บทที่ 3
แบบจำลองพลศาสตร์ของยานพาหนะ

ในการวิเคราะห์ระบบที่ต้องการพิจารณานั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเข้าใจถึงระบบสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical modeling) เพื่อศึกษาสิ่งที่เกิดขึ้นกับระบบที่พิจารณา ภายใต้ตัวแปรที่กำหนดขึ้นมาในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการพิจารณาระบบของยานพาหนะที่สร้างขึ้น จำเป็นต้องหาแบบจำลองพลศาสตร์ของยานพาหนะก่อน เพื่อศึกษาพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นกับตัวยานพาหนะภายใต้ตัวแปรต่างๆที่กำหนดขึ้น เช่น ความเร็ว ความเร่ง และ โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นต้น โดยนำสมการที่ได้ ไปใช้ในการออกแบบยานพาหนะจริงแบบย่อส่วนต่อไป สำหรับงานวิจัยนี้ ได้ใช้สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะ 2 แบบด้วยกัน ดังนี้

1. สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ
2. สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ

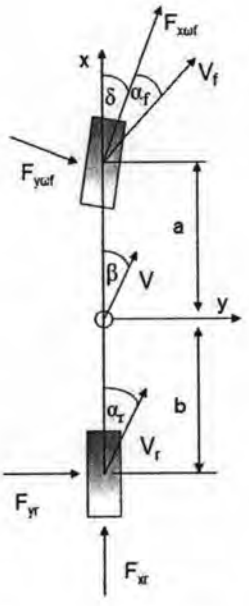
โดยที่สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ เป็นการจำลองพลศาสตร์การเคลื่อนที่ของยานพาหนะอย่างง่าย ซึ่งมีตัวแปรอิสระ (Degree of freedom) ในสมการ 2 ตัวแปร คือ การเคลื่อนที่ด้านข้าง (Lateral motion) และการหมุนของยานพาหนะรอบแกน z (Yaw motion) และในส่วนของสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ นั้นจะเป็นการพิจารณาตัวแปรอิสระที่มากขึ้น ซึ่งประกอบด้วย การเคลื่อนที่ด้านข้าง (Lateral motion) การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (Vertical motion) การหมุนของยานพาหนะรอบแกน x (Roll motion) การหมุนรอบแกน y (Pitch motion) การหมุนรอบแกน z (Yaw motion) โดยที่ทั้งสองของระบบสมการได้กำหนดให้เงื่อนไขของระบบสมการพิจารณาในสภาวะที่ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (Longitudinal velocity constant) รายละเอียดของระบบสมการแต่ละแบบมีดังนี้

3.1 สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ

แบบจำลองยานพาหนะที่ใช้ ณ ที่นี้จะใช้แบบจำลองอย่างง่ายที่เรียกว่า "Linear bicycle model" โดยรวมแนวล้อทางด้านซ้ายและด้านขวาเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ฉะนั้นผลจากการโคลงตัวของยานพาหนะตามแกน z (แนวตั้งฉากกับระนาบของยานพาหนะ) และแนวแกน y (แนวตั้งฉากกับแนวยาวของยานพาหนะ) จะไม่มี และใช้สมมติฐานดังนี้

1. รัศมีของการเลี้ยวโค้งจะต้องมีขนาดใหญ่เทียบกับฐานล้อ
2. มุมบิดของล้อหน้าทั้งสองล้อ จะต้องมีค่าใกล้เคียงกัน แสดงว่ามุมเลี้ยวจะต้องน้อย และการเคลื่อนที่บนถนนปกตินั้น จะมีมุมลื่นไถลด้านข้างไม่มากกว่า 5-10°
3. ค่ามุมลื่นไถลด้านข้างของล้อ (Tire side slip angle) หน้า α_f ทั้งล้อซ้ายและขวา จะต้องมีค่าใกล้เคียงกัน และค่ามุมลื่นไถลด้านข้างของล้อหลัง α_r ก็เช่นกัน
4. ค่ามุมการมุมลื่นไถลด้านข้างที่จุดศูนย์ถ่วง คือ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$
5. ไม่พิจารณาแรงเสียดทานอันเนื่องมาจากแรงลมและการกลิ้ง
6. ระบบที่พิจารณาเป็นแบบเชิงเส้น

