที่ค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนต่ำนั้นจะมีสมรรถนะที่ดีกว่า ตัวตรวจหาแบบคิกอร์รีเลเตอร์ ส่วนในกรณีที่ค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนสูงนั้นจะมีสมรรถนะใกล้เคียงกับตัวตรวจหาแบบคิกอร์รีเลเตอร์

2.5 รหัสแม่

ในระบบมัลติแครี่เรียร์ซีดีเอ็มเอ รหัสแม่จะถูกใช้เป็นตัวแยกแยะระหว่างผู้ใช้แต่ละราย โดยชิปแต่ละตัวในรหัสแม่มีค่าอยู่ในเซต $\{-1, 1\}$ ในวิทยานิพนธ์นี้กำหนดให้ความยาวหรือจำนวนชิปของรหัสแม่มีค่าเท่ากับจำนวนคลื่นพาห่อย่อยที่ใช้ นั่นคือมีความยาวของรหัสแม่มีค่า N ชิป ชุดรหัสที่ดีควรมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_l[i]c_m[i] = N\delta_{l,m} \quad (2.20)$$

รหัสแม่ที่มีคุณลักษณะดังกล่าวนี้ได้แก่รหัสวอลท์ฮาดามาต (Walsh-Hadamard) ซึ่งมีคาสหสัมพันธ์ข้ามระหว่างรหัส คือในแต่ละแถวหรือหลักเท่ากับศูนย์ รหัสแม่นี้สร้างได้โดยใช้การดำเนินการเชิงเมทริกซ์ โดยหน่วยเมทริกซ์มูลฐานของรหัสวอลท์ฮาดามาต C_{H_0} คือ

$$C_{H_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

และจากเมทริกซ์มูลฐานนี้สามารถนำไปใช้สร้างรหัสวอลท์ฮาดามาต ที่มีความยาวเพิ่มขึ้นเป็น 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้จากเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

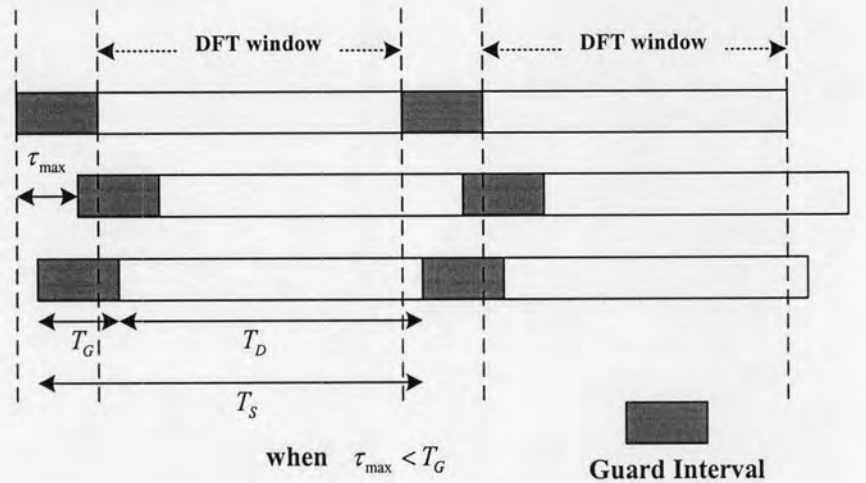
$$C_{H_n} = \begin{bmatrix} C_{H_{n-1}} & C_{H_{n-1}} \\ C_{H_{n-1}} & -C_{H_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

จะเห็นว่าเมทริกซ์ C_{H_n} ขนาด $2^n \times 2^n$ สร้างจากเมทริกซ์ $C_{H_{n-1}}$ ขนาด $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ โดยแถวแต่ละแถวหรือในแต่ละหลักในเมทริกซ์ C_{H_n} คือรหัสของผู้ใช้หนึ่งราย ซึ่งมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกับแถวหรือหลักอื่นของผู้ใช้รายอื่น

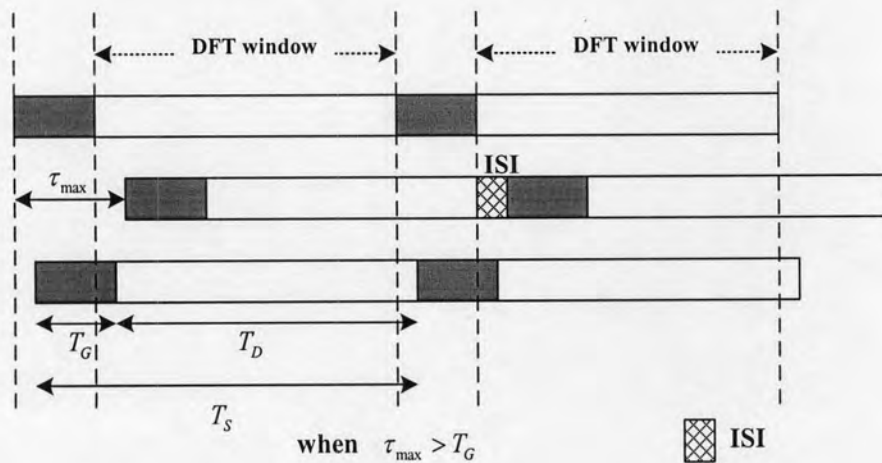
2.6 ช่วงเวลาคู่กัน (Guard interval)

ปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อระบบซึ่งทำให้เกิด การรบกวนแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์หรือ (Inter-symbol interference : ISI) ผลจากการรบกวนแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์นี้

นั้นสามารถจำกัดได้โดยการเติมช่วงเวลาคู่กัน ให้ยาวกว่าช่วงเวลาของผลตอบสนองต่อสัญญาณ
อิมพัลส์ของช่องสัญญาณ แสดงดังรูปที่ 2.7 ซึ่งแสดงผลของกรณีการเติมช่วงเวลาคู่กันเพียงพอ
ทำให้ไม่เกิดการรบกวนแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ และกรณีที่การเติมช่วงเวลาคู่กันไม่
เพียงพอทำให้เกิดการรบกวนแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์



