บทที่ 4

การวิเคราะห์เชิงมิติ สภาพความคล้ายและการประยุกต์

การวิเคราะห์เชิงมิติ (Dimensional analysis) และสภาพความคล้าย (Similitude) มีประโยชน์อย่างมาก สำหรับเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์พัฒนาแบบต้นแบบที่มาจากจำลองจริง ในการศึกษานี้แบ่งเป็น 2 หัวข้อหลักๆ คือ เชิงมิติของหน่วยและความสมมูลของแบบจำลองกับต้นแบบ โดยการวิเคราะห์เชิงมิติจะกล่าวถึงการพิจารณามิติของหน่วยแต่ละตัวแปรในสมการรวมถึงการจัดตัวแปรในระบบสมการเพื่อให้เกิดกลุ่มตัวแปรไร้มิติ (Dimensionless group) สำหรับการเปรียบเทียบสภาพความคล้ายระหว่างต้นแบบและแบบจำลอง โดยแบ่งหัวข้อย่อยในการวิเคราะห์ออกเป็น 3 ส่วนหลักๆ คือ สภาพความคล้ายทางเรขาคณิต (Geometrical similitude) สภาพความคล้ายทางจลนศาสตร์(Kinematics similitude) และสภาพความคล้ายทางพลศาสตร์ (Dynamic similitude) ในส่วนสุดท้ายจะแสดงวิธีการนำเอาหลักการจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติไปประยุกต์ใช้กับสมการทางพลศาสตร์ยานพาหนะที่หาได้จากบทที่3.

4.1 มิติของหน่วย (Units dimension)

จากมิติของหน่วยแต่ละตัวแปรในสมการต่างๆสามารถนำมาพิจารณาเป็นการวิเคราะห์เชิงมิติได้ ฉะนั้นแล้วจะสามารถแบ่งปริมาณทางกายภาพ (Physical quantity) ของมิติของหน่วยออกได้เป็น 2 ระบบด้วยกันในการวิเคราะห์ คือ

1. MLT เรียกระบบว่า มวล ความยาว เวลา
2. FLT เรียกระบบว่า แรง ความยาว เวลา

ตาราง 4.1 มิติของหน่วยตัวแปร

ตัวแปร (หน่วย SI)	สัญลักษณ์	กลุ่มมิติ	
		FLT	MLT
ความยาว (m)	l	L	L
พื้นที่ (m^2)	A	L^2	L^2
เวลา (s)	T	T	T
ความเร็ว (m/s)	V	LT^{-1}	LT^{-1}
ความเร่ง (m/s^2)	A	LT^{-2}	LT^{-2}
แรง (N)	F	F	MLT^{-2}
มวล (kg)	m	$FL^{-1}T^2$	M

จากความสัมพันธ์ระหว่างมวลกับแรงหาได้จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน คือ $F = ma$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปของมิติพื้นฐานได้ คือ $F = ML/T^2$ หรือ $F = MLT^{-2}$

4.2 **การวิเคราะห์เชิงมิติ** (Dimensional analysis)

หลักการของการวิเคราะห์เชิงมิติก็คือในสมการหนึ่งๆนั้นแต่ละพจน์ในสมการดังกล่าวย่อมมีมิติหรือหน่วยที่เหมือนกัน ในมิติที่ใช้เปรียบเทียบแต่ละพจน์จะเลือกจากมิติพื้นฐานในกลุ่มของ MLT หรือ FLT โดยที่ $F = MLT^{-2}$ โดยทั่วไปในการวิเคราะห์เชิงมิติแล้วมีหลากหลายวิธีแต่ทั่วไปแล้วที่ใช้กันอยู่มีสองวิธีการคือ

1. วิธีเรย์ลี (Rayleigh method)
2. ทฤษฎีพายของบักกิงแฮมพาย (The Buckingham Pi theorem)

ทั้งสองวิธีข้างต้นสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์หากลุ่มไร้มิติ (Dimensionless group) ได้เหมือนกันแต่จะแตกต่างในการหาคำตอบ โดยทั่วไปแล้ววิธีทฤษฎีพายของบักกิงแฮมจะเป็นที่นิยมมากกว่า เนื่องด้วยว่าเวลาหาคำตอบในสมการที่มีตัวแปรจำนวนมากวิธีทฤษฎีพายของบักกิงแฮมจะง่ายกว่าและไม่ซับซ้อนเหมือนวิธีเรย์ลี ดังนั้นในที่นี้จะอธิบายเฉพาะวิธีทฤษฎีพายของบักกิงแฮมเท่านั้น

4.2.1 ทฤษฎีของบักกิงแฮมพาย

ทฤษฎีของบักกิงแฮมพาย เป็นวิธีในการวิเคราะห์เชิงมิติในปัญหาทางพลศาสตร์วิธีหนึ่ง โดยวิธีและหลักการทฤษฎีของบักกิงแฮมพายมีใจความว่า

ถ้ามีตัวแปรที่มีมิติ n ตัว ในสมการแต่ละพจน์ที่มีมิติอยู่ในรูปแบบ เดียวกันบนมิติพื้นฐาน m มิติ ตัวแปรดังกล่าวจะนำมารวมกันเป็นกลุ่มตัวแปร ไร้มิติได้ทั้งสิ้น $(n-m)$ กลุ่ม (10)

โดยกำหนดให้

n คือ จำนวนตัวแปรในปัญหาทางกายภาพ

m คือ จำนวนที่น้อยที่สุดของมิติพื้นฐานอิสระที่ใช้ในการกำหนดมิติของตัวแปรทั้งหมด

เช่น ถ้ามีตัวแปรทั้งหมด n=6 และมิติพื้นฐาน MLT จะได้ m=3 ดังนั้นกลุ่มตัว แปรไร้มิติมีทั้งหมดเท่ากับ 6-3 = 3 กลุ่ม

ถ้ากำหนดให้ตัวแปรในสมการที่มีมิติในรูปแบบเดียวกันเป็น $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ จำนวนทั้งสิ้น n ตัว มีมิติพื้นฐาน m มิติ จะสามารถนำมารวมกันเป็นกลุ่มตัวแปรไร้มติ จำนวน $(n-m)$ ตัว ถ้ากำหนดตัวแปรตามคือ A_1 และตัวแปรต้นคือ $A_2, A_3, ..., A_n$ ซึ่งมีจำนวน $(n-1)$ ตัว

$$A_1 = f(A_2, A_3, ..., A_n)$$
$$A_1 - f(A_2, A_3, ..., A_n) = \underbrace{g(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)}_{\text{จำนวน } n \text{ ตัว}} = 0$$

จัดเป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติหรือตัวแปร Π_i ได้จำนวน $(n-m)$ ตัว ดังนี้

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{n-m})$$

หรือ $$G(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{n-m}) = 0$$

ขั้นตอนการหากลุ่มตัวแปรไร้มิติหรือเทอม Π มีดังนี้

ขั้นที่ 1 การกำหนดตัวแปรต่างๆ ในปัญหา (สมมุติให้มี n ตัว) หากกำหนดตัวแปรไม่ครบความสัมพันธ์ระหว่างเทอม Π จะไม่มีความแน่นอน หากกำหนดตัวแปรมากเกินไป ตัวแปรที่เกินมานั้นจะยังคงปรากฏอยู่ แต่ผลการทดลองจะแสดงให้เห็นว่าตัวแปรนั้นไม่มีผลเกี่ยวข้องกับปัญหา

ขั้นที่ 2 เลือกกลุ่มของมิติพื้นฐานอิสระคือ MLT หรือ FLT ที่ใช้กำหนดมิติของตัวแปรต่างๆ

ขั้นที่ 3 เขียนมิติของตัวแปรต่างๆ ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในกลุ่มของมิติพื้นฐานอิสระที่เลือกใช้ในขั้นที่ 2 (สมมุติให้จำนวนมิติพื้นฐานอิสระที่ปรากฏเท่ากับ r)

ขั้นที่ 4 เลือกตัวแปรอิสระมาจำนวน r ตัวเพื่อใช้เป็นตัวแปรซ้ำ (Repeating variables) ตัวแปรซ้ำจะต้องไม่มีมิติสุทธิที่เหมือนกัน เช่น ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางมีมิติเป็น L และโมเมนต์

ความเฉื่อยของพื้นที่มีมิติเป็น L^4 เราจะใช้ตัวแปรทั้งสองนี้เป็นตัวแปรซ้ำพร้อมกันไม่ได้เนื่องจากมีมิติสุทธิคือ L เหมือนกัน โดยทั่วไปแล้วตัวแปรซ้ำที่เหมาะสมจะประกอบไปด้วย

1. ตัวแปรที่แสดงถึงรูปร่างของวัตถุ เช่น ขนาดสันผ่าศูนย์กลาง
2. ตัวแปรที่แสดงถึงลักษณะของสนามการไหล เช่น ความเร็ว
3. ตัวแปรที่แสดงถึงคุณสมบัติของของการไหล เช่น ความหนาแน่น ความหนืด

ขั้นที่ 5 เขียนเทอม Π จำนวน $n-m$ เทอม ($m=r$) โดยแต่ละเทอม Π จะประกอบไปด้วยตัวแปรซ้ำยกกำลังที่ไม่ทราบคูณกับตัวแปรอื่นหนึ่งตัว เมื่อแก้สมการของเลขยกกำลังของแต่ละเทอม Π ก็จะได้เทอม Π จำนวน $n-m$

ในบางกรณี จำนวนมิติพื้นฐานอิสระที่ปรากฏในขั้นที่ 3 จะไม่เท่ากันเมื่อ เลือกใช้กลุ่มของมิติพื้นฐานอิสระที่แตกต่างกัน ในกรณีเช่นนี้ ค่า m ที่ใช้จะเป็นค่าของ Rank ของเมตริกซ์มิติ

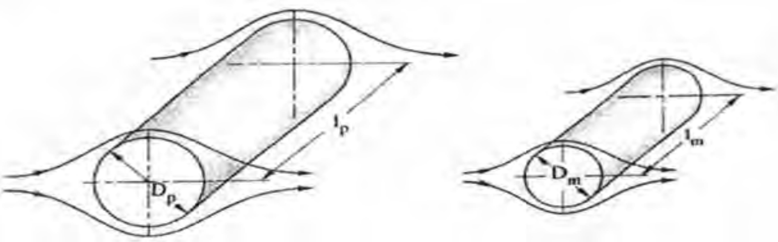
ขั้นที่ 6 ตรวจสอบมิติของเทอม Π ที่ได้โดยใช้กลุ่มของมิติพื้นฐานอิสระที่ไม่ได้เลือกใช้

4.3 **การวิเคราะห์สภาพความคล้าย** (Similitude analysis)

การวิเคราะห์สภาพความคล้ายโดยการสร้างแบบจำลอง และอาศัยผลการทดลองที่ได้นำมาคาดคะเนการทำงานจริงของต้นแบบ รวมทั้งผลกระทบในการออกแบบและสร้างต้นแบบดังกล่าว แบบจำลองที่สร้างขึ้นนั้นต้องมีความคล้ายกับต้นแบบ ความคล้ายที่กล่าวถึง ได้แก่ สภาพความคล้ายทางเรขาคณิต สภาพความคล้ายทางจลนศาสตร์ และสภาพความคล้ายทางพลศาสตร์โดยมีลายละเอียดังนี้

4.3.1 สภาพความคล้ายทางเรขาคณิต (Geometrical similitude)

เมื่อกล่าวถึงความคล้ายทางเรขาคณิต ระหว่างแบบจำลองและต้นแบบจะต้องมีรูปทรงเดียวกับต้นฉบับ โดยอัตราส่วนระหว่างขนาดความยาวของด้านที่สัมพันธ์กันของต้นแบบต่อแบบจำลองย่อมมีค่าเท่ากันแสมอในทุกๆด้าน ดังภาพ



รูปที่ 4.1 ความคล้ายคลึงทางเรขาคณิต (ซ้าย) ต้นแบบ และ (ขวา) แบบจำลอง [10]

พิจารณารูปที่ 4.1 ต้นแบบเป็นทรงกระบอกที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง D_P และ ยาว I_P สร้างแบบจำลองเป็นทรงกระบอกที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง D_m และยาว I_m ตามลำดับ ภายใต้ความคล้ายทางเรขาคณิตจึงเขียนได้

$$\frac{D_P}{D_m} = \frac{I_P}{I_m} = \lambda_1 \text{ (ค่าคงที่)} \tag{4.1}$$

และอัตราส่วนของพื้นที่ภาคตัดขวางของทรงกระบอกย่อมเท่ากัน

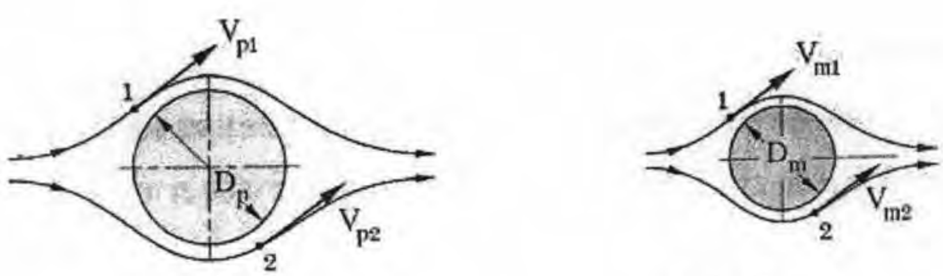
$$\frac{A_P}{A_m} = \frac{D_p^2}{D_m^2} = \lambda_2 \text{ (ค่าคงที่)} \tag{4.2}$$

4.3.2 สภาพความคล้ายทางจลนศาสตร์ (Kinematics similitude)

สำหรับสภาพความคล้ายทางจลนศาสตร์ จะยกตัวอย่างลักษณะสนามการไหล ของไหลที่ไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่มีความคล้ายทางเรขาคณิต จะเห็นว่าความคล้ายทางจลนศาสตร์นั้น การไหลระหว่างต้นแบบกับแบบจำลองจะต้องมีรูปแบบ เช่นเดียวกัน และมีเส้นกระแสการไหลที่คล้ายกันโดยกำหนดด้วยอัตราส่วนความเร็ว (V_p / V_m) และอัตราส่วนเร่ง (a_p / a_m) เป็นค่าคงตัวเสมอตลอดของสนามการไหล ดังนั้นจะได้สมการเช่นดังนี้

$$\frac{V_{P1}}{V_{m1}} = \frac{V_{P2}}{V_{m2}} = \lambda_3 \text{ (ค่าคงที่)} \tag{4.3}$$

$$\frac{a_{P1}}{a_{m1}} = \frac{a_{P2}}{a_{m2}} = \lambda_4 \text{ (ค่าคงที่)} \tag{4.4}$$

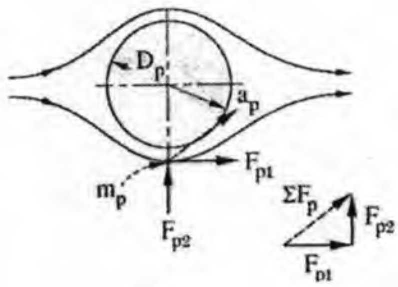


(ก) ต้นแบบ (ข) แบบจำลอง

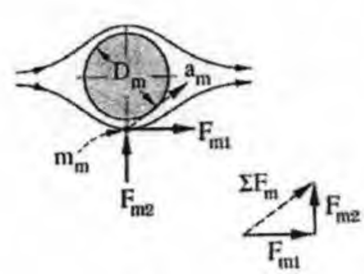
รูปที่ 4.2 ความคล้ายทางจลนศาสตร์ขณะของไหล ไหลท่วมทรงกระบอก [10]

4.3.3 สภาพความคล้ายทางพลศาสตร์ (Dynamic similitude)

ในส่วนของการพิจารณาสภาพความคล้ายทางพลศาสตร์จะขอยกตัวอย่าง การกระจายมวลอย่างสม่ำเสมอในสนามการไหล จากแบบจำลองจะพบว่ามีความคล้ายทางเรขาคณิตและความคล้ายทางจลนศาสตร์อยู่แล้ว ดังนั้นและย่อมมีผลให้มีความคล้ายทางพลศาสตร์ด้วย ซึ่งเรียกรวมว่า ความคล้ายอย่างสมบูรณ์ (Complete similarity) ภายใต้ความคล้ายอย่างสมบรูณ์ระหว่างต้นแบบ และแบบจำลองรูปที่ 4.3 พบว่าอัตราส่วนระหว่างแรงที่กระทำต่อต้นแบบกับแบบจำลองจะมีแรงกระทำเท่ากันเสมอ



(ก) ต้นแบบ



(ข) แบบจำลอง

รูปที่ 4.3 ความคล้ายทางพลศาสตร์ระหว่างต้นแบบและแบบจำลอง [10]

$$\frac{F_{P1}}{F_{m1}}=\frac{F_{P2}}{F_{m2}}=\frac{\sum F_P}{\Sigma F_m}=\frac{ma_P}{ma_m} \tag{4.5}$$

4.4 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของบังกิงแฮมพายกับพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 2 ล้อ

เป็นขั้นตอนที่นำทฤษฎีของบักกิงแฮมพายมาประยุกต์กับสมการแบบจำลองอย่างง่ายเพื่อหาสมการกลุ่มตัวแปรไร้มิติของสมการพลศาสตร์ โดยกลุ่มค่าพายที่ได้นี้จะเป็นกลุ่มตัวแปรไว้สำหรับเปรียบเทียบยานพาหนะแบบจริงแบบย่อส่วนกับยานพาหนะจริงต้นแบบ เพื่อพิสูจน์ว่ายานพาหนะทั้งสองคัน เมื่อขนาดเปลี่ยนไปยังคงส่งผลค่าข้อมูลและผลข้างเคียงเช่นเดิมอยู่ จากสมการในบทที่ 3 สามารถนำมาทำเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

$$\dot{v}=\frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mu}v+\left(\frac{2aC_{\alpha f}-2bC_{\alpha r}}{mu}-u\right)r-\frac{2C_{\alpha f}}{m}\delta_f \tag{4.6}$$

$$\dot{r}=\frac{2aC_{\alpha f}-2bC_{\alpha r}}{I_z u}v+\frac{2a^2C_{\alpha f}+2b^2C_{\alpha r}}{I_z u}r-\frac{2aC_{\alpha f}}{I_z}\delta_f \tag{4.7}$$

ขั้นที่ 1: ตัวแปรในปัญหาคือ $m, a, b, I_Z, C_{\alpha f}, C_{\alpha r}, U$ และ L

ดังนั้น $n = 8$

ขั้นที่ 2: เลือกกลุ่มมิติพื้นฐานอิสระ MLT [Mass, Length, Time]

ขั้นที่ 3:

ตัวแปร	m	a	b	I_Z	$C_{\alpha f}, C_{\alpha r}$	U	L
หน่วย	$\{kg\}$	$\{m\}$	$\{m\}$	$\{kgm^2\}$	$\{N/rad\}$	$\{m/s\}$	$\{m\}$
มิติ	$[M]$	$[L]$	$[L]$	$[ML^2]$	$[ML/T^2]$	$[L/T]$	$[L]$

ขั้นที่ 4: เลือก m U L เป็นตัวแปรซ้ำ

ขั้นที่ 5: จำนวนเทอม $\Pi = n - m = n - r = 8\text{-}3 = 5$

$$\Pi_1 = a \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = [L][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $a = 0$

สำหรับมิติ L : $1 + b + c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$

$$\therefore \quad \Pi_1 = \frac{a}{L} \tag{4.8}$$

$$\Pi_2 = b \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = [L][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $a = 0$

สำหรับมิติ L : $1 + b + c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$

$$\therefore \quad \Pi_2 = \frac{b}{L} \tag{4.9}$$

$$\Pi_3 = C_{\alpha f} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{ML}{T^2}\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0L^0T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $1+b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-2-b = 0$

จะได้ a=-1, b=-2, c=1

$$\therefore \quad \Pi_3 = \frac{C_{\alpha f}L}{MU^2} \tag{4.10}$$

$$\Pi_4 = C_{\alpha r} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{ML}{T^2}\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0L^0T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $1+b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-2-b = 0$

จะได้ a=-1, b=-2, c=1

$$\therefore \quad \Pi_4 = \frac{C_{\alpha r}L}{MU^2} \tag{4.11}$$

$$\Pi_5 = I_z \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[ML^2\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0L^0T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $2+b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ a=-1, b=0, c=-2

$$\therefore \quad \Pi_5 = \frac{I_z}{ML^2} \tag{4.12}$$

กลุ่มพายทั้งหมดที่ได้จากแบบจำลองการเคลื่อนที่ของพลศาสตร์ยานพาหนะ 2 ล้อได้ดังนี้

$$\Pi_1 = \frac{a}{L}, \Pi_2 = \frac{b}{L}, \Pi_3 = \frac{C_{\alpha f} L}{MU^2}, \Pi_4 = \frac{C_{\alpha r} L}{MU^2}, \Pi_5 = \frac{I_z}{ML^2} \tag{4.13}$$

4.5 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบังกิงแฮมพายกับสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ

เป็นการนำสมการพลศาสตร์ของยานพาหนะแบบ 4 ล้อ มาผ่านขบวนการจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติ เพื่อนำไปใช้เปรียบเทียบระหว่างยานพาหนะจริงแบบย่อส่วนกับยานพาหนะต้นแบบ โดยมีรายละเอียดขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1: จากสมการ (3.23-3.26) ในบทที่ 3 จะได้ตัวแปรที่เกี่ยวข้องทั้งหมดมีดังนี้

M	มีหน่วยเป็น	kg
M_W	มีหน่วยเป็น	kg
a	มีหน่วยเป็น	m
b	มีหน่วยเป็น	m
L	มีหน่วยเป็น	m
K_T	มีหน่วยเป็น	N/m หรือ kg/s^2
K_{sr}	มีหน่วยเป็น	N/m หรือ kg/s^2
K_{sf}	มีหน่วยเป็น	N/m หรือ kg/s^2
c_{sf}	มีหน่วยเป็น	$N/\frac{m}{s}$ หรือ kg/s
c_{sr}	มีหน่วยเป็น	$N/\frac{m}{s}$ หรือ kg/s
W	มีหน่วยเป็น	m
h	มีหน่วยเป็น	m
C_f	มีหน่วยเป็น	N/rad หรือ $kg \times m/s^2$
C_r	มีหน่วยเป็น	N/rad หรือ $kg \times m/s^2$
I_Z	มีหน่วยเป็น	$kg \times m^2$
I_Y	มีหน่วยเป็น	$kg \times m^2$

I_X มีหน่วยเป็น $kg \times m^2$

δ มีหน่วยเป็น rad

u มีหน่วยเป็น m/s

รวมตัวแปรทั้งหมดได้ n = 18

ขั้นที่ 2-4: วิธีการทำเช่นเดี่ยวกับหัวข้อ 4.4

ขั้นที่ 5: จำนวนเทอม Π = $n-m$ = $n-r$ = 18-3 = 15

โดยที่ $\Pi_1 - \Pi_5$ มีค่าเหมือนกับหัวข้อ 4.4 ในส่วนของกลุ่มพายที่เหลือทั้งหมด 10 กลุ่ม มีขั้นตอนการจัดเรียงดังนี้

$$\Pi_6 = M_W \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = [M][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : 1+ a = 0

สำหรับมิติ L : $b+c$ = 0

สำหรับมิติ T : -b = 0

จะได้ a =-1, b =0, c =0

$$\therefore \quad \Pi_6 = \frac{M_W}{M} \qquad (4.14)$$

$$\Pi_7 = K_T \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{M}{T^2}\right][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : 1+ a = 0

สำหรับมิติ L : $b+c$ = 0

สำหรับมิติ T : -2-b = 0

จะได้ a =-1, b =-2, c =2

$$\therefore \quad \Pi_7 = \frac{K_T L^2}{Mu^2} \qquad (4.15)$$

$$\Pi_8 = K_{sr} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{M}{T^2}\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-2-b = 0$

จะได้ a=-1, b=-2, c=2

$$\therefore \quad \Pi_8 = \frac{K_{sr}L^2}{Mu^2} \tag{4.16}$$

$$\Pi_9 = K_{sf} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{M}{T^2}\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-2-b = 0$

จะได้ a=-1, b=2, c=2

$$\therefore \quad \Pi_9 = \frac{K_{sf}L^2}{Mu^2} \tag{4.17}$$

$$\Pi_{10} = C_{sf} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{M}{T}\right][M]^a\left[\frac{L}{T}\right]^b[L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-1-b = 0$

