บทที่ 6

ระบบสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากับตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันที่บัสของระบบไฟฟ้ากำลัง ในโดเมนความถี่เชิงซ้อน

ระบบสมการ (system of Equations) แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า กับ ตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันที่บัสของระบบไฟฟ้ากำลังในโดเมนความถี่เชิงซ้อน หามาจากสมการแรงดันของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าและสมการโหนด (nodal equation) สมการแรงดันของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าในที่นี้หมายถึงสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า กับแรงดันที่ขั้วบัส และกระแสที่จ่ายออกจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้า ส่วนสมการโหนดหมายถึงสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของกระแสที่จ่ายเข้าที่บัสกับแรงดันที่บัสของระบบไฟฟ้า

ในบทนี้ ได้แสดงวิธีการหาระบบสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากับตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันที่ขั้วบัสโดยไม่มีตัวแปรอื่นเข้าไปเกี่ยวข้องด้วย ในการหาระบบสมการดังกล่าวนี้ ได้สมมุติว่าโหลดทางไฟฟ้า (electrical load) มีค่าคงที่และสามารถแทนได้ด้วยอิมพีแดนซ์

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการ จึงได้สมมุติว่าระบบไฟฟ้ากำลังประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้าจำนวน M เครื่องและจำนวนบัสทั้งหมดมีจำนวน N บัส การจัดเรียงหมายเลขประจำบัส เริ่มจากบัสที่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าต่ออยู่ก่อน เช่น บัสหมายเลข k ($k \le M$) เป็นบัสที่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ต่ออยู่เป็นต้น สัญลักษณ์ของตัวแปรที่ใช้ในบทที่ 6 ได้อธิบายไว้ในตารางที่ 6.1 และ 6.2

สมการแรงดันของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ใด ๆ ซึ่งได้แสดงที่มาของสมการดังกล่าวไว้ในบทที่ 4 [สมการ (4.127)] มีลักษณะดังสมการ (6.1)

$$\begin{bmatrix} E_{kR} \\ E_{kI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\delta_k & \cos\delta_k \\ -\cos\delta_k & \sin\delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{kD} \\ \tilde{E}_{kQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{k11} & Z_{k12} \\ Z_{k21} & Z_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{kR} \\ I_{kI} \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

เฟสเซอร์ความถี่กำลังในโคออร์ดิเนตอ้างอิง (Power Frequency Phasors in Reference Coordinates)	
$I_k = I_{kR} + jI_{kI}$	กระแสที่จ่ายออกจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ใด ๆ หรือ กระแสสุทธิของบัส k ใด ๆ
$\overline{E}_k = \overline{E}_{kR} + j\overline{E}_{kI}$	แรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ใด ๆ
$E_k = E_{kR} + jE_{kI}$	แรงดันที่บัส k ใด ๆ
ส่วนประกอบของเฟสเซอร์ความถี่กำลังในโคออร์ดิเนตของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า (Power Frequency Phasor Components in Generator Coordinates)	
$\overline{E}_{kD}, \overline{E}_{kQ}$	แรงดันของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ใด ๆ
แอดมิตแตนซ์และรีแอกแตนซ์	
$Y_{kk} = G_{kk} + jB_{kk}$	เซลฟ์แอดมิตแตนซ์ (self-admittance) ของบัส k ใด ๆ
$Y_{kj} = G_{kj} + jB_{kj}$	แอดมิตแตนซ์ร่วม (mutual admittance) ระหว่างบัส k กับบัส j
$\overline{X}_{kD}$	ซับทรานเซียนต์รีแอกแตนซ์ในแนวแกนตรงของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า
$\overline{X}_{kQ}$	ซับทรานเซียนต์รีแอกแตนซ์ในแนวแกนตั้งฉากของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า

ตารางที่ 6.1 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้ในบทที่ 6

$I_{k\Delta} = I_{kR\Delta} + jI_{kI\Delta}$	ตัวแปรอินครีเมนตอลของ I_k
$\ddot{E}_{k\Delta} = \ddot{E}_{kR\Delta} + j\ddot{E}_{kI\Delta}$	ตัวแปรอินครีเมนตอลของ $\ddot{E}_k$
$E_{k\Delta} = E_{kR\Delta} + jE_{kI\Delta}$	ตัวแปรอินครีเมนตอลของ E_k
$\ddot{E}_{kD\Delta}$	ตัวแปรอินครีเมนตอลของ $\ddot{E}_{kD}$
$\ddot{E}_{kQ\Delta}$	ตัวแปรอินครีเมนตอลของ $\ddot{E}_{kQ}$

ตารางที่ 6.2 สัญลักษณ์ของตัวแปรอินครีเมนตอลซึ่งใช้ในบทที่ 6

สมาชิก	ค่าของสมาชิก	ขอบเขตของดัชนี
A(2i-1,2i-1) A(2i-1,2i) A(2i,2i-1) A(2i,2i)	$Re(Y_{ii}) + G_{iw}$ $-Im(Y_{ii}) - B_{iw}$ $Im(Y_{ii}) + B_{ix}$ $Re(Y_{ii}) + G_{ix}$	(i = 1,2,...,M)
A(2k-1,2k-1) A(2k-1,2k) A(2k,2k-1) A(2k,2k)	$Re(Y_{kk})$ $-Im(Y_{kk})$ $Im(Y_{kk})$ $Re(Y_{kk})$	(k = M+1,...,N)
A(2j-1,2l-1) A(2j-1,2l) A(2j,2l-1) A(2j,2l)	$Re(Y_{jl})$ $-Im(Y_{jl})$ $Im(Y_{jl})$ $Re(Y_{jl})$	(j,l = 1,2,...,N) (j ≠ l)

ตารางที่ 6.3 แสดงค่าของสมาชิกของเมตริกซ์ [A]

โดยที่ค่าของ Z_{k11}, Z_{k12}, Z_{k21} และ Z_{k22} ในสมการ (6.1) มีค่าดังสมการ (4.128) สมการ (4.129) สมการ (4.130) และสมการ (4.131) ตามลำดับ จากการประมาณค่าสมการ (6.1) แบบเชิงเส้นได้ผลดังสมการ (6.2)

$$\begin{bmatrix} E_{kR\Delta} \\ E_{kI\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\delta_{k0} & \cos\delta_{k0} \\ -\cos\delta_{k0} & \sin\delta_{k0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E''_{kD\Delta} \\ E''_{kQ\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{kR} \\ A_{kI} \end{bmatrix} \delta_{k\Delta} - \begin{bmatrix} Z_{k110} & Z_{k120} \\ Z_{k210} & Z_{k220} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{kR\Delta} \\ I_{kI\Delta} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

โดยที่ A_{kR} และ A_{kI} มีค่าดังสมการ (6.3) และสมการ (6.4) ตามลำดับ

$$\begin{aligned} A_{kR} &= (E''_{kD0}\cos\delta_{k0} - E''_{kQ0}\sin\delta_{k0}) - \\ &\quad I_{kR0}(\partial Z_{k11}/\partial\delta_k)(\delta_k = \delta_{k0}) - \\ &\quad I_{kI0}(\partial Z_{k12}/\partial\delta_k)(\delta_k = \delta_{k0}) \\ &= (E''_{kD0}\cos\delta_{k0} - E''_{kQ0}\sin\delta_{k0}) + \\ &\quad I_{kR0}(X''_{kQ} - X''_{kD})(\cos^2\delta_{k0} - \sin^2\delta_{k0}) - \\ &\quad I_{kI0}(-2X''_{kQ}\sin\delta_{k0}\cos\delta_{k0} + 2X''_{kD}\sin\delta_{k0}\cos\delta_{k0}) \\ &= (E''_{kD0}\cos\delta_{k0} - E''_{kQ0}\sin\delta_{k0}) + \\ &\quad (X''_{kQ} - X''_{kD})I_{kR0}\cos 2\delta_{k0} + \\ &\quad (X''_{kQ} - X''_{kD})I_{kI0}\sin 2\delta_{k0} \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} A_{kI} &= (E''_{kD0}\sin\delta_{k0} + E''_{kQ0}\cos\delta_{k0}) - \\ &\quad I_{kR0}(\partial Z_{k21}/\partial\delta_k)(\delta_k = \delta_{k0}) - \\ &\quad I_{kI0}(\partial Z_{k22}/\partial\delta_k)(\delta_k = \delta_{k0}) \end{aligned}$$

$$= (\ddot{E}_{kDO}\sin\delta_{kO} + \ddot{E}_{kQO}\cos\delta_{kO}) -$$
$$I_{kRO}(-2\ddot{X}_{kQ}\sin\delta_{kO}\cos\delta_{kO} + 2\ddot{X}_{kD}\sin\delta_{kO}\cos\delta_{kO}) -$$
$$I_{kIO}(\ddot{X}_{kQ} - \ddot{X}_{kD})(-\sin^2\delta_{kO} + \cos^2\delta_{kO})$$

$$= (\ddot{E}_{kDO}\sin\delta_{kO} + \ddot{E}_{kQO}\cos\delta_{kO}) +$$
$$(\ddot{X}_{kQ} - \ddot{X}_{kD})I_{kRO}\sin 2\delta_{kO} -$$
$$(\ddot{X}_{kQ} - \ddot{X}_{kD})I_{kIO}\cos 2\delta_{kO} \qquad (6.4)$$

กำหนดให้[6]

$$\begin{bmatrix} \ddot{E}_{kR\Delta} \\ \ddot{E}_{kI\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\delta_{kO} & \cos\delta_{kO} \\ -\cos\delta_{kO} & \sin\delta_{kO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{E}_{kD\Delta} \\ \ddot{E}_{kQ\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{kR} \\ A_{kI} \end{bmatrix} \delta_{k\Delta} \qquad (6.5)$$

จากสมการ (6.2) และสมการ (6.5) ได้ความสัมพันธ์ดังสมการ (6.6)

$$\begin{bmatrix} E_{kR\Delta} \\ E_{kI\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{E}_{kR\Delta} \\ \ddot{E}_{kI\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{K110} & Z_{K120} \\ Z_{K210} & Z_{K220} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{kR\Delta} \\ I_{kI\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6.6)$$

จากการรูปสมการ (6.6) ใหม่ ได้ผลดังสมการ (6.7)

$$\begin{bmatrix} I_{kR\Delta} \\ I_{kI\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{kW} & -B_{kW} \\ B_{kX} & G_{kX} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \ddot{E}_{kR\Delta} \\ \ddot{E}_{kI\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{kR\Delta} \\ E_{kI\Delta} \end{bmatrix} \right] \qquad (6.7)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} G_{kw} & -B_{kw} \\ B_{kx} & G_{kx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k110} & Z_{k120} \\ Z_{k210} & Z_{k220} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (6.8)$$

จากสมการโหนด[8] กระแสที่จ่ายเข้าที่บัส k ใด ๆ มีค่าดังสมการ (6.9)

$$\begin{aligned} I_{kR} + jI_{kI} &= \sum_{j=1}^{N} Y_{kj}E_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} (G_{kj} + jB_{kj})(E_{jR} + jE_{jI}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} [(G_{kj}E_{jR} - B_{kj}E_{jI}) + j(G_{kj}E_{jI} + B_{kj}E_{jR})] \end{aligned} \qquad (6.9)$$

ทำการประมาณค่าสมการ (6.9) แบบเชิงเส้น ได้ผลดังสมการ (6.10)

$$I_{kR\Delta} + jI_{kI\Delta} = \sum_{j=1}^{N} [(G_{kj}E_{jR\Delta} - B_{kj}E_{jI\Delta}) + j(G_{kj}E_{jI\Delta} + B_{kj}E_{jR\Delta})] \qquad (6.10)$$

สมการ (6.10) ในรูปของเมตริกซ์ มีลักษณะดังสมการ (6.11)

$$\begin{bmatrix} I_{kR\Delta} \\ I_{kI\Delta} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \begin{bmatrix} G_{kj} & -B_{kj} \\ B_{kj} & G_{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{jR\Delta} \\ E_{jI\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6.11)$$

จากสมการ (6.7) และสมการ (6.11) ได้สมการ (6.12)

$$\begin{bmatrix} G_{kk}+G_{kw} & -B_{kk}-B_{kw} \\ B_{kk}+B_{kx} & G_{kk}+G_{kx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{kR\Delta} \\ E_{kI\Delta} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \begin{bmatrix} G_{kj} & -B_{kj} \\ B_{kj} & G_{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{jR\Delta} \\ E_{jI\Delta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} G_{kw} & -B_{kw} \\ B_{kx} & G_{kx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{E}_{kR\Delta} \\ \ddot{E}_{kI\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6.12)$$

สมการ (6.12) เป็นสมการสำหรับเครื่องกำเนิดไฟฟ้า k ใด ๆ จากการนำสมการดังกล่าวของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าทุก ๆ เครื่องมารวมกัน ได้ความสัมพันธ์ในรูปของเมตริกซ์และเวกเตอร์ดังสมการ (6.13)

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{T\Delta} \\ E_{A\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{E}_{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.13)$$

โดยที่เวกเตอร์ของแรงดันที่บัสและเวกเตอร์ของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าในสมการ (6.13) มีลักษณะดัง สมการ (6.14) สมการ (6.15) และสมการ (6.16) ตามลำดับ

$$[E_{T\Delta}] = [E_{1R\Delta}, E_{1I\Delta}, E_{2R\Delta}, E_{2I\Delta}, \ldots, E_{MR\Delta}, E_{MI\Delta}] \qquad (6.14)$$

$$[E_{A\Delta}] = [E_{kR\Delta}, E_{kI\Delta}, \ldots, E_{NR\Delta}, E_{NI\Delta}] \quad (k = M+1) \qquad (6.15)$$

$$[\ddot{E}_{\Delta}] = [\ddot{E}_{1R\Delta}, \ddot{E}_{1I\Delta}, \ddot{E}_{2R\Delta}, \ddot{E}_{2I\Delta}, \ldots \ddot{E}_{MR\Delta}, \ddot{E}_{MI\Delta}] \qquad (6.16)$$

เมตริกซ์ [A] ในสมการ (6.13) เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีมิติ 2Nx2N สมาชิกของ [A] มีค่าดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ (6.3) เมตริกซ์ [B] ในสมการ (6.13) เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีมิติ 2Mx2M สมาชิกของ [B] ส่วนใหญ่มีค่าเท่ากับศูนย์ สมาชิกซึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์มีค่าดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ (6.4)

สมการ (6.13) เป็นระบบสมการเชิงเส้นของตัวแปรอินครีเมนตอลซึ่งรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (methematical form) ของมันยังไม่ได้รับการกำหนด ในการวิเคราะห์ออสซิลเลชันความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นเองโดยวิธีการของโดเมนความถี่เชิงซ้อน ตัวแปรอินครีเมนตอลทุกตัวได้รับการกำหนดให้เป็นฟังก์ชันของไซน์เชิงซ้อน ดังนั้น ตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันจึงได้รับการกำหนดให้มีค่าดังนี้

$$E_{kR\Delta} = e_{kR}\exp(-\sigma + j\Omega) \qquad (6.17)$$

$$E_{kI\Delta} = e_{kI}\exp(-\sigma + j\Omega) \qquad (6.18)$$

$$\ddot{E}_{kR\Delta} = \ddot{e}_{kR}\exp(-\sigma + j\Omega) \qquad (6.19)$$

$$\ddot{E}_{kI\Delta} = \ddot{e}_{kI}\exp(-\sigma + j\Omega) \qquad (6.20)$$

โดยที่ e_{kR} ในสมการ (6.17) e_{kI} ในสมการ (6.18) $\ddot{e}_{kR}$ ในสมการ (6.19) และ $\ddot{e}_{kI}$ ในสมการ (6.20) เป็นเฟสเซอร์ความถี่ออสซิลเลชัน

เมื่อแทนค่าตัวแปรอินครีเมนตอลในสมการ (6.13) ด้วยฟังก์ชันไซน์เชิงซ้อน ทุก ๆ พจน์ในสมการดังกล่าวย่อมมี $\exp(-\sigma + j\Omega)$ เป็นตัวประกอบร่วมอยู่ด้วย หลังจากที่ขจัดตัวประกอบ $\exp(-\sigma + j\Omega)$ ออกไปจากสมการดังกล่าว ผลที่ได้คือสมการแสดงความสัมพันธ์ของเฟสเซอร์ความถี่ออสซิลเลชัน ดังสมการ (6.21)

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_T \\ e_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.21)$$

โดยที่

$$[e_T] = [e_{1R}, e_{1I}, e_{2R}, e_{2I}, \ldots, e_{MR}, e_{MI}] \quad (6.22)$$

$$[e_A] = [e_{kR}, e_{kI}, \ldots, e_{NR}, e_{NI}] \qquad (k = M+1) \quad (6.23)$$

$$[\acute{e}] = [\acute{e}_{1R}, \acute{e}_{1I}, \acute{e}_{2R}, \acute{e}_{2I}, \ldots \acute{e}_{MR}, \acute{e}_{MI}] \quad (6.24)$$

ทำการกำจัดแรงดันที่บัสซึ่งไม่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าต่ออยู่ ออกไปจากสมการ (6.21) กล่าวคือกำจัด $[e_A]$ ออกไปจากสมการดังกล่าว ผลที่ได้มีลักษณะดังสมการ (6.25)

$$[\acute{A}][e_T] = [B][\acute{e}] \quad (6.25)$$

ดังนั้นระบบสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันภายในของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากับตัวแปรอินครีเมนตอลของแรงดันที่บัสของระบบไฟฟ้ากำลังในโดเมนความถี่เชิงซ้อนจึงมีลักษณะดังสมการ (6.25)

สมาชิก	ค่าของสมาชิก	ขอบเขตของดัชนี
B(2i-1,2i-1)	G_{iw}	(i = 1,2,...,M)
B(2i-1,2i)	$-B_{iw}$	
B(2i,2i-1)	B_{ix}	
B(2i,2i)	G_{ix}	

ตารางที่ 6.4 สมาชิกของเมตริกซ์ [B] ซึ่งไม่เป็นศูนย์