บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงชนิดของข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง (Type of Censored Observations) การแจกแจงต่าง ๆ ของข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย และสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบเทียบความกลมกลืนในการวิจัย ซึ่งมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้

ชนิดของข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง (Type of Censored Observations)

ชนิดของข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งแบ่งออกเป็น 3 ชนิดด้วยกัน คือ

1. ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 1 (Type I Censoring หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Time Censoring) ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทนี้จะมีการกำหนดเวลาของการสำรวจหรือทดลองไว้ล่วงหน้า ซึ่งจะทำการสำรวจหรือทดลองตามระยะเวลาที่กำหนด และเมื่อครบกำหนดก็หยุดทำการทดลอง อธิบายได้ดังต่อไปนี้

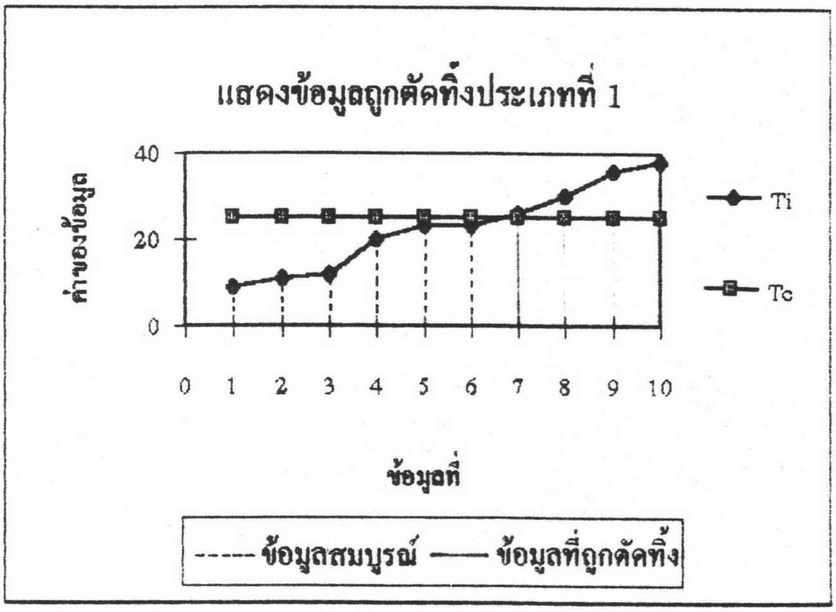
ให้ $T_1, T_2, \ldots, T_N$ เป็นตัวแปรสุ่มแต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ T_i คือระยะเวลาที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจหรือเกิดความล้มเหลวเป็นครั้งที่ i ; $i = 1, 2, \ldots, N$

T_o คือระยะเวลาของการสำรวจหรือทดลอง (Censoring Time) ซึ่งถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า

ข้อมูลที่ทำการบันทึกไว้ คือ

$$Y_i = \begin{cases} T_i & \text{ถ้า } T_i \le T_o \text{ , ซึ่ง } Y_i \text{ คือข้อมูลสมบูรณ์} \\ T_o & \text{ถ้า } T_i > T_o \text{ , ซึ่ง } Y_i \text{ คือข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง} \end{cases}$$

จะเห็นว่า $Y_1, \dots, Y_N$ เป็นตัวแปรสุ่ม แต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ Y_i คือข้อมูลที่สนใจศึกษา ซึ่งประกอบไปด้วยข้อมูลที่สมบูรณ์ และข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง ได้แสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 1 ไว้ในรูปที่ 2.1 ดังนี้



รูปที่ 2.1 แสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 1

ตัวอย่างเช่น การศึกษาอายุการใช้งานของเครื่องจักรชนิดหนึ่ง ซึ่งในการผลิตครั้งนี้ผลิตมาจำนวน 1,000 เครื่อง เนื่องจากอายุการใช้งานของเครื่องจักรแต่ละเครื่องไม่เท่ากัน ดังนั้นการรอคอยจนกระทั่งเครื่องจักรทุกเครื่องใช้การไม่ได้นั้นอาจใช้เวลานานมาก ในการควบคุมคุณภาพของเครื่องจักรชนิดนี้ ได้ทำการสุ่มเครื่องจักรจำนวน 20 เครื่องมาทำการศึกษา และเพื่อที่จะลดระยะเวลาในการรอคอย จึงได้มีการกำหนดอายุการใช้งานของเครื่องจักรที่เหมาะสม (หรือ อายุการใช้งานมาตรฐานของเครื่องจักรชนิดนี้) ไว้ล่วงหน้า สมมติว่าอายุการใช้งานที่เหมาะสมสำหรับเครื่องจักรชนิดนี้ คือ 50,000 ชั่วโมง ทำการทดลองโดยให้เครื่องจักรทั้ง 20 เครื่อง (ที่สุ่มได้) ทำงานจนกระทั่งครบ 50,000 ชั่วโมง ซึ่งในระหว่างการทดลองนี้มีเครื่องจักรจำนวน 5 เครื่องที่มีอายุการใช้งานน้อยกว่าหรือเท่ากับ 50,000 ชั่วโมง ทำการบันทึกอายุการใช้งานของเครื่องจักรทั้ง 5 เครื่องนี้ไว้ ซึ่งข้อมูลที่บันทึกได้นี้เป็นข้อมูลสมบูรณ์ เนื่องจากเป็นอายุการใช้งานจริงของเครื่องจักรทั้ง 5 เครื่อง ส่วนเครื่องจักรที่เหลือจำนวน 15 เครื่องมีอายุการใช้งานเกิน 50,000 ชั่วโมง ในการบันทึกจะทำการบันทึกว่าอายุการใช้งานของเครื่องจักรทั้ง 15 เครื่องนี้เป็น 50,000 ชั่วโมง ซึ่งข้อมูลที่บันทึกได้นี้เป็นข้อมูลถูกตัดทิ้ง เนื่องจากไม่สามารถบันทึกอายุการใช้งานจริงของเครื่องจักรทั้ง 15 เครื่องได้ เป็นต้น

2. ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2 (Type II Censoring) ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทนี้ได้จากกรณีที่ ผู้วิจัยไม่สามารถกำหนดระยะเวลาของการตัดทิ้ง (Censoring Time) ของข้อมูลที่เหมาะสมในการทดลองได้ จึงได้มีการกำหนดจำนวนข้อมูลที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจศึกษา หรือเกิดความล้มเหลวไว้ล่วงหน้าแทน โดยที่ในการทดลองจะหยุดทำการทดลอง ก็ต่อเมื่อเกิดเหตุการณ์ที่สนใจศึกษาหรือเกิดความล้มเหลวครบตามจำนวนที่กำหนดไว้ ซึ่งข้อมูลที่บันทึกได้นี้เป็นข้อมูลสมบูรณ์ อธิบายได้ดังต่อไปนี้

ให้ $T_1, T_2, \ldots, T_N$ เป็นตัวแปรสุ่ม แต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ T_i คือระยะเวลาที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจหรือความล้มเหลวเป็นครั้งที่ i ; $i = 1, 2, \ldots, N$

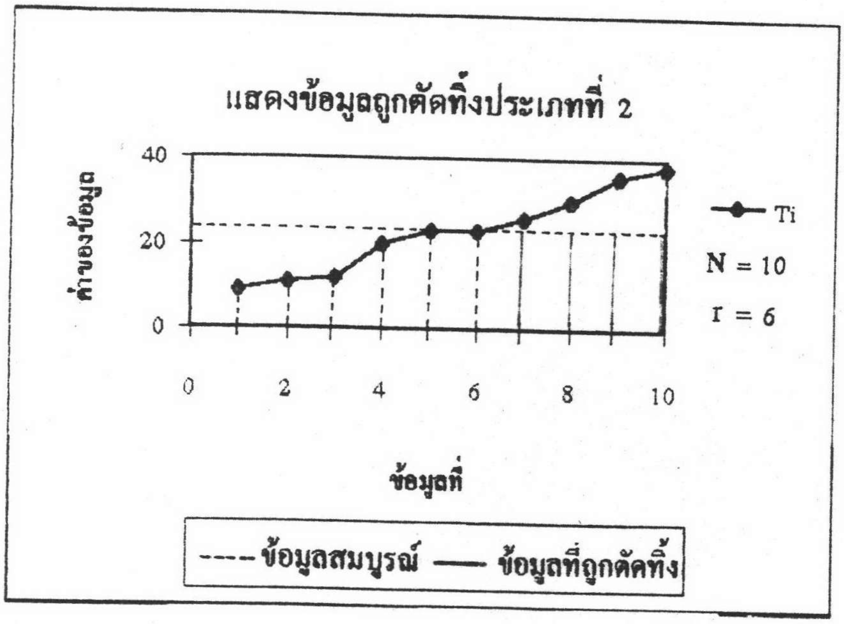
$T(1) < T(2) < \ldots < T(N)$ เป็นสถิติอันดับของ $T_1, T_2, \ldots, T_N$

r เป็นจำนวนข้อมูลที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจศึกษา หรือความล้มเหลว ถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า โดยที่ $r < N$

ข้อมูลที่ทำการบันทึกไว้เขียนในรูปสถิติอันดับได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y(1) &= T(1) \\
Y(2) &= T(2) \\
&\vdots \\
Y(r) &= T(r) \\
Y(r+1) &= T(r) \\
&\vdots \\
Y(N) &= T(r)
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $Y(1), Y(2), \ldots, Y(N)$ เป็นสถิติอันดับของข้อมูลที่สนใจศึกษา โดยที่ $Y(1), Y(2), \ldots, Y(r)$ คือข้อมูลที่สมบูรณ์ เนื่องจากค่าข้อมูลที่ถูกบันทึกเป็นค่าข้อมูลจริงตั้งแต่เริ่มการสำรวจหรือทดลองจนกระทั่งเกิดความล้มเหลว ส่วน $Y(r+1), Y(r+2), \ldots, Y(N)$ คือข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง ค่าของข้อมูลที่ถูกบันทึกไว้คือ $T(r)$ ทั้งหมด ซึ่งไม่ใช่ค่าข้อมูลที่แท้จริง ได้แสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2 ไว้ในรูปที่ 2.2 ดังนี้



รูปที่ 2.2 แสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2

ตัวอย่างเช่น การศึกษาอายุการใช้งานของเครื่องไฟฟ้าชนิดหนึ่ง ซึ่งในการผลิตครั้งนี้ทำการผลิตมาทั้งหมด 50,000 เครื่อง เนื่องจากการผลิตครั้งนี้เป็นครั้งแรกจึงไม่ทราบอายุการใช้งานที่เหมาะสม ดังนั้นในการควบคุมคุณภาพ ได้ทำการสุ่มเครื่องไฟฟ้าชนิดนี้มาทำการศึกษาจำนวน 500 เครื่อง และกำหนดล่วงหน้าว่าถ้าเกิดมีเครื่องไฟฟ้าเสียครบ 50 เครื่องให้หยุดทำการทดลอง ทำการทดลองจนกระทั่งเกิดเครื่องไฟฟ้าเสียจำนวน 50 เครื่อง ซึ่งข้อมูลของเครื่องไฟฟ้าทั้ง 50 เครื่องนี้คือข้อมูลสมบูรณ์ เนื่องจากเป็นอายุการใช้งานจริงของเครื่องไฟฟ้าที่เสีย 50 เครื่องแรก ส่วนเครื่องไฟฟ้าอีก 450 เครื่อง อายุการใช้งานที่ถูกบันทึกจะเป็นอายุการใช้งานของเครื่องไฟฟ้าเครื่องที่เสียเป็นเครื่องที่ 50 ข้อมูลที่ได้นี้จึงเป็นข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง เนื่องจากไม่ใช่อายุการใช้งานจริงของเครื่องไฟฟ้าที่เหลือ 450 เครื่อง เป็นต้น

3. ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งแบบสุ่ม (Random Censoring) ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทนี้จะถูกตัดทิ้งแบบสุ่ม โดยที่ไม่สามารถทราบล่วงหน้าว่าข้อมูลใดจะถูกตัดทิ้ง อธิบายได้ดังต่อไปนี้

ให้ $T_1, \ldots, T_N$ เป็นตัวแปรสุ่ม แต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ T_i คือระยะเวลาที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจหรือความล้มเหลวเป็นครั้งที่ i ; $i = 1, 2, \ldots, N$

$C_1, \ldots, C_N$ เป็นตัวแปรสุ่ม แต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ C_i คือระยะเวลาที่ถูกตัดทิ้ง (Censoring Time) ของข้อมูล

δ_i เป็นตัวแปรสุ่มบ่งชี้ (Indicator Random Variables)

สามารถเขียนคู่ลำดับของข้อมูลที่ทำการบันทึกได้ ดังนี้

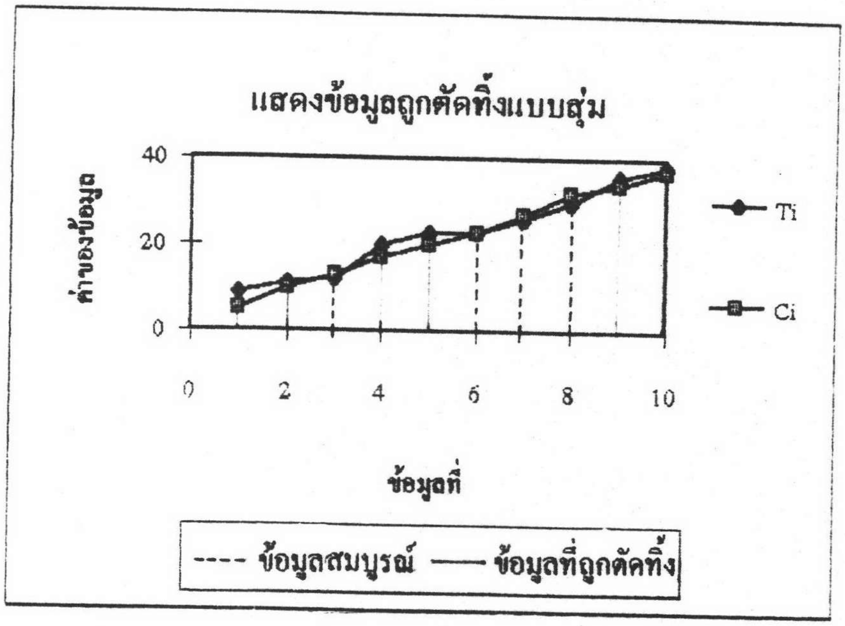
$$(Y_1, \delta_1), (Y_2, \delta_2), \ldots, (Y_N, \delta_N)$$

โดยที่

$$Y_i = \min(T_i, C_i)$$

$$\delta_i = I(T_i \leq C_i) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } T_i \leq C_i \text{ , ซึ่ง } Y_i \text{ คือข้อมูลสมบูรณ์} \\ 0 & \text{ถ้า } T_i > C_i \text{ , ซึ่ง } Y_i \text{ คือข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง} \end{cases}$$

จะเห็นว่า $Y_1, \ldots, Y_N$ เป็นตัวแปรสุ่ม แต่ละตัวมีการแจกแจงเหมือนกัน และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่ Y_i คือข้อมูลที่ถูกบันทึกไว้ ซึ่งประกอบไปด้วยข้อมูลที่สมบูรณ์และข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากค่าของ δ_i ถ้าค่าของ $\delta_i = 1$ แสดงว่าข้อมูลตัวที่ i นั้นสมบูรณ์ และถ้าค่าของ $\delta_i = 0$ แสดงว่าข้อมูลตัวที่ i นั้นถูกตัดทิ้ง ได้แสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งแบบสุ่มไว้ในรูปที่ 2.3 ดังนี้



รูปที่ 2.sแสดงข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งแบบสุ่ม

โดยส่วนใหญ่แล้วจะพบข้อมูลชนิดนี้มีทางด้านการแพทย์ ตัวอย่างเช่น ในการศึกษาถึงประสิทธิภาพในการรักษาของยาชนิดหนึ่ง โดยทำการเก็บข้อมูลของระยะเวลาในการรักษาคนไข้ (เพศเดียวกัน และมีความรุนแรงของโรคอยู่ระดับเดียวกัน) ตั้งแต่เริ่มให้ยาจนกระทั่งมีอาการเป็นปกติ ทำการทดลองใช้ยาชนิดนี้รักษาคนไข้จำนวน 30 คน เมื่อเสร็จสิ้นการรักษาแล้วพบว่า ในระหว่างที่ทำการรักษาอยู่นั้น พบว่า มีคนไข้บางรายไม่มารับยาตามที่กำหนดหลังจากที่ได้รับการรักษามาระยะหนึ่งจำนวน 5 คน ดังนั้นการบันทึกระยะเวลาการรักษาของคนไข้ทั้ง 30 คน ข้อมูลจึงประกอบไปด้วย ข้อมูลที่สมบูรณ์ 25 คน ได้แก่คนไข้ที่เข้ารับการรักษาอย่างต่อเนื่องตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งมีอาการเป็นปกติ และข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง 5 คน ได้แก่ คนไข้ที่ออกจากการรักษาก่อนที่จะมีอาการเป็นปกติ ซึ่งเราไม่สามารถทราบล่วงหน้าว่าเป็นคนไข้รายไหนจนกว่าจะเสร็จสิ้นการรักษา เป็นต้น

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ใช้ข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2 เนื่องจากผู้วิจัยกำลังศึกษา ภาควิชาสถิติประกันภัย ด้านการประกันชีวิต และมีความสนใจศึกษาการแจกแจงของระยะเวลาในการรับเงินบำนาญ หรือระยะเวลาที่จะมีชีวิตรอดต่อไปในอนาคตของผู้เอาประกันชีวิต ว่ามีการแจกแจงไวบูลล์ หรือการแจกแจงกอมเพิรตซ์ตามที่คาดหวังไว้หรือเปล่า ซึ่งในการเก็บข้อมูลนั้นเราไม่สามารถรอจนกระทั่งผู้เอาประกันชีวิตทั้งหมดเสียชีวิตได้ ดังนั้นจึงมีการกำหนดจำนวนผู้เอาประกันชีวิตที่จะเสียชีวิตไว้ล่วงหน้า เพื่อที่จะนำข้อมูลที่ได้มาทดสอบเทียบความกลมกลืนข้อมูลที่ได้นี้จึงมีลักษณะของข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2

การแจกแจงของข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

1. การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution) 2 พารามิเตอร์
   ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันสะสมอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

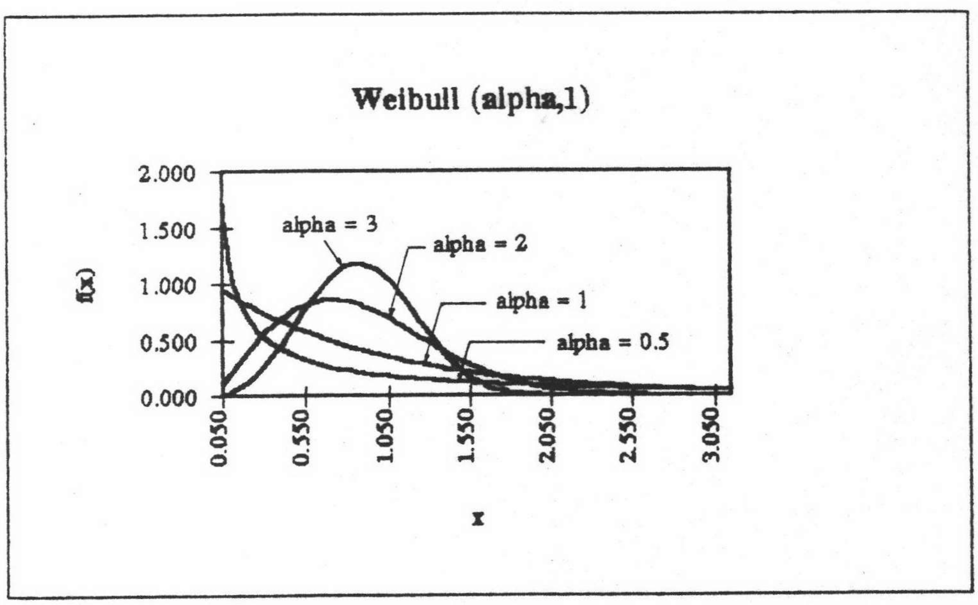
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape parameter), $\alpha > 0$

β เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter), $\beta > 0$

$$E(x) = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$V(x) = \frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$



รูปที่ 2.4 กราฟของการแจกแจงไวบูลล์ที่ $\beta = 1$ และ $\alpha = 0.5, 1, 2$ และ 3

2. การแจกแจงกอมเพิรตซ์ (Gompertz Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันสะสมอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} Bc^x \exp\left[-\frac{B}{\ln c}\left(c^x - 1\right)\right] & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

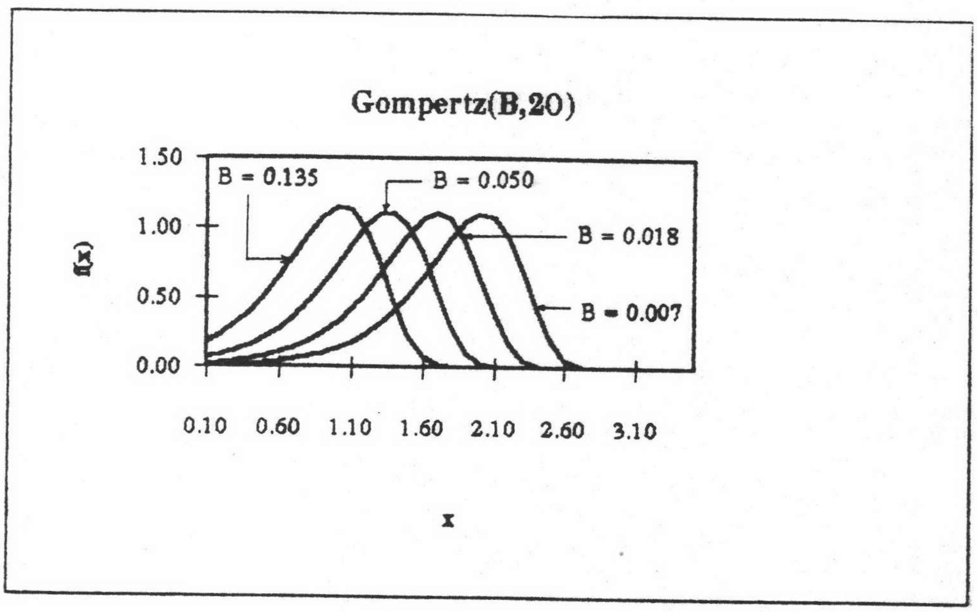
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{B}{\ln c}\left(c^x - 1\right)\right] & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อ B เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location parameter), $B > 0$

c เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter), $c > 1$

E(x) = ไม่มีรูปแบบปิด

V(x) = ไม่มีรูปแบบปิด



รูปที่ 2.5 กราฟของการแจกแจงกอมเพิรตซ์ที่ B = 0.02 และ c = 5, 10, 20 และ 50

3. การแจกแจงลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันสะสมอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\dfrac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กร ณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

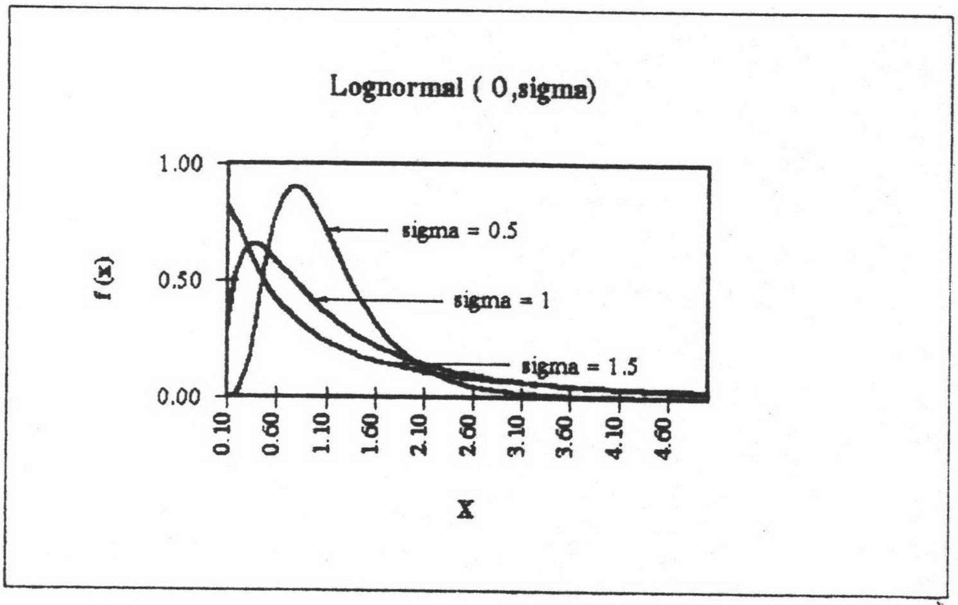
$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ σ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape parameter), $\sigma > 0$

μ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter), $\mu \in (-\infty,\infty)$

$$E(x) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

$$V(x) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$



รูปที่ 2.6 กราฟของการแจกแจงลอกนอร์มอลที่ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.5, 1$ และ 1.5

4. การแจกแจงลอกโลจีสติก (Log-logistio Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันสะสมอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\ln x - \alpha)/\beta}}{\beta x\left(1 + e^{-(\ln x - \alpha)/\beta}\right)^2} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

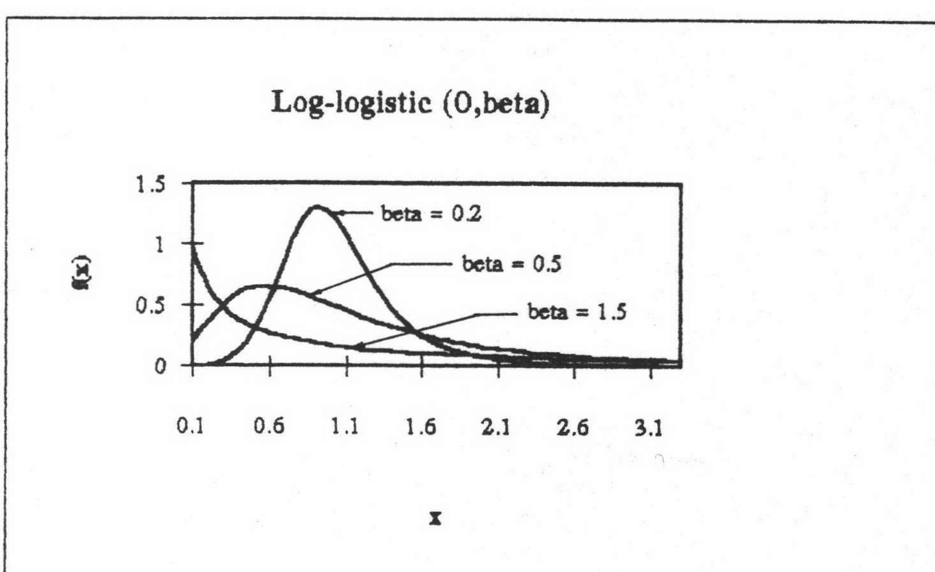
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1 + e^{-(\ln x - \alpha)/\beta}\right)} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ β เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Soale parameter), $\beta > 0$

α เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Looation parameter), $\alpha \in (-\infty,\infty)$

$$E(x) = e^{\frac{\alpha}{\beta}} \Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \qquad ; -1 < \frac{1}{\beta} < 1$$

$$V(x) = e^{\frac{-2\alpha}{\beta}}\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]; -1 < \frac{2}{\beta} < 1$$



รูปที่ 2.7 แสดงกราฟของการแจกแจงลอกโลจีสติกที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 0.2, 0.5$ และ 1.5

5. การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution) 3 พารามิเตอร์

ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันสะสมอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x - a)^{c-1} b^{-c} \exp\left[-\left(\dfrac{x - a}{b}\right)^{c}\right] & \text{ถ้า } x \geq a \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x - a}{b}\right)^{c}} & \text{ถ้า } x \geq a \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

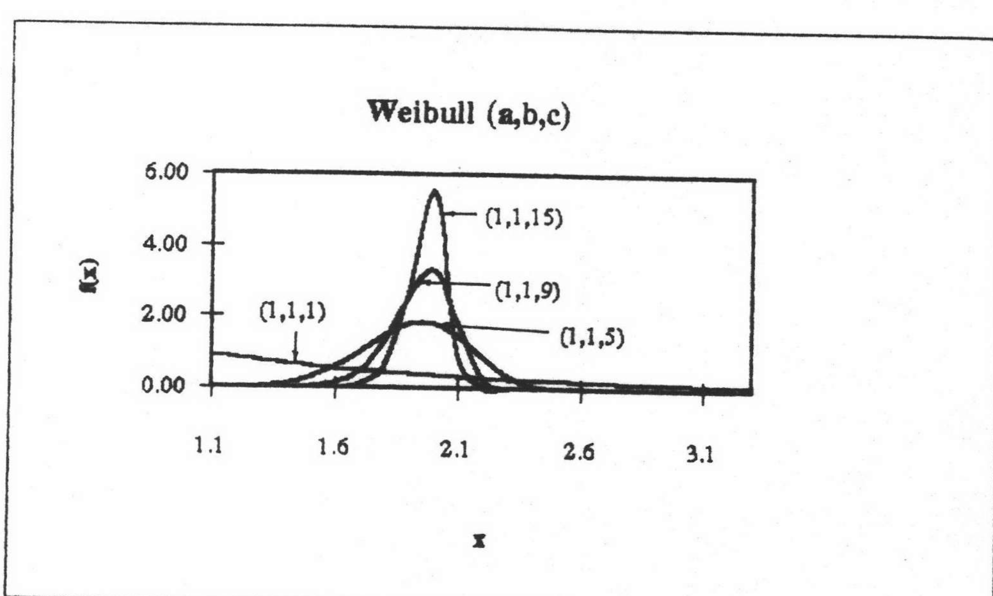
โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape parameter), $c > 0$

b เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter), $b > 0$

a เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location parameter), $a \in (-\infty, \infty)$

$$E(x) = a + b\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

$$V(x) = b^2 \left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$



รูปที่ 2.8 กราฟของการแจกแจงไวบูลล์ 3 พารามิเตอร์ที่ a = 1, b = 1 และ c = 1, 5, 9 และ 15

6. การแจกแจงไค-สแควร์ (Chi-square Distribution)

ที่ระดับความเป็นเสรี df = ν มีฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{-\upsilon/2} x^{\upsilon/2-1} e^{-\upsilon/\beta}}{\Gamma(\upsilon/2)} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

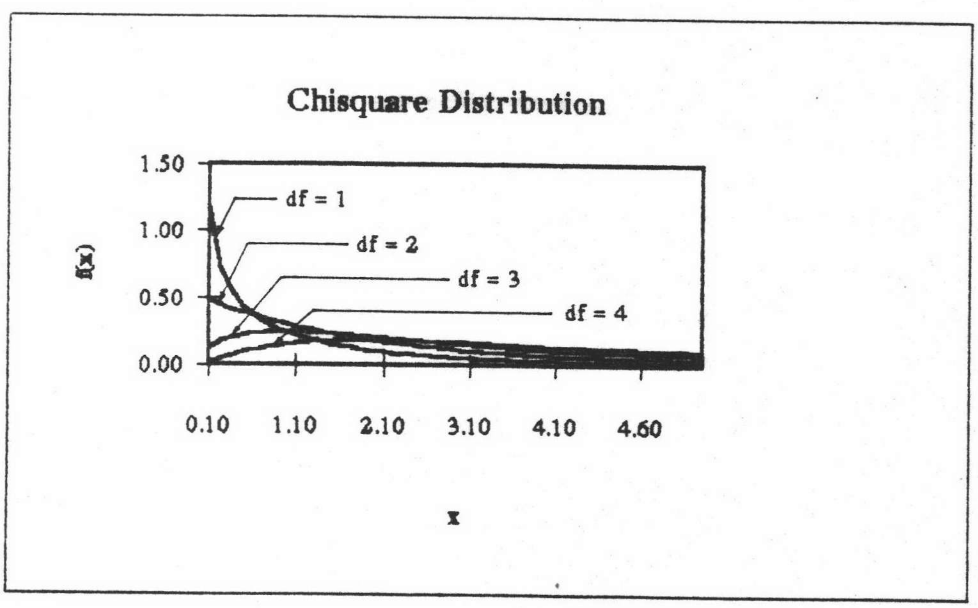
ถ้า ν/2 ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงนี้จะไม่มีรูปแบบปิด (Closed Form) แต่ถ้า ν/2 เป็นเลขจำนวนเต็ม ฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงนี้จะอยู่ในรูป

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \dfrac{(x/\beta)^j}{j!} & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ ν/2 เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape parameter), ν/2 > 0

β เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter), $\beta = 2$

E(x) = ν และ V(x) = 2ν

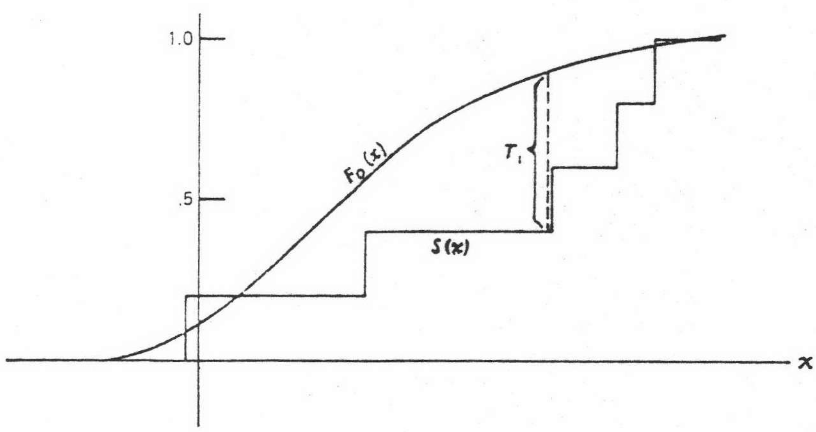


รูปที่ 2.9 กราฟของการแจกแจงไค-สแควร์ที่ df = 1, 2, 3 และ 4

สถิติทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

สถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบเทียบความกลมกลืนของการวิจัยครั้งนี้มี 3 วิธีด้วยกัน คือ

1. **สถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ** (Kolmogorov-Smirnov Test, KS) การทดสอบนี้คิดขึ้นโดย A. N. Kolmogorov (1933) และ N. V. Smirnov (1939) ดังนั้นจึงเรียกการทดสอบนี้โดยทั่วไปว่า การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test) หลักการของสถิติทดสอบนี้คือ การวัดระยะที่ห่างที่สุดระหว่างกราฟของ S(x) และ $F_0(x)$ โดยที่ S(x) แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง หรือความถี่สะสมที่สังเกตได้ในรูปของสัดส่วน (Empirical Distribution Function) และ $F_0(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 (Hypothesized Distribution Function) ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง หรือความถี่สะสมที่สังเกตได้ในรูปของสัดส่วน : S(x), ฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 : $F_0(x)$ และค่าสถิติโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ T_1

เพื่อการทดสอบเทียบความกลมกลืน ในการคำนวณค่าสถิติทดสอบ และการตัดสินใจแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีข้อมูลสมบูรณ์

ถ้าขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก $N \leq 50$ คำนวณค่าสถิติทดสอบ ดังนี้

$$D_N = \max_x \left| S(x) - F_0(x) \right|$$

โดยที่ $S(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง หรือความถี่สะสมที่สังเกตได้ในรูปของสัดส่วน (Empirical Distribution Function)

$F_0(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 (Hypothesized Distribution Function)

ฟังก์ชันสะสม

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(D_N \leq \frac{y}{\sqrt{N}}\right) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp\left(-2j^2 y^2\right) \quad ; y \geq 0$$

สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบแล้วนำมาทำการตัดสินใจโดยการนำค่าสถิติทดสอบ D_N มาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในตาราง

กำหนดให้ α คือ ระดับนัยสำคัญ

$\frac{y_{1-\alpha}}{\sqrt{N}}$ คือ ค่าวิกฤตจากตาราง (ได้ยกตัวอย่างบางส่วนของตาราง KS ดังแสดงในตารางที่ 2.1)

N คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการตัดสินใจ ถ้า $D_N > \frac{y_{1-\alpha}}{\sqrt{N}}$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 และถ้า $D_N \leq \frac{y_{1-\alpha}}{\sqrt{N}}$ จะทำการยอมรับสมมติฐาน H_0

ตารางที่ 2.1 แสดงบางส่วนของตารางโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ

α	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
$\frac{y_{1-\alpha}}{\sqrt{N}}$	1.07	1.14	1.22	1.36	1.63

จากบรรทัดสุดท้ายของตารางแสดงค่าวิกฤตสำหรับการทดสอบ KS ในภาคผนวก ง

ถ้าขนาดตัวอย่างขนาดใหญ่ $N > 50$ คำนวณค่าสถิติทดสอบ ดังนี้

$$D_N^{+} = \max_i \left\{ \frac{i}{N} - F_0(x_i) \right\} \quad ; i = 1, 2, \ldots, N$$

$$D_N^{-} = \max_i \left\{ F_0(x_i) - \frac{i-1}{N} \right\} \quad ; i = 1, 2, \ldots, N$$

และ

$$D_N = \max(D_N^{+}, D_N^{-})$$

โดยที่ x_i เป็นสถิติอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด N ซึ่ง $i = 1, 2, \ldots, N$

ฟังก์ชันสะสม

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\sqrt{N}\, D_N > y\right) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp\left(-2j^2 y^2\right) \quad ; y \geq 0$$

สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบแล้วนำมาทำการตัดสินใจโดยการนำรากที่ 2 ของขนาดตัวอย่าง คูณกับ ค่าสถิติทดสอบ D_N แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในตาราง

กำหนดให้ α คือ ระดับนัยสำคัญ

$y_{1-\alpha}$ คือ ค่าวิกฤตจากตาราง

N คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการตัดสินใจ ถ้า $\sqrt{N}D_N > y_{1-\alpha}$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 และถ้า $\sqrt{N}D_N \le y_{1-\alpha}$ จะทำการยอมรับสมมติฐาน H_0

2. กรณีข้อมูลถูกตัดทิ้ง ซึ่ง BarrและDavidson (1973), KoziolและByar (1975) และ DufourและMaag (1978) ได้ศึกษาเพิ่มเติมเพื่อใช้ในการทดสอบกรณีข้อมูลถูกตัดทิ้ง สำหรับการวิจัยนี้ศึกษากรณีข้อมูลถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2 และมีขนาดตัวอย่างขนาดใหญ่ คำนวณค่าสถิติทดสอบ ดังนี้

$$D^+ = \max_{i \le r} \left\{ \frac{i}{N} - F(x_{i:N}\,;\,\theta,\beta) \right\}$$

$$D^- = \max_{i \le r} \left\{ F(x_{i:N}\,;\,\theta,\beta) - \frac{i-1}{N} \right\}$$

และ

$$D = \max(D^+, D^-)$$

โดยที่ $x_{i:N}$ เป็นสถิติอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด N ซึ่ง $i = 1, 2, \dots, N$

r เป็นจำนวนข้อมูลการเกิดเหตุการณ์ หรือความล้มเหลว ที่ได้กำหนดไว้ล่วงหน้า ซึ่ง $r < N$

ฟังก์ชันสะสม

$$\Pr(\sqrt{N}D_N \le d) = \gamma$$

เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบแล้วนำมาทำการตัดสินใจโดยการนำรากที่ 2 ของขนาดตัวอย่าง คูณกับ ค่าสถิติทดสอบ D แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในตาราง

กำหนดให้ α คือ ระดับนัยสำคัญ

γ คือ $1-\alpha$

d_γ คือ ค่าวิกฤตจากตาราง (ซึ่งได้จากการวิจัยนี้)

N คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการตัดสินใจ ถ้า $\sqrt{N}D > d_\gamma$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 และถ้า $\sqrt{N}D \le d_\gamma$ จะทำการยอมรับสมมติฐาน H_0

2. สถิติทดสอบคิวเปอร์ (Kuiper Test, K) แบบทดสอบคิวเปอร์ (K) นี้มีหลักการทดสอบเช่นเดียวกับแบบทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (KS) กรณีข้อมูลมีขนาดตัวอย่างขนาดใหญ่ หลักการคือ ทำการวัดระยะที่ห่างที่สุดระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง และฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 ของ D^+ และ D^- แล้วนำค่าที่มากที่สุดของทั้ง 2 มารวมกัน จะเป็นค่าสถิติทดสอบนี้

แบบทดสอบนี้ถูกพิจารณาขึ้น เพื่อใช้ในการทดสอบกับข้อมูลที่ถูกตัดทิ้งประเภทที่ 2 โดย Kozoil (1980) คำนวณค่าสถิติทดสอบ ดังนี้

$$D^+ = \max_{i \le r} \left\{ \frac{i}{N} - F(x_{i:N}\,;\,\theta,\beta) \right\}$$

$$D^- = \max_{i \le r} \left\{ F(x_{i:N}\,;\,\theta,\beta) - \frac{i-1}{N} \right\}$$

และ

$$V = D^+ + D^-$$

เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบแล้วนำมาทำการตัดสินใจโดยการนำรากที่ 2 ของขนาดตัวอย่าง คูณกับ ค่าสถิติทดสอบ V แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในตาราง

กำหนดให้ α คือ ระดับนัยสำคัญ

γ คือ $1-\alpha$

v_γ คือ ค่าวิกฤตจากตาราง (ซึ่งได้จากการวิจัยนี้)

N คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการตัดสินใจ ถ้า $\sqrt{N}V > v_\gamma$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 และถ้า $\sqrt{N}V \le v_\gamma$ จะทำการยอมรับสมมติฐาน H_0

3. สถิติทดสอบคราเมอร์-วอน ไมส์ (Cramer-von Mises type Test, CVM) แบบทดสอบนี้คิดขึ้นโดย Cramer (1928), Von Mises (1931) และ Smirnov (1936) ดังนั้นจึงเรียกการทดสอบนี้โดยทั่วไปว่า แบบทดสอบคราเมอร์-วอน ไมส์ (Cramer-von Mises type Test, CVM) หลักการทดสอบเช่นเดียวกับ KS ที่พิจารณาความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง และฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 ขณะที่ KS พิจารณาความแตกต่างที่มากที่สุดเพียงค่าเดียว แต่ CVM จะพิจารณาผลรวมของความแตกต่างกำลังสองทุกค่าสังเกต แล้วบวกเข้ากับค่า $\frac{1}{12N}$ ตัวสถิติของแบบทดสอบ CVM นี้ Pettittและ Stephens (1976) และ Stephens (1977) ได้ศึกษาเพื่อนำมาใช้กับข้อมูลที่ถูกตัดทิ้ง คำนวณค่าสถิติทดสอบ ดังนี้

$$C = \sum_{i=1}^{r}\left[F(X_{i:N};\theta,\beta) - \frac{i-0.5}{N}\right]^2 + \frac{1}{12N}$$

โดยที่ $X_{i:N}$ เป็นตัวอย่างขนาด N ที่ได้จากการสุ่ม ซึ่ง $i = 1, 2, \ldots, N$

$\frac{i-0.5}{N}$ เป็นค่าเฉลี่ยระหว่าง i/N และ $(i-1)/N$

r เป็นจำนวนข้อมูลการเกิดเหตุการณ์ หรือความล้มเหลว ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ซึ่ง $r < N$

เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบแล้วนำมาทำการตัดสินใจโดยการนำขนาดตัวอย่าง คูณกับค่าสถิติทดสอบ C แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในตาราง

กำหนดให้ α คือ ระดับนัยสำคัญ

γ คือ $1-\alpha$

c_γ คือ ค่าวิกฤตจากตาราง (ซึ่งได้จากการวิจัยนี้)

N คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการตัดสินใจ ถ้า $NC > c_\gamma$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 และถ้า $NC \le c_\gamma$ จะทำการยอมรับสมมติฐาน H_0