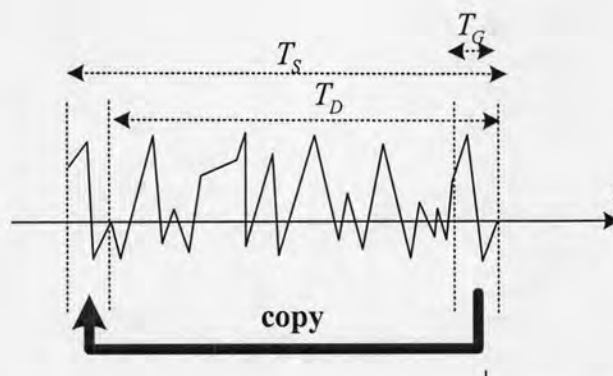
เติมช่วงเวลาคู่กันเพียงพอ



เติมช่วงเวลาคู่กันไม่เพียงพอ

รูปที่ 2.7 ช่วงเวลาคู่กัน (guard interval)

การเติมช่วงเวลาคู่กันเพื่อป้องกันการเกิดการรบกวนแทรกสอดระหว่าง
สัญลักษณ์นั้น โดยทั่วไปจะใช้วิธีการสำเนาสัญญาณข้อมูลในส่วนท้ายมาเติมที่ส่วนหน้าของ
สัญญาณข้อมูล ซึ่งเรียกรูปแบบนี้ว่า การเติมด้วยอุปสรรคหมุนวน (cyclic prefix : CP) แสดงวิธีการ
เติมรหัสหมุนวนในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 วิธีการเติมอุปสรรคหมุนวน (cyclic prefix : CP)

2.7 ปัจจัยที่ส่งผลต่อสมรรถนะของระบบ

2.7.1 สัญญาณแทรกสอดจากการเข้าถึงหลายทาง (multiple access interference : MAI)

สัญญาณแทรกสอดจากการเข้าถึงหลายทางนั้น เกิดจากระบบซึ่งมีผู้ใช้หลายราย เข้าใช้ช่องสัญญาณพร้อมกันทำให้เกิดการรบกวนระหว่างผู้ใช้แต่ละราย ในระบบมัลติแควร์เรียร์ ซีดีเอ็มเอซึ่งใช้รหัสแม่ซึ่งมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกันในรหัสแม่แต่ละชุดของผู้ใช้แต่ละราย เพื่อแยกแยะผู้ใช้แต่ละรายและป้องกันการเกิดสัญญาณแทรกสอดจากการเข้าถึงหลายทาง โดยเฉพาะในข่ายเชื่อมโยงขาลงซึ่งผู้ใช้ทุกรายถูกรบกวนด้วยช่องสัญญาณที่เหมือนกัน ทำให้การเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันซึ่งทำให้สามารถแก้ผลจากช่องสัญญาณได้โดยง่ายโดยยังคงคุณสมบัติความเชิงตั้งฉากกันระหว่างผู้ใช้แต่ละรายอยู่ อย่างไรก็ตามในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้น สัญญาณที่ส่งออกมาจากโทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้แต่ละรายนั้นมาจากสถานที่แตกต่างกัน ทำให้สัญญาณที่รับได้ที่สถานีนั่นซึ่งเป็นผลรวมของสัญญาณของผู้ใช้แต่ละรายถูกผลกระทบของช่องสัญญาณที่แตกต่างกัน ทำให้การแก้ไขผลของสัญญาณแทรกสอดจากการเข้าถึงหลายทางในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้นเป็นไปด้วยความยากลำบากกว่าในข่ายเชื่อมโยงขาลง นอกจากนี้การที่ระบบไม่ประสานเวลา (asynchronous) ก็ส่งผลทำให้ค่าสหสัมพันธ์ข้ามของรหัสของผู้ใช้แต่ละรายนั้นมีค่าสูงขึ้นเช่นกันเมื่อใช้รหัสแม่ เช่น รหัสสวอลท์ฮาดามาท เป็นต้น

2.7.2 สัญญาณแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ (inter-symbol interference : ISI)

สัญญาณแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ สำหรับการรับส่งข้อมูลในระบบสื่อสารไร้สายนั้น เกิดขึ้นเนื่องจากการที่สัญญาณข้อมูลเดินทางผ่านช่องสัญญาณซึ่งมีลักษณะเป็นช่องสัญญาณแบบพหุวิถี ทำให้สัญญาณข้อมูลมีเส้นทางการเดินทางที่ต่างกันหลายเส้นทาง และ

หลายเวลา เนื่องจากเกิดการสะท้อน แทรกสอด และหักเหขึ้นเนื่องมาจากผลกระทบจากสภาวะแวดล้อมดังที่ได้กล่าวมาแล้ว โดยที่ผลรวมของสัญญาณจากวิถีต่าง ๆ ซึ่งเดินทางมาถึงทางเครื่องรับ เกิดความเหลื่อมล้ำทางเวลาขึ้นระหว่างสัญลักษณ์ข้อมูล และเมื่อพิจารณาเฉพาะในสัญลักษณ์หนึ่ง ๆ จะพบว่าข้อมูลในสัญลักษณ์นั้นเองซึ่งมาจากวิถีต่าง ๆ ก็จะมี ความเหลื่อมล้ำทางเวลาซึ่งกันและกันด้วย ส่งผลให้เกิดการซ้อนทับกันอย่างไม่เต็มคาบของสัญลักษณ์ ทำให้สัญลักษณ์ข้อมูลที่ได้รับซึ่งเกิดจากการรวมกันของสัญญาณในแต่ละวิถีดังกล่าว มีความผิดเพี้ยนไปจากสัญญาณที่ทางเครื่องส่งส่งมาจริง ซึ่งเมื่อนำไปตัดสินใจข้อมูลก็จะเป็นการเพิ่มโอกาสในการตัดสินใจผิดพลาดมากยิ่งขึ้น การป้องกันการเกิดสัญญาณแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ นั้นสามารถทำได้ด้วยการเติมอุปสรรคหมุนวนดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

2.7.3 สัญญาณแทรกสอดระหว่างคลื่นพาห่อย่อย (inter-carrier interference: ICI)

การรับส่งข้อมูลในระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ นั้น จะเป็นการส่งข้อมูลโดยใช้หลายคลื่นพาห่อย่อย ซึ่งจะใช้อุปกรณ์ในการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลเข้าร่วมด้วยในขั้นตอนการแปลงฟูรีเยร์และการแปลงฟูรีเยร์ผกผัน ซึ่งขั้นตอนทั้งสองนี้จะมีการทำงานได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าคลื่นพาห่อย่อยมีความตั้งฉากระหว่างกัน นั่นคือ คลื่นพาห่อย่อยจะต้องมีค่าความถี่กึ่งกลางที่ห่างกัน F เท่าของ $1/T$ โดย T เป็นค่าความยาวคาบของสัญญาณข้อมูลหนึ่งสัญลักษณ์ และ F เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และเนื่องจากผลของการเกิดความถี่ออฟเซต การเกิดพหุวิถี และการเกิดเฟดดิ้งอย่างรวดเร็ว จะส่งผลให้ความตั้งฉากระหว่างคลื่นพาห่อย่อยนี้สูญเสียไป ทำให้การแปลงฟูรีเยร์และการแปลงฟูรีเยร์ผกผันนั้นไม่สมบูรณ์ ทำให้เกิดสัญญาณแทรกสอดระหว่างคลื่นพาห่อย่อย ขึ้นในขณะที่ระบบ DS-SSMA ซึ่งไม่ได้มีการส่งข้อมูลแบบหลายคลื่นพาห่อย่อยจะไม่มีสัญญาณแทรกสอดประเภทนี้เกิดขึ้น

2.8 พารามิเตอร์ที่ใช้วัดสมรรถนะของระบบ

2.8.1 อัตราความผิดพลาดบิต (BER)

อัตราความผิดพลาดบิต หรือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดบิต คือ อัตราส่วนของจำนวนบิตที่ทางเครื่องรับตัดสินใจผิดพลาดเมื่อเทียบกับจำนวนบิตข้อมูลทั้งหมดที่ถูกส่งมาจากเครื่องส่ง เป็นค่าพารามิเตอร์สำคัญในการวัดสมรรถนะของระบบเป็นค่าที่แสดงถึงค่าความถูกต้องของการรับส่งข้อมูลโดยตรง อัตราความผิดพลาดบิตเป็นพารามิเตอร์ที่นิยมใช้ในการเปรียบเทียบ

สมรรถนะของระบบที่สนใจในสภาวะต่าง ๆ เช่น เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน หรือเมื่อจำนวนผู้ใช้เปลี่ยนไปเป็นต้น

2.8.2 อัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Signal to Noise Ratio : SNR)

ค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Signal to Noise Ratio : SNR) คืออัตราส่วนกำลังของสัญญาณเมื่อเทียบกับกำลังของสัญญาณรบกวน ส่วนใหญ่ค่ากำลังของสัญญาณจะมีค่ามากเมื่อเทียบกับกำลังของสัญญาณรบกวน ดังนั้นค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนจึงนิยามวัดกันในหน่วยเดซิเบล (decibel :dB) โดย ค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนสำหรับผู้ใช้รายที่ k ในค่าหน่วยเดซิเบล สามารถเขียนได้ดังนี้

$$SNR_k = 10 \log \left(\frac{P_k}{\sigma^2} \right) \quad (2.23)$$

เมื่อ P_k คือขนาดของสัญญาณของผู้ใช้คนที่ k และ σ^2 คือ ค่าความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนซึ่งก็คือกำลังของสัญญาณรบกวนนั่นเอง

2.9 ความรู้พื้นฐานการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) [25-31]

ในอดีตที่ผ่านมาเทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุดทางด้านการประมวลผลสัญญาณเชิงเลขในแขนงการสื่อสารนั้นอยู่บนพื้นฐานของวิธีเกรเดียนต์ (gradient descent method) และวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square method) อย่างไรก็ตามวิธีการดังกล่าวนี้มีข้อด้อยอันเนื่องมาจากอัตราการลู่เข้าที่ช้า (slow convergence rate) รวมทั้งปัญหาการกำหนดค่าเริ่มต้น (initialization selection) และขนาดของลำดับขั้น (step-size selection) ที่ใช้ในขั้นตอนวิธี โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อทำการกำหนดค่าเริ่มต้นที่ไม่ถูกต้องกับปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของปัญหาไม่คอนเวกซ์ (nonconvex problem) นั้นอาจทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้ สำหรับการกำหนดขนาดลำดับขั้นนั้นหากกำหนดขนาดลำดับขั้นที่มีค่าน้อยเพื่อให้การหาคำตอบนั้นเข้าใกล้ค่าเหมาะที่สุด (optimal) มากที่สุด ก็จะทำให้อัตราการลู่เข้าสู่คำตอบนั้นใช้เวลานาน วิธีการดังกล่าวมานี้ได้ถูกนำมาใช้ทางด้านการประมวลผลสัญญาณเชิงเลขในแขนงการสื่อสารต่างๆ

ที่ผ่านมา นั้น เชื่อกันว่าปัญหาที่มีลักษณะเชิงเส้น (linear problem) นั้นสามารถหาคำตอบได้ง่ายกว่าปัญหาที่มีลักษณะไม่เชิงเส้น (nonlinear problem) อย่างไรก็ตามหลังจากที่ได้มีงานวิจัยของ Rockafellar ในปี ค.ศ. 1993 [29] โดยสามารถแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดได้เสมอเมื่ออยู่ในรูปแบบของปัญหาคอนเวกซ์ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในแขนงการหาค่าเหมาะที่สุด

โดยทำให้ทิศทางการวิจัยเปลี่ยนมาศึกษาปัญหาซึ่งอยู่ในรูปแบบปัญหาคอนเวกซ์ (convex problem) อันเนื่องมาจากหากปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด เมื่อแปลงจากปัญหาที่เป็นปัญหาไม่คอนเวกซ์ มาอยู่ในรูปแบบปัญหาคอนเวกซ์แล้ว จะทำให้ปัญหานั้นสามารถหาคำตอบได้ค่าเหมาะที่สุดวงกว้าง (global optimum) และมีขั้นตอนวิธีที่มีประสิทธิภาพมากสำหรับใช้แก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบโดยวิธีจุดภายใน (interior-point methods) ซึ่งใช้เวลาในการหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วเป็นเวลาพหุนาม (polynomial time) สำหรับการคำนวณเพื่อหาคำตอบด้วยวิธีเชิงเลขซึ่งนำมาใช้ในทางปฏิบัตินั้นทำได้อย่างรวดเร็วโดยวิธีจุดภายใน ซึ่งถูกเสนอขึ้นโดย Nesterov และ Nemirovski [30] โดยในงานวิจัยได้แสดงให้เห็นว่าการคำนวณเพื่อหาคำตอบของปัญหานั้น หากปัญหานั้นอยู่ในรูปของปัญหาคอนเวกซ์ จะสามารถทำได้อย่างรวดเร็วด้วยวิธีจุดภายใน (interior-point methods) โดยใช้เวลาในการคำนวณหาคำตอบเป็นเวลาพหุนาม (polynomial time) หลังจากนั้นจึงได้มีการวิจัยศึกษาทางด้านปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ (convex optimization) ตามมาเป็นจำนวนมาก

อย่างไรก็ตามปัญหาต่างๆ ในการนำมาประยุกต์ใช้ทางด้านวิศวกรรมนั้น มักไม่อยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์ ความยากจึงอยู่ที่การแปลงปัญหานั้นให้อยู่ในรูปแบบของปัญหาคอนเวกซ์ เพื่อให้สามารถหาคำตอบได้ค่าเหมาะที่สุด และมีวิธีแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบด้วยวิธีเชิงเลขโดยวิธีจุดภายในได้ อย่างมีประสิทธิภาพในเวลาอันรวดเร็ว โดยทั่วไปแล้วแม้ว่าปัญหาต่างๆ ในทางวิศวกรรมนั้นมักจะมีความเป็นคอนเวกซ์อยู่ แต่ต้องอาศัยการแปลงโดยวิธีการแปลงนั้น ไม่มีขั้นตอนแบบมีระบบ (systematic) การแปลงจะอาศัยเทคนิคต่างๆ ขึ้นอยู่กับรูปแบบปัญหา โดยได้มีงานวิจัยต่างๆ ที่นำเทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุดมาใช้มาประยุกต์กับปัญหาต่างๆ ในทางวิศวกรรมแล้วสามารถแปลงปัญหานั้นให้อยู่ในรูปแบบปัญหาคอนเวกซ์ [26]

ในวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการนำเทคนิคทางด้านการหาค่าเหมาะที่สุดมาใช้ โดยการแปลงปัญหาของวิธีการที่นำเสนอซึ่งเดิมไม่อยู่ในรูปแบบปัญหาคอนเวกซ์ แล้วแปลงให้อยู่ในรูปแบบปัญหาคอนเวกซ์

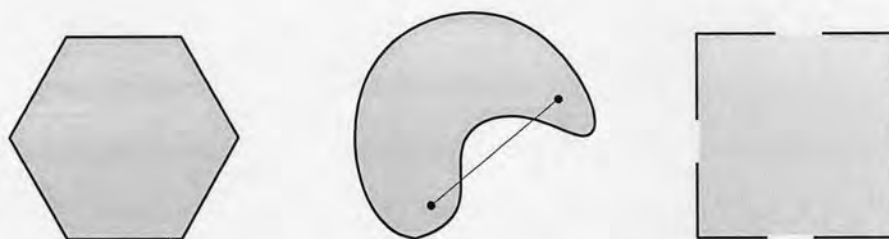
ในการที่จะนำเทคนิคทางด้านการหาค่าเหมาะที่สุดมาใช้กับปัญหาทางด้านการสื่อสารไร้สายที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้นั้น จะต้องเข้าใจพื้นฐานและรูปแบบประเภทต่างๆ ของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ โดยในส่วนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานดังกล่าว

เซตคอนเวกซ์ (convex set) เซต $S \subset \mathbb{R}^n$ จะเรียกว่าเป็นคอนเวกซ์ ถ้าจุดใดๆ สองจุด $x, y \in S$ ซึ่งเมื่อลากเส้นต่อเชื่อมสองจุด x, y นี้แล้ว เส้นเชื่อมนี้ยังคงอยู่ในเซต S ซึ่งในทางคณิตศาสตร์สามารถเขียนคุณลักษณะดังที่กล่าวได้ ดังนี้

$$\theta x + (1-\theta)y \in S, \quad \forall \theta \in [0,1] \quad \text{and} \quad x, y \in S \quad (2.24)$$

โดยสามารถที่จะอธิบายลักษณะเซตที่เป็นคอนเวกซ์ในเชิงภาพได้ ดังได้จากรูปที่

2.9



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างเซตคอนเวกซ์ และไม่คอนเวกซ์

โดยรูปซ้ายมือของรูปที่ 2.9 ซึ่งเป็นรูปหกเหลี่ยมปิดภายในนั้นจะเป็นคอนเวกซ์ เนื่องจากเมื่อลากเส้นจุดใดๆ สองจุดภายในรูปหกเหลี่ยมแล้ว เส้นเชื่อมนั้นยังคงอยู่ในรูปหกเหลี่ยม สำหรับรูปตรงกลางกับรูปขวามือนั้นไม่เป็นคอนเวกซ์เนื่องจากในรูปที่สองนั้นเมื่อลากเส้นเชื่อมสองจุดดังในรูปแล้วเส้นเชื่อมนั้นไม่อยู่ในในเซตซึ่งเป็นส่วนที่แฉงในรูป สำหรับรูปขวามือนั้นไม่เป็นคอนเวกซ์เนื่องมาจากที่ขอบรูปขาดไม่ต่อเนื่อง สำหรับตัวอย่างอื่นๆ ที่มักพบเช่น $S = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ ซึ่งเป็นลูกทรงกลมตันหนึ่งหน่วยจะเป็นคอนเวกซ์ แต่ถ้าเป็น $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ ซึ่งเป็นลูกทรงกลมกลวงนั้นจะไม่เป็นคอนเวกซ์เนื่องจากเมื่อลากเส้นเชื่อมจุดภายในแล้วไม่อยู่ในเซต โดยทั่วไปแล้วเซตคอนเวกซ์จะต้องเป็นทรงตัน ต่อเนื่อง ไม่มีช่องว่างภายใน และเป็นเส้นโค้งออก สำหรับเส้นในแกนจำนวนจริง \mathbb{R} นั้นขึ้นอยู่กับว่าจุดภายในเป็นเซตปิดหรือเปิด ตัวอย่างอื่นเช่นเซตของ วงรี ลูกบาศก์หลายมิติ รูปกรวย ซึ่งเป็นลักษณะที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ คุณสมบัติที่สำคัญของเซตคอนเวกซ์นั้นคือ อินเตอร์เซกชันใดๆ ของเซตคอนเวกซ์ยังคงเป็นเซตคอนเวกซ์ ตัวอย่างเช่น เซต $S = \{x \mid \|x\| \leq 1, x \geq 0\}$ ซึ่งเป็นอินเตอร์เซกชันของทรงกลมตันหนึ่งหน่วยกับ nonnegative orthant \mathbb{R}_+^n ซึ่งเซตทั้งสองนี้เป็นเซตคอนเวกซ์ ดังนั้นอินเตอร์เซกชันของเซต S จึงเป็นเซตคอนเวกซ์ด้วย แต่โดยทั่วไปแล้วเซตของยูเนียนจะไม่เป็นคอนเวกซ์

กรวยคอนเวกซ์ (convex cone) กรวยคอนเวกซ์ K นั้นเป็นรูปแบบพิเศษชนิดหนึ่งของเซตคอนเวกซ์ ซึ่งมีคุณสมบัติปิดภายใต้การปรับมาตราทางบวก (positive scaling) ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า แต่ละ $x \in K$ และแต่ละ $\alpha \geq 0$ $\alpha x \in K$ ลักษณะของกรวยคอนเวกซ์นั้นถูกนำมาใช้ในหลายรูปแบบทางด้านการประยุกต์ในทางวิศวกรรม

ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นลักษณะของกรวยคอนเวกซ์

รูปแบบของกรวยคอนเวกซ์ที่พบเจอและถูกใช้มากสามารถแบ่งได้ ดังนี้

1. **Nonnegative orthant** \mathcal{R}_+^n
2. **กรวยอันดับสอง (second-order cone : SOC)** หรือบางที่ถูกเรียกว่ากรวยไอศกรีม (ice-cream cone) หรือกรวยลอเรนซ์ (Lorentz cone)

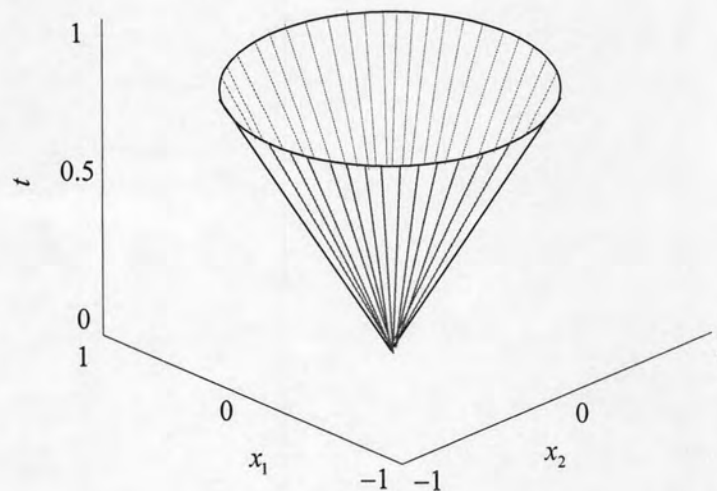
ลักษณะของกรวยอันดับสองมีนิยามดังนี้

$$\mathcal{K} = \text{SOC}(n) = \{(t, x) \mid t \geq \|x\|\}; \quad (2.25)$$

โดยสามารถอธิบายลักษณะและตัวอย่างของกรวยอันดับสอง เพื่อให้เห็นภาพและเข้าใจได้ง่ายขึ้น เช่น กรวยอันดับสองซึ่งเป็นกรวยนอร์ม (norm cone) สำหรับนอร์มยูคลิเดียน (Euclidean norm) ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} S &= \{(x, t) \in \mathcal{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0, t \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

โดยสามารถแสดงในเชิงรูปภาพลักษณะของกรวยอันดับสองดังที่กล่าวซึ่งเป็นกรวยอันดับสองในมิติ \mathcal{R}^3 ได้ดังรูป



รูปที่ 2.10 กรวยอันดับสอง

ในทางปฏิบัติที่พบเจอนั้น บ่อยครั้งเราจะพบลักษณะกรวยอันดับสองในลักษณะที่ไม่อยู่ในรูปลักษณะดังที่กล่าวนี้โดยตรง โดยจะอยู่ในรูปของกรวยหมุนอันดับสอง (rotated second-order cone) โดยมีนิยามดังนี้

$$\kappa = (\text{rotated}) \text{SOC}(n) = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^n \mid ts \geq \|x\|^2, t \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.26)$$

โดยกรวยหมุนอันดับสองนี้จะต้องผ่านการแปลงเพื่อให้อยู่ในรูปของกรวยอันดับสอง

ในวิทยานิพนธ์ที่นำเสนออยู่ในรูปของกรวยหมุนอันดับสอง แล้วทำการแปลงเพื่อให้อยู่ในรูปของกรวยอันดับสองเพื่อนำไปใช้กับการคำนวณด้วยวิธีจุดภายใน

3. กรวยเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (Positive semidefinite matrix cone)

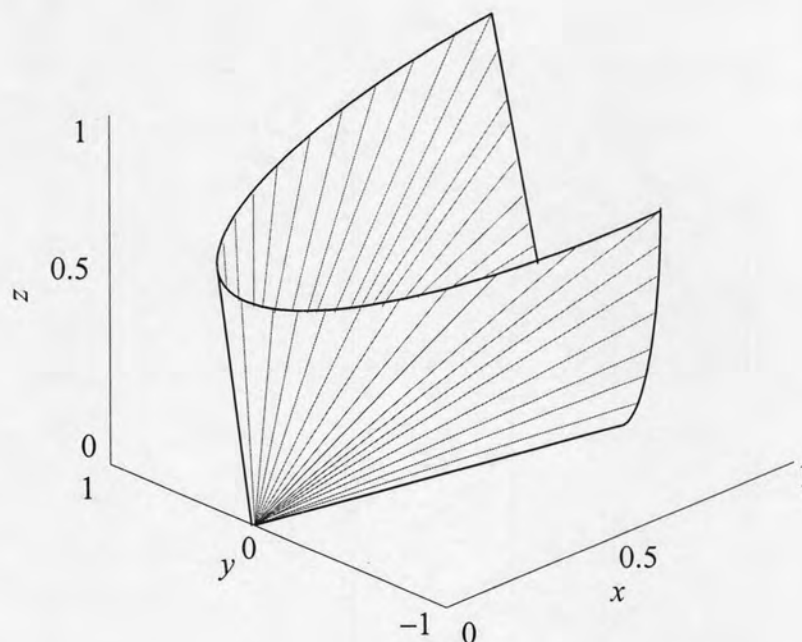
ลักษณะของกรวยอันดับสองมีนิยามดังนี้

$$\kappa = (\text{rotated}) \text{SOC}(n) = \kappa = S_+^n = \{X \mid X \text{ symmetric and } X \succeq 0\} \quad (2.27)$$

โดยกรวยอันดับสองที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ นั้น ถือเป็นกรณีย่อยของ กรวยเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนซึ่งเป็นกรณีที่เป็นเมทริกซ์มีลักษณะกึ่งบวกแน่นอน โดยสามารถอธิบายลักษณะและตัวอย่างของกรวยอันดับสอง เพื่อให้เห็นภาพและเข้าใจได้ง่ายขึ้น ได้ดังนี้

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2 \Leftrightarrow x \geq 0, z \geq 0, xz \geq y^2. \quad (2.28)$$

โดยสามารถแสดงในทางรูปภาพเพื่อให้มองเห็นภาพลักษณะของกรวยอันดับสองดังที่กล่าวซึ่งเป็นกรวยอันดับสองในมิติ ๓ ได้ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 กรวยเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

กรวยเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนนั้นจะมีความซับซ้อนกว่ากรวยอันดับสอง และใช้เวลาในการคำนวณหาคำตอบนานกว่าเมื่อนำไปคำนวณด้วยวิธีจุดภายใน

จากเซตคอนเวกซ์แล้ว ต่อไปจะกล่าวถึงฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex functions)

ฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex functions) ฟังก์ชัน $f(x): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$ จะเรียกว่าเป็นคอนเวกซ์ ถ้าจุดใดๆ สองจุด $x, y \in \mathcal{X}$ โดย

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y), \quad \forall \theta \in [0,1]. \quad (2.29)$$

สามารถอธิบายอสมการของฟังก์ชันคอนเวกซ์ในเชิงภาพได้โดยดูรูปที่ ประกอบโดยเมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด x, y ใดๆ แล้วเส้นเชื่อม $(x, f(x))$ กับ $(y, f(y))$ จะอยู่เหนือกราฟของฟังก์ชันดังรูปที่ 2.12 โดยในทางตรงข้ามนั้นถ้าลากเส้นเชื่อมแล้วอยู่ล่างกราฟของฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันคอนเคฟ (concave functions) หรือกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นคอนเคฟ ถ้า $-f$ เป็นคอนเวกซ์



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันคอนเวกซ์

ยกตัวอย่างของฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่เป็นตัวแปรเดียว เช่น ฟังก์ชัน $|x|, e^x, x^2$ หรือที่เป็นตัวแปรหลายตัว เช่น ฟังก์ชัน $a^T x + b, \|Ax\|^2$ เมื่อ A, a และ b เป็นเมทริกซ์เวกเตอร์ของข้อมูลและค่าคงที่ตามลำดับ ตัวอย่างอีกตัวอย่างหนึ่งคือฟังก์ชันเอนโทรปีซึ่งใช้ในทางทฤษฎีข่าวสารข้อมูลทางการสื่อสาร $-\sum_i x_i \log x_i$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน \mathbb{R}^n ถ้าฟังก์ชัน f นั้นสามารถทำการหาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง (continuously differentiable) สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปแบบ $x^T P x + a^T x + b$ นั้นจะคอนเวกซ์ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ P นั้นเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งมีการบวกด้วยพจน์ค่าคงที่โดยเขียนอยู่ในรูปแบบ $a^T x + b$ นั้นจึงยังขาดคุณสมบัติของความเป็นคอนเวกซ์ของฟังก์ชัน ตัวอย่างเพิ่มเติมได้แก่ฟังก์ชัน x^3 นั้นจะเป็นคอนเวกซ์เฉพาะในช่วง $[0, \infty]$ และเป็นคอนเวกซ์ในช่วง $[-\infty, 0]$ แต่ไม่เป็นทั้งคอนเวกซ์และคอนเวกซ์บนจำนวนจริง \mathbb{R}

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันคอนเวกซ์คือมีคุณสมบัติปิดภายใต้การบวก การปรับมาตราทางบวก และการดำเนินการ (pointwise maximum operations) ตัวอย่างเช่น ถ้า $\{f_i\}$'s คอนเวกซ์ แล้ว $\max_i \{f_i(x)\}$ จะคอนเวกซ์ แม้ว่าจะไม่สามารถทำการหาอนุพันธ์ได้

2.10 ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ (convex optimization problems)

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดทั่วไปสำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุดสามารถเขียนในรูปแบบ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f_0(x) \\
 & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & && h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \\
 & && x \in S.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

โดย $f_o(x)$ คือฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function or cost function) ของปัญหาที่เราพิจารณา $\{f_i\}_{i=1}^m$ และ $\{h_j\}_{j=1}^r$ คืออสมการและสมการของฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ (constraint functions) ตามลำดับ และเซต S คือเซตของเงื่อนไขบังคับ (constraint set) โดยในทางปฏิบัตินั้นเซตของเงื่อนไขบังคับ S นั้นสามารถถูกกำหนดให้ใส่ค่าได้โดยผู้ใช้ ตัวแปรออปติไมซ์ $x \in \mathbb{R}^n$ จะหาค่าได้ (feasible) ถ้า $x \in S$ และค่าที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของอสมการและสมการของเงื่อนไขบังคับทั้งหมด ถ้าคำตอบที่หาค่าได้คือ x^* จะเป็นค่าเหมาะสมสุดวงกว้าง (globally optimal) ถ้า $f_o(x^*) \leq f_o(x)$ สำหรับทุกค่าที่หาค่าได้ทั้งหมดของ x ในทางกลับกันถ้ามีเวกเตอร์ที่หาค่าได้ \bar{x} จะเป็นค่าเหมาะสมสุดเฉพาะที่ (locally optimal) ถ้ามีบางค่า $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $f_o(\bar{x}) \leq f_o(x)$ สำหรับทุกค่า x ที่สอดคล้องกับ $\|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon$

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวมาจะเป็นคอนเวกซ์ ถ้าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นคอนเวกซ์ ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ $f_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ เป็นคอนเวกซ์ และฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ $h_j(x)$ เป็นสัมพรรคฟังก์ชัน (affine functions) กล่าวคือ สัมพรรคฟังก์ชันคือ h_j จะอยู่ในรูปแบบ $a_j^T x + b_j$ โดย $a_j \in \mathbb{R}^n$ และ $b_j \in \mathbb{R}$ หรือเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นรวมทั้งเซตของเงื่อนไขบังคับ S เป็นคอนเวกซ์ โดยปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวมาแล้วทั้งหมด หากเราเปลี่ยนจากการหาค่าต่ำสุด (minimize) เป็นการหาค่าสูงสุด (maximize) และเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการของฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการจาก $f_i(x) \leq 0$ เป็น $f_i(x) \geq 0$ และจะเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ ก็ต่อเมื่อทุกค่าของฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ $f_i(x) (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ เป็นคอนเวกซ์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาค่าสูงสุดของเอนโทรปีซึ่งเป็นคอนเวกซ์ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & && Ax = b, \quad j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.11 รูปแบบปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้น (linear conic optimization models)

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งพบและถูกใช้มากในการประยุกต์ทางวิศวกรรมของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบคอนเวกซ์นั้น คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้น ซึ่งสามารถมองปัญหาได้ในเชิงภาคตัดกรวย สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไป ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && C \bullet X \\ & \text{subject to} && AX = b, \quad X \in \kappa \end{aligned} \quad (2.32)$$

เมื่อ A คือตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) ซึ่งทำการส่ง (map) จากปริภูมิยูคลิดีียน (Euclidean space) ไปทั่วถึงยังปริภูมิยูคลิดีียนอื่น ส่วน $C \bullet X$ คือ เมทริกซ์ผลคูณภายใน (matrix inner product) โดยสามารถแบ่งเป็นรูปแบบต่างๆ ได้ดังนี้

1. **กำหนดการเชิงเส้น (linear programming : LP)** คือ $\kappa = \mathbb{R}_+^n$ โดยในกรณีปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้นจะลดรูปเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax = b, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2. **กำหนดการกรวยอันดับสอง (second-order cone programming : SOCP)** คือ $\kappa = \prod_{i=1}^n SOC(n_i)$ ให้ $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)^T$ กับ $\tilde{x}_i = (t_i, x_i)^T \in SOC(n_i)$ หรือกล่าวได้ว่า $t_i \geq \|x_i\|$ ในกรณีนี้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้นจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \tilde{c}^T \tilde{x} \\ & \text{subject to} && \tilde{A}\tilde{x} = b, \quad \tilde{x}_i \in SOC(n_i), \forall i. \end{aligned} \quad (2.34)$$

ในทางปฏิบัติแล้ว เงื่อนไขบังคับของกำหนดการกรวยอันดับสองจะเขียนอยู่ในรูปแบบของ $\|A'x + b'\| \leq t'$

ในวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นรูปแบบกำหนดการกรวยอันดับสอง

3. **กำหนดการกึ่งบวกแน่นอน (semidefinite programming : SDP)** คือ $\kappa = S_+^n$ ในกรณีนี้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้นจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && C \bullet X \\ & \text{subject to} && A_i X = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad X \succeq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

ถ้าเงื่อนไขบังคับอยู่ในรูปแบบของกรวยอันดับสองก็จะเป็นกำหนดการกรวยอันดับสอง และถ้าเงื่อนไขบังคับอยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน ก็จะเป็นกำหนดการกึ่งบวกแน่นอน ดังลักษณะรูปแบบของกรวยที่ได้กล่าวมาแล้ว

2.12 วิธีจุดภายใน (interior-point methods)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการหาคำนวนหาค่าตอบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบภาคตัดกรวยเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ โดยจะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีจุด

ภายในซึ่งถูกใช้ในการคำนวณปัญหาคอนเวกซ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพมาก วิธีการจุดภายในถือเป็นจุดเปลี่ยนแปลงที่สำคัญที่ทำให้ประสบความสำเร็จในการนำมาใช้งานจริงเนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้เวลาน้อยคือใช้เวลาเป็นพหุนามเมื่อเทียบกับความซับซ้อนของปัญหา โดยแต่เดิมนั้นวิธีการที่ใช้ในการคำนวณคือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex methods) จะใช้เวลาเป็นเลขชี้กำลัง (exponential time) กับขนาดความซับซ้อนของปัญหา นอกจากนี้เมื่อนำมาใช้กับปัญหาคอนเวกซ์ทำให้คำตอบที่หาค่าได้เป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด วิธีการจุดภายในนั้นถูกนำเสนอและถูกอ้างอิงเป็นอย่างมากจากผลงานของ Nesterov และ Nemirovsky ในปี ค.ศ. 1994 [30] ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีการจุดภายในสามารถนำมาใช้กับปัญหาที่เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ทั้งหมด วิธีการจุดภายในจะทำการหาค่าโดยคำตอบที่ได้ในแต่ละรอบจะหาค่าได้โดยแท้ (strictly feasible) ตามชื่อของวิธีการจุดภายใน หรือบางครั้งถูกเรียกว่าวิธีขวางกั้น (barrier methods) อันเนื่องมาจากฟังก์ชันที่ถูกใช้ในการคำนวณแต่ละรอบนั้นมีฟังก์ชันขวางกั้น (barrier function) เพื่อใช้รอบรับว่าคำตอบที่หาค่าได้ในแต่ละรอบนั้นหาค่าได้โดยแท้ นอกจากนี้วิธีการจุดภายในซึ่งนิยมและถูกใช้เป็นอย่างมากแล้ว ก็ยังมีวิธีการอื่นๆ อีกเช่น วิธีทรงรี (Ellipsoid methods) เป็นต้น โดยในส่วนนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานวิธีการจุดภายในซึ่งถูกใช้ในการหาค่าตอบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์

จากปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ ซึ่งมีเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ โดยเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_o(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & && Ax = b. \end{aligned} \tag{2.36}$$

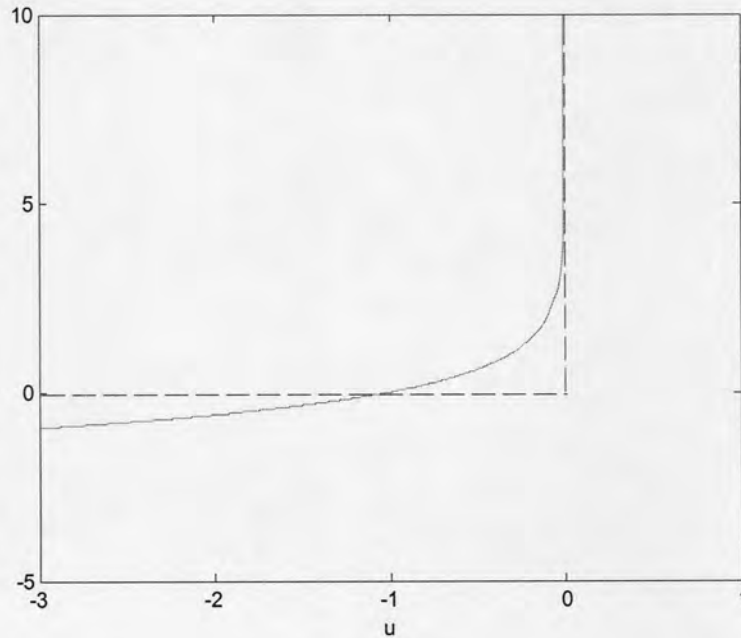
โดยอันดับแรกคือการแปลงปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งมีเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการอยู่ด้วยนั้น เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งมีเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการเท่านั้น เพื่อที่จะประยุกต์ใช้วิธีการนิวตัน (Newton's methods) ได้ โดยขั้นแรกคือการเขียนปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งมีเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการใหม่โดยให้เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการนั้นมาแฝงอยู่ในฟังก์ชันจุดประสงค์ ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_o(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ & \text{subject to} && Ax = b. \end{aligned} \tag{2.37}$$

โดยเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการนั้นแฝงอยู่ในฟังก์ชันของ I_- ซึ่งมีคุณสมบัติ ดังนี้

$$I_-(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ \infty, & u > 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

การที่เขียนฟังก์ชันของเงื่อนไขบังกัปที่เป็นอสมการแฝงอยู่ในฟังก์ชัน I_- เพื่อไม่ให้ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงกับการหาค่าต่ำสุดของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด โดยการเขียนในรูปแบบนี้จะไม่ส่งผลต่อคำตอบของปัญหา หรือกล่าวได้ว่าไม่ทำให้ลักษณะของปัญหาเปลี่ยนแปลงไป โดยสามารถอธิบายลักษณะของฟังก์ชัน I_- ได้คือเส้นประดังแสดงในรูปที่



รูปที่ 2.13 กราฟฟังก์ชันขวางกั้น

อย่างไรก็ตามแม้ว่าจะเขียนเงื่อนไขบังกัปที่เป็นอสมการแฝงในฟังก์ชัน I_- ในฟังก์ชันจุดประสงค์แล้วทำให้ไม่เกิดปัญหาดังที่กล่าว และทำให้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดนั้นไม่มีเงื่อนไขบังกัปที่เป็นอสมการแล้วก็ตาม แต่ฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เขียนขึ้นใหม่นั้นไม่สามารถทำการหาอนุพันธ์ได้ จึงยังไม่สามารถที่จะนำวิธีการนิวตันมาประยุกต์ใช้ได้ ซึ่งยังต้องนำวิธีขวางกั้นมาช่วยดังที่จะกล่าวต่อไป

แนวคิดของวิธีขวางกั้น คือการหาฟังก์ชันที่มีลักษณะเพิ่มเติมจากที่กล่าวไปแล้วคือไม่ให้ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงกับการหาค่าต่ำสุดของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ดังตัวอย่างเช่นฟังก์ชัน I_- และต้องมีคุณสมบัติเพิ่มเติมคือ สามารถทำการหาอนุพันธ์ได้ด้วย โดยฟังก์ชันหนึ่งซึ่งมีคุณลักษณะดังที่กล่าวคือ การทำการประมาณฟังก์ชัน I_- ด้วยฟังก์ชันซึ่งมีลักษณะ ดังนี้

$$\hat{I}_-(u) = -(1/t) \log(-u), \quad \text{dom } \hat{I}_- = -\mathcal{R}^{++}. \quad (2.39)$$

อธิบายลักษณะฟังก์ชันได้ ดังนี้ เมื่อ $t > 0$ เป็นค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดความเที่ยงตรงในการประมาณค่า ฟังก์ชัน I_- นี้จะเหมือนฟังก์ชัน I_- คือเป็นคอนเวกซ์และไม่มีค่าลดลง แต่มีความแตกต่างคือฟังก์ชัน \hat{I}_- นี้สามารถทำการหาอนุพันธ์ได้ เมื่อเพิ่มค่า u ให้เข้าใกล้ 0 ค่าของฟังก์ชันจะเพิ่มเข้าสู่ ∞ ดังรูปซึ่งแสดงด้วยเส้นทึบของฟังก์ชัน \hat{I}_- ที่ค่า t ต่างๆ โดยหากเราเลือกค่า t ซึ่งมีค่ามาก การประมาณก็จะมีค่าความถูกต้องมากขึ้น หลังจากได้ฟังก์ชัน \hat{I}_- ซึ่งมีคุณลักษณะดังต้องการแล้วจึงนำไปแทนฟังก์ชัน I_- ในปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_o(x) + \sum_{i=1}^m -(1/t) \log(-f_i(x)) \\ &\text{subject to} && Ax = b. \end{aligned} \tag{2.40}$$

ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ไดยังคงคอนเวกซ์ เนื่องจากฟังก์ชัน $-(1/t) \log(-u)$ นั้นคอนเวกซ์ และมีลักษณะมีค่าเพิ่มขึ้นใน u รวมทั้งสามารถหาอนุพันธ์ได้ด้วย จึงสามารถนำวิธีนิวตันมาประยุกต์ใช้ได้

ด้วยลักษณะของฟังก์ชันข้างกันที่เป็นฟังก์ชันของลอการิทึม บางครั้งจึงอาจเรียกวิธีนี้ว่าขวางกั้นลอการิทึม (logarithmic barrier)

การที่จะนำวิธีจุดภายในมาใช้มันจึงต้องทำการแปลงปัญหาของระบบซึ่งโดยปกติแล้วจะไม่อยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์ ให้เป็นรูปแบบคอนเวกซ์แบบใดแบบหนึ่งดังที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งวิธีการแปลง (formulate) ปัญหาให้มาอยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์นั้น ไม่มีวิธีการที่เป็นขั้นตอนตรงไปตรงมา วิธีการแปลงจึงอาศัยประสบการณ์และการเห็นตัวอย่างวิธีการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์ของระบบต่างๆ ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นเทคนิควิธีการซึ่งอาจจำมาใช้กับการแปลงปัญหาของระบบที่เราทำการพิจารณาได้ อย่างไรก็ตามพอจะกล่าวถึงวิธีหลักๆ ที่นำมาใช้ในการแปลงปัญหาให้มาอยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์ ได้ วิธีการหนึ่ง คือการเปลี่ยนตัวแปร (change of variables) ของปัญหาซึ่งไม่อยู่ในรูปคอนเวกซ์ โดยยังคงสมมูลกับปัญหาคอนเวกซ์ ตัวอย่างเช่นปัญหาการหาค่าน้อยสุดของการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งไม่อยู่ในรูปแบบคอนเวกซ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \frac{1}{(1+x^2)} \\ &\text{subject to} && x^2 \geq 1. \end{aligned} \tag{2.41}$$

ซึ่งทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นคอนเวกซ์ เราสามารถทำการเขียนปัญหานี้ใหม่โดยการเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $y = x^2$ ซึ่งจะ使得ปัญหาดังกล่าวเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{(1+y)} \\ & \text{subject to} && y \geq 1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

ซึ่งปัญหาดังกล่าวจะกลายเป็นปัญหาคอนเวกซ์ โดยทำให้สามารถหาค่าเหมาะที่สุดได้คือ y แล้วจึงหาค่า x ได้ด้วยการแทนด้วย $x = \sqrt{y}$