จากเงื่อนไขที่กำหนดของสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ มีงานวิจัย [2-9] ที่ได้นำเอาสมการไปใช้ในการออกแบบยานพาหนะจริงแบบย่อส่วน แล้วสามารถพิสูจน์ได้ว่ามีความคล้ายคลึงกับยานพาหนะจริง ได้อย่างถูกต้องแม่นยำภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดข้างต้น ในส่วนของการเขียนแบบจำลองพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ สามารถพิจารณาได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 แรงต่างๆในแบบจำลองพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ

เมื่อกำหนดให้

a คือ ระยะห่างจากเพลาของล้อหน้าถึงจุดศูนย์ถ่วงของยานพาหนะ

b คือ ระยะห่างจากเพลาของล้อหลังถึงจุดศูนย์ถ่วงของยานพาหนะ

δ คือ มุมเลี้ยวของล้อ

β คือมุมลื่นไถลที่จุดศูนย์ถ่วงของยานพาหนะ

V คือ ทิศทางความเร็วของจุดศูนย์ถ่วงยานพาหนะ

α_f คือมุมลื่นไถลที่ล้อหน้า

α_r คือมุมลื่นไถลที่ล้อหลัง

V_f คือ ทิศทางความเร็วของล้อหน้า

V_r คือ ทิศทางความเร็วของล้อหลัง

F_{ywf} คือ แรงที่กระทำด้านข้าง (Lateral force) ของล้อหน้า

F_{yr} คือ แรงที่กระทำด้านข้างของล้อหลัง

F_{xwf} คือ แรงที่กระทำในแนวตามยาว (Longitudinal force) ของล้อหน้า

F_{xr} คือ แรงที่กระทำในแนวตามยาวของล้อหลัง

จากรูปที่ 3.1 เมื่อพิจารณาสมการภายใต้กฎของ Newton จะได้ระบบสมการพลศาสตร์ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.1}$$

จะได้ว่า

$$ma_x = F_{xwf}\cos\delta - F_{ywf}\sin\delta + F_{xr} \tag{3.2}$$

$$ma_y = F_{ywf}\cos\delta + F_{xwf}\sin\delta + F_{yr} \tag{3.3}$$

$$I_Z\dot{r} = aF_{ywf}\cos\delta + aF_{xwf}\sin\delta - bF_{yr} \tag{3.4}$$

จากเงื่อนไขที่กำหนด เมื่อระบบสมการพิจารณาในสภาวะที่ยานพาหนะวิ่งด้วยความเร็วคงที่ ดังนั้นจึงไม่มีความเร่งในแนวแกน x โดยมีแต่ความเร่งในแนวแกน y ดังนั้นจะได้

$$a_y = \dot{v} + ru \tag{3.5}$$

โดยกำหนดให้

I_Z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของตัวยานพาหนะรอบแกน z

r คือ Yaw rate ($\dot{\psi}$)

m คือ มวลของยานพาหนะ

จากนั้นเอาสมการ (3.5) แทนลงในสมการ (3.3-3.4) แล้วทำการจัดพจน์จะได้

$$\dot{v} = -ru + \left(\frac{1}{m}\right)\left(F_{ywf}\cos\delta + F_{xwf}\sin\delta + F_{yr}\right) \tag{3.6}$$

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{I_z}\right)\left(aF_{ywf}\cos\delta + aF_{xwf}\sin\delta - bF_{yr}\right) \tag{3.7}$$

เมื่อได้สมการ (3.6-3.7) เป็นสมการหลัก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาค่าตัวแปรในสมการหลัก โดยจากรูปที่ 3.1 จะได้

ความเร็วที่ล้อหน้า

$$V_{xf} = u$$
$$V_{yf} = v + ar$$

ความเร็วที่ล้อหลัง

$$V_{xr} = u$$
$$V_{yf} = v - br$$

จากความเร็วที่ล้อหน้าและล้อหลัง สามารถคำนวณมุมลื่นไถลด้านข้างของทั้งสองล้อได้ ดังสมการต่อไปนี้

$$\alpha_f = \delta_f - \tan^{-1}\left(\frac{v+ar}{u}\right) \tag{3.8}$$

$$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{v-br}{u}\right) \tag{3.9}$$

โดยกำหนดให้

α_f คือ มุมลื่นไถลของล้อหน้า

α_r คือ มุมลื่นไถลของล้อหน้า

δ_f คือ มุมของล้อหน้า

δ_r คือ มุมของล้อหลัง

ความเร็วของล้อหน้าและหลังในแนวระนาบของตามลำดับคือ

$$V_{x\omega f} = \cos\alpha_f \sqrt{u^2 + (v + ar)^2} \tag{3.10}$$

$$V_{x\omega r} = \cos\alpha_r \sqrt{u^2 + (v - br)^2} \tag{3.11}$$

แรงกระทำด้านข้างของล้อยานพาหนะคิดรวมทั้งล้อซ้ายและขวาจะได้

$$F_{y\omega f} = 2C_{\alpha f}\alpha_f \tag{3.12}$$

$$F_{y\omega r} = 2C_{\alpha r}\alpha_r \tag{3.13}$$

จากสมการหลัก (3.6-3.7) นำมาเขียนใหม่เพื่อลดรูปสมการ โดยอาศัยเงื่อนไขข้อจำกัดของสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ คือ มุมเลี้ยวของล้อนั้นมีค่าน้อย ดังนั้น $\cos\delta \approx 1$, $\sin \approx 0$ และให้ความเร็วในแนวยานพาหนะนั้นคงที่ ดังนั้นสมการของ u ก็ไม่จำเป็นหรืออาจแทน u ด้วย V ในสมการต่อๆไปได้เช่นกัน ฉะนั้นแล้วจากเงื่อนไขจะได้

$$\dot{v} = -ru + \left(\frac{1}{m}\right)\left(F_{yf} + F_{yr}\right) \tag{3.14}$$

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{I_z}\right)\left(aF_{yf} - bF_{yr}\right) \tag{3.15}$$

เมื่อแทนค่าแรงจากสมการ (3.12-3.13) ลงในสมการ (3.14-3.15) จะได้

$$\dot{v} = -ru + \left(\frac{1}{m}\right)\left(2C_{\alpha f}\alpha_f + 2C_{\alpha r}\alpha_r\right) \tag{3.16}$$

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{I_z}\right)\left(aC_{\alpha f}\alpha_f - bC_{\alpha r}\alpha_r\right) \tag{3.17}$$

และประมาณให้ $\tan^{-1}\theta = \theta$ เมื่อ θ น้อย เราสามารถประมาณมุมลื่นไถลด้านข้างจะได้

$$\alpha_f = \frac{v + ar}{u} - \delta_f \tag{3.18}$$

$$\alpha_r = \frac{v - br}{u} \tag{3.19}$$

เมื่อนำสมการ (3.18-3.19) แทนลงในสมการ (3.16-3.17) โดยกำหนดให้ $\delta_r = 0$ เนื่องจากไม่ได้ควบคุมมุมเลี้ยวของล้อหลังดังนั้นจะได้

$$\dot{v} = \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mu} v + \left(\frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mu} - u \right) r - \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta_f \tag{3.20}$$

$$\dot{r} = \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z u} v + \frac{2a^2 C_{\alpha f} + 2b^2 C_{\alpha r}}{I_z u} r - \frac{2aC_{\alpha f}}{I_z} \delta_f \tag{3.21}$$

เมื่อนำสมการ (3.20-3.21) มาเขียนสมการในรูปของสมการสถานะ (State space) จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_0}{um} & -\left(u + \frac{C_1}{mu} \right) \\ -\frac{C_1}{I_z u} & -\frac{C_2}{I_z u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ -\frac{2aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta_f \tag{3.22}$$

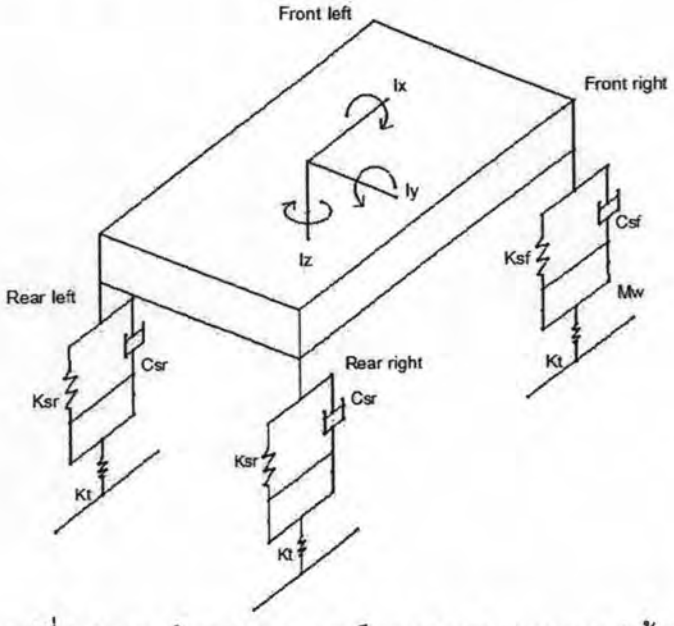
เมื่อกำหนดให้

$$C_0 = -\left(2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r} \right)$$
$$C_1 = -\left(2aC_{\alpha f} + 2bC_{\alpha r} \right)$$
$$C_2 = -\left(2a^2 C_{\alpha f} + 2b^2 C_{\alpha r} \right)$$

จากสมการ (3.20-3.21) เป็นสมการพลศาสตร์ในการนำไปจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติ เพื่ออ้างอิงในการสร้างยานพาหนะจริงแบบย่อส่วน โดยจะอธิบายวิธีการจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติในบทที่ 4 สำหรับสมการ (3.22) เป็นสมการระบบที่ใช้สำหรับการคำนวณพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นทั้งในการจำลองจากคอมพิวเตอร์ในบทที่ 9 และในไปใช้ในการควบคุมยานพาหนะจริงแบบย่อส่วนในส่วนของการทดสอบจริง

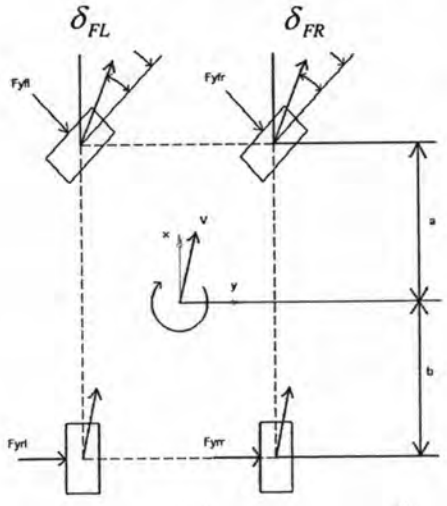
3.2 สมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ

สำหรับสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ จะมีความซับซ้อนมากกว่าสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะอย่างง่าย เนื่องจากได้มีการพิจารณาถึงตำแหน่งของล้อทั้งสี่ ตำแหน่งและความเร็วของจุดศูนย์ถ่วงของยานพาหนะ มุมและความเร็วของการเอียงหน้าหลัง (Pitch) มุมและความเร็วของการเอียงซ้ายและขวา (Roll) ในระบบสมการจะพิจารณาช่วงสภาวะที่กำลังขับด้วยความเร็วไปข้างหน้าแบบคงที่ เช่นเดียวกับสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะอย่างง่าย โดยที่มีสัญญาณเข้า คือ ความเร็วของยานพาหนะ และมุมเลี้ยวของล้อหน้า



รูปที่ 3.2 แบบจำลองพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ

สามารถจำลองสภาวะที่ยานพาหนะกำลังเลี้ยวดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 แผนภาพวัตถุอิสระขณะที่ยานพาหนะกำลังเลี้ยว (มุมมองด้านบน)

เมื่อกำหนดให้

K_t คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งที่ยางล้อกระทำกับผิวถนน

K_{sr} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งที่ล้อหลังกระทำกับตัวยานพาหนะ

K_{sf} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็งที่ล้อหน้ากระทำกับตัวยานพาหนะ

c_{sf} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงที่ล้อหน้ากระทำกับตัวยานพาหนะ

c_{sr} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงที่ล้อหลังกระทำกับตัวยานพาหนะ

จากรูปที่ 3.3 เมื่อนำไปพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ เช่นเดียวกับสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ จะได้ระบบสมการดังนี้

$$\dot{v} = -\dot{r}u + \frac{1}{M}(F_{yfl}\cos\delta + F_{yfr}\cos\delta + F_{yrl} + F_{yrr}) \tag{3.23}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_Z}\left[\frac{W}{2}(-F_{yfl}\sin\delta + F_{yfr}\sin\delta) + a(F_{yfl}\cos\delta + F_{yfr}\cos\delta) - b(F_{yrl} + F_{yrr})\right] \tag{3.24}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_Y}(a(F_{fl} + F_{fr}) - b(F_{rl} + F_{rr}) - (F_{yfr}\sin\delta)\left(h - a\theta - \frac{W}{2}\phi\right) + \ldots$$
$$\ldots - (F_{yfl}\sin\delta)\left(h - a\theta - \frac{W}{2}\phi\right)) \tag{3.25}$$

$$\dot{p} = \frac{1}{I_X}(\frac{W}{2}(F_{fl} + F_{fr}) - \frac{W}{2}(F_{fl} + F_{rr}) - (F_{yfl}\cos\delta)\left(h + a\theta + \frac{W}{2}\phi\right) + \ldots$$
$$\ldots - (F_{yfl}\sin\delta)\left(h + a\theta - \frac{W}{2}\phi\right) - F_{yrl}\left(h - b\theta + \frac{W}{2}\phi\right) - F_{yrr}\left(h - b\theta - \frac{W}{2}\phi\right)) \tag{3.26}$$

โดยที่สามารถหาแรงที่เกิดจากด้านข้างของล้อ (Lateral force) ได้จาก

$$F_{FR} = C_{\alpha FR} \times \alpha_{FR} F_{FR} \tag{3.27}$$

$$F_{FL} = C_{\alpha FL} \times \alpha_{FL} \tag{3.28}$$

$$F_{RR} = C_{\alpha RR} \times \alpha_{RR} \tag{3.29}$$

$$F_{RL} = C_{\alpha RL} \times \alpha_{RL} \tag{3.30}$$

โดยที่ค่ามุมลื่นไถลหาได้จาก

$$\alpha_{FR} = \delta_f - \tan^{-1}\left(\frac{v + ar}{u - \frac{W}{2}r}\right), \quad \alpha_{FL} = \delta_f - \tan^{-1}\left(\frac{v + ar}{u + \frac{W}{2}r}\right) \tag{3.31}$$

$$\alpha_{RR} = \delta_r - \tan^{-1}\left(\frac{v - ar}{u - \frac{W}{2}r}\right), \quad \alpha_{RL} = \delta_r - \tan^{-1}\left(\frac{v - ar}{u + \frac{W}{2}r}\right) \tag{3.32}$$

เมื่อได้ระบบสมการทางพลศาสตร์ของยานพาหนะตามเงื่อนไขที่พิจารณาแล้ว นำเอาไปใช้ในการจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติในบทถัดไป เพื่อนำเอาผลที่ได้ไปใช้ในการออกแบบยานพาหนะจริงแบบย่อส่วนให้มีความสมมูลกับยานพาหนะต้นแบบ และจากระบบสมการที่ได้สามารถนำ เอาไปวิเคราะห์ผลตอบสนองในระบบสมการภายใต้การจำลองทางคณิตศาสตร์ผ่านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยสามารถที่จะนำเอาค่าที่เกิดขึ้นจากยานพาหนะจริงแบบย่อส่วนที่สร้างขึ้นเปรียบเทียบกับการคำนวณผ่านระบบสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะ