การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว

นางสาวพัชรีภรณ์   พรหมหมัด

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติ   ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี   จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-6805-2

PARAMETER ESTIMATION IN SIMPLE LINEAR REGRESSION

OF LONGITUDINAL DATA

Miss Phatchariphon Phrommat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Statistics

Department of Statistics

Faculty of Commerce and Accountancy

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-17-6805-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว

โดย นางสาวพัชรีภรณ์ พรหมหมัด

สาขาวิชา สถิติ

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ดนุชา คุณพนิชกิจ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ผกาวดี ศิริรังษี)

.... ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ธีระพร วีระถาวร)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์)

พัชรีภรณ์ พรหมหมัด : การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว (PARAMETER ESTIMATION IN SIMPLE LINEAR REGRESSION OF LONGITUDINAL DATA) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา ,123 หน้า ISBN 974-17-6805-2.

วัตถุประสงค์ของการศึกษาครั้งนี้เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น และวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด การเปรียบเทียบจะกระทำภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตตสหสัมพันธ์ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 ขนาดตัวอย่าง 20, 30, 40, 50 และ 60 ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3, 6 และ 12 คาบเวลา ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลด้วยโปรแกรม S-Plus 2000 และกระทำการทดลองซ้ำ ๆ กัน 500 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดเพื่อคำนวณหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยซึ่งผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

ที่อัตตสหสัมพันธ์ระดับต่ำ (0.1 ถึง 0.3) พบว่าวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในทุกขนาดตัวอย่าง และทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

ที่อัตตสหสัมพันธ์ระดับปานกลาง (0.4 ถึง 0.6) พบว่าโดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในทุกขนาดตัวอย่างและทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ <u>ยกเว้น</u> ที่อัตตสหสัมพันธ์ 0.6, ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา และขนาดตัวอย่าง 40 และ 50 วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

ที่อัตตสหสัมพันธ์ระดับสูง (0.7 ถึง 0.9) พบว่าโดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา ในทุกขนาดตัวอย่าง <u>ยกเว้น</u> ที่อัตตสหสัมพันธ์ 0.9, ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา และขนาดตัวอย่าง 30, 40, 50และ 60 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์ระดับสูง และทุกขนาดตัวอย่าง วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

เมื่อพิจารณาผลกระทบจากปัจจัยต่างๆพบว่าค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะแปรผันตามอัตตสหสัมพันธ์ แต่จะแปรผกผันกับขนาดตัวอย่างและระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ นั่นคือ การประมาณจะผิดพลาดมากขึ้นเมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีค่ามากขึ้นหรือขนาดตัวอย่างและระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำมีขนาดลดลงและพบว่าวิธีการประมาณค่าทั้งสองวิธีให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยไม่แตกต่างกันมากนักดังนั้นสามารถที่จะใช้วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นแทนวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดได้เพราะวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดนั้นจะมีข้อด้อยในกรณีที่เราไม่ทราบฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลแต่ในขณะที่วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นนั้นเราไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลก็สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้และวิธีการประมาณค่าสามารถทำได้สะดวกกว่าในทางปฏิบัติ

ภาควิชา ....สถิติ.......... ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา ....สถิติ.......... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา..........2547..........

4582306126 : MAJOR STATISTICS

KEYWORDS : LONGITUDINAL DATA / AUTOREGRESSIVE / TWO STAGE / MAXIMUM LIKELIHOOD

PHATCHARIPHON PHROMMAT : PARAMETER ESTIMATION IN SIMPLE LINEAR REGRESSION OF LONGITUDINAL DATA. THESIS ADVISOR : ASSOCIATE PROFESSOR. SUPOL DURONGWATTANA Ph.D. , 123 pp. ISBN 974-17-6805-2.

The objective of this study is to compare the value of the parameter in simple linear regression of longitudinal data when errors follow a first-order autoregressive process ,with the Two - Stage Estimation (TS) and Maximum Likelihood Estimation (MLE). The study is compared under the terms of the value of autoregressive of 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 and 0.9 with the sample sizes of 20, 30, 40, 50 and 60. The periods of data collection for replicate are 3, 6 and 12. The data are simulated by Monte Carlo technique with S-Plus 2000 program and repeated 500 times for each situation to calculate for Root Mean Square Error (RMSE).

The conclusions of this study are as follows :

In the case of low autoregressive level (0.1 to 0.3) the Maximum Likelihood estimator , set RMSE to the minimum in all sample size and all periods of data collection for replicate.

In the case of medium autoregressive level (0.4 to 0.6) majority the Maximum Likelihood estimator , set RMSE to the minimum in all sample size and all periods of data collection for replicate <u>except</u> at autoregressive are 0.6, periods of data collection for replicate are 12 and sample size are 40 and 50 the Two - Stage estimator set RMSE to the minimum.

In the case of high autoregressive level (0.7 to 0.9) majority the Maximum Likelihood estimator , set RMSE to the minimum at periods of data collection for replicate are 3 and 6 in all sample size <u>except</u> at autoregressive are 0.9, the periods of data collection for replicate are 6 and sample size are 30, 40, 50 and 60 and the periods of data collection for replicate are 12 in all high autoregressive level and all sample size the Two - Stage estimator set RMSE to the minimum.

When considering factor effecting ,it is found that the RMSE directly the autoregressive but inversely effects by sample size and periods of data collection for replicate. This means that the errors from estimation are higher when the autoregressive increasing or sample size and periods of data collection for replicate decreasing. Maximum Likelihood estimator and Two - Stage estimator are not different in RMSE. Therefore, we can use Two - Stage estimation instead of Maximum Likelihood estimation. As the latter approach requires probability density function but the first approach does not. In practical, it is convenient to use Two – Stage estimation rather than Maximum Likelihood estimation.

Department ....Statistics.......... Student's signature ....

Field of study ....Statistics.......... Advisor's signature..........

Academic year ....2004..........

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยดีตลอดมา จนวิทยานิพนธ์นี้เสร็จสมบูรณ์ จึงใคร่ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ผกาวดี ศิริรังษี ในฐานะประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร. ธีระพร วีระถาวร และอาจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่กรุณาตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ประจำภาควิชาสถิติที่ให้โอกาสทางการศึกษาและประสิทธิประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียนจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณกำลังใจอย่างดียิ่งจาก บิดา มารดา พร้อมทั้งเพื่อน ๆ ทั้งหลายที่มีให้จนกระทั่งสำเร็จการศึกษา นอกจากนี้ยังได้รับการสนับสนุนจากทุนอุดหนุนการวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัย จึงขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันนี้การวิจัยมีบทบาทที่สำคัญมาก ซึ่งหลายองค์กรมีการใช้การวิจัยเพื่อนำผลจากการวิจัยไปใช้ในการพัฒนาให้องค์กรมีการเจริญเติบโตไปอย่างก้าวไกล เช่น ทางด้านการแพทย์ การเกษตร การศึกษา โดยจะต้องมีการวางแผนและการตัดสินใจที่ถูกต้องและทันต่อเหตุการณ์ที่เปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา และกระบวนการอย่างหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในการวางแผนและการตัดสินใจ คือ การนำกระบวนการทางสถิติเพื่อการพยากรณ์มาใช้ เนื่องจากวิธีการทางสถิติสามารถชี้ให้เห็นแนวโน้ม ซึ่งสามารถคาดคะเนเหตุการณ์ในอนาคตเพื่อใช้ในการวางแผนและการตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น พยากรณ์ผลการตอบสนองของคนไข้ต่อยาที่ให้ไปเพื่อการวางแผนในการรักษา พยากรณ์การเจริญเติบโตของสัตว์ต่อปริมาณอาหารที่ให้ไปเพื่อการวางแผนทางการตลาดหรือการผลิตเพื่อให้เพียงพอต่อความต้องการของลูกค้า

เทคนิคการพยากรณ์ประกอบไปด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือการสร้างสมการพยากรณ์ ในขั้นนี้การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการพยากรณ์มีความสำคัญมาก เพราะจะส่งผลต่อความถูกต้องของค่าพยากรณ์ที่จะนำไปใช้ในอนาคตดังนั้นการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างมาก โดยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์มีอยู่หลายวิธี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลที่ต้องการวิเคราะห์และข้อตกลงเบื้องต้นของแต่ละวิธีที่ใช้ด้วย และส่วนที่สองคือการนำสมการพยากรณ์ที่ได้จากส่วนแรกนั้นไปใช้ในการพยากรณ์

จำนวนข้อมูลถือว่ามีความสำคัญมากในการหาค่าพยากรณ์เพราะยิ่งมีข้อมูลมากก็จะยิ่งมีโอกาสที่จะวางแผนและตัดสินใจได้แม่นยำมากขึ้นด้วย ทำให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อองค์กรนั้นๆ ในความเป็นจริงแล้วข้อมูลทางด้านการแพทย์ การเกษตร การศึกษา ต้องใช้ระยะเวลานานในการศึกษา ดังนั้นจึงมีการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม (Repeated Measure) โดยข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมในลักษณะนี้ เรียกว่า ข้อมูลระยะยาว (Longitudinal data) เนื่องจากเป็นการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม ข้อมูลที่ได้มานั้นจะได้รับปัจจัยใดปัจจัยหนึ่งตลอดช่วงระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูล และมักจะพบว่าข้อมูลปัจจุบันจะมีความสัมพันธ์กับข้อมูลในอดีตที่มีระยะเวลาใกล้กันมากกว่าข้อมูลที่มีระยะเวลาไกลออกไป ดังนั้นการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิมจึงทำให้เกิดปัญหาความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์ต่อกัน โดยเรียกสถานการณ์แบบนี้ว่า

อัตตสหสัมพันธ์ (Autoregressive) และรูปแบบที่พบโดยทั่วไปในอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนของข้อมูลคือ อัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Autoregressive : AR(1))

เทคนิคการวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) เป็นเทคนิคหนึ่งของการพยากรณ์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยเทคนิคนี้จะพิจารณาตัวแปรอิสระที่มีผลกระทบหรือมีอิทธิพลต่อตัวแปรตามที่เราต้องการศึกษาอยู่ซึ่งตัวแปรอิสระนั้นอาจมีเพียงตัวเดียว การวิเคราะห์ในลักษณะนี้เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย (Simple Regression Analysis) แต่ในบางกรณีตัวแปรอิสระที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรตามที่ต้องการศึกษานั้นอาจมีตั้งแต่สองตัวขึ้นไป การวิเคราะห์ในลักษณะนี้เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ (Multiple Regression Analysis)

ในการวิจัยครั้งนี้ จะนำเทคนิคการวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Equation) มาใช้ในการพยากรณ์ ซึ่งมีรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$y_{i(t)} = \alpha_i + \beta_0 + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)} \qquad i = 1,2,...,n \;\; ; \;\; t = 1,2,..., p$$

หรือ

$$y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)}$$

โดยที่ $\gamma_i = \alpha_i + \beta_0$

เมื่อ

$y_{i(t)}$ คือ ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ของหน่วยทดลองที่ i ที่ระยะเวลาที่ t ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

$x_{i(t)}$ คือ ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) แบบคงที่ (Fixed) ของหน่วยทดลองที่ i ที่ระยะเวลาที่ t

α_i คือ ผลกระทบจากหน่วยทดลอง (Individual Effect) ที่ i ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและกำหนดให้เป็นปัจจัยคงที่ (Fixed Effect)

β_0, β_1 คือ พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Unknown Parameter)

$\varepsilon_{i(t)}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random Error)

n คือ ขนาดตัวอย่าง (Sample Size)

p คือ ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (Period)

โดยปกติการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น ผู้วิจัยมักจะเลือกใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (Ordinary Least Square method : OLS) ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator : BLUE) ซึ่งก็คือมีความแปรปรวนต่ำสุดแต่ทั้งนี้ต้องอยู่ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อน ดังนี้

1. $\varepsilon_{i(t)}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 หรือ $E\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = 0$
2. $\varepsilon_{i(t)}$ มีความแปรปรวนคงที่เป็น σ_{ε}^{2} หรือ $Var\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$
3. $\varepsilon_{i(t)}$ และ $\varepsilon_{j(t)}$ เป็นอิสระต่อกันหรือ $Cov\left(\varepsilon_{i(t)}, \varepsilon_{j(t)}\right) = 0$ เมื่อ $i \neq j$

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติบ่อยครั้งที่พบว่าข้อมูลที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์นั้นไม่เป็นไปตามข้อตกลงดังกล่าว ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษากรณีที่ข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงดังกล่าว กล่าวคือ ความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์กันขึ้นตามที่กล่าวมาแล้วในตอนต้น ซึ่งในสถานการณ์นี้ถ้าผู้วิจัยยังคงใช้การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดจะได้ตัวประมาณที่ไม่ดี คือมีความแปรปรวนที่สูงกว่าปกติ ถึงแม้จะยังคงเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงก็ตาม

ถึงแม้ว่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่นำมาใช้จะไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น แต่เนื่องจากวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุดเป็นการประมาณค่าที่ได้ตัวประมาณที่ดีในระดับหนึ่ง ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาตัวประมาณตัวใหม่ขึ้นมา โดยที่มีพื้นฐานการประมาณมาจากการประมาณค่ากำลังสองน้อยสุด นั่นคือ การประมาณค่าแบบสองขั้น (Two - Stage Estimation) นอกจากนี้ผู้วิจัยได้นำวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) มาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย ทั้งนี้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองวิธีนี้จะนำมาพิจารณาเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Error : RMSE) เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธีต่อไปนี้ สำหรับสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

1. การประมาณค่าแบบสองขั้น (Two - Stage Estimation : TS)
2. การประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด(Maximum Likelihood Estimation : MLE)

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

ภายใต้สถานการณ์เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) ต่ำกว่าวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาภายใต้ลักษณะการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบปกติ
   1.1 $u_{i(t)}$ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_u^2 เมื่อ $u_{i(t)}$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง
   1.2 $\varepsilon_{i(t)}$ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเท่ากับ Σ เมื่อ $\varepsilon_{i(t)}$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย
2. ศึกษาเมื่อค่าสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ (ρ) เท่ากับ 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 , 0.9
3. ศึกษาเมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 , 30 , 40 , 50 , 60
4. ศึกษาเมื่อระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (p) เท่ากับ 3 , 6 และ 12 คาบเวลา
5. การวิจัยครั้งนี้จำลองข้อมูลขึ้นตามสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา โดยใช้เทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation Technique) จากเครื่องคอมพิวเตอร์โดยใช้โปรแกรม S-Plus 2000 ทำการจำลองซ้ำกันจำนวน 500 รอบในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

1.5 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษารูปแบบสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Equation) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{i(t)} = \alpha_i + \beta_0 + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)} \qquad i = 1,2,\ldots,n \;\; ; \;\; t = 1,2,\ldots,p$$

หรือ
$$y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)}$$

โดยที่ $\gamma_i = \alpha_i + \beta_0$

เมื่อ

$y_{i(t)}$ คือ ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ของหน่วยทดลองที่ i ระยะเวลาที่ t ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

$x_{i(t)}$ คือ ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) แบบคงที่ (Fixed) ของหน่วยทดลองที่ i ระยะเวลาที่ t

α_i คือ ผลกระทบจากหน่วยทดลอง (Individual Effect) ที่ i ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและกำหนดให้เป็นปัจจัยคงที่ (Fixed Effect)

β_0, β_1 คือ พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Unknown Parameter)

$\varepsilon_{i(t)}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random Error)

n คือ ขนาดตัวอย่าง (Sample Size)

p คือ ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (Period)

2. ค่าความคลาดเคลื่อน $\left(\varepsilon_{i(t)}\right)$ เกิดอัตตสหสัมพันธ์กัน โดยกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Autoregressive : AR(1)) ดังนี้

$$\varepsilon_{i(t)} = \rho\varepsilon_{i(t-1)} + u_{i(t)} \qquad i = 1,2,\ldots,n \;;\; t = 1,2,\ldots,p$$

เมื่อ ρ คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon_{i(t)}$ กับ $\varepsilon_{i(t-1)}$ โดยที่ $|\rho| < 1$ และข้อตกลงเบื้องต้นของ $u_{i(t)}$ คือ

$$E\left(u_{i(t)}\right) = 0$$

$$Var\left(u_{i(t)}\right) = \sigma_u^2$$

$$Cov\left(u_{i(t)}, u_{j(t)}\right) = E\left(u_{i(t)}u_{j(t)}\right) = 0 \quad , \quad i \neq j$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$E\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = 0$$

$$Var\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov\left(\varepsilon_{i(t)}, \varepsilon_{i(t-r)}\right) = \rho^r\sigma_\varepsilon^2 \quad ; \quad i \neq j \;;\; r > 0$$

3. $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$; $\underset{\sim}{\varepsilon}$ มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็น AR(1) โดยที่ให้

$\underset{\sim}{y_i} = \left(y_{i(1)}, y_{i(2)}, \ldots, y_{i(p)}\right)'$; $i = 1,2,\ldots,n$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร

(Multivariate Normal Distribution) มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเท่ากับ

$X_i\underset{\sim}{\beta} = \left(X_{i(1)}\underset{\sim}{\beta}, X_{i(2)}\underset{\sim}{\beta}, \ldots, X_{i(p)}\underset{\sim}{\beta}\right)'$ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเท่ากับ Σ

จาก $Cov\left(\underset{\sim}{y}\right) = Cov\left(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}\right)$

$$= Cov\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} V \quad = \Sigma$$

$$E\left(\underset{\sim}{y}\right) = E\left(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}\right)$$

$$= X\underset{\sim}{\beta} \qquad \because \quad E\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \underset{\sim}{0}$$

4. ตัวแปรอิสระที่ใช้เป็นแบบคงที่ซึ่งหมายความว่าในแต่ละสถานการณ์จะใช้ชุดข้อมูลตัวแปรอิสระชุดเดียวกัน แต่ค่าสังเกตของตัวแปรอิสระในแต่ละค่า $\left(x_{i(t)}\right)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากันเพราะเป็นข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์การถดถอย เช่น น้ำหนักหรือส่วนสูงซึ่งเราจะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาเปลี่ยนไปค่าของน้ำหนักหรือส่วนสูงก็จะเปลี่ยนไปด้วยและข้อมูลไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกัน โดยที่มีความชันเท่ากันหรือขนานกันเท่ากับ β_1
5. ภายในหน่วยตัวอย่างเดียวกันข้อมูลมีความสัมพันธ์กันแต่ระหว่างหน่วยตัวอย่างข้อมูลเป็นอิสระกัน
6. α_i กำหนดให้เป็นปัจจัยคงที่(Fixed Effect)และเป็นอิสระกันในแต่ละหน่วยทดลองที่ i
7. ข้อมูลมีการวัดซ้ำด้วยระยะห่างของเวลาเท่ากัน

1.6 เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ

ในการวิจัยนี้จะพิจารณาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Error : RMSE) ซึ่งมีสูตรการคำนวณดังนี้

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{500}\sum_{t=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{itk} - \hat{y}_{itk}\right)^2}{500(n)(p)}}$$

$$i = 1,2,\ldots,n \;;\; t = 1,2,\ldots,p \;;\; k = 1,2,\ldots,500$$

เมื่อ

y_{itk} คือ ค่าของข้อมูลจริง ณ หน่วยทดลองที่ i คาบเวลาที่ t รอบที่ k

$\hat{y}_{itk}$ คือ ค่าพยากรณ์ ณ หน่วยทดลองที่ i คาบเวลาที่ t รอบที่ k

p คือ ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

n คือ ขนาดตัวอย่าง

โดยที่วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ให้ค่า RMSE ต่ำกว่าจะเป็นวิธีการประมาณค่าที่ดีกว่า

1.7 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

1. สร้างค่าความคลาดเคลื่อน $\left(\varepsilon_{i(t)}\right)$ ที่เกิดอัตตสหสัมพันธ์กันโดยกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์เป็น AR(1)
2. สร้างข้อมูลตัวแปรอิสระเป็นแบบคงที่โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลตามขนาดตัวอย่างและระยะเวลาที่กำหนด
3. สร้างข้อมูลตัวแปรตามจากตัวแปรอิสระและค่าความคลาดเคลื่อนจากตัวแบบที่กำหนดคือ $y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)}$
4. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ γ_i , β_1 ต่าง ๆ ตามที่กำหนดในขอบเขตการวิจัยในแต่ละวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี
5. คำนวณค่าพยากรณ์ $\left(\hat{y}_{i(t)}\right)$ ในแต่ละวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี
6. คำนวณค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) ของแต่ละวิธี
7. เปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละวิธี
8. สรุปผลการวิจัยในแต่ละสถานการณ์

1.8 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. ข้อมูลระยะยาว (Longitudinal data) คือ ข้อมูลที่มีการเก็บรวบรวมจากหน่วยทดลองเดิมมากกว่า 1 ครั้งขึ้นไป ในช่วงเวลาที่ต่างกัน
2. อัตตสหสัมพันธ์ (Autoregressive) คือ เหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่ม $\varepsilon_{i(t)}$ มีความสัมพันธ์ต่อกัน กล่าวคือ $Cov\left(\varepsilon_{i(t)}, \varepsilon_{j(t)}\right) \neq 0$ เมื่อ $i \neq j$
3. ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Error : RMSE) คือ ค่าที่แสดงว่าค่าต่าง ๆ ที่ได้จากการพยากรณ์แตกต่างจากค่าจริงเพียงใด โดยจะพิจารณาในรูปค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าแตกต่างระหว่างค่าพยากรณ์ $\hat{y}_{i(t)}$ และค่าจริง $y_{i(t)}$

1.9 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นข้อมูลระยะยาว
2. เพื่อใช้เป็นแนวทางให้ผู้วิจัยสามารถเลือกใช้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์อื่นๆที่จะนำไปใช้ในการสร้างสมการพยากรณ์ได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพเพื่อให้ได้ค่าพยากรณ์ที่มีความถูกต้องมากที่สุด เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง
3. เพื่อใช้เป็นแนวทางในการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่นำไปใช้ในการสร้างสมการพยากรณ์ เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์ในรูปแบบอื่น ๆ ต่อไป

บทที่ 2

ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบสองขั้น และการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดโดยในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติทั่วไปของความคลาดเคลื่อนและรายละเอียดของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แต่ละวิธีเป็นลำดับต่อไป

2.1 ตัวแบบที่ศึกษา

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษารูปแบบสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Equation) ซึ่งมีตัวแบบ (Model) ดังนี้

$$y_{i(t)} = \alpha_i + \beta_0 + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)} \qquad i = 1,2,...,n \quad ; \quad t = 1,2,..., p$$

หรือ $$y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)}$$

โดยที่ $\gamma_i = \alpha_i + \beta_0$

เมื่อ

$y_{i(t)}$ คือ ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ของหน่วยทดลองที่ i ระยะเวลาที่ t ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

$x_{i(t)}$ คือ ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) แบบคงที่ (Fixed) ของหน่วยทดลองที่ i ระยะเวลาที่ t

α_i คือ ผลกระทบจากหน่วยทดลอง (Individual Effect) ที่ i ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและกำหนดให้เป็นปัจจัยคงที่ (Fixed Effect)

β_0, β_1 คือ พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Unknown Parameter)

$\varepsilon_{i(t)}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random Error)

n คือ ขนาดตัวอย่าง (Sample Size)

p คือ ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (Period)

2.2 คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

การวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษาลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ดังนี้

$$\varepsilon_{i(t)} = \rho\varepsilon_{i(t-1)} + u_{i(t)} \qquad i = 1,2,\ldots,n \;;\; t = 1,2,\ldots,p$$

เมื่อ ρ คือ สัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon_{i(t)}$ กับ $\varepsilon_{i(t-1)}$ โดยที่ $|\rho| < 1$

$u_{i(t)}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่งที่มีข้อตกลงเบื้องต้นว่ามีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_u^2 และไม่เกิดอัตตสหสัมพันธ์ต่อกันหรือความแปรปรวนร่วมเป็น 0

พิจารณา

$$\varepsilon_{i(t)} = \rho\varepsilon_{i(t-1)} + u_{i(t)}$$
$$\varepsilon_{i(t-1)} = \rho\varepsilon_{i(t-2)} + u_{i(t-1)}$$
$$\varepsilon_{i(t-2)} = \rho\varepsilon_{i(t-3)} + u_{i(t-2)}$$
$$\vdots$$

แทนค่า

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i(t)} &= \rho\left(\rho\varepsilon_{i(t-2)} + u_{i(t-1)}\right) + u_{i(t)} \\
&= \rho^2\varepsilon_{i(t-2)} + \rho u_{i(t-1)} + u_{i(t)} \\
&= \rho^2\left(\rho\varepsilon_{i(t-3)} + u_{i(t-2)}\right) + \rho u_{i(t-1)} + u_{i(t)} \\
&= \rho^3\varepsilon_{i(t-3)} + \rho^2 u_{i(t-2)} + \rho u_{i(t-1)} + u_{i(t)} \\
&\vdots \\
\varepsilon_{i(t)} &= u_{i(t)} + \rho u_{i(t-1)} + \rho^2 u_{i(t-2)} + \rho^3 u_{i(t-3)} + \ldots \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{i(t-s)}
\end{aligned}$$

<u>ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน (Expected Value)</u>

$$E\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = E\left(u_{i(t)}\right) + \rho E\left(u_{i(t-1)}\right) + \rho^2 E\left(u_{i(t-2)}\right) + \ldots = 0$$

เพราะว่า $E\left(u_{i(t)}\right) = 0 \;;\; t = 1,2,\ldots,p$

<u>ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (Variance)</u>

$$Var(\varepsilon_{i(t)}) = E(\varepsilon_{i(t)} - E(\varepsilon_{i(t)}))^2$$

$$= E(\varepsilon_{i(t)}^2) - [E(\varepsilon_{i(t)})]^2$$

$$E(\varepsilon_{i(t)}^2) = E\left[(u_{i(t)} + \rho u_{i(t-1)} + \rho^2 u_{i(t-2)} + \rho^3 u_{i(t-3)} + \ldots)^2\right]$$

$$= E\left[(u_{i(t)}^2 + \rho^2 u_{i(t-1)}^2 + \rho^4 u_{i(t-2)}^2 + \ldots) + \right.$$

$$(2\rho u_{i(t)} u_{i(t-1)} + 2\rho^2 u_{i(t)} u_{i(t-2)} + 2\rho^3 u_{i(t)} u_{i(t-3)} + \ldots) +$$

$$\left.(2\rho^3 u_{i(t-1)} u_{i(t-2)} + 2\rho^4 u_{i(t-1)} u_{i(t-3)} + \ldots) + \ldots\right]$$

$$= (\sigma_u^2 + \rho^2 \sigma_u^2 + \rho^4 \sigma_u^2 + \ldots) + (0 + 0 + \ldots) + (0 + 0 + \ldots) + \ldots$$

เพราะว่า $u_{i(t)} \sim N(0, \sigma_u^2)$ และไม่เกิดอัตตสหสัมพันธ์ต่อกัน จะได้ว่า

$$Cov(u_{i(t)}, u_{i(t-r)}) = 0 \quad ; t \neq r \; ; t = 1, 2, \ldots, p$$

ดังนั้น $Cov(u_{i(t)}, u_{i(t-r)}) = E(u_{i(t)} u_{i(t-r)}) - E(u_{i(t)}) E(u_{i(t-r)})$

$$= E(u_{i(t)} u_{i(t-r)}) = 0$$

และจาก $Var(u_{i(t)}) = \sigma_u^2$

$$= E(u_{i(t)}^2) - [E(u_{i(t)})]^2$$

$$= E(u_{i(t)}^2) = \sigma_u^2$$

$$\therefore \quad E(\varepsilon_{i(t)}^2) = \sigma_u^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \ldots)$$

$$= \sigma_u^2 \frac{1}{1 - \rho^2}$$

ดังนั้น $Var(\varepsilon_{i(t)}) = \sigma_u^2 \dfrac{1}{1-\rho^2} = \sigma_\varepsilon^2$

เพราะว่า $E(\varepsilon_{i(t)}) = 0$

<u>ค่าความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน (Covariance)</u>

จาก $Cov\left(\varepsilon_{i(t)},\varepsilon_{i(t-r)}\right) = E\left(\varepsilon_{i(t)}\varepsilon_{i(t-r)}\right) - E\left(\varepsilon_{i(t)}\right)E\left(\varepsilon_{i(t-r)}\right) \quad ;\ t \neq r\ ;\ t = 1,2,\ldots,p$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\varepsilon_{i(t)},\varepsilon_{i(t-1)}\right) &= E\left(\varepsilon_{i(t)}\varepsilon_{i(t-1)}\right) \quad \text{เพราะว่า } E\left(\varepsilon_{i(t)}\right) = 0 \\
&= E\left[\left(u_{i(t)} + \rho u_{i(t-1)} + \rho^2 u_{i(t-2)} + \ldots\right)\left(u_{i(t-1)} + \rho u_{i(t-2)} + \rho^2 u_{i(t-3)} + \ldots\right)\right] \\
&= E\big(u_{i(t)}u_{i(t-1)} + \rho u_{i(t)}u_{i(t-2)} + \rho^2 u_{i(t)}u_{i(t-3)} + \ldots \\
&\qquad + \rho u_{i(t-1)}^2 + \rho^2 u_{i(t-1)}u_{i(t-2)} + \rho^3 u_{i(t-1)}u_{i(t-3)} + \ldots \\
&\qquad + \rho^2 u_{i(t-1)}u_{i(t-2)} + \rho^3 u_{i(t-2)}^2 + \rho^4 u_{i(t-2)}u_{i(t-3)} + \ldots \\
&\qquad + \rho^3 u_{i(t-1)}u_{i(t-3)} + \rho^4 u_{i(t-2)}u_{i(t-3)} + \rho^5 u_{i(t-3)}^2 + \ldots\big) \\
&= E\left(\rho u_{i(t-1)}^2 + \rho^3 u_{i(t-2)}^2 + \rho^5 u_{i(t-3)}^2 + \ldots\right) \\
&= \rho E\left(u_{i(t-1)}^2\right) + \rho^3 E\left(u_{i(t-2)}^2\right) + \rho^5 E\left(u_{i(t-3)}^2\right) + \ldots \\
&= \rho\sigma_u^2 + \rho^3\sigma_u^2 + \rho^5\sigma_u^2 + \ldots \\
&= \sigma_u^2\rho\left(1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots\right) \\
&= \rho\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \\
&= \rho\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\varepsilon_{i(t)},\varepsilon_{i(t-2)}\right) &= E\left(\varepsilon_{i(t)}\varepsilon_{i(t-2)}\right) \\
&= E\left[\left(u_{i(t)} + \rho u_{i(t-1)} + \rho^2 u_{i(t-2)} + \ldots\right)\left(u_{i(t-2)} + \rho u_{i(t-3)} + \rho^2 u_{i(t-4)} + \ldots\right)\right] \\
&= E\big(u_{i(t)}u_{i(t-2)} + \rho u_{i(t)}u_{i(t-3)} + \rho^2 u_{i(t)}u_{i(t-4)} + \ldots \\
&\qquad + \rho u_{i(t-1)}u_{i(t-2)} + \rho^2 u_{i(t-1)}u_{i(t-3)} + \rho^3 u_{i(t-1)}u_{i(t-4)} + \ldots \\
&\qquad + \rho^2 u_{i(t-2)}^2 + \rho^3 u_{i(t-2)}u_{i(t-3)} + \ldots + \rho^3 u_{i(t-2)}u_{i(t-3)} + \rho^4 u_{i(t-3)}^2 + \ldots\big) \\
&= E\left(\rho^2 u_{i(t-2)}^2 + \rho^4 u_{i(t-3)}^2 + \rho^6 u_{i(t-4)}^2 + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sigma_u^2 \rho^2 \left(1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots\right)$$

$$= \sigma_u^2 \rho^2 \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$= \rho^2 \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

$$= \rho^2 \sigma_\varepsilon^2$$

ดังนั้น รูปทั่วไปของความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนเมื่อ $r > 0$ คือ

$$Cov\left(\varepsilon_{i(t)}, \varepsilon_{i(t-r)}\right) = \rho^r \sigma_\varepsilon^2$$

จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix) ของความคลาดเคลื่อนเมื่อ $n \to \infty$ คือ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Sigma_n \end{bmatrix}$$

เมื่อ $$\Sigma_i = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \ldots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{p-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{p-3} \\ & & \vdots & & & \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \rho^{p-3} & \rho^{p-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 V_i \quad ; \; i = 1,2,\ldots,n$$

$$\therefore \quad \Sigma = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V_n \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 V$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & V_3^{-1} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V_n^{-1} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $$V_i^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad ; \; i = 1,2,\dots,n$$

หรือสามารถหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมได้ตามสูตรดังนี้

$$\Sigma_{tt'} = \sigma_u^2 \rho^{|t-t'|} \sum_{l=0}^{L-1} \rho^{2l} \qquad ; \quad t,t' = 1,2,\dots,p$$

เมื่อ

$L = \min(t,t')$

$u_{i(t)}$ มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_u^2

<u>สมมติ</u> ให้ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลาจะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมดังนี้

$$\Sigma = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1+\rho^2 & \rho(1+\rho^2) \\ \rho^2 & \rho(1+\rho^2) & 1+\rho^2+\rho^4 \end{bmatrix}$$

2.3 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบสองขั้น และการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1) การประมาณค่าแบบสองขั้น (Two – Stage Estimation)

การประมาณค่าแบบสองขั้นเป็นการประมาณค่าที่พัฒนามาจากการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (OLS) และเนื่องจากในการวิจัยครั้งนี้ความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ซึ่งมีพารามิเตอร์ ρ ที่ไม่ทราบค่า ดังนั้นจึงต้องทำการประมาณค่า $\hat{\rho}$ ก่อนโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด แล้วจึงทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}$ ต่อไป ซึ่งมีขั้นตอนและวิธีการดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u>

จากสมการถดถอย

$$y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)}$$

เราสามารถเขียนสมการในรูปเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad ; \ \underset{\sim}{\varepsilon} \text{ มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็น AR(1)}$$

โดยที่

$$X = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \cdots & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{x}_{1(t)} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \cdots & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{x}_{2(t)} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{1} & \cdots & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{x}_{3(t)} \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \cdots & \underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{x}_{n(t)} \end{bmatrix} ; \ \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_{1(t)} \\ \underset{\sim}{y}_{2(t)} \\ \underset{\sim}{y}_{3(t)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n(t)} \end{bmatrix} ; \ \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{1(t)} \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{2(t)} \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{3(t)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{n(t)} \end{bmatrix} ; \ \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$\underset{\sim}{x}_{i(t)}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอิสระที่หน่วยตัวอย่างที่ i ระยะเวลาที่ t ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $p \times 1$

X คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระซึ่งมีขนาดเท่ากับ $np \times (n+1)$

$\underset{\sim}{y}_{i(t)}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรตามที่หน่วยตัวอย่างที่ i ระยะเวลาที่ t ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $p \times 1$

$\underset{\sim}{y}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรตามซึ่งมีขนาดเท่ากับ $np \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}_{i(t)}$ คือ เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนสุ่มที่หน่วยตัวอย่างที่ i ระยะเวลาที่ t ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $p \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนสุ่มซึ่งมีขนาดเท่ากับ $np \times 1$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $(n+1) \times 1$

จาก AR(1) ; $\hat{\varepsilon}_{i(t)} = \rho\hat{\varepsilon}_{i(t-1)} + u_{i(t)}$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ ρ จากวิธี OLS ได้ $\hat{\rho}$ ดังนี้

$$\hat{\rho} = \left(\hat{\varepsilon}'_{i(t-1)}\,\hat{\varepsilon}_{i(t-1)}\right)^{-1}\left(\hat{\varepsilon}'_{i(t-1)}\,\hat{\varepsilon}_{i(t)}\right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{p}\hat{\varepsilon}'_{i(t-1)}\,\hat{\varepsilon}_{i(t)}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{p}\hat{\varepsilon}^2_{i(t-1)}}$$

เมื่อ $\hat{\varepsilon}_{i(t)} = y_{i(t)} - \hat{\gamma}_i - \hat{\beta}_1 x_{i(t)}$

$\hat{\gamma}_i$, $\hat{\beta}_1$ คือ ค่าประมาณของ γ_i , β_1 ที่ได้จากวิธี OLS ; $i = 1,2,\ldots,n$

โดยที่ ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ จากวิธี OLS คือ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \left(X'X\right)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$

เมื่อ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \left(\hat{\gamma}_i\ ,\ \hat{\beta}_1\right)'$

<u>ขั้นที่ 2</u>

นำค่า $\hat{\rho}$ ไปแทนใน V_i^{-1} ได้ดังนี้

$$\hat{V}_i^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\rho}^2}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho} & 0 & \ldots & 0 \\ -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & -\hat{\rho} & \ldots & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

จาก $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ และ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็น AR(1) ที่มี $Cov\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \Sigma = \sigma_{\varepsilon}^{\ 2}V$ ในการหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดมีข้อตกลงเบื้องต้นว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนต้องไม่เกิดอัตตสหสัมพันธ์ต่อกัน

ดังนั้นเราจึงทำการแปลงข้อมูลให้ได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนให้อยู่ในรูป $Cov\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \sigma^2 I$

<u>จากนิยาม</u>

ถ้า V เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบแน่นอน จะได้ว่า V เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวมร่วมโดยที่ถ้าเราสามารถจัด V ให้อยู่ในรูป $V = TT'$ เมื่อ T เป็นเมทริกซ์ที่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) ได้หรือเมทริกซ์ที่ไม่เป็นเอกฐาน (Nonsingular Matrix) ก็จะทำได้ดังนี้

จาก $$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

นำ T^{-1} คูณตลอด จะได้ว่า

$$T^{-1}\underset{\sim}{y} = T^{-1}X\underset{\sim}{\beta} + T^{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}$$

ดังนั้น $$\underset{\sim}{y^*} = X^*\underset{\sim}{\beta^*} + \underset{\sim}{\varepsilon^*}$$

พิจารณาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$$\begin{aligned}
Cov\left(\underset{\sim}{\varepsilon^*}\right) &= E\left(\underset{\sim}{\varepsilon^*}\,\underset{\sim}{\varepsilon^*}'\right) \\
&= E\left[T^{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}\left(T^{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}\right)'\right] \\
&= E\left(T^{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{\varepsilon}'\,T^{-1'}\right) \\
&= T^{-1}E\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{\varepsilon}'\right)T^{-1'} \\
&= T^{-1}\sigma^2 V T^{-1'} \\
&= \sigma^2\left(T^{-1}T\right)\left(T'\,T^{-1'}\right) \\
&= \sigma^2 I
\end{aligned}$$

จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta^*}$ คือ

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}^*} = \left(X'\hat{V}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\hat{V}^{-1}\underset{\sim}{y}\right)$$

ดังนั้น รูปทั่วไปของสมการพยากรณ์ $\hat{y}_{i(t)}$ เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{i(t)} = \hat{\gamma}_i^* + \hat{\beta}_1^* x_{i(t)}$$

2) การประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation : MLE)

จากข้อตกลงเบื้องต้น $u_{i(t)} \sim N_p\left(0\,,\,\sigma_u^2\right)$ เมื่อกำหนดให้ $V = T\,T'$ จะได้ $\varepsilon_{i(t)} \sim N_p\left(0, \Sigma\right)$ โดยที่มีเวกเตอร์ของแต่ละหน่วยทดลองคือ $\underset{\sim}{y}_i = \left(y_{i(1)}\,,\, y_{i(2)}\,, \ldots,\, y_{i(p)}\right)'$; $i = 1,2,\ldots,n$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเท่ากับ $X_i\,\underset{\sim}{\beta} = \left(X_{i(1)}\,\underset{\sim}{\beta}\,,\, X_{i(2)}\,\underset{\sim}{\beta}\,, \ldots\,,\, X_{i(p)}\,\underset{\sim}{\beta}\right)$ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเท่ากับ $\Sigma = \sigma_\varepsilon^2\, V$ โดยที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ $\underset{\sim}{y}_i$ คือ

$$f\left(\underset{\sim}{y}_i\,;\, X_i\,\underset{\sim}{\beta},\, \Sigma\right) = \left(2\pi\right)^{-p/2}\left|\Sigma\right|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

ฟังก์ชันความควรจะเป็น (Likelihood Function) คือ

$$L = \prod_{i=1}^{n}\left(2\pi\right)^{-p/2}\left|\Sigma\right|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(2\pi\right)^{-p/2}\left|\Sigma\right|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\right]\right\}$$

take ln จะได้ดังนี้

$$\ln L = -\frac{np}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma\right| - \frac{n}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\left(\underset{\sim}{y}_i - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\right]$$

$$= -\frac{np}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma\right| - \frac{n}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - \underset{\sim}{\bar{y}} + \underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\left(\underset{\sim}{y}_i - \underset{\sim}{\bar{y}} + \underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\right]$$

$$= -\frac{np}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma\right| - \frac{n}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_i - \underset{\sim}{\bar{y}}\right)\left(\underset{\sim}{y}_i - \underset{\sim}{\bar{y}}\right)'\right] - \frac{n}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\right]$$

$$= -\frac{np}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma\right| - \frac{n}{2}\,tr\left(\Sigma^{-1}S\right) - \frac{n}{2}\,tr\left[\Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{y}} - X_i\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\right]$$

เมื่อ $|\Sigma|$ เป็น ค่าดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของ Σ

$\bar{\underset{\sim}{y}}$ เป็น เวกเตอร์ของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง

S เป็น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix)

ให้ $\Theta = \left(\sigma_\varepsilon^2, \rho\right)$ แทนปริภูมิพารามิเตอร์ (Parameter Space)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} V\right) + \frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} V \Sigma^{-1} S\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = -\frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \Lambda\right) + \frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \Lambda \Sigma^{-1} S\right)$$

โดยที่ $\Lambda \equiv \sigma_\varepsilon^2 \left(\Psi T' + T \Psi'\right)$ เมื่อ $\Psi = \dfrac{\partial T}{\partial \rho}$

และจาก $V = TT'$ สามารถหาค่า T และ T' ได้จากวิธี Cholesky Decomposition โดยที่

$$T_{ii} = \sqrt{v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} T_{ik}^2}$$

$$T_{ji} = \frac{1}{T_{ii}}\left(v_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} T_{ik} T_{jk}\right)$$

และ v_{ii}, v_{ij} เป็นค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ V ดังนี้

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} \\ & & \vdots & & \\ v_{p1} & v_{p2} & v_{p3} & \cdots & v_{pp} \end{bmatrix}$$

จากนั้นกำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่าประมาณ σ_ε^2 และ ρ แล้วแทนค่า $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ และ $\hat{\rho}$ ที่ได้ลงใน Σ จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \left(X' \hat{\Sigma}^{-1} X\right)^{-1} \left(X' \hat{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{y}\right)$$

ดังนั้น รูปทั่วไปของสมการพยากรณ์ $\hat{y}_{i(t)}$ เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{i(t)} = \hat{\gamma}_i + \hat{\beta}_1 x_{i(t)}$$

บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อต้องการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบสองขั้น และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยความควรจะเป็นสูงสุด โดยศึกษาเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและสำหรับการเปรียบเทียบจะกระทำภายใต้สถานการณ์ ดังนี้ ค่าอัตตสหสัมพันธ์มี 9 ระดับ คือ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 ขนาดตัวอย่างมี 5 ขนาด คือ 20, 30, 40, 50 และ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำมี 3 ช่วงเวลา คือ 3 , 6 และ 12 คาบเวลา

เทคนิคที่ใช้ในการจำลองข้อมูลครั้งนี้อาศัยเทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation Technique) สร้างสถานการณ์ต่าง ๆ ดังนั้นจะขอกล่าวถึงวิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลก่อน แล้วจึงแสดงถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำวิจัยและโปรแกรมที่ใช้ในการดำเนินการวิจัย

3.1 วิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล

เทคนิคที่ใช้สำหรับการแก้ไขปัญหาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์นั้นมีอยู่หลายวิธี ซึ่งวิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลก็เป็นวิธีการหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการแก้ปัญหากันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ซึ่งหลักการของการจำลองโดยใช้เทคนิคดังกล่าวจะใช้ตัวเลขสุ่ม (Random Numbers) มาช่วยในการหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการศึกษา ขั้นตอนของวิธีการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u>

การสร้างตัวเลขสุ่ม ซึ่งการสร้างตัวเลขสุ่มเป็นสิ่งที่สำคัญมากในเทคนิคนี้ ทั้งนี้เพราะว่าหลักการของการจำลองข้อมูลแบบมอนติคาร์โลจะใช้ตัวเลขสุ่มมาช่วยในการหาคำตอบของปัญหา โดยที่ตัวเลขสุ่มที่สร้างขึ้นนี้จะมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) ในช่วง (0,1) ซึ่งตัวเลขสุ่มแต่ละตัวจะเป็นอิสระกัน

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>

นำตัวเลขสุ่มที่สร้างขึ้นมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ต้องการศึกษา ซึ่งขั้นตอนนี้จะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา บางปัญหาอาจจะใช้ตัวเลขสุ่มโดยตรงแต่ในบางปัญหาอาจจะต้องมีขั้นตอนอื่น ๆ อีกหลายขั้นตอนโดยที่มีการใช้ตัวเลขสุ่มในบางขั้นตอนเท่านั้น

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>

การทดลองกระทำ เมื่อนำตัวเลขสุ่มมาประยุกต์ให้เข้ากับปัญหาที่ต้องการศึกษาได้แล้ว ขั้นต่อไปก็คือ การทดลองโดยใช้กระบวนการสุ่ม (Random Process) มากระทำในลักษณะที่ซ้ำ ๆ กัน (Replication) เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการศึกษา

3.2 การวางแผนการทดลอง

ในการวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดสถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

เริ่มต้นจากการสร้างตัวแปรอิสระโดยที่มีการกำหนดให้คงที่ และสร้างค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดอัตตสหสัมพันธ์กันในรูปแบบ AR(1) ซึ่งมีค่าอัตตสหสัมพันธ์ (ρ) 9 ระดับ ขนาดตัวอย่าง (n) 5 ขนาด และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ(p) 3 ช่วงเวลา และในแต่ละสถานการณ์จะนำค่าความคลาดเคลื่อนและตัวแปรอิสระที่ได้ไปสร้างตัวแปรตาม แล้วจึงทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี แล้วนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ไปหาค่าพยากรณ์เพื่อไปคำนวณหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย แล้วทำการเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยในแต่ละวิธี

3.3 วิธีการทดลอง

เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษา S-Plus 2000 และประมวลผลด้วยเครื่อง PC เพื่อสร้างข้อมูลให้เป็นไปตามการทดลอง ซึ่งวิธีการทดลองแบ่งออกเป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. การสร้างตัวแปรอิสระ (X) โดยกำหนดให้คงที่ (Fixed)
2. การสร้างความคลาดเคลื่อน (ε)
3. การสร้างตัวแปรตาม (Y)

4. การประมาณค่าพารามิเตอร์จากแต่ละวิธี
5. การหาค่าพยากรณ์
6. การหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละวิธี

ซึ่งรายละเอียดแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

1) การสร้างตัวแปรอิสระ (X)

ในการวิจัยครั้งนี้ตัวแปรอิสระจะถูกกำหนดให้คงที่ โดยการเอาไว้นอกรอบ (loop) ก่อนที่จะมีการทำซ้ำ ซึ่ง ณ ที่นี้ผู้วิจัยได้กำหนดให้ตัวแปรอิสระมีการแจกแจงแบบปกติ คือ Normal (mean , var)

โดยที่ mean และ var เป็นค่าที่ถูกกำหนดขึ้นมา ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะกำหนดให้ mean = 10 และ var = 4

2) การสร้างความคลาดเคลื่อน (ε)

จากรูปแบบของความคลาดเคลื่อนซึ่งมีรูปแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ดังนี้

$$\varepsilon_{i(t)} = \rho\varepsilon_{i(t-1)} + u_{i(t)} \qquad i = 1,2,\ldots,n \;\; ; \;\; t = 1,2,\ldots,p$$

โดยกำหนดค่าอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ คือ 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 และ 0.9 ขนาดตัวอย่างมี 5 ขนาด คือ 20 , 30 , 40 , 50 และ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำมี 3 ช่วงเวลา คือ 3 , 6 และ 12 คาบเวลา ซึ่ง $u_{i(t)}$ เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม ที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ_u^2 จากนั้นจึงสร้าง $\varepsilon_{i(t)}$ ให้มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และเมทริกซ์ความแปรปรวนเท่ากับ Σ

โดยที่ σ_u^2 เป็นค่าที่ถูกกำหนดขึ้นมา ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะกำหนดให้ $\sigma_u^2 = 4$

3) การสร้างตัวแปรตาม (Y)

สร้างตัวแปรตามจากตัวแปรอิสระและค่าความคลาดเคลื่อนจากตัวแบบ ดังนี้

$$y_{i(t)} = \gamma_i + \beta_1 x_{i(t)} + \varepsilon_{i(t)} \qquad i = 1,2,\ldots,n\,;\; t = 1,2,\ldots,p$$

โดยที่ γ_i และ β_1 เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ถูกกำหนดขึ้นมา ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะกำหนดให้ γ_i และ β_1 เท่ากับ 1

4) <u>การประมาณค่าพารามิเตอร์จากแต่ละวิธี</u>

ในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ไว้ 2 วิธี ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1 <u>วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> ประมาณค่า ρ ก่อน โดยใช้สูตร

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{p}\hat{\varepsilon}'_{i(t-1)}\,\hat{\varepsilon}_{i(t)}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{p}\hat{\varepsilon}^2_{i(t-1)}}$$

โดยที่ $\hat{\varepsilon}_{i(t)} = y_{i(t)} - \hat{\gamma}_i - \hat{\beta}_1 x_{i(t)}$

$\hat{\gamma}_i$, $\hat{\beta}_1$ คือ ค่าประมาณของ γ_i , β_1 ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุด (OLS) ; $i = 1,2,\ldots,n$

<u>ขั้นที่ 2</u> นำค่า $\hat{\rho}$ ที่ได้ไปแทนใน V_i^{-1} ได้ดังนี้

$$\hat{V}_i^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\rho}^2}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho} & 0 & \ldots & 0 \\ -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & -\hat{\rho} & \ldots & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}^*$ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = \left(X'\hat{V}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\hat{V}^{-1}\underset{\sim}{y}\right)$$

4.2 <u>วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด</u>

ให้ $\Theta = \left(\sigma_{\varepsilon}^{2}, \rho\right)$ แทนปริภูมิพารามิเตอร์ (Parameter Space) ซึ่งมีสูตรการคำนวณหาค่าดังนี้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{\varepsilon}^{2}} = -\frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} V\right) + \frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} V \Sigma^{-1} S\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = -\frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \Lambda\right) + \frac{np}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \Lambda \Sigma^{-1} S\right)$$

โดยที่ S เป็น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix)

$$\Lambda \equiv \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(\Psi T' + T \Psi'\right) \qquad \text{เมื่อ} \quad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \rho}$$

และจาก $V = TT'$ สามารถหาค่า T และ T' ได้จากวิธี Cholesky Decomposition โดยที่

$$T_{ii} = \sqrt{v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} T_{ik}^{2}}$$

$$T_{ji} = \frac{1}{T_{ii}}\left(v_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} T_{ik} T_{jk}\right)$$

และ v_{ii}, v_{ij} เป็นค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ V ดังนี้

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} \\ & & \vdots & & \\ v_{p1} & v_{p2} & v_{p3} & \cdots & v_{pp} \end{bmatrix}$$

จากนั้นกำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่าประมาณ σ_{ε}^{2} และ ρ ซึ่งรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ข แล้วแทนค่า $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ และ $\hat{\rho}$ ที่ได้ลงใน Σ

จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(X' \hat{\Sigma}^{-1} X\right)^{-1}\left(X' \hat{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{y}\right)$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} V$

5) การหาค่าพยากรณ์

เมื่อได้ค่าประมาณพารามิเตอร์จากแต่ละวิธีแล้วจะนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ไปหาค่าพยากรณ์ ซึ่งแต่ละวิธีมีรูปแบบของสมการพยากรณ์ ดังนี้

5.1 วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น สมการพยากรณ์ คือ

$$\hat{y}_{i(t)} = \hat{\gamma}_i^* + \hat{\beta}_1^* x_{i(t)}$$

5.2 วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด สมการพยากรณ์ คือ

$$\hat{y}_{i(t)} = \hat{\gamma}_i + \hat{\beta}_1 x_{i(t)}$$

6) การหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ของแต่ละวิธี

โดยจะนำค่าพยากรณ์มาหาความแตกต่างกับค่าจริง และทำซ้ำเช่นเดิมจนกระทั่งครบ 500 รอบ แล้วจึงคำนวณหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{500}\sum_{t=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(y_{itk} - \hat{y}_{itk})^2}{500(n)(p)}}$$

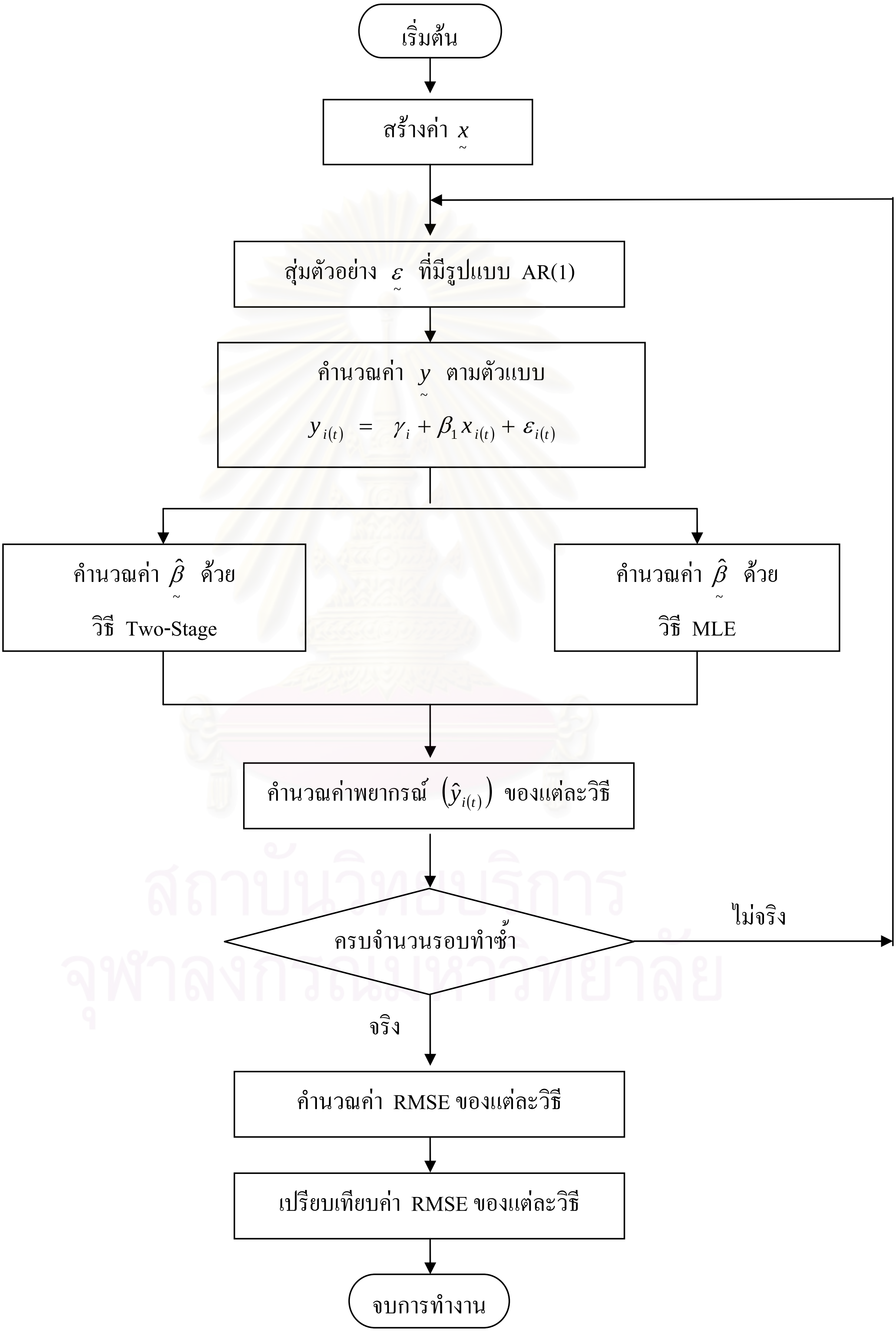
$$i = 1,2,\ldots,n \;;\; t = 1,2,\ldots,p \;;\; k = 1,2,\ldots,500$$

จากนั้นนำค่า RMSE ของวิธีการทั้ง 2 วิธี มาทำการเปรียบเทียบกัน และจะทำการทดลองเช่นเดิมโดยการเปลี่ยนค่าอัตตสหสัมพันธ์ ขนาดตัวอย่าง และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำจนกระทั่งครบทุกสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา

3.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของโปรแกรม

จากแผนการดำเนินงานข้างต้นที่ได้กล่าวมาแล้ว สามารถเขียนเป็นแผนผังสรุปขั้นตอนการดำเนินงานได้ดังรูปที่ 3.4.1 ดังนี้

รูปที่ 3.4.1 แสดงผังงานสำหรับการดำเนินงานของโปรแกรม



บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น และวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด โดยพิจารณาเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เพื่อต้องการหาผลสรุปว่าวิธีใดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ได้จำลองขึ้นมาในการวิจัยครั้งนี้ ซึ่งผลการวิจัยจะนำเสนอในรูปแบบตารางและกราฟ และเพื่อความสะดวกในการอธิบายจึงขอใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนความหมายต่าง ๆ ที่จะปรากฏในตารางและกราฟ ดังนี้

TS	หมายถึง	วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น
MLE	หมายถึง	วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด
rho	หมายถึง	ค่าสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์
n	หมายถึง	ขนาดตัวอย่าง
p	หมายถึง	ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ
RMSE	หมายถึง	ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
*	หมายถึง	ค่า RMSE ที่มีค่าต่ำสุด

4.1 <u>การเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี</u>

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ได้ศึกษาที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ คือ 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 และ 0.9 ขนาดตัวอย่าง 5 ขนาด คือ 20 , 30 , 40 , 50 และ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา คือ 3 , 6 และ 12 คาบเวลา จากนั้นนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากแต่ละวิธีมาหาค่าพยากรณ์ และคำนวณหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ซึ่งผลการวิจัยนำเสนอในตารางที่ 4.1 ถึง 4.5 และ รูปที่ 4.1 ถึง 4.45

4.1.1 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20</u>

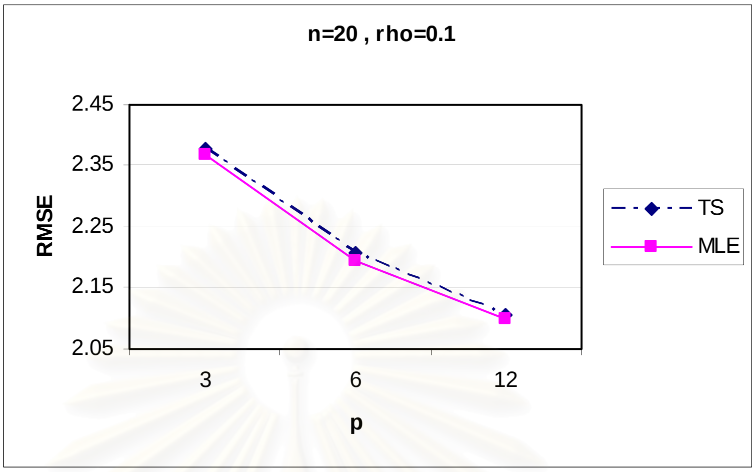
สรุปผลได้ดังตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.1 ถึง 4.9 ซึ่งแสดงค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

สรุปรายละเอียดได้ดังนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

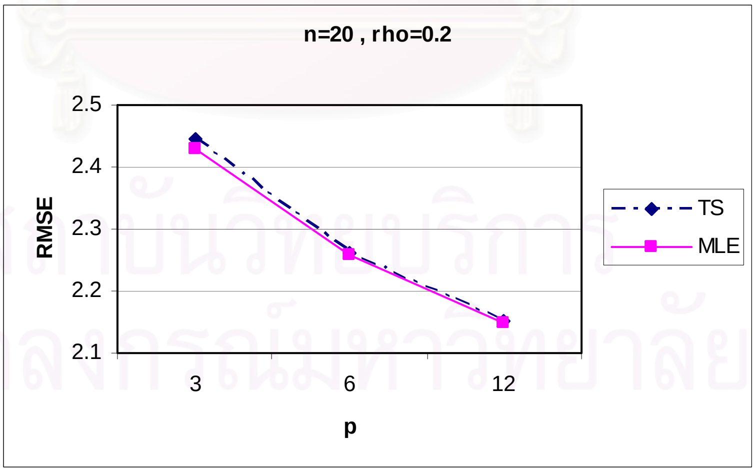
p	วิธีการ	rho								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	TS	2.37740	2.44482	2.53384	2.64575	2.78306	2.95050	3.15853	3.63067	4.23574
	MLE	2.36802*	2.4300*	2.50971*	2.61262*	2.74182*	2.90332*	3.10983*	3.60059*	4.18451*
6	TS	2.20602	2.26247	2.34727	2.47067	2.63532	2.85122	3.13023	3.49032	4.02606
	MLE	2.19586*	2.25746*	2.34530*	2.45986*	2.61431*	2.82019*	3.09330*	3.46009*	4.02098*
12	TS	2.10567	2.15267	2.22697	2.33712	2.49442	2.71581	3.02996*	3.39576*	3.8893*
	MLE	2.10044*	2.14913*	2.22576*	2.33540*	2.49007*	2.71165*	3.03453	3.43875	3.92020

รูปที่ 4.1 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



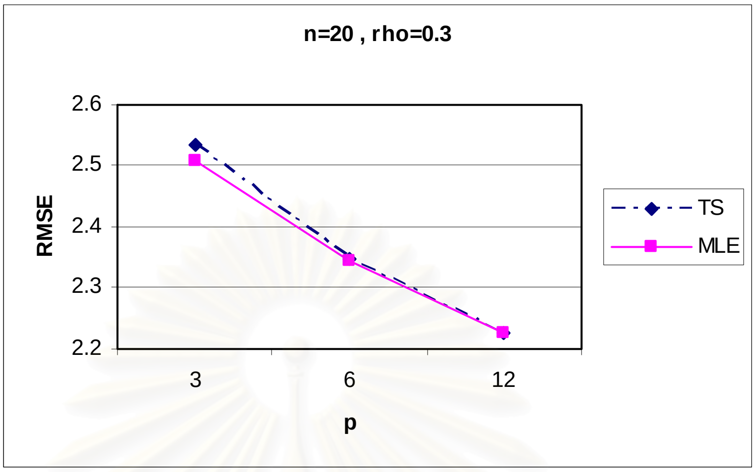
จากรูปที่ 4.1 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.2 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



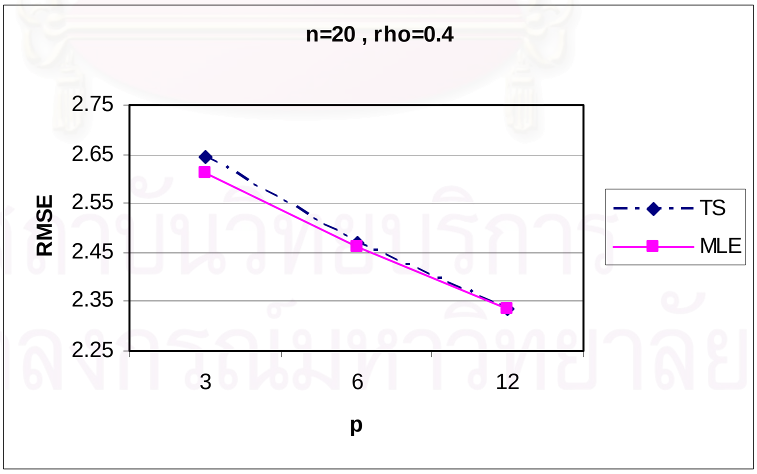
จากรูปที่ 4.2 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.3 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.3 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



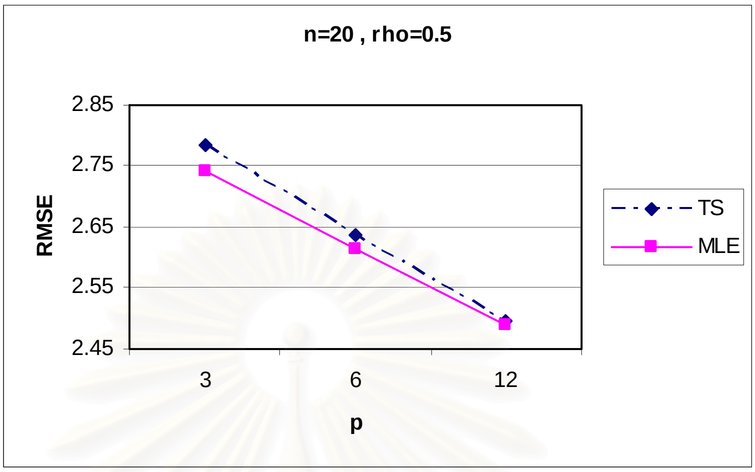
จากรูปที่ 4.3 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.4 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.4 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



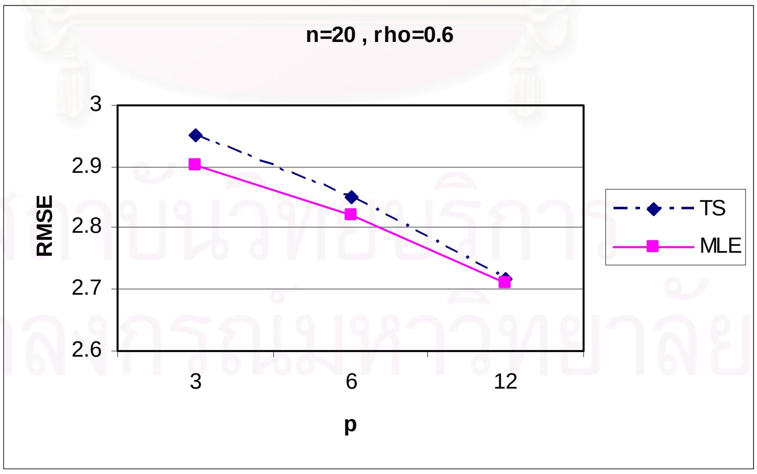
จากรูปที่ 4.4 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.5 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



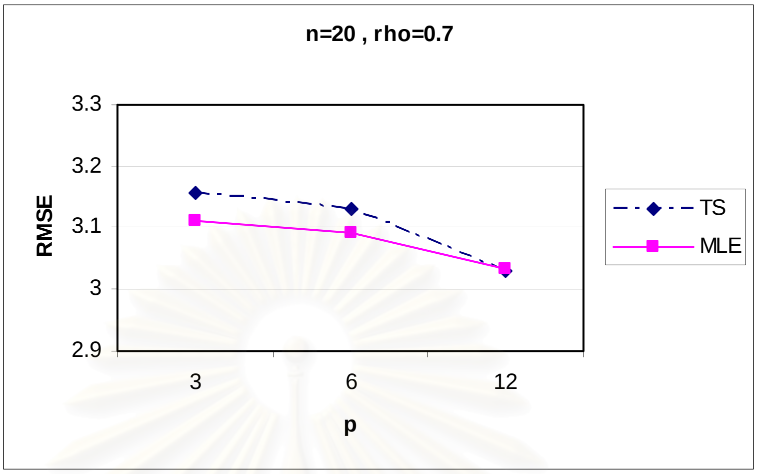
จากรูปที่ 4.5 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.6 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



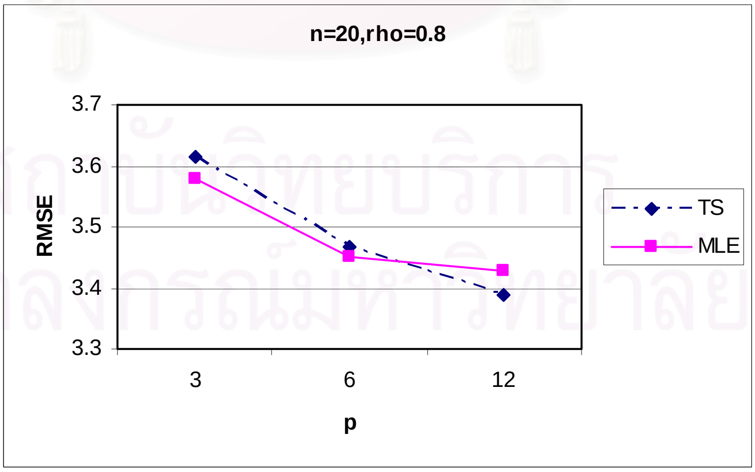
จากรูปที่ 4.6 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.7 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.7 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



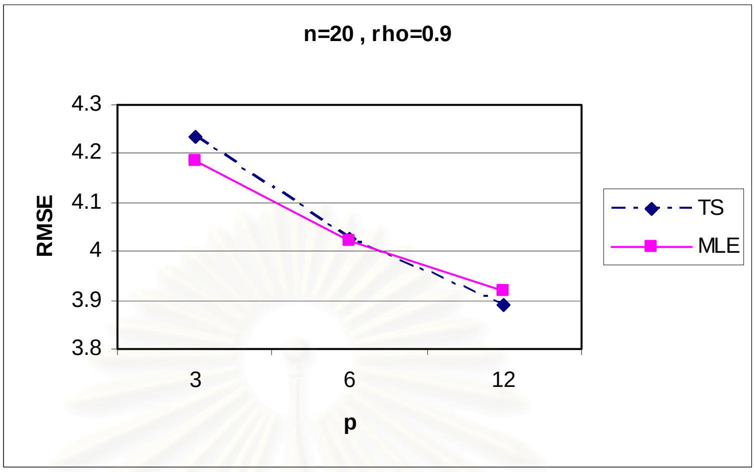
จากรูปที่ 4.7 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.8 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.8 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.9 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.9 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

4.1.2 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30</u>

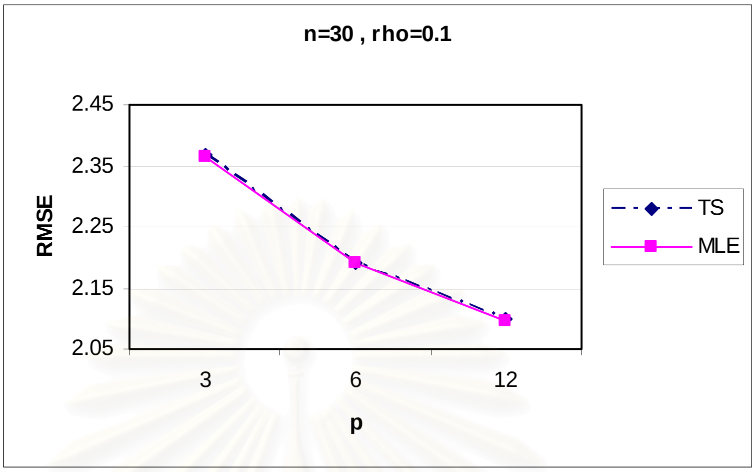
สรุปผลได้ดังตารางที่ 4.2 และรูปที่ 4.10 ถึง 4.18 ซึ่งแสดงค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

สรุปรายละเอียดได้ดังนี้

ตารางที่ 4.2 **แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา**

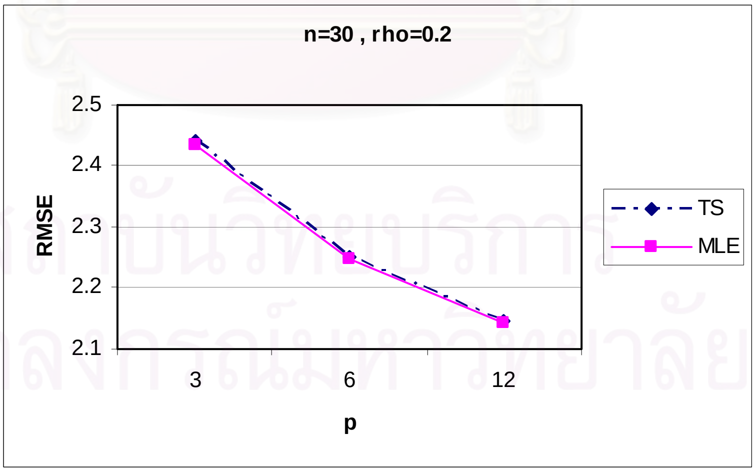
p	วิธีการ	rho								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	TS	2.36874	2.44124	2.52711	2.64559	2.78126	2.94667	3.15184	3.61361	4.21381
	MLE	2.36377*	2.43510*	2.51498*	2.60701*	2.74804*	2.90294*	3.10592*	3.57957*	4.16895*
6	TS	2.19249	2.24963	2.33790	2.45969	2.62249	2.83592	3.11118	3.46560	3.99703*
	MLE	2.18957*	2.24821*	2.33096*	2.44627*	2.60234*	2.81042*	3.08525*	3.45082*	4.00615
12	TS	2.09833	2.14514	2.21944	2.32948	2.48490	2.70347	3.01352*	3.38777*	3.87576*
	MLE	2.09559*	2.14372*	2.21906*	2.32703*	2.48095*	2.70096*	3.02043	3.42725	3.89956

รูปที่ 4.10 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



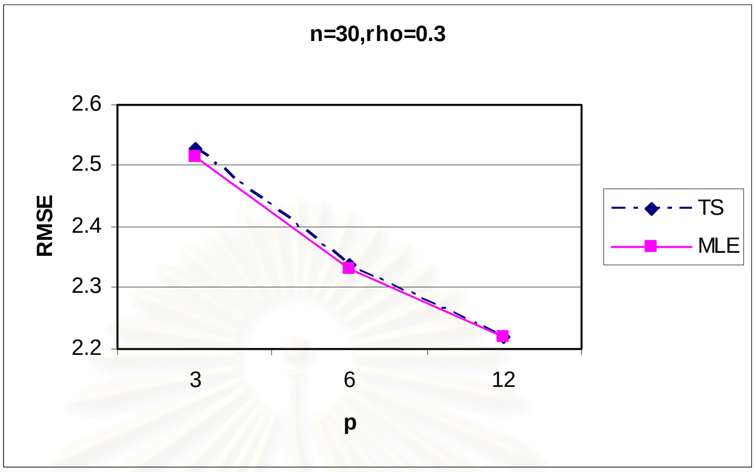
จากรูปที่ 4.10 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.11 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



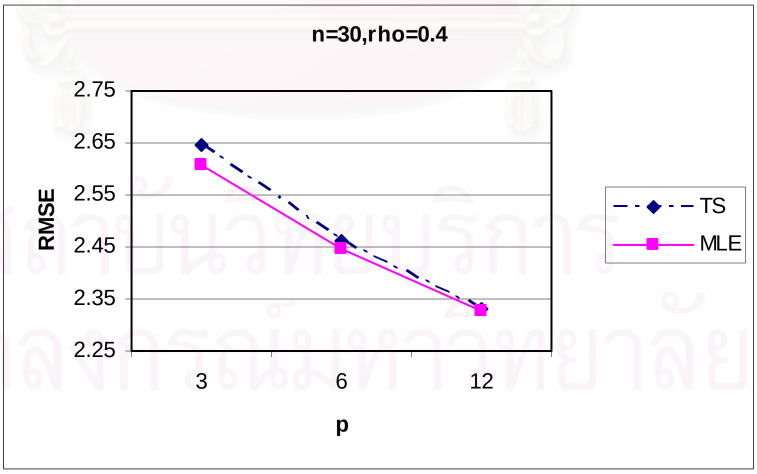
จากรูปที่ 4.11 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.12 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.3 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



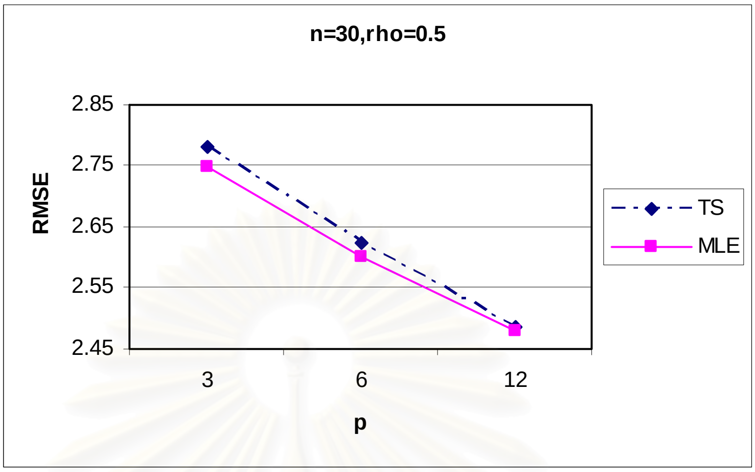
จากรูปที่ 4.12 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.13 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.4 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



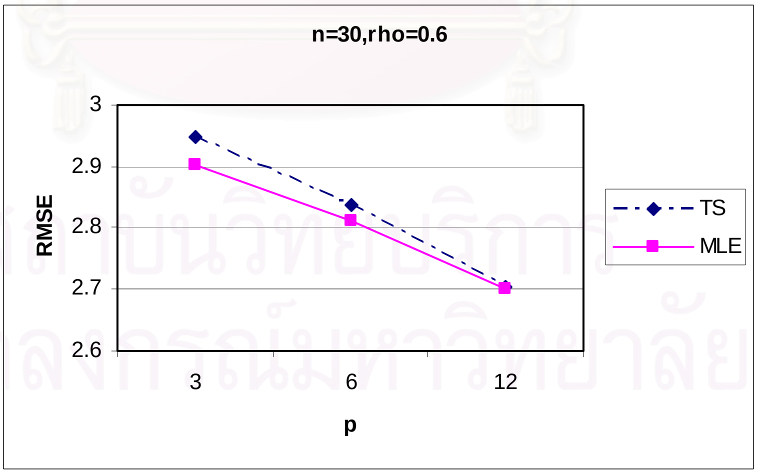
จากรูปที่ 4.13 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.14 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



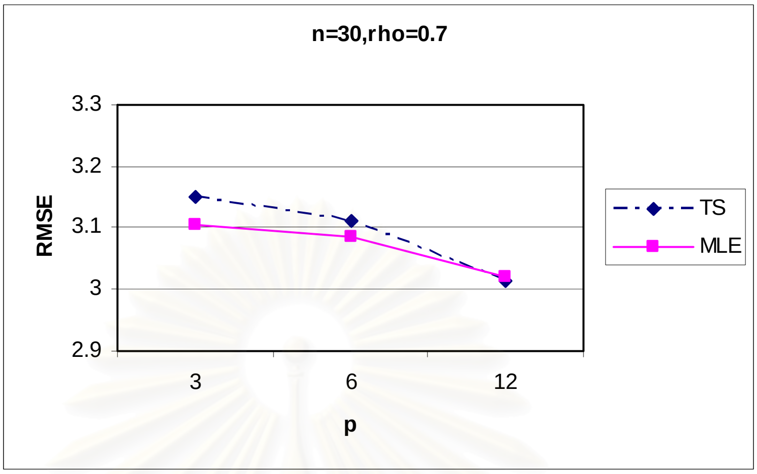
จากรูปที่ 4.14 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.15 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



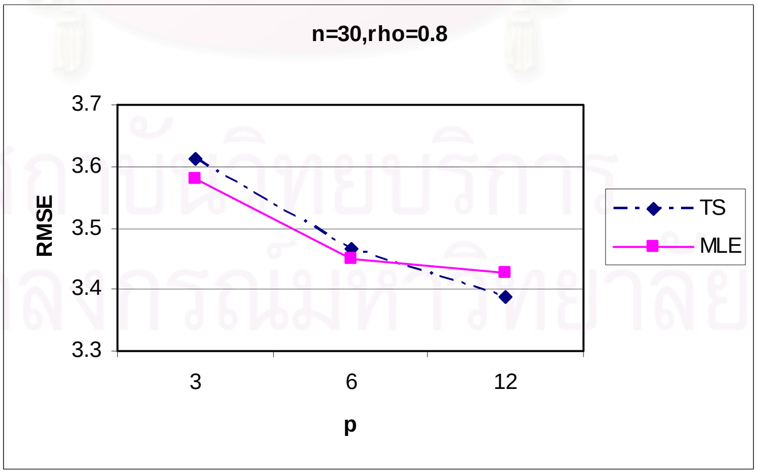
จากรูปที่ 4.15 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.16 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.7 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



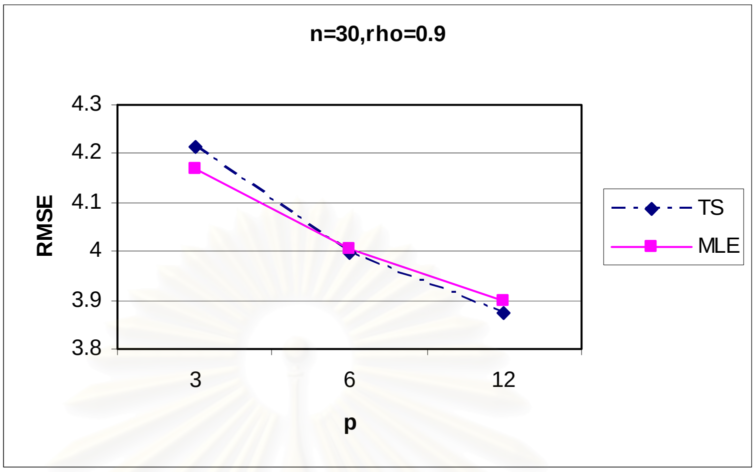
จากรูปที่ 4.16 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.17 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.17 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.18 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.18 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 6 และ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

4.1.2 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40</u>

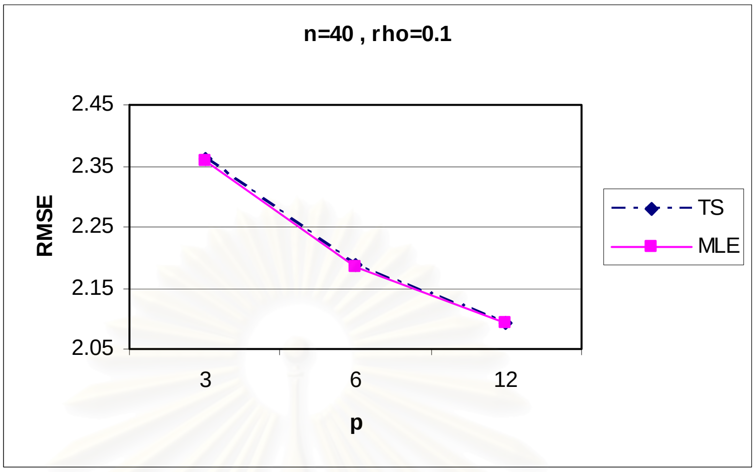
สรุปผลได้ดังตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.19 ถึง 4.27 ซึ่งแสดงค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

สรุปรายละเอียดได้ดังนี้

ตารางที่ 4.3 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

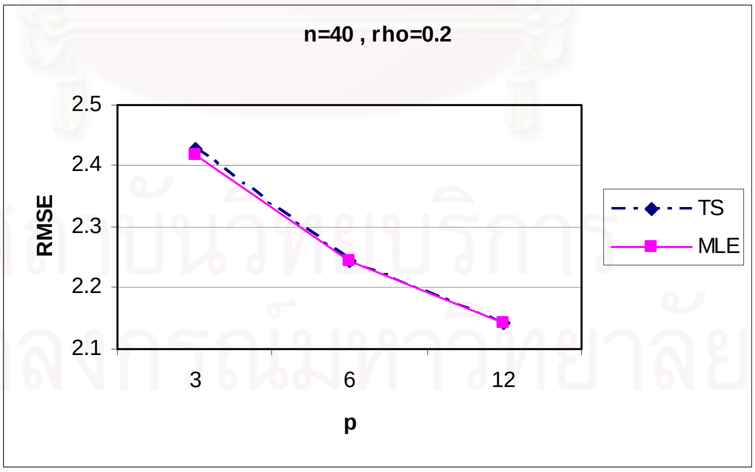
p	**วิธีการ**	**rho**								
		0.1	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
3	**TS**	2.36140	2.42786	2.51579	2.62648	2.76245	2.92847	3.13500	3.51949	4.21061
	MLE	2.35681*	2.41852*	2.49749*	2.59907*	2.72634*	2.88549*	3.08981*	3.47435*	4.14576*
6	**TS**	2.18779	2.24358	2.33123	2.45223	2.61427	2.82744	3.10412	3.46404	3.98726*
	MLE	2.18395*	2.24356*	2.32620*	2.44117*	2.59660*	2.80404*	3.07870*	3.44660*	3.99041
12	**TS**	2.09388	2.14370	2.21869	2.32831	2.48344	2.67465*	3.00499*	3.37446*	3.86601*
	MLE	2.09259*	2.14370*	2.21713*	2.32532*	2.48030*	2.67545	3.01956	3.41342	3.89120

รูปที่ 4.19 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



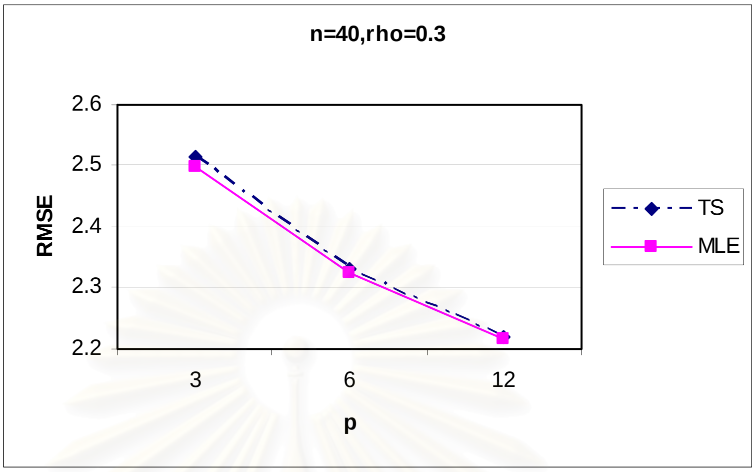
จากรูปที่ 4.19 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.20 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



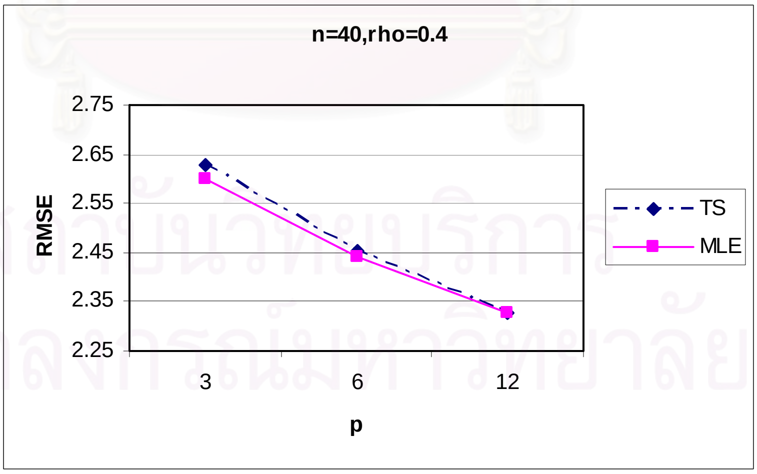
จากรูปที่ 4.20 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.21 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.3 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



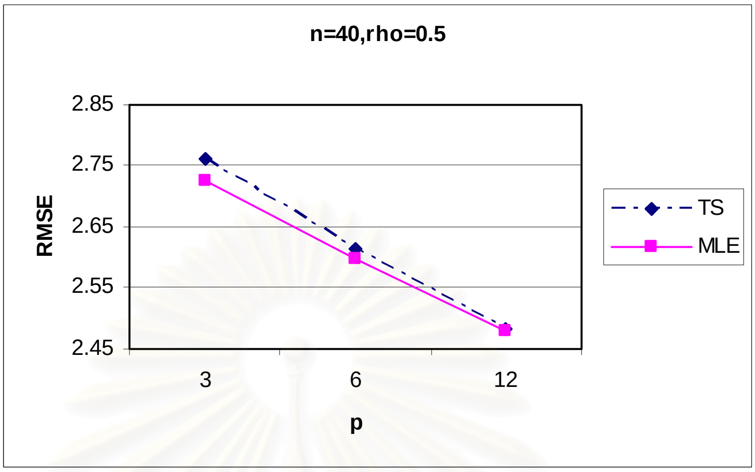
จากรูปที่ 4.21 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.22 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.4 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



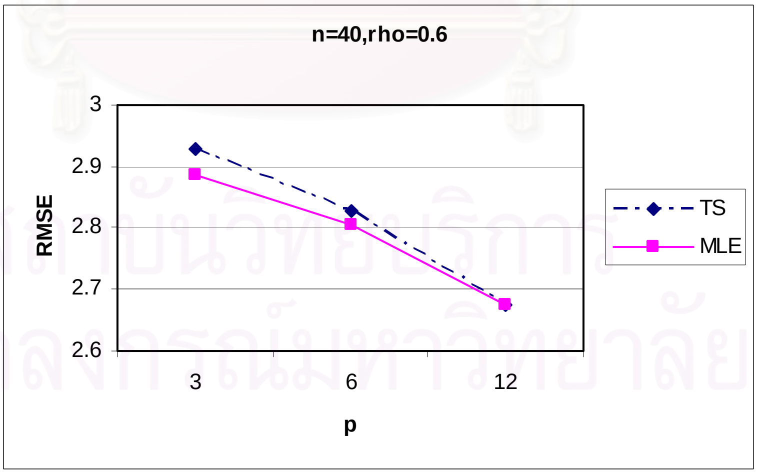
จากรูปที่ 4.22 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.23 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



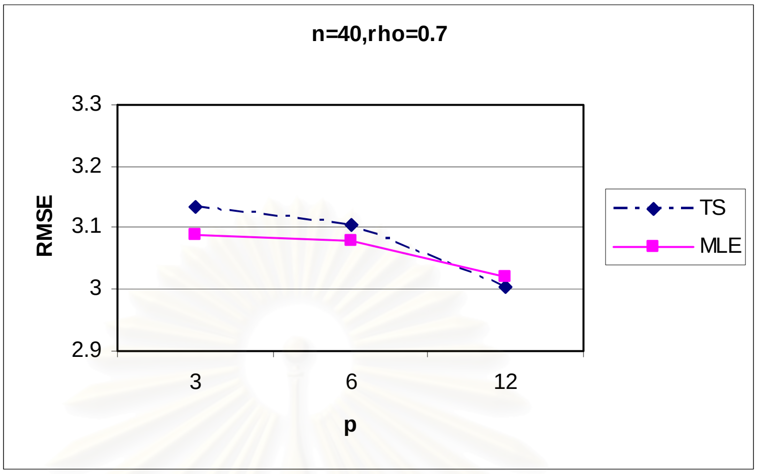
จากรูปที่ 4.23 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.24 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



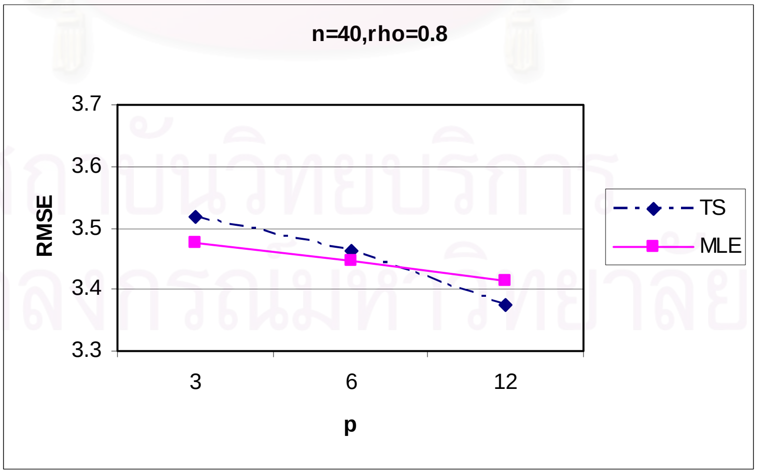
จากรูปที่ 4.24 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.25 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.7 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



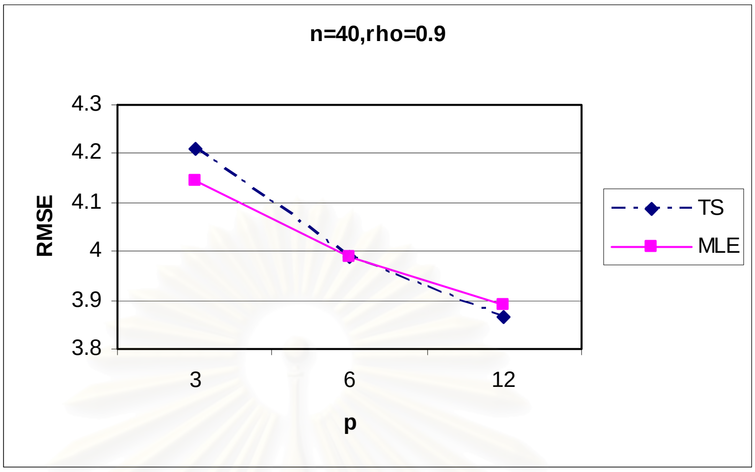
จากรูปที่ 4.25 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.26 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.26 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.27 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.27 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 6 และ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

4.1.2 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50

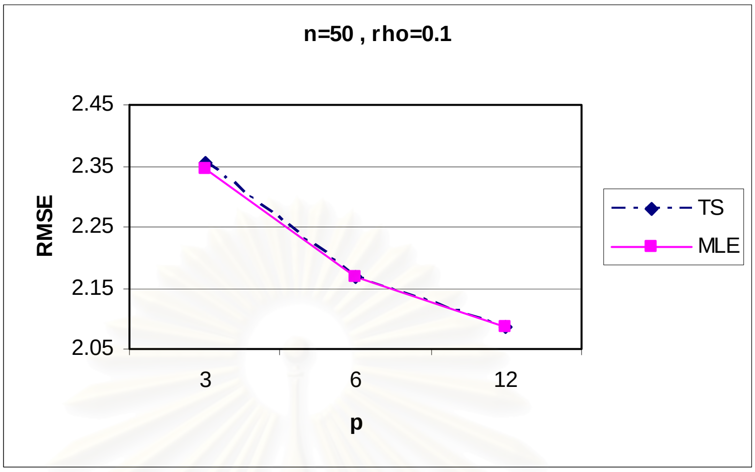
สรุปผลได้ดังตารางที่ 4.4 และรูปที่ 4.28 ถึง 4.36 ซึ่งแสดงค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

สรุปรายละเอียดได้ดังนี้

ตารางที่ 4.4 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

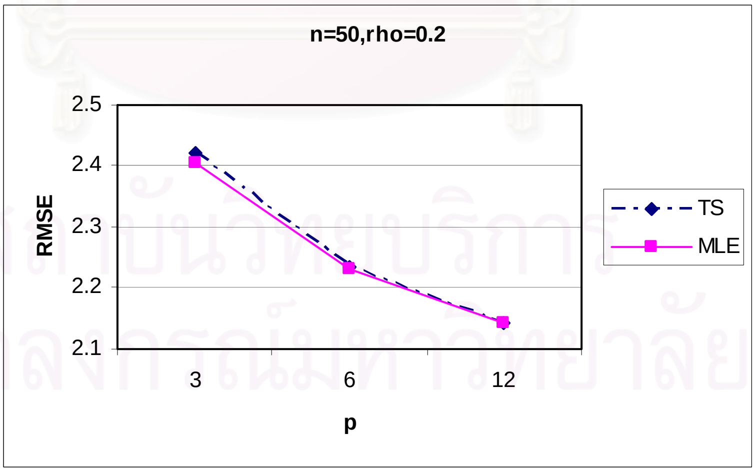
p	วิธีการ	rho								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	TS	2.35380	2.42066	2.50895	2.61998	2.75622	2.92245	3.12922	3.49854	4.20287
	MLE	2.34538*	2.40478*	2.48551*	2.58900*	2.71828*	2.87938*	3.08531*	3.45524*	4.14428*
6	TS	2.16791	2.23494	2.32366	2.45130	2.61264	2.82183	3.09225	3.44301	3.97811*
	MLE	2.16720*	2.23093*	2.31554*	2.43841*	2.59481*	2.80011*	3.07064*	3.43135*	3.98684
12	TS	2.08712	2.14331	2.21835	2.32769	2.48234	2.66031*	2.98943*	3.37121*	3.84674*
	MLE	2.08600*	2.14317*	2.21676*	2.32485*	2.479556*	2.66155	3.00400	3.40874	3.89212

รูปที่ 4.28 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



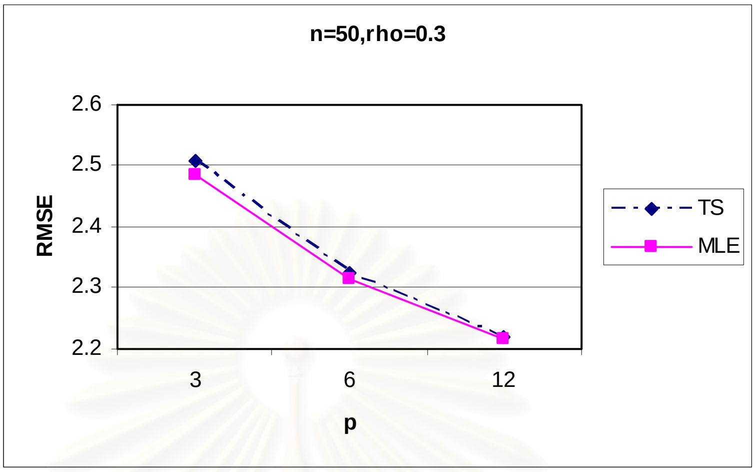
จากรูปที่ 4.28 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.29 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



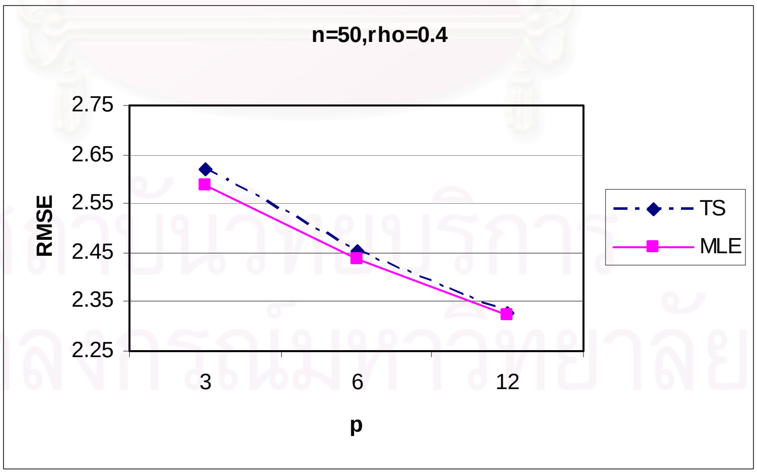
จากรูปที่ 4.29 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.30 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.3 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



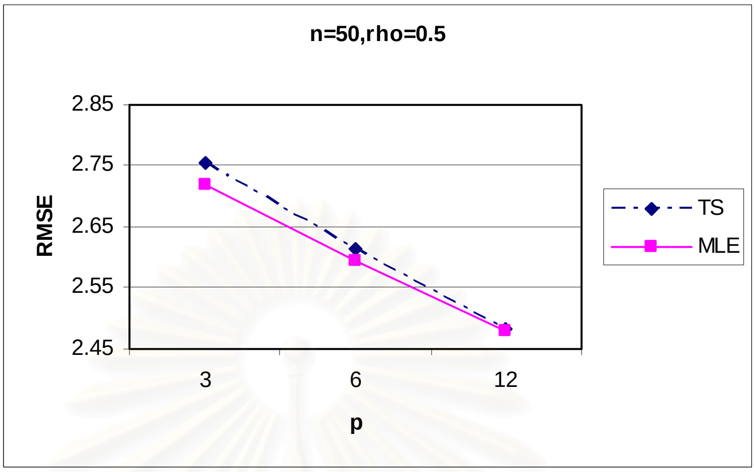
จากรูปที่ 4.30 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.31 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.4 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



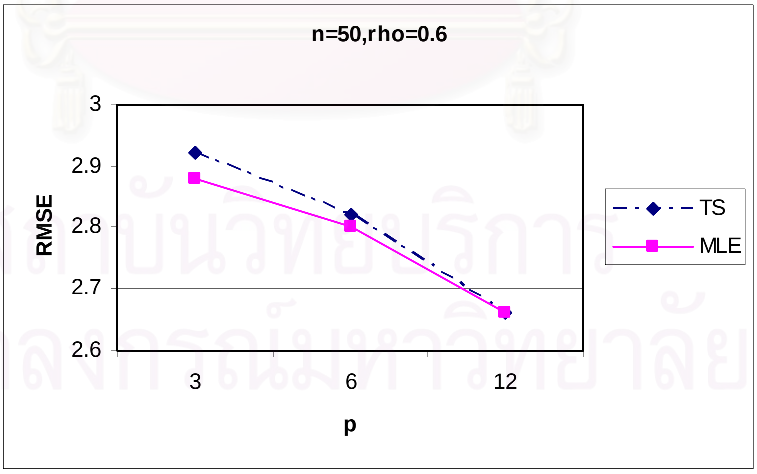
จากรูปที่ 4.31 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.32 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



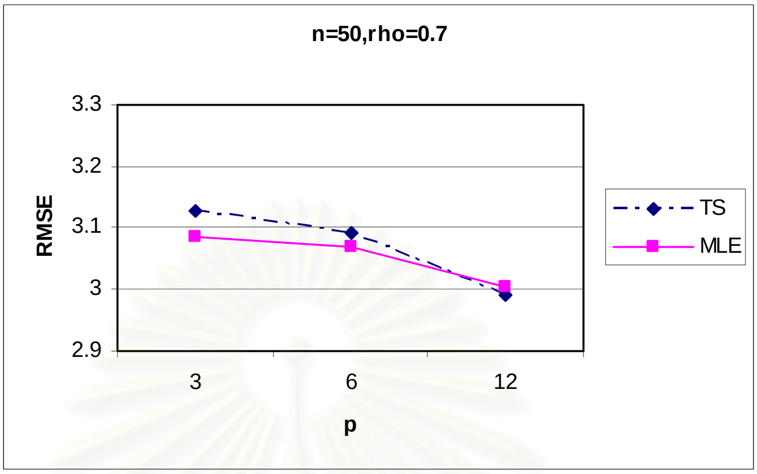
จากรูปที่ 4.32 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.33 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



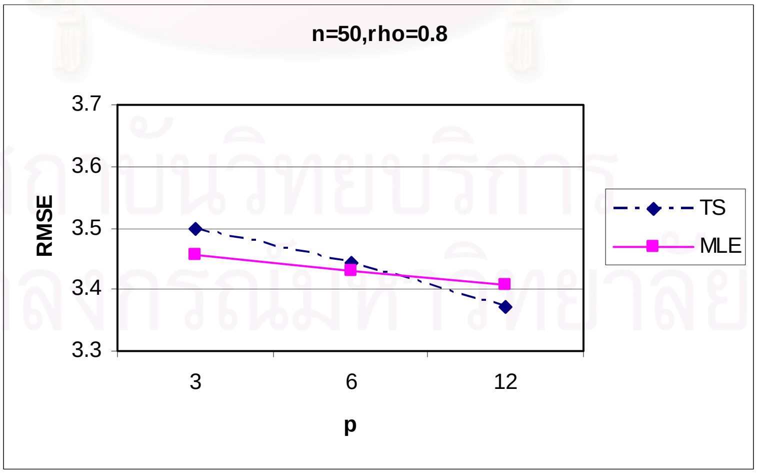
จากรูปที่ 4.33 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.34 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.7 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



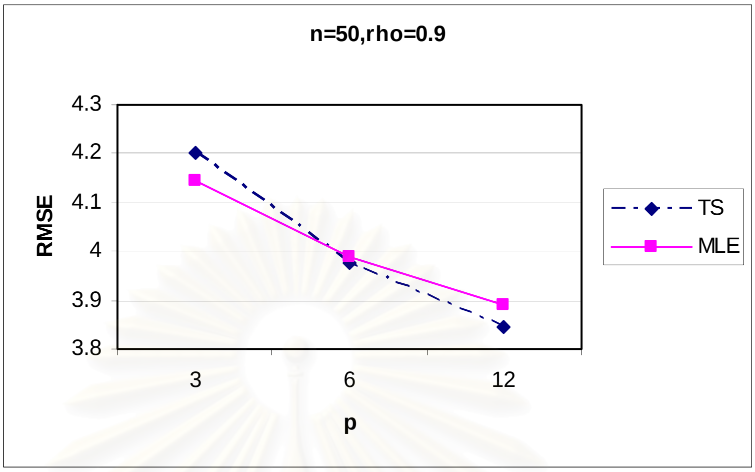
จากรูปที่ 4.34 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.35 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.35 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.36 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.36 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 6 และ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

4.1.2 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60

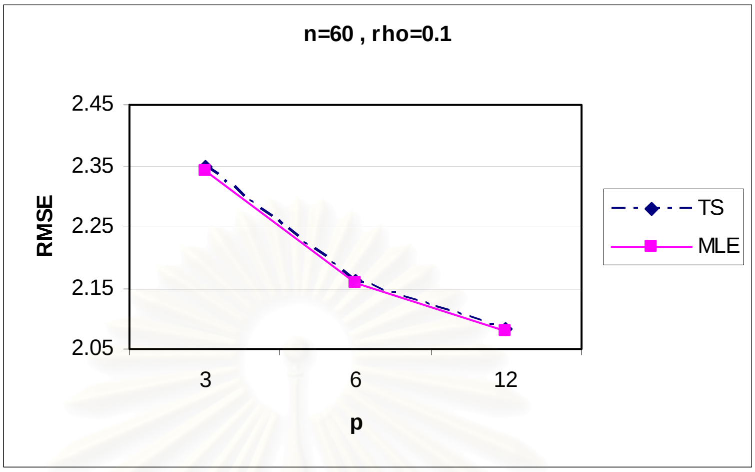
สรุปผลได้ดังตารางที่ 4.5 และรูปที่ 4.37 ถึง 4.45 ซึ่งแสดงค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

สรุปรายละเอียดได้ดังนี้

ตารางที่ 4.5 **แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 จำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา**

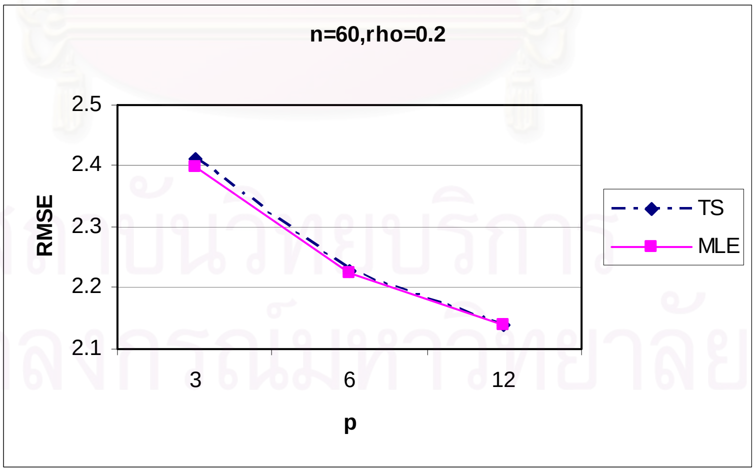
p	**วิธีการ**	**rho**								
		0.1	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
3	**TS**	2.34833	2.41274	2.50027	2.59022	2.74457	2.90807	3.12444	3.47859	4.18620
	MLE	2.34166*	2.39839*	2.47819*	2.56047*	2.70778*	2.86617*	3.08193*	3.44203*	4.12741*
6	**TS**	2.16235	2.22680	2.31495	2.44241	2.61077	2.81414	3.08886	3.42960	3.93769*
	MLE	2.15876*	2.22600*	2.30825*	2.42835*	2.58842*	2.78404*	3.05524*	3.40453*	3.93776
12	**TS**	2.08168	2.13907	2.21500	2.29420	2.47030	2.64927	2.96184*	3.36727*	3.83198*
	MLE	2.07927*	2.13827*	2.21368*	2.29053*	2.46509*	2.64603*	2.99772	3.40270	3.87444

รูปที่ 4.37 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



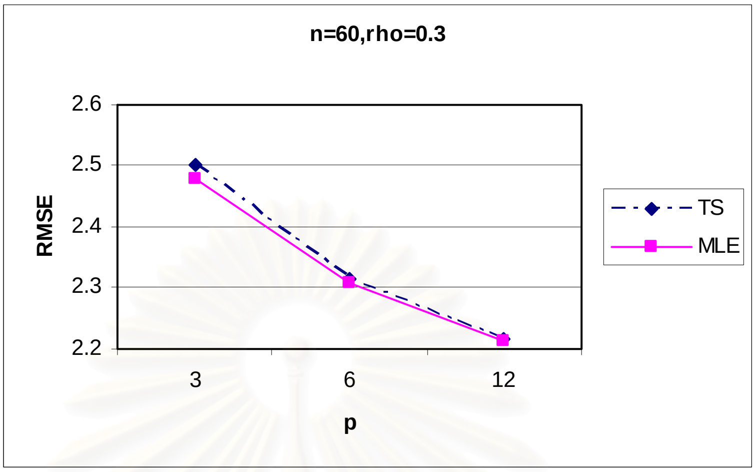
จากรูปที่ 4.37 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.38 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



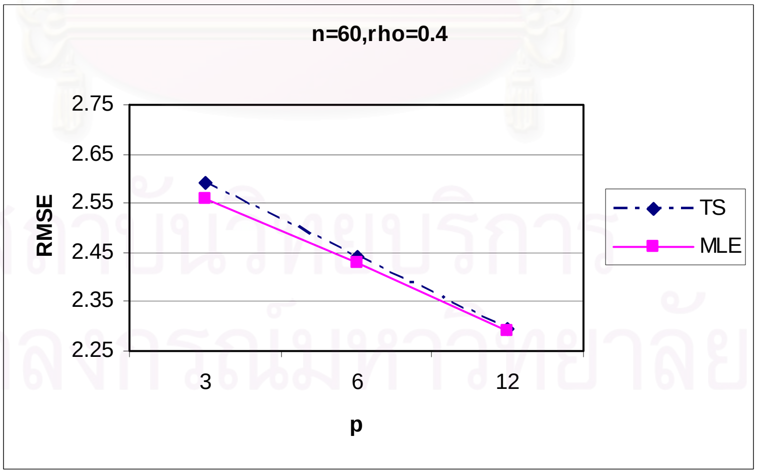
จากรูปที่ 4.38 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.39 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.3 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



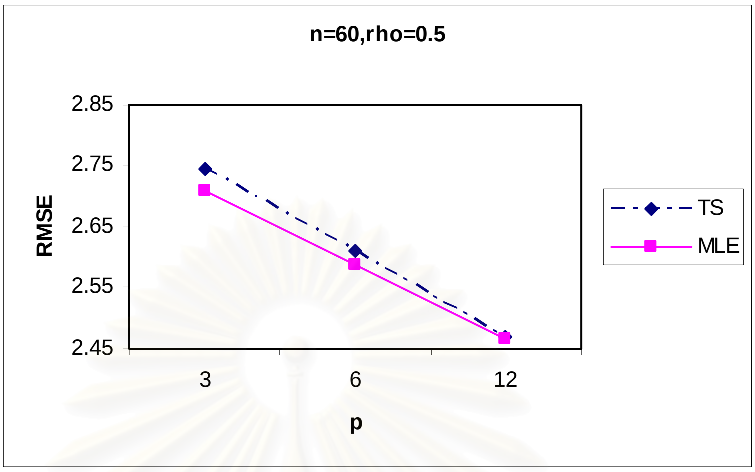
จากรูปที่ 4.39 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.40 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.4 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



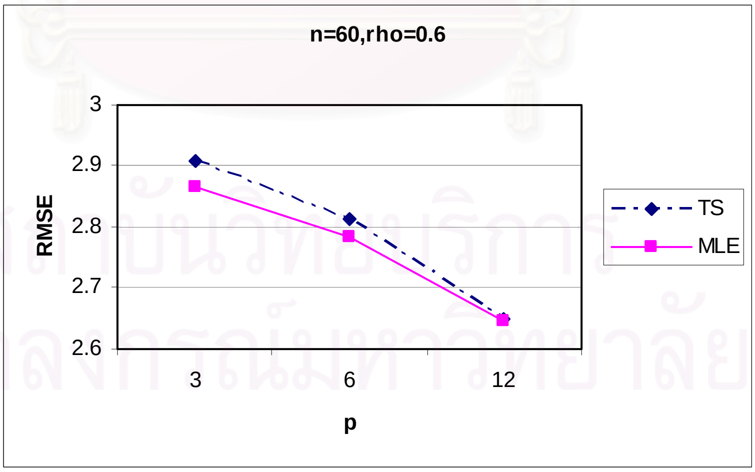
จากรูปที่ 4.40 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.41 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



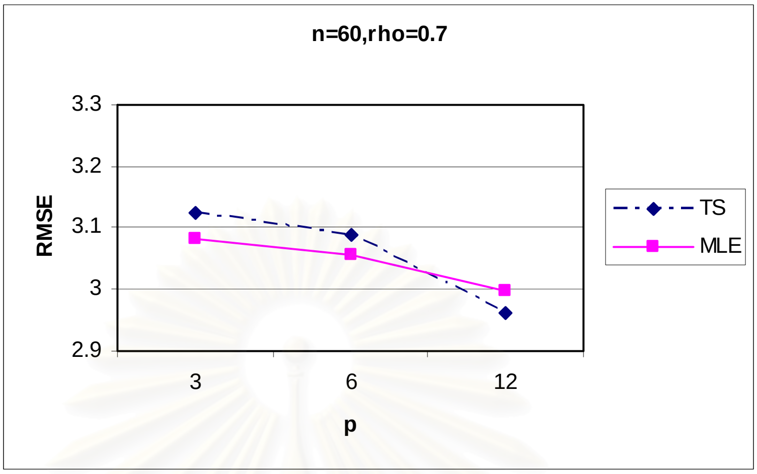
จากรูปที่ 4.41 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.42 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



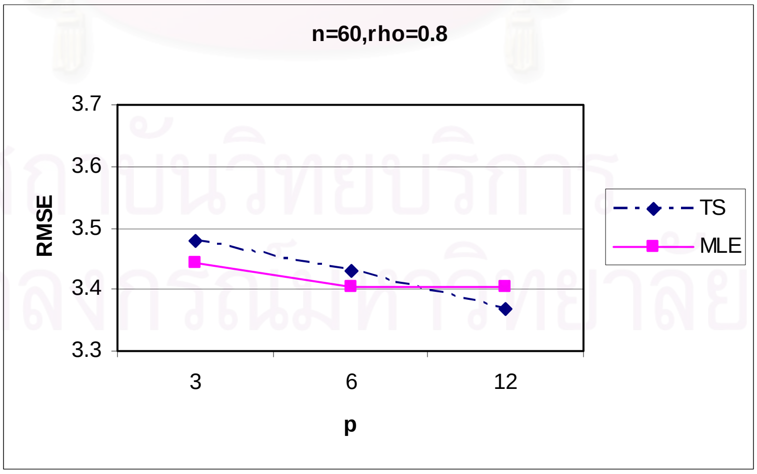
จากรูปที่ 4.42 พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุดในทุกช่วงเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

รูปที่ 4.43 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.7 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



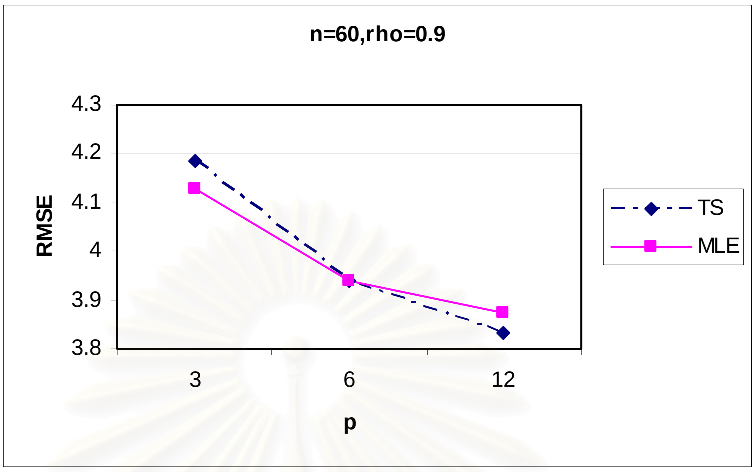
จากรูปที่ 4.43 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.44 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา



จากรูปที่ 4.44 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 และ 6 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

รูปที่ 4.45 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และจำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา

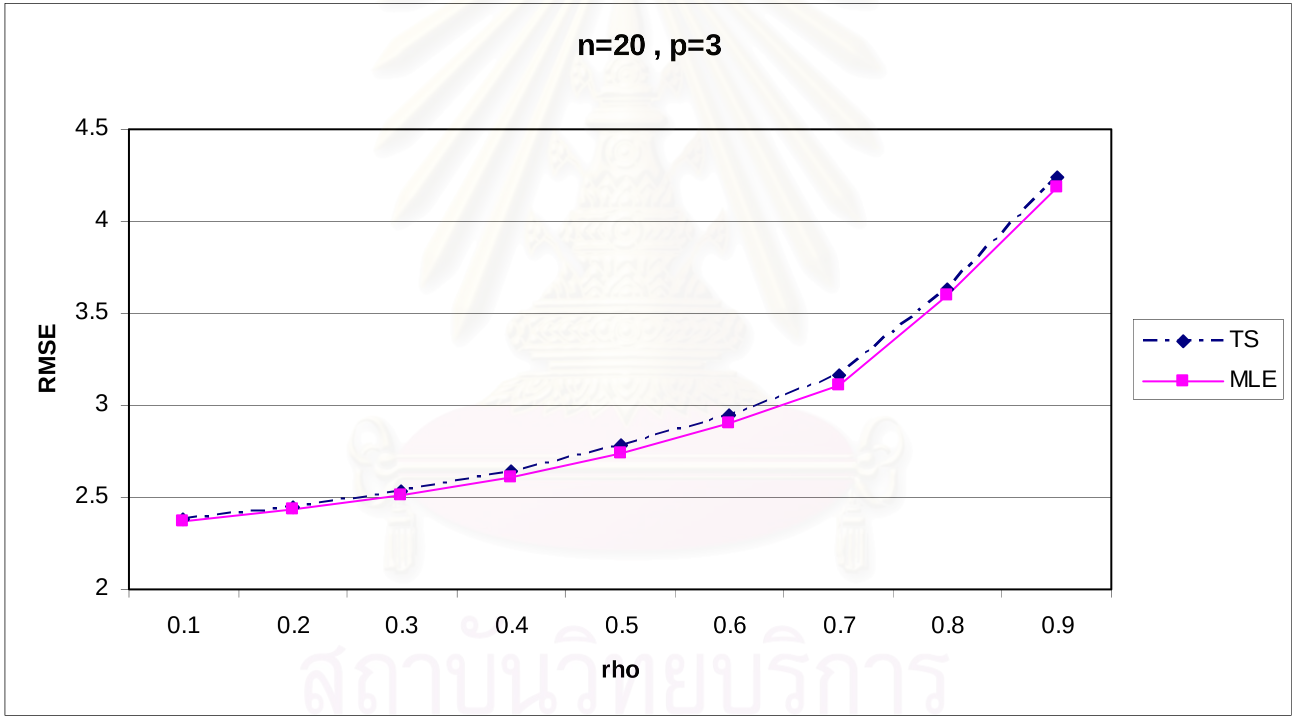


จากรูปที่ 4.45 พบว่า ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่า RMSE ต่ำสุด และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 6 และ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นให้ค่า RMSE ต่ำสุด

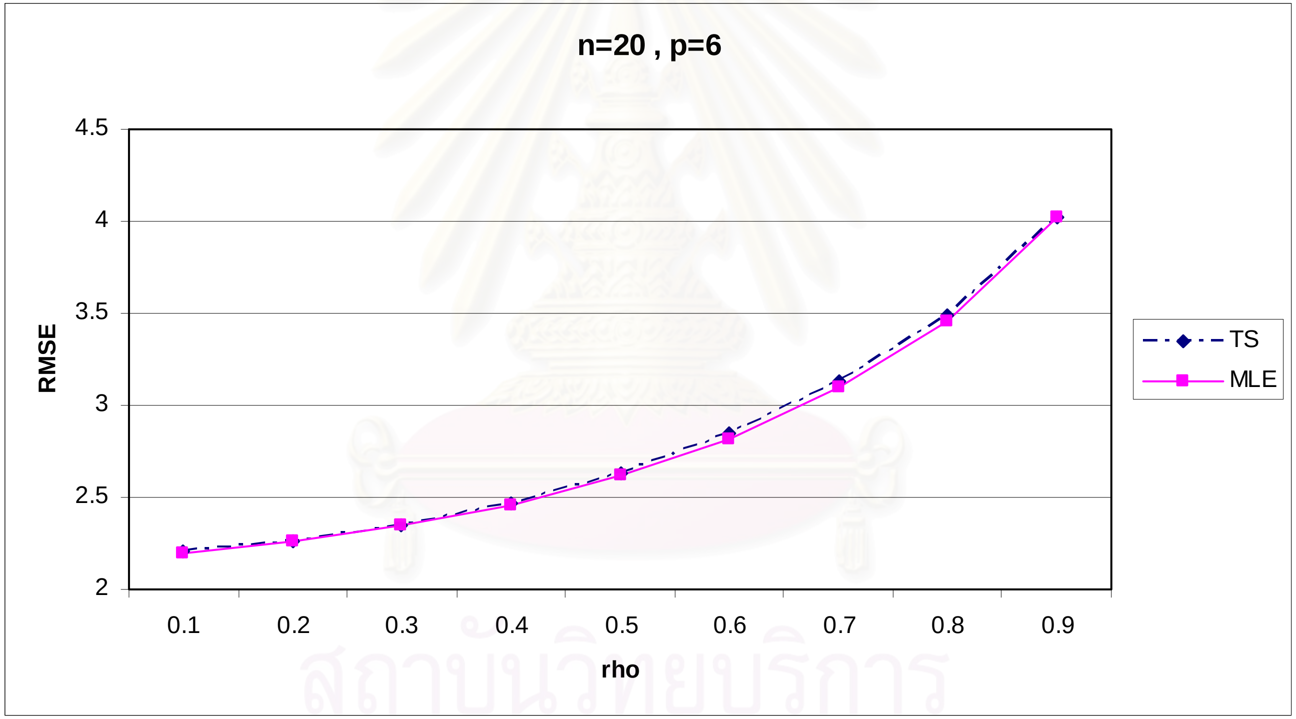
4.2 ผลสรุปการเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ของวิธีการประมาณค่าทั้ง 2 วิธี

จากการทดลองเพื่อหาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น และวิธีการประมาณด้วยความควรจะเป็นสูงสุด โดยศึกษาที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ สรุปผลได้จากรูปที่ 4.46 ถึง 4.60 ดังนี้

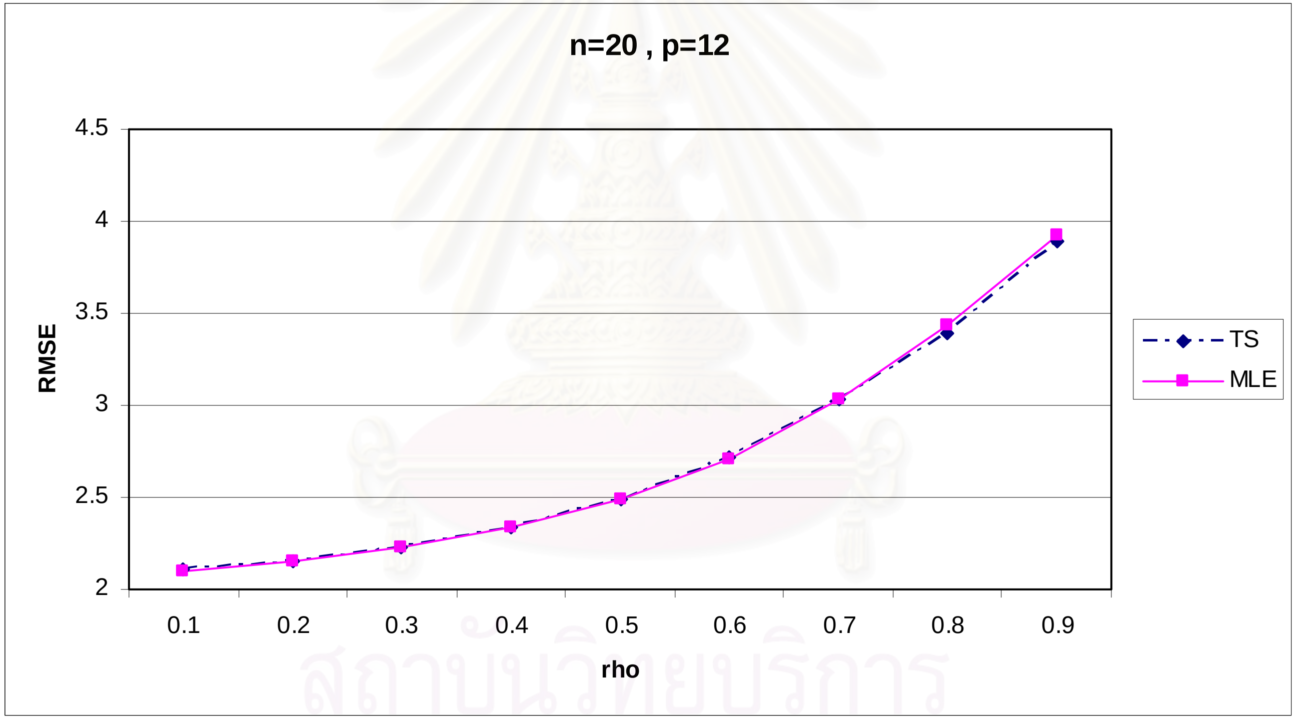
รูปที่ 4.46 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 คาบเวลา



รูปที่ 4.47 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา



รูปที่ 4.48 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา



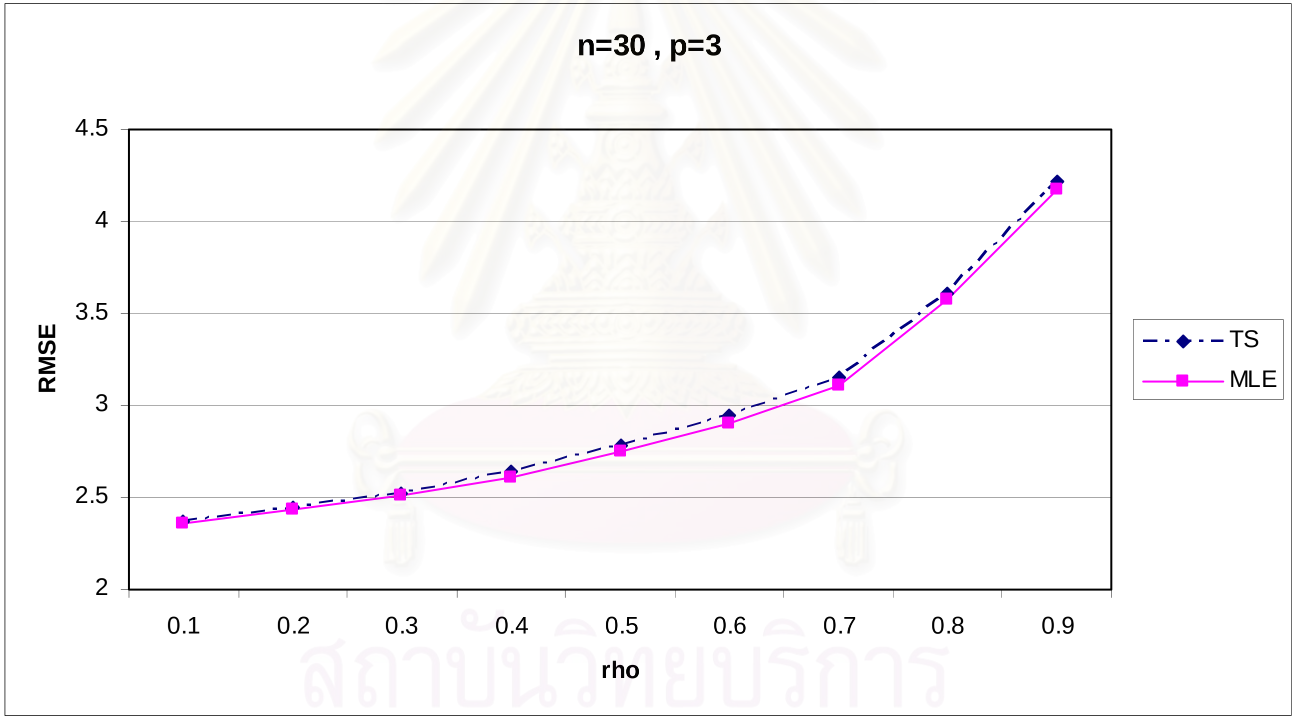
4.2.1 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20</u>

จากรูปที่ 4.46 ถึง 4.48 ซึ่งแสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ จำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา ตามลำดับ สรุปผลได้ดังนี้

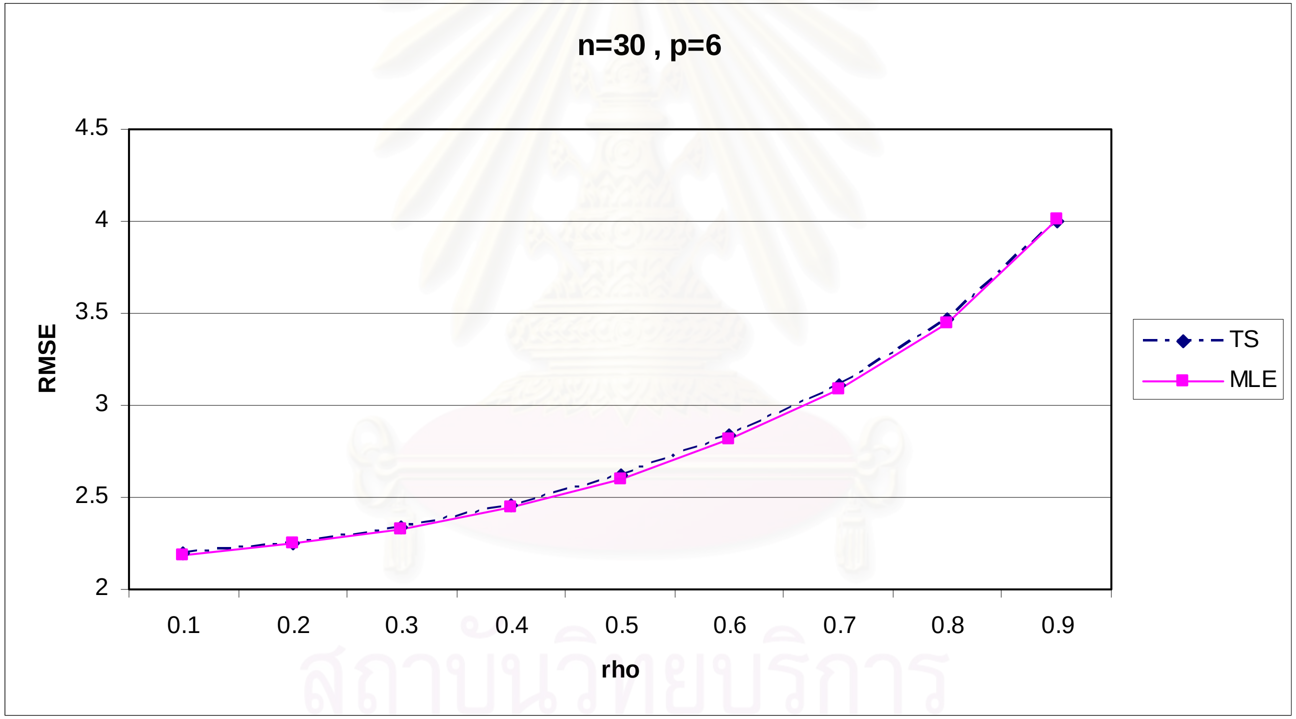
- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำและปานกลาง (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 และ 0.6) พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (3 , 6 และ 12 คาบเวลา)

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 , 0.8 และ 0.9) พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา ส่วนที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

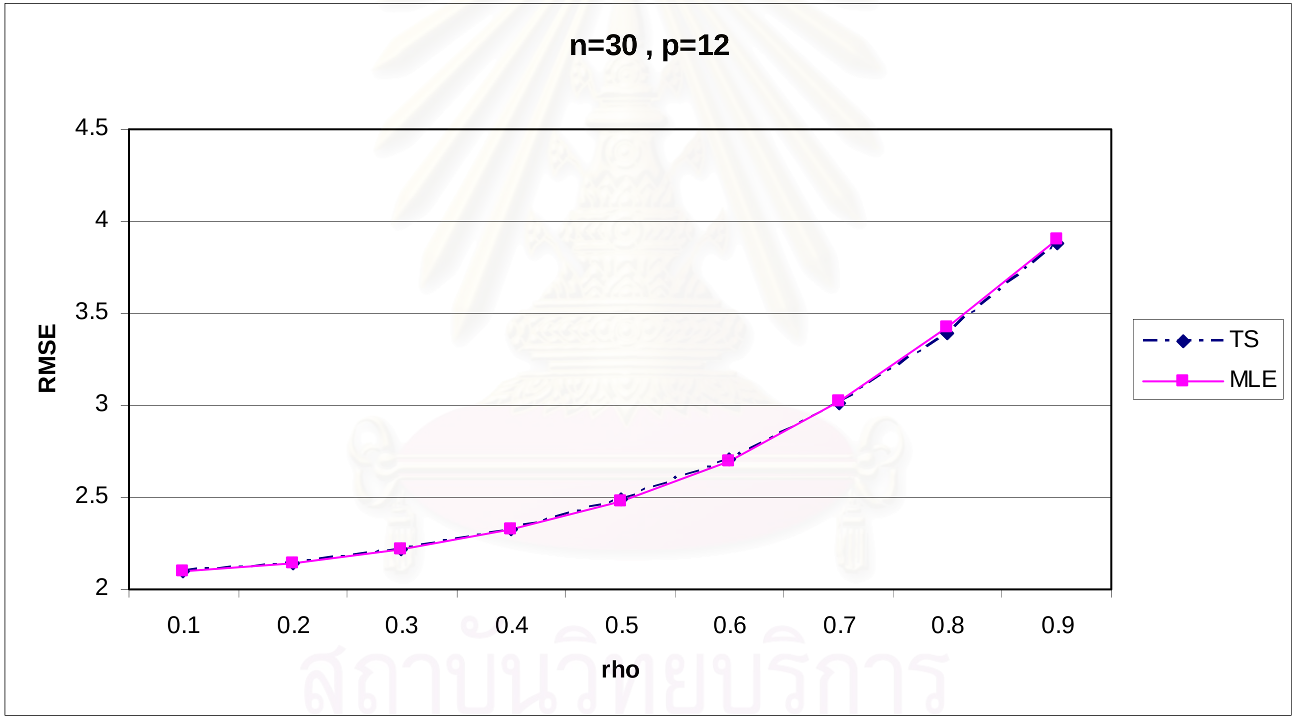
รูปที่ 4.49 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 คาบเวลา



รูปที่ 4.50 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา



รูปที่ 4.51 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา



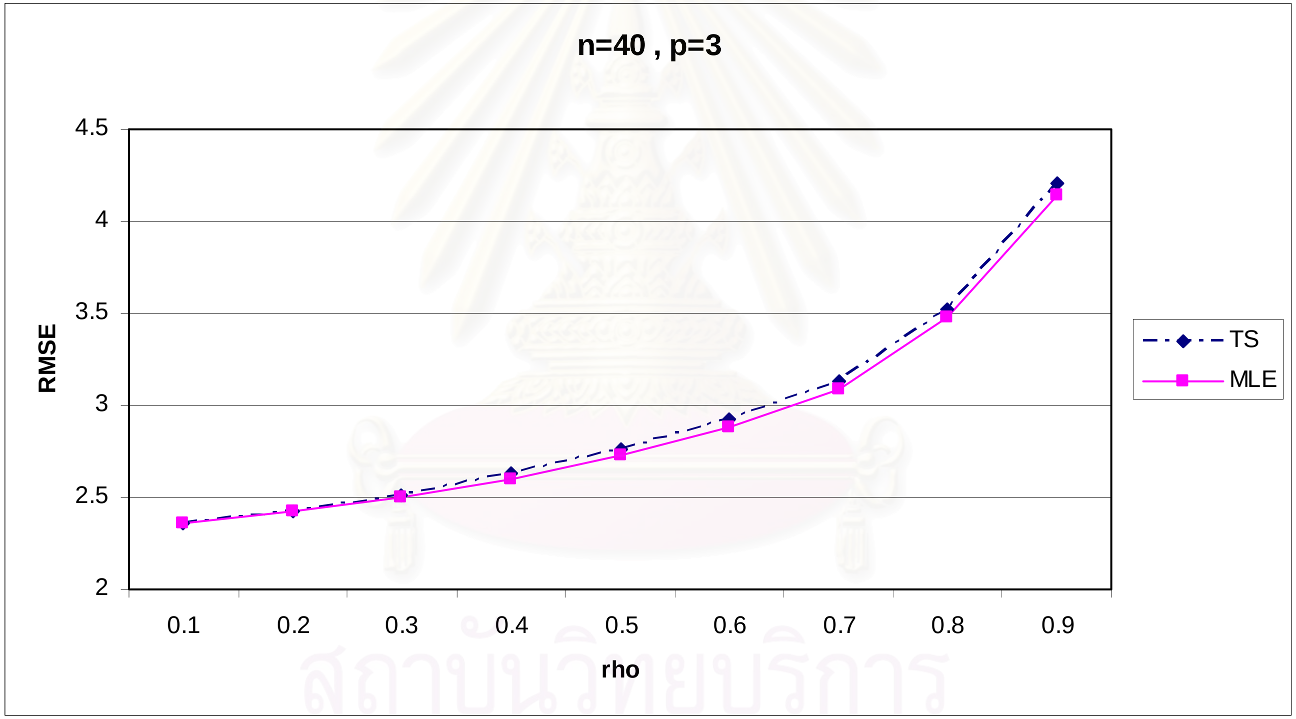
4.2.2 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30</u>

จากรูปที่ 4.49 ถึง 4.51 ซึ่งแสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ จำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลาตามลำดับ สรุปผลได้ดังนี้

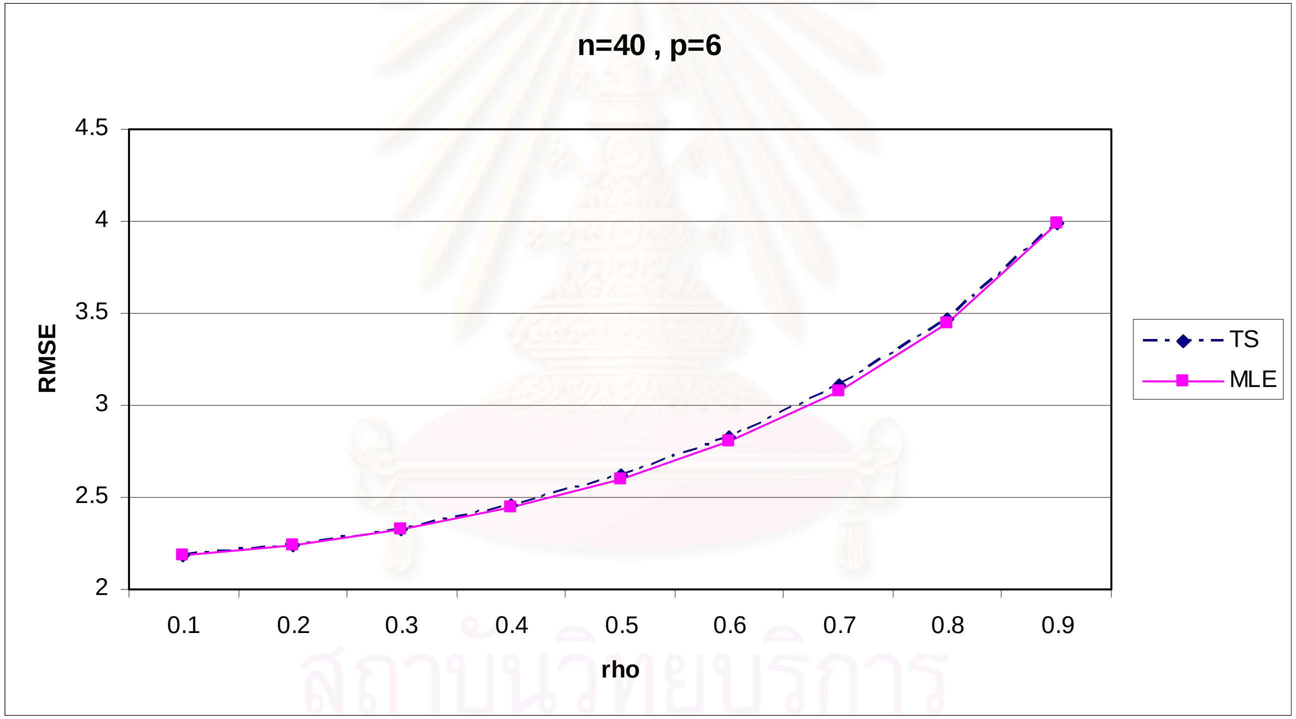
- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำและปานกลาง (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 และ 0.6) พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (3 , 6 และ 12 คาบเวลา)

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 , 0.8 และ 0.9) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา *<u>ยกเว้น</u>* ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์อันดับสูง วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

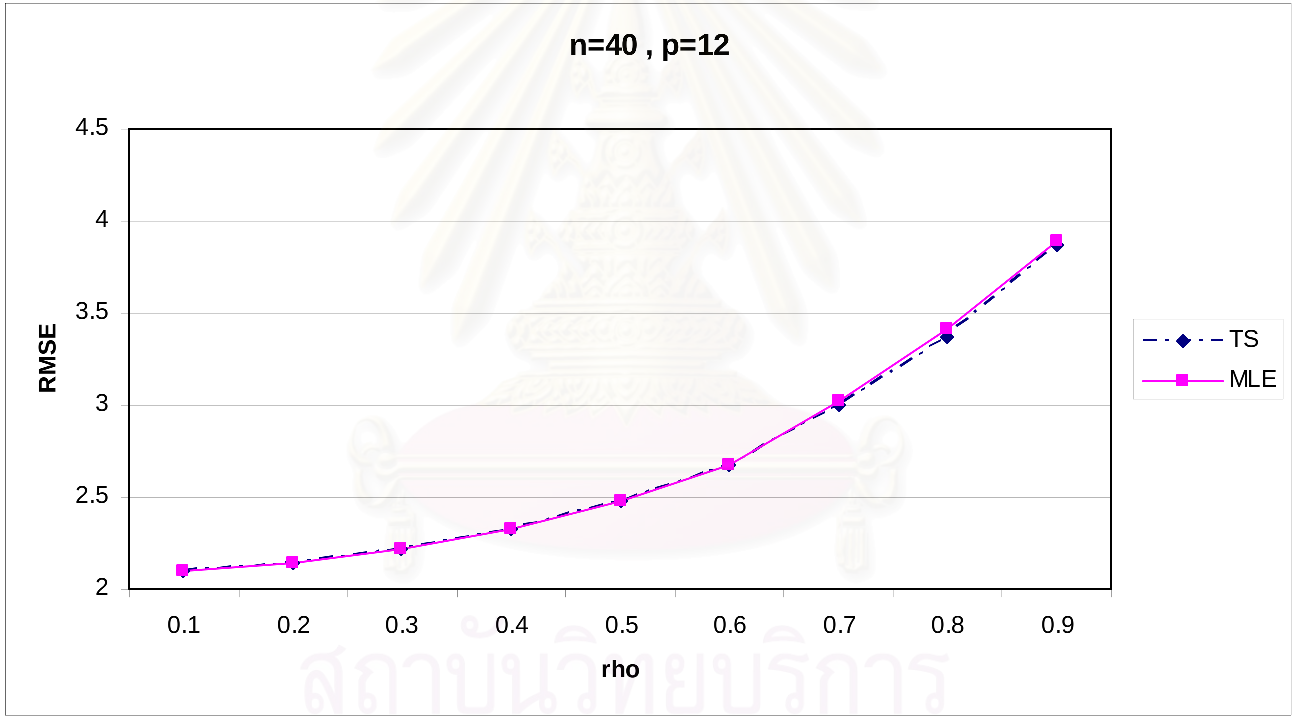
รูปที่ 4.52 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 คาบเวลา



รูปที่ 4.53 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา



รูปที่ 4.54 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา



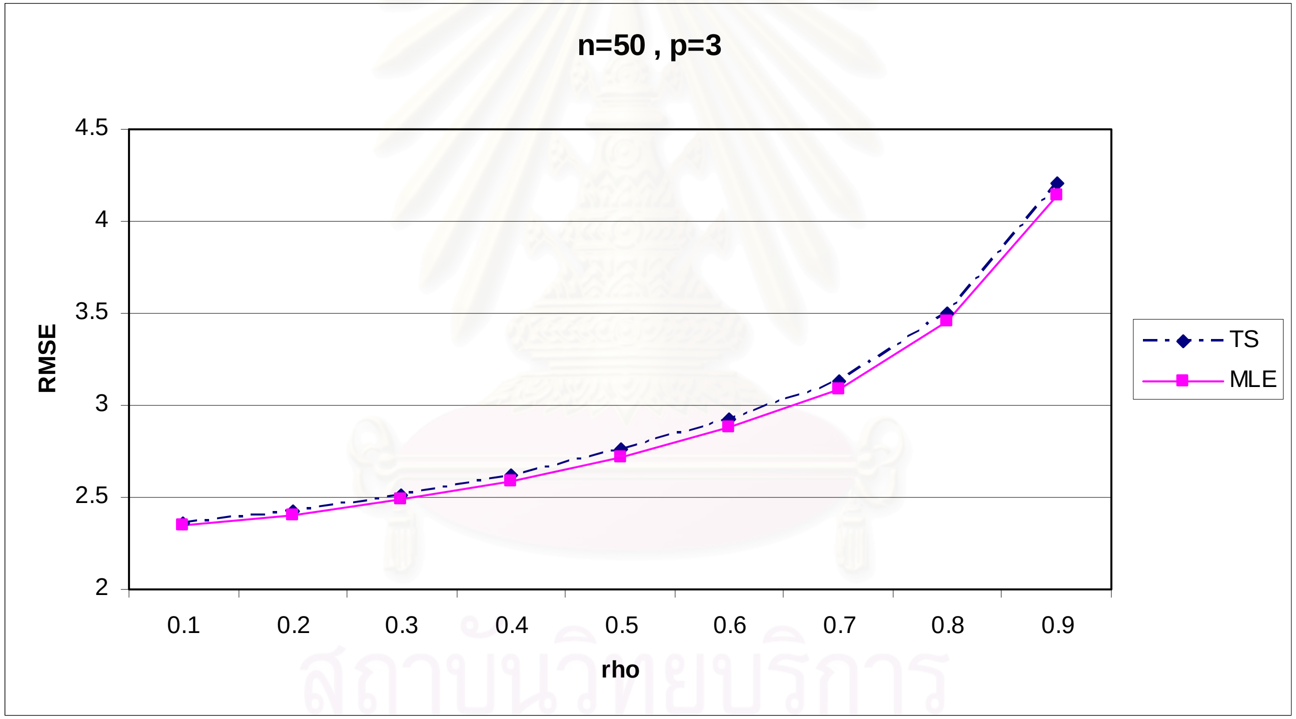
4.2.3 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40</u>

จากรูปที่ 4.52 ถึง 4.54 ซึ่งแสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ จำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา ตามลำดับ สรุปผลได้ดังนี้

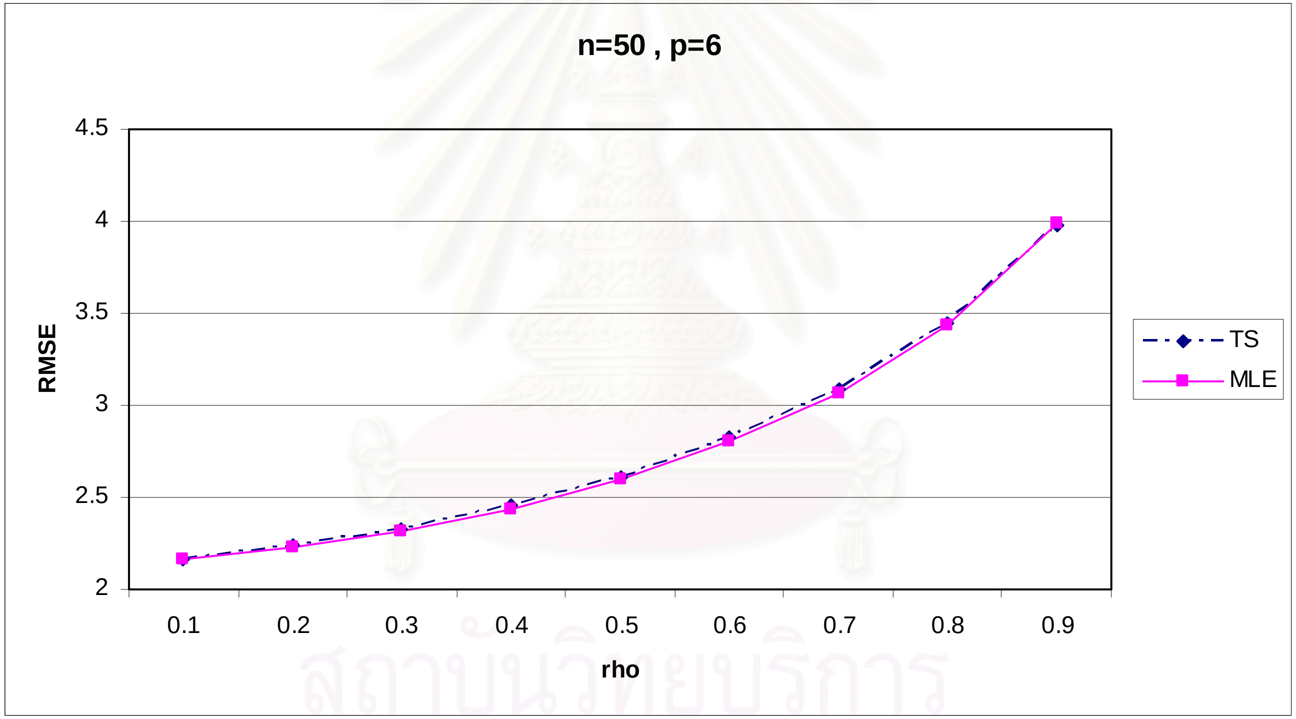
- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำและปานกลาง (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 และ 0.6) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ว วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (3 , 6 และ 12 คาบเวลา) *<u>ยกเว้น</u>* ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 , 0.8 และ 0.9) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ว วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา *<u>ยกเว้น</u>* ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์อันดับสูง วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

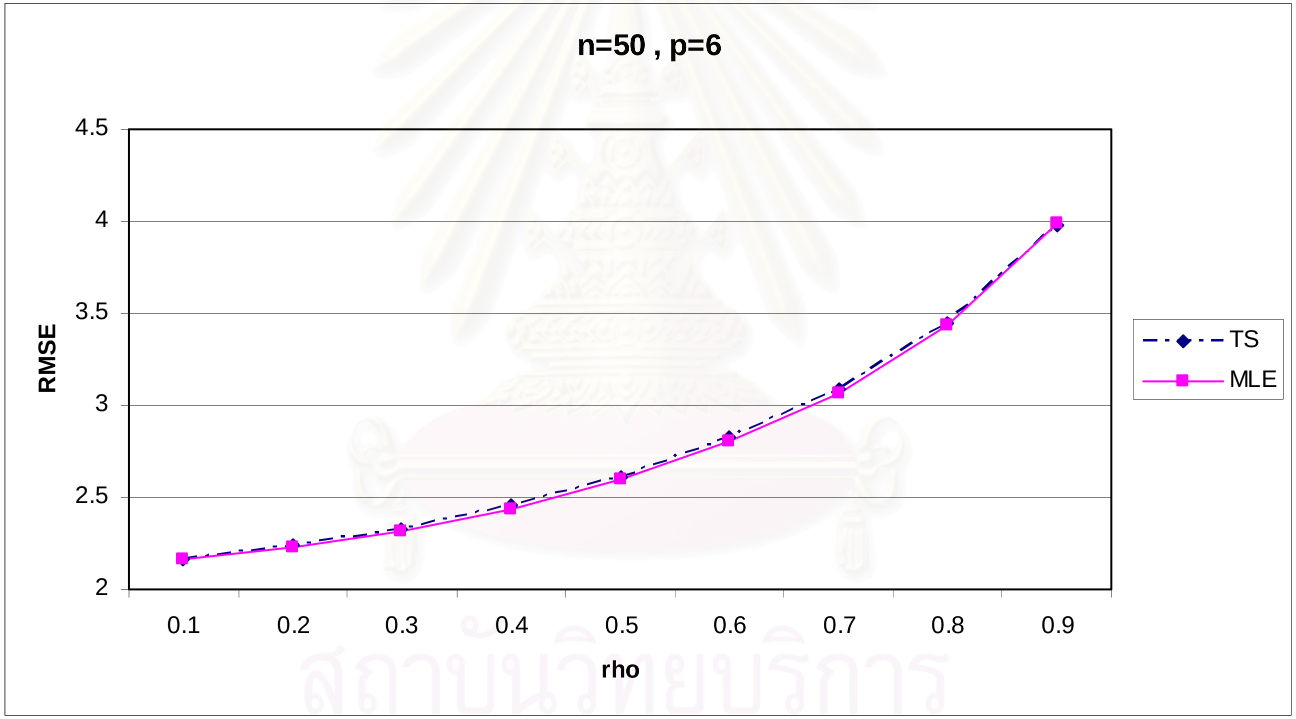
รูปที่ 4.55 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 คาบเวลา



รูปที่ 4.56 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา



รูปที่ 4.57 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา



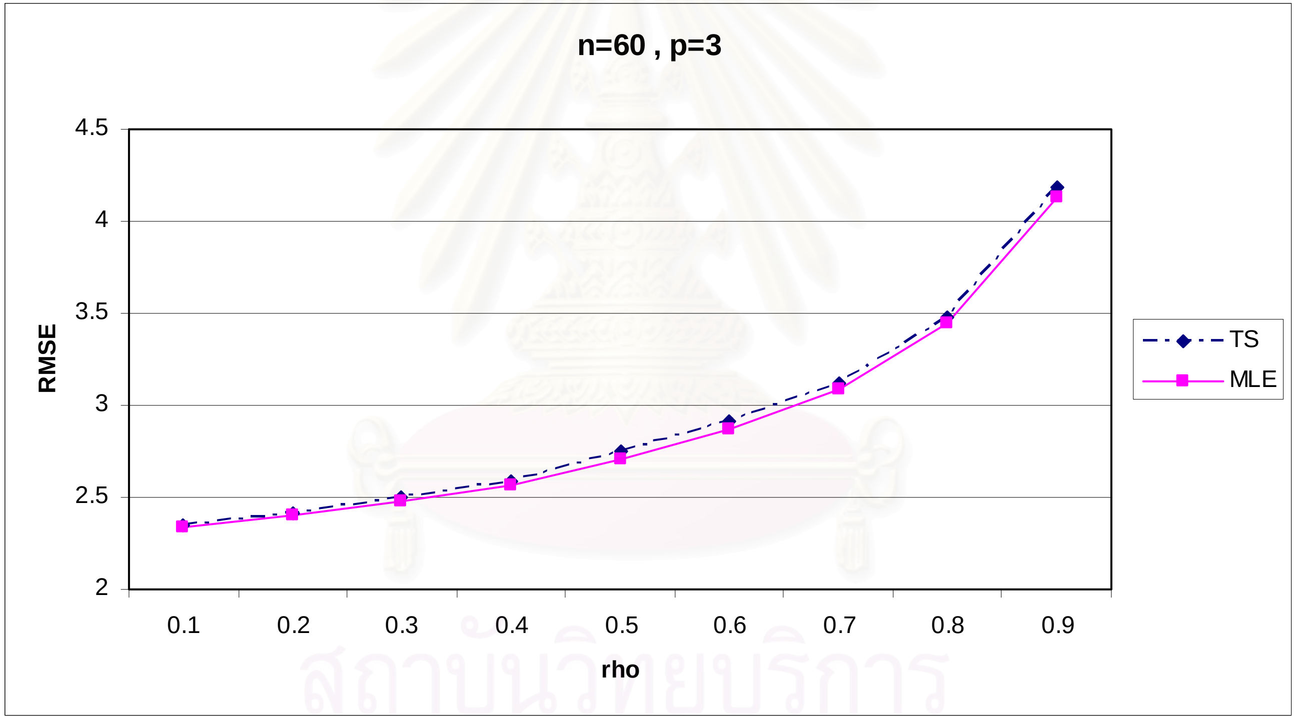
4.2.4 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50</u>

จากรูปที่ 4.55 ถึง 4.57 ซึ่งแสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ จำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา ตามลำดับ สรุปผลได้ดังนี้

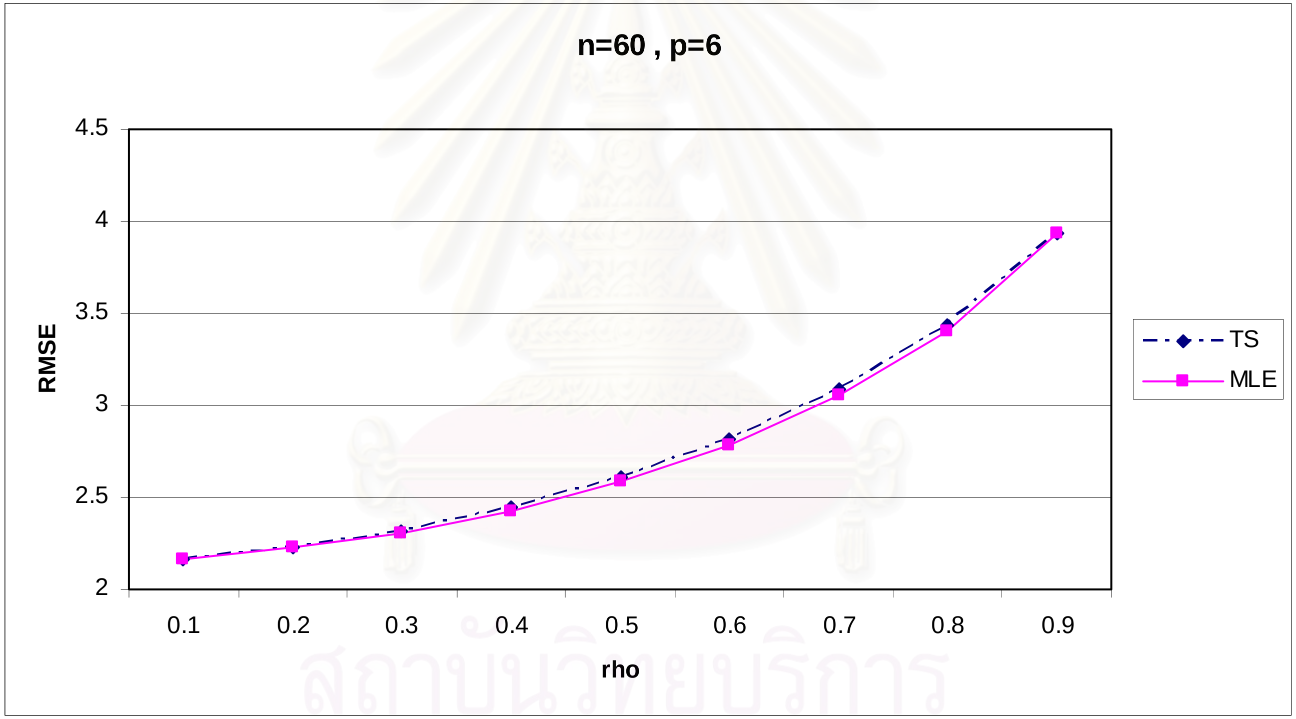
- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำและปานกลาง (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 และ 0.6) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ว วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (3 , 6 และ 12 คาบเวลา) *<u>ยกเว้น</u>* ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 , 0.8 และ 0.9) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ว วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา *<u>ยกเว้น</u>* ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์อันดับสูง วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

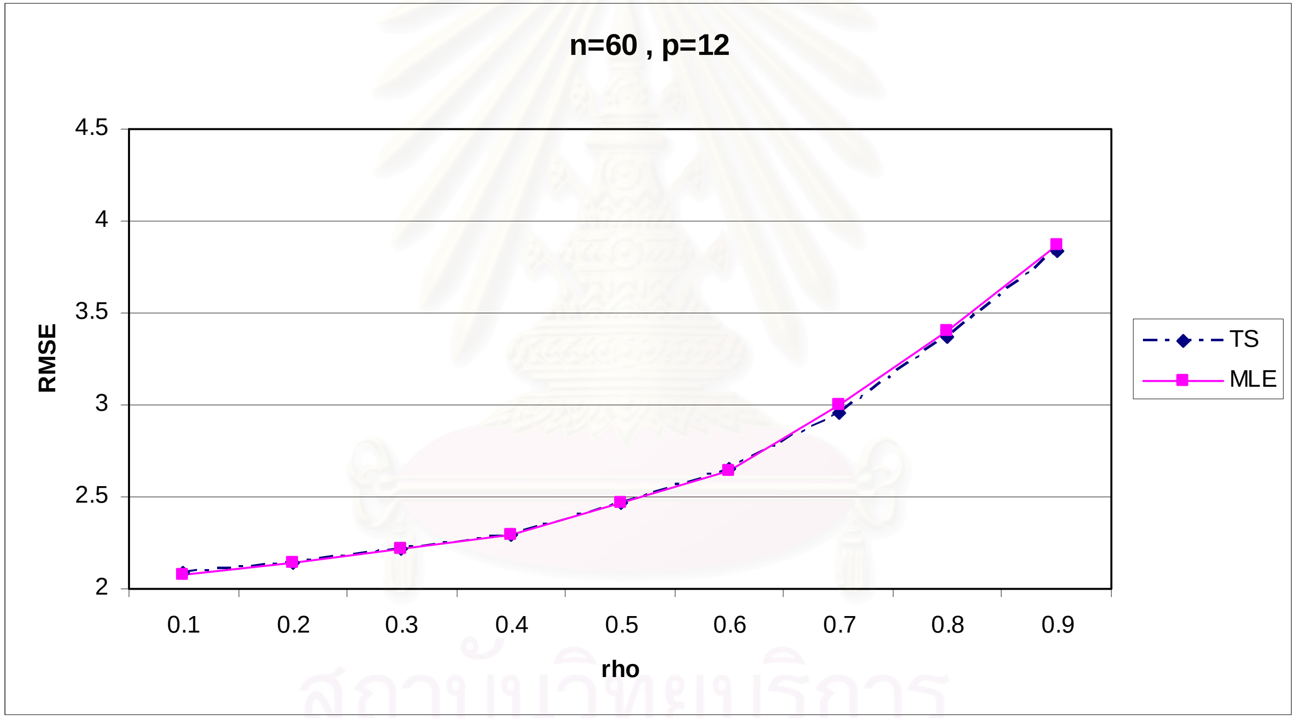
รูปที่ 4.58 **แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 คาบเวลา**



รูปที่ 4.59 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา



รูปที่ 4.60 แสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60 และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา



4.2.5 <u>เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60</u>

จากรูปที่ 4.58 ถึง 4.60 ซึ่งแสดงค่า RMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ที่อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ จำแนกตามระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลาตามลำดับ สรุปผลได้ดังนี้

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำและปานกลาง (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 และ 0.6) พบว่า วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ในทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ (3 , 6 และ 12 คาบเวลา)

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 , 0.8 และ 0.9) พบว่า โดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา <u>*ยกเว้น*</u> ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์อันดับสูงวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่า RMSE ต่ำสุด

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น และวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุด

สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ได้ทำการศึกษาภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนดขึ้นดังนี้

1. สัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 9 ระดับ คือ 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 และ 0.9
2. ขนาดตัวอย่าง 5 ขนาด คือ 20 , 30 , 40 , 50 และ 60
3. ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ช่วงเวลา คือ 3 , 6 และ 12 คาบเวลา

ซึ่งเกณฑ์ในการเปรียบเทียบจะพิจารณาจากค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เพื่อต้องการหาข้อสรุปว่าวิธีการใดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ได้จำลองขึ้นมาในการวิจัยครั้งนี้

สรุปผลการวิจัย

1. จากการเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี สามารถสรุปผลโดยจำแนกตามอัตตสหสัมพันธ์ได้ดังนี้

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับต่ำ (0.1 ถึง 0.3)

วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในทุกขนาดตัวอย่าง และทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับปานกลาง (0.4 ถึง 0.6)

โดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในทุกขนาดตัวอย่าง และทุกระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ

<u>ยกเว้น</u> ที่อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 12 คาบเวลา และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 และ 50 วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

- เมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูง (0.7 ถึง 0.9)

โดยส่วนใหญ่แล้ววิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 3 และ 6 คาบเวลา ในทุกขนาดตัวอย่าง <u>ยกเว้น</u> ที่อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9 ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ 6 คาบเวลา และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 , 40 , 50 และ 60 และที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา ในทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์ระดับสูง และทุกขนาดตัวอย่าง วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

2. ผลกระทบจากปัจจัยต่าง ๆ ที่มีต่อค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยสรุปได้ดังนี้

- เมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างและระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำคงที่ พบว่า เมื่อค่าอัตตสหสัมพันธ์เพิ่มขึ้น (จาก 0.1 ถึง 0.9) จะส่งผลให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย แสดงว่าค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแปรผันตามอัตตสหสัมพันธ์เพราะข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นควรที่จะไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกันและเมื่อไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ความผิดพลาดก็จะเกิดขึ้นได้น้อยทำให้ค่าประมาณที่ได้มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าข้อมูลที่มีสหสัมพันธ์กันและถ้ายิ่งข้อมูลมีความสัมพันธ์กันมากขึ้นก็จะยิ่งทำให้เกิดความผิดพลาดในการประมาณค่ามากขึ้นตามไปด้วย

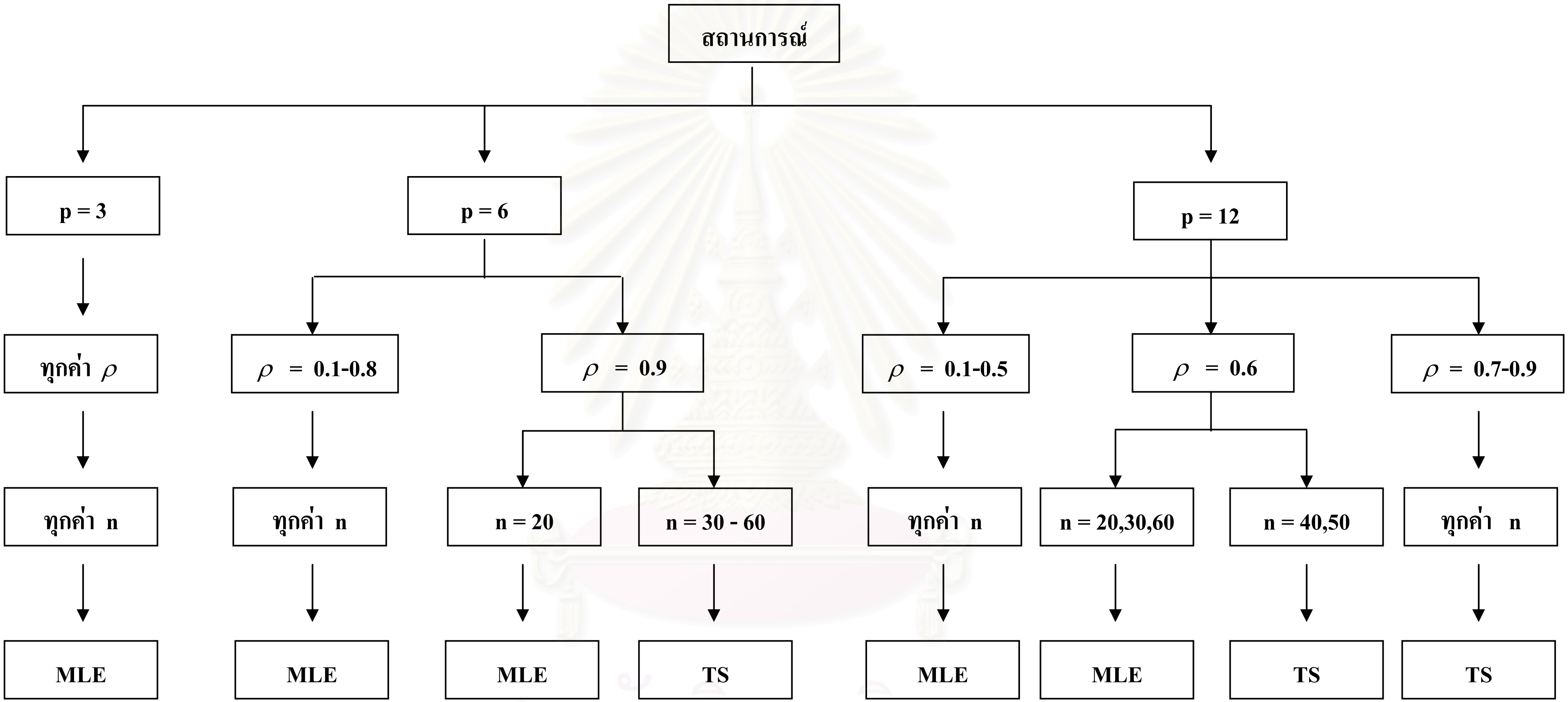
- เมื่อกำหนดให้อัตตสหสัมพันธ์และระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำคงที่ พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น (จาก 20 ถึง 60) จะส่งผลให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าลดลง แสดงว่าค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแปรผกผันกับขนาดตัวอย่างเพราะขนาดตัวอย่างมีผลต่อค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ ถ้ายิ่งมีจำนวนตัวอย่างมากขึ้นค่าประมาณที่ได้ก็จะยิ่งเข้าใกล้ค่าจริงมากขึ้นซึ่งทำให้ความผิดพลาดในการประมาณลดลง

- เมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างและอัตตสหสัมพันธ์คงที่ พบว่า เมื่อระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเพิ่มขึ้น (จาก 3 ถึง 6 และ 12 คาบเวลา) จะส่งผลให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าลดลง แสดงว่าค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแปรผกผันกับ

ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเหตุผลในทำนองเดียวกับข้างต้นเพราะเมื่อระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำมากขึ้นก็เท่ากับว่าขนาดตัวอย่างก็จะมากขึ้นตามไปด้วยเพราะว่าจำนวนขนาดเท่ากับ $n \times p$

เพื่อความสะดวกในการนำวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ไปใช้จึงได้ทำการสรุปเป็นแผนผังดังในรูปที่ 5.1 ดังนี้

รูปที่ 5.1 แสดงการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสถานการณ์ต่าง ๆ



หมายเหตุ

TS	หมายถึง	วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น
MLE	หมายถึง	วิธีการประมาณค่าด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
p	หมายถึง	ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำ
ρ	หมายถึง	ระดับสหสัมพันธ์
n	หมายถึง	ขนาดตัวอย่าง

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยครั้งนี้จะเสนอแนะเป็น 2 ด้าน คือ

1. ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

- ควรตรวจสอบลักษณะข้อมูลความคลาดเคลื่อนเบื้องต้นก่อนว่ามีลักษณะอย่างไร ตรงตามข้อตกลงเบื้องต้นหรือไม่ เพื่อที่จะได้พิจารณาว่าวิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสม

- การหาค่าประมาณจากวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดนั้น ถึงแม้ว่าในการวิจัยครั้งนี้พบว่าโดยส่วนใหญ่แล้ว วิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดจะให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด ซึ่งหมายความว่าจะให้ค่าประมาณที่ดีที่สุด เมื่อข้อมูลเกิดอัตตสหสัมพันธ์ในรูปแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง แต่ยังไม่ได้มีการทดสอบคุณสมบัติที่ดีของตัวประมาณ ดังนั้นในการนำไปใช้จึงควรมีการศึกษาเพิ่มเติมถึงคุณสมบัติของตัวประมาณเพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

- วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นนั้น ในการวิจัยครั้งนี้พบว่าจะให้ค่าประมาณที่ดีเมื่ออัตตสหสัมพันธ์มีระดับสูงและระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเพิ่มขึ้น แต่ถ้าพิจารณาค่าโดยส่วนใหญ่แล้ว ถึงแม้ว่าผลการประมาณค่าจะด้อยกว่าวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดแต่ก็ไม่มากนักซึ่งอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้และวิธีการคำนวณก็ทำได้ง่ายกว่ากันมาก ดังนั้นในการนำไปใช้งานจริงจึงควรที่จะเลือกใช้วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น

- ในการวิจัยครั้งนี้พบว่าวิธีการประมาณค่าทั้งสองวิธีให้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยไม่แตกต่างกันมากนักดังนั้นสามารถที่จะใช้วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นแทนวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดได้เพราะวิธีการประมาณค่าด้วยความควรจะเป็นสูงสุดนั้นจะมีข้อด้อยในกรณีที่เราไม่ทราบฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลแต่ในขณะที่วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นนั้นเราไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลก็สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้และวิธีการประมาณค่าสามารถทำได้สะดวกกว่าในทางปฏิบัติ

2. ด้านการวิจัย

- จากผลสรุปที่ได้เมื่อพิจารณาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้ว พบว่าค่าที่ได้ไม่แตกต่างกันมากนักอาจจะเป็นเพราะว่าในขั้นตอนของการกำหนดค่าให้ $\sigma_u^2 = 4$ นั้นมีค่าน้อยเกินไปแต่ถ้ากำหนดให้มีค่ามากกว่านี้จะทำให้สามารถเห็นความแตกต่างของค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีการประมาณค่าทั้งสองวิธีนี้ได้ชัดเจนขึ้น

- จากผลสรุปที่ได้เมื่อพิจารณาค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้ว พบว่าค่าที่ได้ไม่แตกต่างกันมากนักดังนั้นควรที่จะทำการตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (SD) ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี ถ้าให้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสูงแสดงว่าวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธีนั้นไม่แตกต่างกันและในทางตรงข้าม ถ้าให้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานต่ำแสดงว่าวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธีนั้นแตกต่างกัน

- ควรศึกษาความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนในรูปแบบอื่น ๆ

- ควรศึกษาในกรณีระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำมากกว่านี้

- ควรศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีอื่น ๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

จันทร์เพ็ญ ศรีธวัชพงศ์. การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายเมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์และมีค่าผิดปกติ.วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ พาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2540.

ธีระพร วีระถาวร. การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง: โครงสร้างและความหมาย.พิมพ์ครั้งที่ 2. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,2536.

วิลาสินี จันทราวุฒิ.การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว.วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ พาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

ภาษาอังกฤษ

Anant M. Kshirsagar.Multivariate Analysis.vol.2.New York : Marcel dekker,1986.

Andreas Krause Melvin Olson.The Basics of S and S-Plus. Second Edition. New York:Springer-Verlag,2000.

Charles S. Davis.Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements.New York:Springer-Verlag,2002.

Edward W.Frees and Chunfang Jin. Empirical Standard Errors for Longitudinal Data Mixed Linear Models.University of Wisconsin – Madison , 2003.

Hussein Mansour,Erik V Nordheim and J.J. Rutledge.Maximum Likelihood Estimation of Variance Components in Repeated Measures Designs Assuming Autoregressive Errors.Biometrics 41 (1985) : 287-294.

John J.Spitzer. Small - Sample Properties of Nonlinear Least Squares and Maximum Likelihood Estimators in the Context of Autocorrelated Errors.Journal of the American Statistical Association 74 (1979) : 41 – 47.

Koteswara Rao Kadiyaly. A Transformation Used to Circumvent the Problem of Autocorrelation.Econometrica 36 (1968) : 93 – 96.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก
โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

ตัวอย่างโปรแกรม S-Plus 2000 สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของข้อมูลระยะยาว เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

```
n_20
p_3
rho_0.1
mean_10
var_4
beta1_1
round_500
sum.TS_array(0,dim=c(1,1))
sum.MLE_array(0,dim=c(1,1))

#####    Normal   Function    #####
Seed_16807
Rnd <- function(seed)
    {
        a_7^5
        m_(2^31)-1
        x1_(a*Seed)  %% m
        z_x1/m
        assign("Seed",x1,where=1)
        return(z)
    }
Normal <- function(mean,var)
    {
        repeat{
            u1_Rnd(seed)
            u2_Rnd(seed)
```

```
            v1_2*u1-1
            v2_2*u2-1
            s_(v1^2)+(v2^2)
            if (s <= 1) break }
        z1_sqrt(-2*log(s)/s)*v1
        z2_sqrt(-2*log(s)/s)*v2
        x_z1*sqrt(var)+mean
        y_z2*sqrt(var)+mean
        return(x)
    }

#######     Fixed     #######
#####    Parameter    #####
gamma_array(,dim=c(n,1))
for (i in 1:n)
{
    gamma[i,]_1
}
gammai_matrix(gamma,n,1)
beta_array(,dim=c((n+1),1))
beta_rbind(gammai,beta1)

#####    Generate  x    #####
x_array(,dim=c(n*p,1))
for (i in 1:(n*p))
{
    x[i,]_Normal(mean,var)
}
x1_array(0, dim = c((n*p),n))
k_0
for(i in 1:n)
    for (j in 1:p)
```

```
    {
        k_k+1
        x1[k,i]_1
    }
x.matrix_array(,dim=c((n*p),(n+1)))
x.matrix_cbind(x1,x)

#######     Start   Loop     #######

for(l in 1:round)
{

#####     OLS     #####
#####     Generate  Error     #####
u_array(,dim=c(n*p,1))
error_array(,dim=c(n*p,1))
for (i in 1:(n*p))
{
    u[i,]_Normal(0,var)
}
k_0
for(i in 1:n)
    for(j in 1:p)
    {
        k_k+1
        if(j= =1)
            error[k]_u[k]
        else
            error[k]_(rho*error[k-1])+u[k]
    }
#####     y   real     #####
y_array(,dim=c(n*p,1))
y_((x.matrix%*%beta)+error)
```

```
betahat_ginverse(t(x.matrix)%*%x.matrix)%*%(t(x.matrix)%*%y)
errorhat_y-(x.matrix%*%betahat)
errorhat.t_array(,dim=c(n*(p-1),1))
k_0
w_0
for (i in 1:n)
    for(j in 1:p)
    {k_k+1
        if (k= =(i-1)*p+1)
            remove.row(errorhat,(i-1)*p+1,1)
        else
            {
                w_w+1
                errorhat.t[w]_errorhat[k]
            }
    }
errorhat.t1_array(,dim=c(n*(p-1),1))
k_0
w_0
for (i in 1:n)
    for(j in 1:p)
    {k_k+1
        if (k= =i*p)
            remove.row(errorhat,i*p,1)
        else
            {
                w_w+1
                errorhat.t1[w]_errorhat[k]
            }
    }
rhohat_(sum(t(errorhat.t1)%*%errorhat.t))/(sum(errorhat.t1^2))
```

#######   Two - Stage   Estimation   #######

```
vi.TS_array(,dim=c(p,p))
for (i in 1:p)
    for(j in 1:p)
    {
        sum_0
        for(l in 0:(min(i,j)-1))
        sum_sum+rhohat^(2*l)
        vi.TS[i,j]_rhohat^abs(i-j)*sum
    }
v.TS_array(0,dim=c((n*p),(n*p)))
w_0
k_0
for (i in 1:(n*p))
{
    k_k+1
    if(k>p)
        {
            k_1
            w_w+p
        }
            for (j in 1:p)
            {
                v.TS[i,(j+w)]_vi.TS[k,j]
            }
}
vinverse.TS_ginverse(v.TS)
betahat.TS_(ginverse(t(x.matrix)%*%vinverse.TS%*%x.matrix))%*%(t(x.matrix)%*%vinverse.
    TS%*%y)

#####    y   Forcast    #####

yhat.TS_x.matrix%*%betahat.TS
```

```
 k_0
for (i in 1:(n*p))
{
      k_k+1
      ydiff.TS[i]_(y[i]-yhat.TS[i])^2
      sum.TS_sum.TS+ydiff.TS[k]
}
```

####### Maximum Likelihood Estimation #######

```
k_0
a_0
b_0
c_0
p1_array(,dim=c(n,1))
p2_array(,dim=c(n,1))
p3_array(,dim=c(n,1))
for(i in 1:n)
      for(j in 1:p)
      {
            k_k+1
            if(j==1)
            {
                  a_a+1
                  p1[a]_y[k]
            }
                  else
                  if(j==2)
            {
                  b_b+1
                  p2[b]_y[k]
            }
```

```
            else
        {
            c_c+1
            p3[c]_y[k]
        }
    }

#####   p=3   ####
matrix.p3_cbind(p1,p2,p3)
cov.p3_var(matrix.p3)
s_array(,dim=c(p,p))
k_0
for(i in 1:p)
    for(j in 1:p)
    {
        k_k+1
        s[k]_cov.p3[i,j]
    }
rhohat.MLE_(s[2]+s[4]+s[6]+s[8])/(2*(s[1]+s[5]))
varhat.MLE_((1+rhohat.MLE^2)*s[1]-rhohat.MLE*s[2]-
    rhohat.MLE*s[4]+(1+rhohat.MLE^2)*s[5]-
              rhohat.MLE*s[6]+rhohat.MLE*s[8]+s[9])/3
vi.MLE_array(,dim=c(p,p))
for (i in 1:p)
    for(j in 1:p)
    {  sum_0
        for(l in 0:(min(i,j)-1))
        sum_sum+rhohat.MLE^(2*l)
        vi.MLE[i,j]_rhohat.MLE^abs(i-j)*sum
    }
```

```
v.MLE_array(0,dim=c((n*p),(n*p)))
w_0
k_0
for (i in 1:(n*p))
{
       k_k+1
      if(k>p)
            {
                  k_1
                  w_w+p
            }
                  for (j in 1:p)
                  {
                        v.MLE[i,(j+w)]_vi.MLE[k,j]
                  }
}
sigmahat.inverse_ginverse(varhat.MLE*v.MLE)
betahat.MLE_ginverse(t(x.matrix)%*%sigmahat.inverse%*%x.matrix)%*%(t(x.matrix)%*%
                     sigmahat.inverse%*%y)

#####     y   Forcast     #####
yhat.MLE_x.matrix%*%betahat.MLE

k_0
for (i in 1:(n*p))
{
      k_k+1
      ydiff.MLE[i]_(y[i]-yhat.MLE[i])^2
      sum.MLE_sum.MLE+ydiff.MLE[k]
}
```

} **(End Loop)**

```
#####       RMSE       #####

rmse.TS_sqrt(sum.TS/(n*p*round))
rmse.MLE_sqrt(sum.MLE/(n*p*round))


print(rmse.TS)
print(rmse.MLE)
```

ภาคผนวก ข

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างโปรแกรม Maple สำหรับการแก้สมการและสูตรในการคำนวณหาค่าประมาณ $\hat{\sigma}_u^2$ และ $\hat{\rho}$ จากวิธีการประมาณค่าด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation : MLE) แสดงได้ดังนี้

<u>**กรณีที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 3 คาบเวลา**</u>

จาก

$$V := \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1+\rho^2 & \rho(1+\rho^2) \\ \rho^2 & \rho(1+\rho^2) & 1+\rho^2+\rho^4 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\,\rho & \sigma^2\,\rho^2 \\ \sigma^2\,\rho & \sigma^2\,(1+\rho^2) & \sigma^2\,\rho(1+\rho^2) \\ \sigma^2\,\rho^2 & \sigma^2\,\rho(1+\rho^2) & \sigma^2\,(1+\rho^2+\rho^4) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} := \begin{bmatrix} \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

และจะได้

$$tr\,(\Sigma^{-1}V) := \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho^2}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2} + \frac{1+\rho^2+\rho^4}{\sigma^2}$$

กำหนดค่าเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่างเป็น

$$S := \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \\ s4 & s5 & s6 \\ s7 & s8 & s9 \end{bmatrix}$$

จะได้ $tr\,(\Sigma^{-1}V\Sigma^{-1}S\,) :=$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s1}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}+\frac{s7}{\sigma^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}-\frac{\rho^3}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s8}{\sigma^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2}+\frac{s8}{\sigma^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}+\frac{\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s6}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s9}{\sigma^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{1+\rho^2+\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s6}{\sigma^2}+\frac{s9}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = -\dfrac{np}{2}\,tr\left(\Sigma^{-1}V\right) + \dfrac{np}{2}\,tr\left(\Sigma^{-1}V\,\Sigma^{-1}S\right)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
dL\_var := \frac{1}{2}\,\mathrm{np}\Bigg(&-\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}+\frac{2\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}+\frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{1+\rho^2+\rho^4}{\sigma^2}\\
&+\left(\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s1}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}+\frac{s7}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(-\frac{\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}-\frac{\rho^3}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s8}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2}+\frac{s8}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}+\frac{\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s6}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s9}{\sigma^2}\right)\\
&+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{1+\rho^2+\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s6}{\sigma^2}+\frac{s9}{\sigma^2}\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

ลดรูปได้เป็น

$$R0 \;:=$$

$$\left[\frac{np\,(-3\,\sigma^2+(1+\rho^2)\,s1-\rho\,s2-\rho\,s4+(1+\rho^2)\,s5-\rho\,s6-\rho\,s8+s9)}{2\,\sigma^4}\right]$$

กำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\sigma}_u^2$ เป็น

$$R0 := \{\sigma^2 = \left[\frac{(1+\rho^2)\,s1}{3} - \frac{\rho\,s2}{3} - \frac{\rho\,s4}{3} + \frac{(1+\rho^2)\,s5}{3} - \frac{\rho\,s6}{3} - \frac{\rho\,s8}{3} + \frac{s9}{3}\right]\}$$

จาก
$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' := \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\Psi = \dfrac{\partial T}{\partial \rho}$

จะได้
$$\Psi := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2\,\rho & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi' := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\,\rho \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $\Lambda \equiv \sigma_u^2\left(\Psi T' + T\,\Psi'\right)$

จะได้
$$\Lambda := \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 & 2\,\sigma^2\,\rho \\ \sigma^2 & 2\,\sigma^2\,\rho & \sigma^2\,(3\,\rho^2+1) \\ 2\,\sigma^2\,\rho & \sigma^2\,(3\,\rho^2+1) & \sigma^2\,(4\,\rho^3+2\,\rho) \end{bmatrix}$$

และจะได้

$$tr\,(\Sigma^{-1}\Lambda) := 2\,\rho\,(1+\rho^2) - 2\,\rho\,(3\,\rho^2+1) + 4\,\rho^3$$

$$tr\,(\Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}S\,) :=$$

$$-\rho\left(\frac{(1+\rho^2)\,s1}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s4}{\sigma^2}\right) + (1-\rho^2)\left(-\frac{\rho\,s1}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s4}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s7}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (2\,\rho\,(1+\rho^2) - \rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2} + \frac{s7}{\sigma^2}\right) + (1-\rho^2)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s2}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s5}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-\rho + 2\,\rho\,(1+\rho^2) - \rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s2}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s5}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-2\,\rho^2 + (1+\rho^2)\,(3\,\rho^2+1) - \rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2} + \frac{s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+ \rho\left(\frac{(1+\rho^2)\,s3}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s6}{\sigma^2}\right) + (1+\rho^2)\left(-\frac{\rho\,s3}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s6}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s9}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-\rho\,(3\,\rho^2+1) + 4\,\rho^3 + 2\,\rho)\left(-\frac{\rho\,s6}{\sigma^2} + \frac{s9}{\sigma^2}\right)$$

แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \rho} \;=\; -\dfrac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\,\Lambda\right) \;+\; \dfrac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\Lambda\,\Sigma^{-1}S\right)$ จะได้

$$dL\_rho := \frac{1}{2}\,\mathrm{np}\Bigg(-2\,\rho\,(1+\rho^2) + 2\,\rho\,(3\,\rho^2+1) - 4\,\rho^3 - \rho\left(\frac{(1+\rho^2)\,s1}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s4}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (1-\rho^2)\left(-\frac{\rho\,s1}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s4}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s7}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (2\,\rho\,(1+\rho^2) - \rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2} + \frac{s7}{\sigma^2}\right) + (1-\rho^2)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s2}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s5}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-\rho + 2\,\rho\,(1+\rho^2) - \rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s2}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s5}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-2\,\rho^2 + (1+\rho^2)\,(3\,\rho^2+1) - \rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2} + \frac{s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+ \rho\left(\frac{(1+\rho^2)\,s3}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s6}{\sigma^2}\right) + (1+\rho^2)\left(-\frac{\rho\,s3}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,s6}{\sigma^2} - \frac{\rho\,s9}{\sigma^2}\right)$$
$$+ (-\rho\,(3\,\rho^2+1) + 4\,\rho^3 + 2\,\rho)\left(-\frac{\rho\,s6}{\sigma^2} + \frac{s9}{\sigma^2}\right)\Bigg)$$

ลดรูปได้เป็น

$$R1 := \left[\frac{np\,(-2\,\rho\,s1 + s2 + s4 - 2\,\rho\,s5 + s6 + s8)}{2\,\sigma^2} \right]$$

กำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\rho}$ เป็น

$$R1 := \{ \rho = \frac{s2 + s4 + s6 + s8}{2\,s1 + 2\,s5} \}$$

<u>กรณีที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 6 คาบเวลา</u>

จาก $V :=$

$[1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5]$
$[\rho, 1+\rho^2, \rho(1+\rho^2), \rho^2(1+\rho^2), \rho^3(1+\rho^2), \rho^4(1+\rho^2)]$
$[\rho^2, \rho(1+\rho^2), 1+\rho^2+\rho^4, \rho(1+\rho^2+\rho^4), \rho^2(1+\rho^2+\rho^4), \rho^3(1+\rho^2+\rho^4)]$
$[\rho^3, \rho^2(1+\rho^2), \rho(1+\rho^2+\rho^4), 1+\rho^2+\rho^4+\rho^6, \rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6),$
$\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)]$
$[\rho^4, \rho^3(1+\rho^2), \rho^2(1+\rho^2+\rho^4), \rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6), 1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8,$
$\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)]$
$[\rho^5, \rho^4(1+\rho^2), \rho^3(1+\rho^2+\rho^4), \rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6), \rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)$
$, 1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10}]$

จะได้ $\Sigma :=$

$[\sigma^2, \sigma^2\rho, \sigma^2\rho^2, \sigma^2\rho^3, \sigma^2\rho^4, \sigma^2\rho^5]$
$[\sigma^2\rho, \sigma^2(1+\rho^2), \sigma^2\rho(1+\rho^2), \sigma^2\rho^2(1+\rho^2), \sigma^2\rho^3(1+\rho^2), \sigma^2\rho^4(1+\rho^2)]$
$[\sigma^2\rho^2, \sigma^2\rho(1+\rho^2), \sigma^2(1+\rho^2+\rho^4), \sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4), \sigma^2\rho^2(1+\rho^2+\rho^4),$
$\sigma^2\rho^3(1+\rho^2+\rho^4)]$
$[\sigma^2\rho^3, \sigma^2\rho^2(1+\rho^2), \sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4), \sigma^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6),$
$\sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6), \sigma^2\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)]$
$[\sigma^2\rho^4, \sigma^2\rho^3(1+\rho^2), \sigma^2\rho^2(1+\rho^2+\rho^4), \sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6),$
$\sigma^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8), \sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)]$
$[\sigma^2\rho^5, \sigma^2\rho^4(1+\rho^2), \sigma^2\rho^3(1+\rho^2+\rho^4), \sigma^2\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6),$
$\sigma^2\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8), \sigma^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10})]$

$$\Sigma^{-1} := \begin{bmatrix} \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1+\rho^2}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\sigma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

และจะได้

$tr\,(\Sigma^{-1}V) \;:=$

$$\frac{1+\rho^2}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho^2}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}$$
$$- \frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2} + \frac{(1+\rho^2)\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}$$
$$+ \frac{(1+\rho^2)\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2} - \frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}$$
$$+ \frac{1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10}}{\sigma^2}$$

กำหนดค่าเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่างเป็น

$$S := \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 & s4 & s5 & s6 \\ s7 & s8 & s9 & s10 & s11 & s12 \\ s13 & s14 & s15 & s16 & s17 & s18 \\ s19 & s20 & s21 & s22 & s23 & s24 \\ s25 & s26 & s27 & s28 & s29 & s30 \\ s31 & s32 & s33 & s34 & s35 & s36 \end{bmatrix}$$

จะได้ $tr\,(\Sigma^{-1}V\Sigma^{-1}S) :=$

$$\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s18}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s24}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s30}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}+\frac{1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10}}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s30}}{\sigma^2}+\frac{\mathit{s36}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}+\frac{\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,\mathit{s24}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s30}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s36}}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s1}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s7}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s7}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s13}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s19}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}-\frac{\rho^3}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s2}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s8}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s2}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s8}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s14}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s8}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s14}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s20}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s14}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s20}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s26}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^3}{\sigma^2}-\frac{\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s20}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s26}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s32}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^6}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^4}{\sigma^2}-\frac{\rho^4\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,\mathit{s26}}{\sigma^2}+\frac{\mathit{s32}}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s3}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s9}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,\mathit{s3}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s9}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s15}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,\mathit{s9}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s15}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s21}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,\mathit{s15}}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\mathit{s21}}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\mathit{s27}}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s21}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s27}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s33}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s27}{\sigma^2}+\frac{s33}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}-\frac{\rho^5}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s4}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s10}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s10}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s16}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s10}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s16}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s22}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s16}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s22}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s28}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s22}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s28}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s34}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho^4\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s28}{\sigma^2}+\frac{s34}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}-\frac{\rho^6}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s11}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^3}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^5}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s11}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s17}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^4\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s11}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s17}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s23}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s17}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s23}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s29}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right.$$

$$+\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\Bigg)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s29}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s35}{\sigma^2}\right)+\Bigg(-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}$$
$$+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10})}{\sigma^2}\Bigg)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}+\frac{s35}{\sigma^2}\right)$$

แทนค่าลงในสมการ $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}V\right) + \frac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}V\,\Sigma^{-1}S\right)$ จะได้

$$dL\_var := \frac{1}{2}\,\mathrm{np}\Bigg(\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s18}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s24}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}\right)+\frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}+\frac{2\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}$$
$$-\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}$$
$$-\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}$$
$$+\frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{2\,\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10}}{\sigma^2}$$
$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}+\frac{1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10}}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}+\frac{s36}{\sigma^2}\right)+$$
$$\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}+\frac{\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s24}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s30}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s36}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{1+\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s1}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s7}{\sigma^2}\right)$$
$$+\left(\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\, s7}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s13}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s19}{\sigma^2}\right)$$
$$+\left(-\frac{\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}-\frac{\rho^3}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s2}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\, s2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s8}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s14}{\sigma^2}\right)+$$
$$\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\, s8}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s14}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s20}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s14}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s20}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s26}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\rho^3}{\sigma^2}-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s20}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s26}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s32}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^6}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\rho^4}{\sigma^2}-\frac{\rho^4(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s26}{\sigma^2}+\frac{s32}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2}{\sigma^2}-\frac{\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s3}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s9}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s9}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s15}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s9}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s15}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s21}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s15}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s21}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s27}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s21}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s27}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s33}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s27}{\sigma^2}+\frac{s33}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}-\frac{\rho^5}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s4}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s10}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\rho^2}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\,s4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s10}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s16}{\sigma^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\,s10}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s16}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s22}{\sigma^2}\right)+$$

$$\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\rho\, s16}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s22}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s28}{\sigma^2}\right)+$$
$$\left(-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s22}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s28}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s34}{\sigma^2}\right)+$$
$$\left(-\frac{\rho^4(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s28}{\sigma^2}+\frac{s34}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho^4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^4}{\sigma^2}-\frac{\rho^6}{\sigma^2}\right)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}\right)$$
$$+\left(-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)^2\,\rho^3}{\sigma^2}-\frac{(1+\rho^2)\,\rho^5}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\rho\, s5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s11}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}\right)$$
$$+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho^2(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}-\frac{\rho^4(1+\rho^2+\rho^4)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s17}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}\right)+$$
$$\left(-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s23}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\rho^2)(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}\right)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s29}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s35}{\sigma^2}\right)+\left(-\frac{\rho^3(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6)}{\sigma^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\rho^2)\,\rho(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8)}{\sigma^2}-\frac{\rho\,(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\rho^8+\rho^{10})}{\sigma^2}\right)$$
$$\left.\left(-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}+\frac{s35}{\sigma^2}\right)\right)$$

ลดรูปได้เป็น

$R0 \;:=$

$$[np\,(-6\,\sigma^2+(1+\rho^2)\,s1-\rho\,s2-\rho\,s7+(1+\rho^2)\,s8-\rho\,s9-\rho\,s14+(1+\rho^2)\,s15$$
$$-\rho\,s16-\rho\,s21+(1+\rho^2)\,s22-\rho\,s23-\rho\,s28+(1+\rho^2)\,s29-\rho\,s30-\rho\,s35$$
$$+s36)\,/\,(2\,\sigma^4)]$$

กำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\sigma}_u^2$ เป็น

$$R0 := \{\sigma^2 = \left[\frac{(1+\rho^2)\,s1}{6} - \frac{\rho\, s2}{6} - \frac{\rho\, s7}{6} + \frac{(1+\rho^2)\,s8}{6} - \frac{\rho\, s9}{6} - \frac{\rho\, s14}{6} + \frac{(1+\rho^2)\,s15}{6} - \frac{\rho\, s16}{6} - \frac{\rho\, s21}{6} + \frac{(1+\rho^2)\,s22}{6} - \frac{\rho\, s23}{6} - \frac{\rho\, s28}{6} + \frac{(1+\rho^2)\,s29}{6} - \frac{\rho\, s30}{6} - \frac{\rho\, s35}{6} + \frac{s36}{6}\right]\}$$

จาก

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & 0 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' := \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ 0 & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 0 & 0 & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \rho & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\Psi = \dfrac{\partial T}{\partial \rho}$

จะได้

$$\Psi := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\rho & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\rho^2 & 2\rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4\rho^3 & 3\rho^2 & 2\rho & 1 & 0 & 0 \\ 5\rho^4 & 4\rho^3 & 3\rho^2 & 2\rho & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi' := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\rho & 3\rho^2 & 4\rho^3 & 5\rho^4 \\ 0 & 0 & 1 & 2\rho & 3\rho^2 & 4\rho^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\rho & 3\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $\Lambda \equiv \sigma_u^2 \left(\Psi T' + T \Psi' \right)$

จะได้ $\Lambda :=$

$$[0, \sigma^2, 2\sigma^2\rho, 3\sigma^2\rho^2, 4\sigma^2\rho^3, 5\sigma^2\rho^4]$$
$$[\sigma^2, 2\sigma^2\rho, \sigma^2(3\rho^2+1), \sigma^2(4\rho^3+2\rho), \sigma^2(5\rho^4+3\rho^2), \sigma^2(6\rho^5+4\rho^3)]$$
$$[2\sigma^2\rho, \sigma^2(3\rho^2+1), \sigma^2(4\rho^3+2\rho), \sigma^2(5\rho^4+3\rho^2+1),$$
$$\sigma^2(6\rho^5+4\rho^3+2\rho), \sigma^2(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2)]$$
$$[3\sigma^2\rho^2, \sigma^2(4\rho^3+2\rho), \sigma^2(5\rho^4+3\rho^2+1), \sigma^2(6\rho^5+4\rho^3+2\rho),$$
$$\sigma^2(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1), \sigma^2(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)]$$
$$[4\sigma^2\rho^3, \sigma^2(5\rho^4+3\rho^2), \sigma^2(6\rho^5+4\rho^3+2\rho), \sigma^2(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1),$$
$$\sigma^2(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho), \sigma^2(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)]$$
$$[5\sigma^2\rho^4, \sigma^2(6\rho^5+4\rho^3), \sigma^2(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2), \sigma^2(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho),$$
$$\sigma^2(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1), \sigma^2(10\rho^9+8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)]$$

และจะได้

$tr\,(\Sigma^{-1}\Lambda) :=$

$$\begin{aligned} &2\rho(1+\rho^2) - 2\rho(3\rho^2+1) + (1+\rho^2)(4\rho^3+2\rho) - 2\rho(5\rho^4+3\rho^2+1) \\ &\quad + (1+\rho^2)(6\rho^5+4\rho^3+2\rho) - 2\rho(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1) \\ &\quad + (1+\rho^2)(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho) - 2\rho(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1) + 10\rho^9 \\ &\quad + 8\rho^7 + 6\rho^5 + 4\rho^3 \end{aligned}$$

$tr\,(\Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}S\,) :=$

$$(1-\rho^2)\left(-\frac{\rho\, s1}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s7}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s13}{\sigma^2}\right)$$
$$+(2\,\rho\,(1+\rho^2)-\rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\, s7}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s13}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s19}{\sigma^2}\right)$$
$$+(3\,\rho^2\,(1+\rho^2)-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\, s13}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s19}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s25}{\sigma^2}\right)$$
$$+(4\,\rho^3\,(1+\rho^2)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2))\left(-\frac{\rho\, s19}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s25}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s31}{\sigma^2}\right)$$
$$+(5\,\rho^4\,(1+\rho^2)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3))\left(-\frac{\rho\, s25}{\sigma^2}+\frac{s31}{\sigma^2}\right)-\rho\left(\frac{(1+\rho^2)\, s1}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s7}{\sigma^2}\right)$$
$$+(1-\rho^2)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s2}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho+2\,\rho\,(1+\rho^2)-\rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\, s2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s8}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s14}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-2\,\rho^2+(1+\rho^2)\,(3\,\rho^2+1)-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\, s8}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s14}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s20}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-3\,\rho^3+(1+\rho^2)\,(4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s14}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s20}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s26}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-4\,\rho^4+(1+\rho^2)\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s20}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s26}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s32}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-5\,\rho^5+(1+\rho^2)\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3)-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2))\left(-\frac{\rho\, s26}{\sigma^2}+\frac{s32}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho+2\,\rho\,(1+\rho^2)-3\,\rho^3)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s3}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s9}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-2\,\rho^2+(1+\rho^2)\,(3\,\rho^2+1)-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\, s3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s9}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s15}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho\,(3\,\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s9}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s15}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s21}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho)+(1+\rho^2)\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s15}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s21}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s27}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2)+(1+\rho^2)\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s21}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s27}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s33}{\sigma^2}\right)+$$

$$(-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3)+(1+\rho^2)\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2)-\rho\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s27}{\sigma^2}+\frac{s33}{\sigma^2}\right)+(-2\,\rho^2+3\,\rho^2\,(1+\rho^2)-4\,\rho^4)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s4}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s10}{\sigma^2}\right)$$

$$+(-3\,\rho^3+4\,\rho^3\,(1+\rho^2)-5\,\rho^5)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}\right)+$$

$$(-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho)+(1+\rho^2)\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s11}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}\right)+$$

$$(-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s17}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$

$$+(1+\rho^2)\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-\rho\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s23}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)$$

$$+(1+\rho^2)\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s29}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s35}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$

$$+(1+\rho^2)\,(9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-\rho\,(10\,\rho^9+8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}+\frac{s35}{\sigma^2}\right)+\rho^4\left(\frac{(1+\rho^2)\, s6}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s12}{\sigma^2}\right)$$

$$+(-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2)+6\,\rho^5+4\,\rho^3)\left(-\frac{\rho\, s6}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s12}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s18}{\sigma^2}\right)$$

$$+(-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2)\left(-\frac{\rho\, s12}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s18}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s24}{\sigma^2}\right)$$

$$+(-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)+8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$

$$\left(-\frac{\rho\, s18}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s24}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}\right)+$$

$$(1-\rho\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)+9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2)$$

$$\left(-\frac{\rho\, s24}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s30}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s36}{\sigma^2}\right)+$$

$$(-\rho\,(9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)+10\,\rho^9+8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$

$$\left(-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}+\frac{s36}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(3\,\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s10}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s16}{\sigma^2}\right)+$$

$$(-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho)+(1+\rho^2)\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\,s10}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s16}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s22}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\,s16}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s22}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s28}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$
$$+(1+\rho^2)\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-\rho\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\,s22}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s28}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s34}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2)$$
$$+(1+\rho^2)\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\,s28}{\sigma^2}+\frac{s34}{\sigma^2}\right)$$

แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \rho} = -\dfrac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\Lambda\right) + \dfrac{np}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}S\right)$ จะได้

$$dL\_rho := \frac{1}{2}\,\mathrm{np}\Big(2\,\rho\,(3\,\rho^2+1)-2\,\rho\,(1+\rho^2)-4\,\rho^3-6\,\rho^5-8\,\rho^7$$
$$-(1+\rho^2)\,(4\,\rho^3+2\,\rho)+2\,\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-(1+\rho^2)\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$
$$+2\,\rho\,(7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-(1+\rho^2)\,(8\,\rho^7+6\,\rho^5+4\,\rho^3+2\,\rho)$$
$$+2\,\rho\,(9\,\rho^8+7\,\rho^6+5\,\rho^4+3\,\rho^2+1)-10\,\rho^9$$
$$+(1-\rho^2)\left(-\frac{\rho\,s1}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s7}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s13}{\sigma^2}\right)$$
$$+(2\,\rho\,(1+\rho^2)-\rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s7}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s13}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s19}{\sigma^2}\right)$$
$$+(3\,\rho^2\,(1+\rho^2)-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\,s13}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s19}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s25}{\sigma^2}\right)$$
$$+(4\,\rho^3\,(1+\rho^2)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2))\left(-\frac{\rho\,s19}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s25}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s31}{\sigma^2}\right)$$
$$+(5\,\rho^4\,(1+\rho^2)-\rho\,(6\,\rho^5+4\,\rho^3))\left(-\frac{\rho\,s25}{\sigma^2}+\frac{s31}{\sigma^2}\right)-\rho\left(\frac{(1+\rho^2)\,s1}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s7}{\sigma^2}\right)$$
$$+(1-\rho^2)\left(\frac{(1+\rho^2)\,s2}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s8}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho+2\,\rho\,(1+\rho^2)-\rho\,(3\,\rho^2+1))\left(-\frac{\rho\,s2}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s8}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s14}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-2\,\rho^2+(1+\rho^2)\,(3\,\rho^2+1)-\rho\,(4\,\rho^3+2\,\rho))\left(-\frac{\rho\,s8}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\,s14}{\sigma^2}-\frac{\rho\,s20}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-3\,\rho^3+(1+\rho^2)\,(4\,\rho^3+2\,\rho)-\rho\,(5\,\rho^4+3\,\rho^2+1))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s14}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s20}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s26}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-4\rho^4+(1+\rho^2)(5\rho^4+3\rho^2)-\rho(6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s20}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s26}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s32}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-5\rho^5+(1+\rho^2)(6\rho^5+4\rho^3)-\rho(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2))\left(-\frac{\rho\, s26}{\sigma^2}+\frac{s32}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho+2\rho(1+\rho^2)-3\rho^3)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s3}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s9}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-2\rho^2+(1+\rho^2)(3\rho^2+1)-\rho(4\rho^3+2\rho))\left(-\frac{\rho\, s3}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s9}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s15}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho(3\rho^2+1)+(1+\rho^2)(4\rho^3+2\rho)-\rho(5\rho^4+3\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s9}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s15}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s21}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho(4\rho^3+2\rho)+(1+\rho^2)(5\rho^4+3\rho^2+1)-\rho(6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s15}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s21}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s27}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho(5\rho^4+3\rho^2)+(1+\rho^2)(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)-\rho(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s21}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s27}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s33}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho(6\rho^5+4\rho^3)+(1+\rho^2)(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2)-\rho(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s27}{\sigma^2}+\frac{s33}{\sigma^2}\right)+(-2\rho^2+3\rho^2(1+\rho^2)-4\rho^4)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s4}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s10}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-3\rho^3+4\rho^3(1+\rho^2)-5\rho^5)\left(\frac{(1+\rho^2)\, s5}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho(4\rho^3+2\rho)+(1+\rho^2)(5\rho^4+3\rho^2)-\rho(6\rho^5+4\rho^3))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s5}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s11}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho(5\rho^4+3\rho^2+1)+(1+\rho^2)(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)-\rho(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s11}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s17}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}\right)+(-\rho(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)$$
$$+(1+\rho^2)(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)-\rho(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s17}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s23}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}\right)+(-\rho(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)$$
$$+(1+\rho^2)(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)-\rho(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s23}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s29}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s35}{\sigma^2}\right)+(-\rho(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)$$
$$+(1+\rho^2)(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)-\rho(10\rho^9+8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$

$$\left(-\frac{\rho\, s29}{\sigma^2}+\frac{s35}{\sigma^2}\right)+\rho^4\left(\frac{(1+\rho^2)\, s6}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s12}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho\,(5\rho^4+3\rho^2)+6\rho^5+4\rho^3)\left(-\frac{\rho\, s6}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s12}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s18}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho\,(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2)\left(-\frac{\rho\, s12}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s18}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s24}{\sigma^2}\right)$$
$$+(-\rho\,(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)+8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s18}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s24}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}\right)+$$
$$(1-\rho\,(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)+9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s24}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s30}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s36}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)+10\rho^9+8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)$$
$$\left(-\frac{\rho\, s30}{\sigma^2}+\frac{s36}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(3\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(4\rho^3+2\rho)-\rho\,(5\rho^4+3\rho^2))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s4}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s10}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s16}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(4\rho^3+2\rho)+(1+\rho^2)\,(5\rho^4+3\rho^2+1)-\rho\,(6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s10}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s16}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s22}{\sigma^2}\right)+$$
$$(-\rho\,(5\rho^4+3\rho^2+1)+(1+\rho^2)\,(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)-\rho\,(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s16}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s22}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s28}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(6\rho^5+4\rho^3+2\rho)$$
$$+(1+\rho^2)\,(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1)-\rho\,(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s22}{\sigma^2}+\frac{(1+\rho^2)\, s28}{\sigma^2}-\frac{\rho\, s34}{\sigma^2}\right)+(-\rho\,(7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2)$$
$$+(1+\rho^2)\,(8\rho^7+6\rho^5+4\rho^3+2\rho)-\rho\,(9\rho^8+7\rho^6+5\rho^4+3\rho^2+1))$$
$$\left(-\frac{\rho\, s28}{\sigma^2}+\frac{s34}{\sigma^2}\right)\Bigg)$$

ลดรูปได้เป็น

$R1\ :=$

$$[np\ (-2\rho\, s1+s2+s7-2\rho\, s8+s9+s14-2\rho\, s15+s16+s21-2\rho\, s22+s23$$
$$+s28-2\rho\, s29+s30+s35)/(2\sigma^2)]$$

กำหนดให้สมการเท่ากับศูนย์จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\rho}$ เป็น

$$R1 := \{\rho = \frac{s2+s7+s9+s14+s16+s21+s23+s28+s30+s35}{2\, s1+2\, s8+2\, s15+2\, s22+2\, s29}\}$$

<u>กรณีที่ระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูลซ้ำเท่ากับ 12 คาบเวลา</u>

ค่าประมาณของ $\hat{\sigma}_u^2$ เป็น

$$
\begin{aligned}
R0 := \{\sigma^2 = \Big[& -\frac{\rho\, s80}{12} - \frac{\rho\, s26}{12} - \frac{\rho\, s28}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s27}{12} - \frac{\rho\, s2}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s1}{12} - \frac{\rho\, s52}{12} \\
& + \frac{(1+\rho^2)\, s14}{12} - \frac{\rho\, s13}{12} - \frac{\rho\, s15}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s40}{12} - \frac{\rho\, s39}{12} - \frac{\rho\, s41}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s53}{12} \\
& - \frac{\rho\, s54}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s66}{12} - \frac{\rho\, s65}{12} - \frac{\rho\, s67}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s79}{12} - \frac{\rho\, s78}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s92}{12} \\
& - \frac{\rho\, s91}{12} - \frac{\rho\, s93}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s105}{12} - \frac{\rho\, s104}{12} - \frac{\rho\, s106}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s118}{12} - \frac{\rho\, s117}{12} \\
& - \frac{\rho\, s119}{12} + \frac{(1+\rho^2)\, s131}{12} - \frac{\rho\, s130}{12} - \frac{\rho\, s132}{12} + \frac{s144}{12} - \frac{\rho\, s143}{12} \Big]\}
\end{aligned}
$$

และค่าประมาณของ $\hat{\rho}$ เป็น

$$
\begin{aligned}
R1 := \{\rho = (& s2 + s65 + s67 + s78 + s80 + s13 + s15 + s26 + s28 + s39 + s41 + s52 + s54 \\
& + s91 + s93 + s104 + s106 + s117 + s119 + s130 + s132 + s143)/(2\, s118 + 2\, s131 \\
& + 2\, s1 + 2\, s14 + 2\, s27 + 2\, s40 + 2\, s53 + 2\, s66 + 2\, s79 + 2\, s92 + 2\, s105)\}
\end{aligned}
$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวพัชรีภรณ์ พรหมหมัด เกิดเมื่อวันที่ 29 พฤศจิกายน พ.ศ. 2522 ที่จังหวัดนครสวรรค์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (สถิติ) จากภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรสถิติศาสตร์มหาบัณฑิต ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2545