จะได้ a=-1, b=-1, c=1

$$\therefore \quad \Pi_{10} = \frac{C_{sf}L}{Mu} \tag{4.18}$$

$$\Pi_{11} = C_{sr} \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[\frac{M}{T}\right][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1+a = 0$

สำหรับมิติ L : $b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-1-b = 0$

จะได้ a=-1, b=-1, c=1

$$\therefore \quad \Pi_{11} = \frac{C_{sr} L}{Mu} \tag{4.19}$$

$$\Pi_{12} = W \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = [L][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $a = 0$

สำหรับมิติ L : $1+b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ a=0, b=0, c=-1

$$\therefore \quad \Pi_{12} = \frac{W}{L} \tag{4.20}$$

$$\Pi_{13} = h \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = [L][M]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b [L]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $a = 0$

สำหรับมิติ L : $1+b+c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ a=0, b=0, c=-1

$$\therefore \quad \Pi_{12} = \frac{h}{L} \tag{4.21}$$

$$\Pi_{14} = I_y \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[ML^2\right]\left[M\right]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b \left[L\right]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1 + a = 0$

สำหรับมิติ L : $2 + b + c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ $a = -1$, $b = 0$, $c = -2$

$$\therefore \quad \Pi_{14} = \frac{I_y}{ML^2} \tag{4.22}$$

$$\Pi_{15} = I_x \cdot m^a \cdot U^b \cdot L^c = \left[ML^2\right]\left[M\right]^a \left[\frac{L}{T}\right]^b \left[L\right]^c$$

$$= M^0 L^0 T^0$$

สำหรับมิติ M : $1 + a = 0$

สำหรับมิติ L : $2 + b + c = 0$

สำหรับมิติ T : $-b = 0$

จะได้ $a = -1$, $b = 0$, $c = -2$

$$\therefore \quad \Pi_{15} = \frac{I_x}{ML^2} \tag{4.23}$$

กลุ่มพายทั้งหมดที่ได้จากแบบจำลองการเคลื่อนที่ของพลศาสตร์ยานพาหนะ 4 ล้อได้ดังนี้

$$\Pi_1 = \frac{a}{L},\ \Pi_2 = \frac{b}{L},\ \Pi_3 = \frac{C_f L}{Mu^2},\ \Pi_4 = \frac{C_r L}{Mu^2},\ \Pi_5 = \frac{I_Z}{ML^2},\ \Pi_6 = \frac{M_W}{M},\ \Pi_7 = \frac{K_T L^2}{Mu^2},$$

$$\Pi_8 = \frac{K_{sr} L^2}{Mu^2},\ \Pi_9 = \frac{K_{sf} L^2}{Mu^2},\ \Pi_{10} = \frac{c_{sf} L}{Mu},\ \Pi_{11} = \frac{c_{sr} L}{Mu},\ \Pi_{12} = \frac{W}{L},\ \Pi_{13} = \frac{h}{L},\ \Pi_{14} = \frac{I_Y}{ML^2},$$

$$\Pi_{15} = \frac{I_X}{ML^2} \tag{4.24}$$

จากการนำหลักการจัดกลุ่มตัวแปรไร้มิติไปประยุกต์ใช้กับสมการพลศาสตร์ยานพาหนะทั้งแบบ 2 และ 4 ล้อจนได้ค่ากลุ่มพายแล้ว สามารถที่จะนำค่ากลุ่มพายนี้ไปใช้ในการอ้างอิงในการออกแบบและสร้างยานพาหนะจริงแบบย่อส่วน ให้มีความคล้ายตามต้นแบบทั้ง 3 ด้านคือ

- ✓ สภาพความคล้ายทางเรขาคณิต (Geometrical similitude)
- ✓ สภาพความคล้ายทางจลนศาสตร์ (Kinematics similitude)
- ✓ สภาพความคล้ายทางพลศาสตร์ (Dynamic similitude)

โดยค่ากลุ่มพายสามารถบงบอกถึงความคล้ายกับยานพาหนะต้นแบบมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับสมการพลศาสตร์ยานพาหนะที่ใช้วิเคราะห์ในระบบ ดังที่เห็นได้จากสมการพลศาสตร์ยานพาหนะทั้งแบบ 2 และ 4 ล้อ เมื่อตัวแปรเพิ่มขึ้นก็จะส่งผลให้ได้รายละเอียดเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน