แนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน

น.ส.ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาอักษรศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาปรัชญา ภาควิชาปรัชญา
คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

STEWART SHAPIRO ON THE ANTE REM STRUCTURALISM OF NUMBERS

Miss Khwanta Sabsinburana

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Arts in Philosophy
Department of Philosophy
Faculty of Arts
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม ของจำนวน
โดย	น.ส.ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ
สาขาวิชา	ปรัชญา
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ศาสตราจารย์ ดร.โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ

คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาอักษรศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะอักษรศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กิ่งกาญจน์ เทพกาญจนา)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เกษม เพ็ญภินันท์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.เทพทวี โชควศิน)

ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ : แนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน. (STEWART SHAPIRO ON THE ANTE REM STRUCTURALISM OF NUMBERS) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ศ. ดร.โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์, อ.ที่ปรึกษาร่วม : ผศ. ดร.สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาและประเมินแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน ซึ่งเป็นแนวคิดที่พยายามตอบปัญหาสำคัญทางอภิปรัชญาและญาณวิทยาเกี่ยวกับสถานะความมีอยู่และการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งคือจำนวน

สำหรับประเด็นทางอภิปรัชญานั้น ชาปิโรได้เสนอมุมมองตำแหน่งสองประเภท ได้แก่ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ และมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ รวมทั้งภววิทยาแบบองค์รวม ซึ่งดีกว่าแนวคิดที่ถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นอย่างแนวคิดของเบนาเซอร์ราฟ แนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต และแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบอื่น ได้แก่ แนวคิดของพาร์สันส์

ส่วนในประเด็นทางญาณวิทยาเกี่ยวกับความรู้เรื่องโครงสร้าง ชาปิโรได้เสนอแนวคิดการเข้าถึงแบบองค์รวม ซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่างมูลฐานนิยมแบบลดทอนกับญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ และได้แบ่งการเข้าถึงโครงสร้างออกเป็นสามลำดับขั้น ได้แก่ การตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา การคาดคะเนล่วงหน้า และการนิยามโดยปริยาย โดยชาปิโรมีเหตุผลสนับสนุนที่สำคัญคือ การสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด

มีข้อโต้แย้งสองประการต่อแนวคิดของชาปิโร ได้แก่ ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ ซึ่งเสนอโดยเบอร์เจส เฮลล์แมน และเคราเนน และปัญหาการเข้าถึงความรู้ ซึ่งเสนอโดยแมคไบรด์ ชาปิโรพยายามตอบข้อโต้แย้งในทุกประเด็น อย่างไรก็ดี ถึงแม้จะยังไม่ประสบผลสำเร็จในการตอบปัญหาบางประเด็น แต่เมื่อเปรียบเทียบกับบางแนวคิดที่จัดเป็นโครงสร้างนิยมเหมือนกันอย่างแนวคิดของพาร์สันส์ แนวคิดของชาปิโรน่ายอมรับได้มากกว่า ดังนั้น แนวคิดของชาปิโรจึงยังคงเป็นแนวคิดหนึ่งที่เราสามารถยอมรับได้

สาขาวิชา	ปรัชญา	ลายมือชื่อนิสิต ....
ปีการศึกษา	2561	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก ....
		ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาร่วม ....

5880107822 : MAJOR PHILOSOPHY

KEYWORD: PHILOSOPHY OF MATHEMATICS, STEWART SHAPIRO, ANTE REM STRUCTURALISM, NUMBERS, MATHEMATICAL OBJECTS, HOLISM

Khwanta Sabsinburana : STEWART SHAPIRO ON THE ANTE REM STRUCTURALISM OF NUMBERS. Advisor: Prof. SORAJ HONGLADAROM, Ph.D. Co-advisor: Asst. Prof. Siriphen Piriyachittakornkit, Ph.D.

The aims of this thesis are to study and to evaluate the view of Stewart Shapiro on the *ante rem structuralism* of numbers. This notion attempts to answer the important issues on the ontology and the epistemology: the status of the existence and the access to the knowledge of mathematical objects, especially on numbers.

On the ontology side, Shapiro proposes 1) two-place perspectives: place-are-offices perspective and place-are-objects perspective and 2) holism ontology. This view is better than other views such as Benacerraf's view, traditional Platonism and other views of structuralism like Parsons' view.

On the epistemology side about the knowledge of structures, Shapiro proposes the holism access which is the halfway between reductive foundationalism and naturalized epistemology. His access to structures has three levels: pattern recognition and abstraction, projection and implicit definition. Additionally, the important justification of Shapiro's view is the inference to the best explanation.

There are two objections for Shapiro's view. The first objection is the problem of Identity of Indiscernibles proposed by Burgess, Hellman and Keranen. The second one is the access problem proposed by MacBride. Although Shapiro is unable to answer some questions, his view is more acceptable than Parsons' view, which is also structuralism. Therefore, Shapiro's view is still the one notion that we can accept.

Field of Study:	Philosophy	Student's Signature ....
Academic Year:	2018	Advisor's Signature ....
		Co-advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การที่ชีวิตของคนหนึ่งคนจะเจริญเติบโตงอกงามได้นั้นก็ด้วยการอุปถัมภ์ค้ำชูและการสนับสนุนจากผู้คนจำนวนนับร้อย ตัวผู้เขียนเองก็เช่นกัน เมื่อมองย้อนกลับไปก็พบว่าผู้เขียนเป็นหนี้บุญคุณของคนจำนวนมาก และคงจะกล่าวถึงเขาเหล่านั้นได้ไม่หมดในหน้ากระดาษนี้ ผู้เขียนจึงขออนุญาตใช้พื้นที่กิตติกรรมประกาศในการหวนระลึกถึงและกล่าวขอบคุณผู้มีพระคุณและให้ความช่วยเหลือจนทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยดี และตัวผู้เขียนก็ได้ก้าวไปในอีกขั้นหนึ่งของชีวิต

ขอบคุณ ผศ.ดร.สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ อาจารย์ที่ปรึกษาที่ได้ให้คำแนะนำที่มีคุณค่าตลอดระยะทางของการทำวิทยานิพนธ์ ขอบคุณอาจารย์ที่เข้าใจและอดทนกับหนูนะคะ ขอบคุณ ศ.ดร.โสรัจจ์ หงศ์ลดารมภ์ อาจารย์ที่ปรึกษาอีกท่านหนึ่ง ผศ.ดร.เกษม เพ็ญภินันท์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และหัวหน้าภาควิชาปรัชญา อ.ดร.เทพทวี โชควศิน กรรมการภายนอก สำหรับการสอบวิทยานิพนธ์ในวันที่ 1 ก.ค. 62 ที่ทุกอย่างผ่านไปได้ด้วยดี ขอบคุณในความเมตตาที่อาจารย์ทุกท่านมีต่อตัวหนูค่ะ

ขอบคุณคุณแม่ของขวัญ คุณนนทิยา อุดมกัลป์ สำหรับความรักอันยิ่งใหญ่และทุกสิ่งทุกอย่างที่มอบให้ขวัญเสมอมาและตลอดไป ป๊าสรนัยน์ ทรัพย์สินบูรณะ คุณพ่อผู้ล่วงลับ ป๊าจะยังคงอยู่ในใจของขวัญเสมอค่ะ ญาติๆ ทุกคนทั้งที่นครพนมและสุพรรณบุรี ซึ่งขวัญคงเอ่ยชื่อได้ไม่หมด น้องหยก ยายดวงจันทร์ อาม้าจำเรือง โกเดือน โกตุ๊ก อาเจ็กสันต์ พี่ปี๊ด พี่รส ฯลฯ ขอบคุณมากๆ เลยนะคะ

ขอบคุณฝ่ายประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัย และนวัตกรรม (สกว. เดิม) ศ.ดร.สุวรรณา สถาอานันท์ รศ.ดร.สุรเดช โชติอุดมพันธ์ และพี่อาร์ต อ.อรรถพล ปะมะโข สำหรับโอกาสในการเข้ามาทำงานตรงนี้ คำแนะนำและคำบอกเล่าถึงประสบการณ์ชีวิตที่ให้มานั้นมีคุณค่าและมีความหมายกับหนูมากจริงๆ ค่ะ

ขอบคุณอาจารย์ภาควิชาปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาฯ ทุกท่านที่ได้สอนและถ่ายทอดศาสตร์วิชาปรัชญาให้กับหนู ปรัชญาได้เข้ามาขัดเกลากระบวนการคิดบางอย่างของหนูไม่มากก็น้อย ขอบคุณ ผศ.ดร.กนิษฐ์ ศิริจันทร์ ที่เมตตาและให้โอกาสจนทำให้หนูได้เข้ามาทำงานที่เวทีวิจัยฯ ขอบคุณพี่แอม พี่มิ่ง ที่คอยถามไถ่สารทุกข์สุกดิบและคอยช่วยเหลือกันเสมอมานะคะ

ขอบคุณครูบาอาจารย์ที่ถ่ายทอดวิชาความรู้ ตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาล - โรงเรียนวัดกลาง, โรงเรียนอนุบาลวรรณรัตน์ ประถม - โรงเรียนอนุบาลบ้านแพง (บ้านแพงวิทยา เดิม) มัธยมต้น - โรงเรียนบ้านแพงพิทยาคม มัธยมปลาย - โรงเรียนกรรณสูตศึกษาลัย และปริญญาตรี - คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ รวมถึงครูอาจารย์ที่ดูแลการฝึกสอนที่โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน และโรงเรียนมัธยมวัดเบญจมบพิตร ขอบคุณครูลิขร วโรรส ครูประจำชั้น ป.4/1 ผู้ล่วงลับ ครูลิขรจะอยู่ในความทรงจำของหนูตลอดไปค่ะ

ขอบคุณเพื่อนทุกคนตั้งแต่เด็กจนโต เพื่อนร่วมชั้นเรียนในทุกโรงเรียนดังที่ได้กล่าวมา เพื่อนที่เรียนด้วยกันในระดับชั้นปริญญาตรีที่สาขาวิชามัธยมศึกษา (วิทยาศาสตร์) คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเอกคณิตศาสตร์ ขอบคุณเพื่อนๆ ฝึกสอนทั้งสองโรงเรียน และขอบคุณฟ้า นภอร แสงศรี เพื่อนรักและเป็นรูมเมทมานานหลายปี ขอบคุณแกที่อยู่เคียงข้างกันทั้งในวันที่สุขและทุกข์นะ

ขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ ชาวปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาฯ ทุกคน เพื่อนและพี่ในรุ่นเดียวกัน: ป่อง บุ๊ค พี่ออน พี่นุ้ย เพื่อนและพี่ต่างรุ่น: พี่รุ้ง โอ๊ต พี่ไซ พี่ปุณ ปี พี่ต๊อบ ฯลฯ ทุกถ้อยคำที่สนทนาและมิตรภาพดีๆ ที่มีให้กันนั้น เราจะไม่มีวันลืมเลย ขอบคุณพี่ท็อปที่นำพาให้ขวัญได้มารู้จักที่นี่ รวมถึงขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ ชาวปรัชญาทุกคนที่ขวัญไม่ได้เอ่ยชื่อมา ณ ที่นี้ด้วยค่ะ

ขอบคุณพี่เป๊ก ผลิตโชค อายนบุตร และครอบครัวนุช นุชาในด้อม 7O2 ทุกคน ขอบคุณเฮียที่เป็นจุดศูนย์กลางความรักของพวกเรา เฮียเป็นต้นแบบและแรงบันดาลใจหลายๆ อย่างของนุชค่ะ ความดีงาม ความน่ารัก และตัวตนที่ real ของผลิตโชคเป็นสิ่งที่ทำให้พวกเรารักและเป็นแรงใจที่คอยสนับสนุนอยู่ตรงนี้ ตลอด 2 ปีที่ผ่านมามีเรื่องราวและความทรงจำมากมายเกิดขึ้นภายในด้อมของเรา ขอบคุณเฮียและนุช นุชาทุกคนที่จับมือกันแน่น ขอให้เราอยู่เป็นกำลังใจและเป็นความสุขของกันและกันแบบนี้ตราบนานเท่านานนะคะ

สุดท้ายขอขอบคุณตัวเอง ขอบคุณนะขวัญ ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ บ่อยครั้งเหลือเกินที่แกต้องต่อสู้กับจิตใจของตัวเอง ท้อแท้ไปก็หลายครั้ง แต่ชั้นรู้ดีว่าแกจะไม่ยอมแพ้ แล้วก็เป็นแบบนั้นจริงๆ ขอบคุณแกนะที่พยายามทำมันจนสำเร็จ เห็นมั้ยล่ะว่าแกทำได้ ชั้นภูมิใจในตัวแกนะ สุดท้ายจริงๆ ขอขอบคุณคุณพระศรีรัตนตรัยและสิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลายในสากลโลกที่คอยปกปักรักษาและคุ้มครองดูแลตัวขวัญอยู่ ท่านเป็นสิ่งยึดเหนี่ยวจิตใจของขวัญเสมอมา ขอขอบคุณทุกท่านมา ณ ที่นี้ด้วยนะคะ

ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา

ปัญหาทางอภิปรัชญา (ontology) เกี่ยวกับสถานะความมีอยู่ของจำนวน (numbers) และปัญหาทางญาณวิทยา (epistemology) เกี่ยวกับการเข้าถึงความรู้ในเรื่องจำนวนเป็นปัญหาที่น่าสนใจเนื่องด้วยเหตุผลที่สำคัญสองประการ ได้แก่

<u>ประการแรก</u> คณิตศาสตร์ดูเหมือนว่าจะเป็นศาสตร์ที่แตกต่างจากศาสตร์สาขาอื่นๆ อาทิ วิทยาศาสตร์ มนุษยศาสตร์ สังคมศาสตร์ ศิลปกรรมศาสตร์ เป็นต้น และการตอบปัญหาปรัชญาเกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ (mathematical objects) ก็ทำได้ค่อนข้างยากกว่าปัญหาปรัชญาในศาสตร์สาขาอื่นๆ พิจารณาข้อความในวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ ตามลำดับ ดังนี้

"ไมโทคอนเดรียในเซลล์ของสิ่งมีชีวิตทำหน้าที่เป็นแหล่งสร้างพลังงานให้แก่เซลล์"

"เมื่อวันที่ 23 พฤษภาคม 2562 ศาลรัฐธรรมนูญมีมติเอกฉันท์ 9:0 รับพิจารณาคุณสมบัติ นายธนาธร จึงรุ่งเรืองกิจ กรณีถือหุ้นสื่อ พร้อมมีมติ 8:1 สั่งหยุดปฏิบัติหน้าที่ ส.ส. ทันที"

"จำนวนเฉพาะ (จำนวนที่มีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และตัวมันเอง) มีอยู่เป็นอนันต์"

สำหรับข้อความที่หนึ่งและข้อความที่สองนั้น เราสามารถตัดสินค่าความจริงของข้อความได้โดยผ่านการตรวจสอบด้วยประสบการณ์ทางผัสสะ ในข้อความที่หนึ่งเมื่อเราใช้กล้องจุลทรรศน์ส่องดูส่วนประกอบของเซลล์ก็จะพบว่าไมโทคอนเดรียเป็นวัตถุชนิดหนึ่งที่อยู่ในเซลล์และทำหน้าที่เป็นแหล่งสร้างพลังงานให้แก่เซลล์ ส่วนข้อความที่สองเราสามารถตรวจสอบได้โดยการติดตามอ่านคำตัดสินของศาลรัฐธรรมนูญผ่านสื่อมวลชนที่น่าเชื่อถือ จะเห็นว่าการใช้ประสบการณ์ทางผัสสะพิจารณาข้อความดังที่กล่าวมาเป็นแหล่งที่มาของความรู้ในวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์

ในทางกลับกัน การตัดสินค่าความจริงของข้อความที่สามไม่สามารถทำได้โดยใช้วิธีการเดียวกับสองข้อความแรก สถานะของวัตถุอย่าง "จำนวนเฉพาะ" (prime numbers) ในข้อความที่สามนั้นเป็นสิ่งที่ตอบได้ค่อนข้างยากว่าคืออะไร เนื่องจากเราไม่สามารถมองเห็นจำนวนเฉพาะได้เหมือนกับที่มองเห็นไมโทคอนเดรียหรือคำตัดสินของศาลรัฐธรรมนูญ และจะยิ่งท้าทายมากขึ้นถ้ามีการตั้งคำถามทางญาณวิทยาว่าเราสามารถเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะได้อย่างไร

ในที่นี้ผู้เขียนเลือกศึกษา “จำนวน” ในขณะเดียวกันก็เลือกให้จำนวนเป็นตัวแทนของวัตถุทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากจำนวนมีความชัดเจนกว่าหรือมีความกำกวมน้อยกว่าวัตถุอื่นๆ ในคณิตศาสตร์ อาทิ เซต ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ วัตถุในเรขาคณิต เป็นต้น และจำนวนยังเป็นสิ่งที่เป็นพื้นฐานที่สุด ซึ่งผู้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นจะต้องเรียน

<u>ประการที่สอง</u> คำตอบของปัญหานี้จะมีส่วนช่วยหรือเป็นแนวทางในการตอบปัญหาปรัชญาอื่นๆ ได้ เช่น คำถามทางอภิปรัชญาที่ว่าความเป็นจริง (reality) คืออะไร คำถามทางญาณวิทยาที่ว่าความจริง (truth) คืออะไร[1] ความรู้ก่อนประสบการณ์ (a priori knowledge) มีอยู่หรือไม่ เป็นต้น

ความคิดเรื่องสถานะความมีอยู่ของวัตถุทางคณิตศาสตร์และการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับวัตถุเหล่านั้นมีมาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณแล้ว เพลโต (Plato) กล่าวว่าวัตถุทางคณิตศาสตร์นั้นมีอยู่จริงอย่างเป็นนิรันดร์ ไม่อยู่ในพื้นที่ (space) และเวลา (time) รวมทั้งยังเป็นอิสระจากเราด้วย ตัวอย่างที่ยกมามักจะเป็นวัตถุในเรขาคณิต เช่น เส้นตรง รูปวงกลม รูปสามเหลี่ยม เป็นต้น อย่างไรก็ตาม แนวคิดของเพลโตได้รับการวิพากษ์อย่างกว้างขวางในประเด็นเรื่องความลี้ลับ (mystic) ของการมีอยู่จริงดังกล่าว และความสัมพันธ์ระหว่างความเป็นจริงที่ไม่ขึ้นอยู่กับพื้นที่และเวลากับมนุษย์ที่ดำรงอยู่ในพื้นที่และเวลา ความสัมพันธ์ซึ่งถือได้ว่าเป็นที่มาของความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถที่จะเป็นไปได้อย่างไร

ต่อมาในช่วงปลายศตวรรษที่ 18 อิมมานูเอล ค้านท์ (Immanuel Kant) ได้เสนอแนวคิดที่ว่าวัตถุทางคณิตศาสตร์มีอยู่ในโครงสร้างของจิต ค้านท์ยกตัวอย่างทั้งวัตถุในเรขาคณิตและจำนวน เขาสนับสนุนว่ามนุษย์สามารถเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ผ่านทางการใช้สหัชญาณ (intuition) ข้อความทางคณิตศาสตร์อย่าง “7+5 = 12” และ “เส้นตรงคือเส้นที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด” เป็นข้อความก่อนประสบการณ์เชิงสังเคราะห์ (synthetic a priori proposition)[2] ในทัศนะของ

[1] การตั้งคำถามปรัชญาเกี่ยวกับ “ความเป็นจริง” และ “ความจริง” นั้นแตกต่างกัน คำแรกเป็นเรื่องของเนื้อหาความเป็นจริงโดยที่เราอาจรู้หรือไม่รู้ก็ได้ เช่น คำถามที่ว่ายูนิคอร์นมีจริงหรือไม่ เวลาคืออะไร ฯลฯ ในขณะที่คำหลังเกี่ยวพันกับตัวเราหรือผู้ใช้ภาษา ความจริงจึงขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของข้อความว่าเป็นจริง (true) หรือเป็นเท็จ (false) เช่น ข้อความที่ว่ามีจานผลไม้วางอยู่บนโต๊ะในห้องภาควิชาปรัชญา ชั้น 10 อาคารบรมราชกุมารี เมื่อวันที่ 1 ก.ค. 62 เป็นต้น ประเด็นที่วิทยานิพนธ์เล่มนี้ศึกษาจะเกี่ยวข้องกับทั้งความเป็นจริงที่ว่าจำนวนคืออะไร และความจริงที่ว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนเป็นจริงหรือไม่ โดยแยกเนื้อหาเป็นบทที่ 2 และบทที่ 3 ตามลำดับ

[2] เมื่อจัดประเภทของข้อความด้วยเงื่อนไขของการใช้ประสบการณ์ ค้านท์แบ่งข้อความออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ ข้อความก่อนประสบการณ์ (a priori proposition) และข้อความที่อาศัยประสบการณ์ (a posteriori proposition) สำหรับข้อความประเภทแรกนั้น เราได้มาโดยไม่ผ่านการใช้ประสบการณ์ เช่น ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ในขณะที่ข้อความประเภทหลัง การได้มาซึ่งความรู้ต้องอาศัยประสบการณ์เข้าไปตรวจสอบ เช่น “กาทุกตัวมีสีดำ”

ค้านท์ คณิตศาสตร์ถือว่าเป็นความรู้ก่อนประสบการณ์เชิงสังเคราะห์ กล่าวคือ เราไม่จำเป็นต้องออกไปดูโลกภายนอกหรือไม่จำเป็นต้องอาศัยประสบการณ์จึงจะรู้ว่า 7+5 = 12 หรือเส้นตรงเป็นเส้นที่สั้นที่สุด และภาคแสดงคือ “12” ไม่ได้เป็นองค์ประกอบในภาคประธานคือ “7+5” รวมทั้ง “การเป็นเส้นที่สั้นที่สุด” ไม่ได้เป็นองค์ประกอบในภาคประธานคือ “เส้นตรง” อย่างไรก็ตาม ต่อมาแนวคิดของค้านท์ประสบปัญหาว่าเขาจะอธิบายเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด (non-Euclidean geometry) ซึ่งตรงกับความเป็นจริงของโลกมากกว่าเรขาคณิตระบบยูคลิดที่ค้านท์ให้การสนับสนุนได้อย่างไร

ข้อถกเถียงเกี่ยวกับสถานะความมีอยู่และการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ไม่ได้จบลงที่ค้านท์ หากแต่ยังคงเป็นปัญหาที่นักปรัชญายุคต่อมาให้ความสนใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงปลายศตวรรษที่ 19 ถึงต้นศตวรรษที่ 20 สามทัศนะที่มีพัฒนาการในช่วงเวลาดังกล่าวและเป็นแนวคิดซึ่งเป็นคู่ตรงข้ามของทัศนะสัจนิยม (non-realism or non-platonism) ได้แก่ ตรรกนิยม (logicism) รูปแบบนิยม (formalism) และสหัชญาณนิยม (intuitionism)[3]

นักปรัชญาคนสำคัญที่อยู่ในกลุ่มแนวคิดตรรกนิยม ได้แก่ กอททล็อบ เฟรเก้ (Gottlob Frege) และเบอร์ทรันด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell) หากจะกล่าวถึงสถานะทางภววิทยาของจำนวน เฟรเก้ถือได้ว่ามีทัศนะแบบสัจนิยมทางภววิทยา กล่าวคือ เฟรเก้มองว่าจำนวนคือวัตถุทางตรรกะ (logical object) ชนิดหนึ่ง แตกต่างจากรัสเซลล์ที่ไม่ได้มองว่าจำนวนคือวัตถุ อย่างไรก็ดี สิ่งที่นักปรัชญาทั้งสองคนมีเหมือนกันคือแนวคิดที่ว่าคณิตศาสตร์สามารถลดทอนลงไปสู่ตรรกศาสตร์ได้[4]

เฟรเก้ใช้มโนทัศน์ “ส่วนขยาย” (extension) ในการอธิบายจำนวน กล่าวคือ “จำนวนของ F คือ y” เมื่อ F แทนภาคแสดงอย่าง “ดวงจันทร์ของดาวพฤหัสบดี” หรือ “การ์ดบนโต๊ะ” เขาเริ่มต้นนิยามจำนวน 0 ว่าคือจำนวนของมโนทัศน์ “ไม่เป็นเอกลักษณ์กับตัวเอง” จากนั้นนิยามจำนวน 1 ว่าคือจำนวนของมโนทัศน์ “เป็นเอกลักษณ์กับจำนวน 0” นิยามจำนวน 2 ว่าคือจำนวนของมโนทัศน์

ในทำนองเดียวกัน เมื่อจัดประเภทของข้อความด้วยเงื่อนไขทางภาษา ค้านท์ได้แบ่งข้อความออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ ข้อความเชิงวิเคราะห์ (analytic proposition) และข้อความเชิงสังเคราะห์ (synthetic proposition) สำหรับข้อความประเภทแรก ความหมายของภาคแสดงจะเป็นองค์ประกอบอยู่ในภาคประธาน เช่น “ลุงทุกคนเป็นผู้ชาย” ในขณะที่ข้อความประเภทหลัง ความหมายของภาคแสดงไม่ได้เป็นองค์ประกอบอยู่ในภาคประธาน เช่น “ลุงทุกคนยังไม่ได้แต่งงาน”

[3] Leon Horsten, "Philosophy of Mathematics," in *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2017). plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics.

[4] เฟรเก้กำหนดขอบเขตของคณิตศาสตร์เฉพาะกับเลขคณิต ในขณะที่รัสเซลล์หมายรวมถึงคณิตศาสตร์ทุกๆ สาขา

"หากไม่เป็นเอกลักษณ์กับจำนวน 0 ก็เป็นเอกลักษณ์กับจำนวน 1" (either identical to zero or identical to one) จากนั้นนิยามจำนวนธรรมชาติอื่นๆ และหลักการอุปนัย (induction principle)

อย่างไรก็ดี การใช้มโนทัศน์ส่วนขยายไม่เป็นเกณฑ์ที่ครอบคลุมเพียงพอ เนื่องจากมีตัวอย่างค้านที่ว่า "จูเลียส ซีซาร์ = 2" ซึ่งไปด้วยกันได้กับมโนทัศน์ส่วนขยายของเฟรเก้ แต่ไม่น่าจะเรียกว่าเป็นข้อความที่จริง ปัญหาดังกล่าวเรียกว่าปัญหาซีซาร์ (Caesar problem) เฟรเก้ตระหนักถึงปัญหาดังกล่าวเป็นอย่างดี ในเวลาต่อมาจึงได้พัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับมโนทัศน์และส่วนขยายของมโนทัศน์ที่เรียกว่า "กฎพื้นฐาน V" (Basic Law V)[5] แต่ก็ไม่ประสบผลสำเร็จ เนื่องจากมีข้อโต้แย้งจากรัสเซลล์ว่ากฎพื้นฐาน V มีลักษณะไม่คงเส้นคงวา (inconsistent) รัสเซลล์ให้ตัวอย่างแย้งดังนี้ "เมื่อกำหนดให้ R เป็นมโนทัศน์ที่นำไปใช้ได้กับ (apply to) วัตถุ x เฉพาะในกรณีที่ว่ามีมโนทัศน์ F ซึ่ง x เป็นส่วนขยายของ F และ Fx เป็นเท็จ" จะพบว่ามีความขัดแย้งในตัวเองเกิดขึ้น กล่าวคือ Rr เป็นจริงและ Rr เป็นเท็จได้พร้อมกัน ภายหลังเราเรียกสิ่งนี้ว่า "ปฏิทรรศน์ของรัสเซลล์" (Russell's paradox)

ในขณะเดียวกันรัสเซลล์ได้พยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงไปสู่ตรรกศาสตร์ด้วยวิธีอื่น เขาพบว่านิยามแบบอิมเพรดิเคทีฟ (impredicative)[6] ก่อให้เกิดปัญหาการวนกลับในตัวเองอย่างไม่มีที่สิ้นสุด (circular) และจากการที่ปฏิทรรศน์ของรัสเซลล์ส่งผลกระทบต่อทฤษฎีเซต ทำให้รัสเซลล์สรุปว่าไม่มีชั้น (class) ที่รวมเอาทุกๆ ชั้นที่มีอยู่ไว้ด้วยกัน และไม่มีชั้นของทุกชั้นที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก เขาได้เสนอทฤษฎีแบบชนิด (type theory)[7] ซึ่งอธิบายว่าจำนวนคือทุกๆ สิ่งที่เป็นจำนวนของบางชั้น กล่าวคือ จำนวน 0 คือชั้นของทุกๆ ชั้นชนิดที่ 1 ซึ่งไม่มีสมาชิก จำนวน 1 คือชั้นของทุกๆ ชั้นชนิดที่ 1 ซึ่งมีสมาชิก 1 ตัว จำนวน 2 คือชั้นของทุกๆ ชั้นชนิดที่ 1 ซึ่งมีสมาชิก 2 ตัว เป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนสามารถนิยามจำนวนธรรมชาติทั้งหมดได้

[5] กฎพื้นฐาน V กล่าวว่า "สำหรับมโนทัศน์ F และ G ใดๆ ส่วนขยายของ F เป็นเอกลักษณ์กับส่วนขยายของ G เมื่อและก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ วัตถุ a, Fa เมื่อและก็ต่อเมื่อ Ga" หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า "ส่วนขยายของ F เป็นสิ่งเดียวกับส่วนขยายของ G เมื่อและก็ต่อเมื่อ F และ G เกิดขึ้นกับ (hold of) วัตถุเดียวกัน"

[6] นิยามแบบอิมเพรดิเคทีฟเป็นนิยามที่กล่าวถึงการรวบรวมที่ประกอบด้วยสิ่งที่ถูกนิยามไว้แล้ว (the defined entity) เช่น นิยามของ "ขอบเขตบนน้อยสุด" (least upper bound) เป็นนิยามแบบอิมเพรดิเคทีฟ เนื่องจากกล่าวถึงเซตของขอบเขตบนและอธิบายอย่างเฉพาะเจาะจงถึงสมาชิกของเซตที่ได้ถูกนิยามไว้แล้ว

[7] ทฤษฎีแบบชนิดของรัสเซลล์เริ่มต้นด้วยการนิยามปัจเจกวัตถุว่าเป็นวัตถุ ไม่ใช่เป็นชั้น โดยปัจเจกวัตถุให้ถือเป็นชั้นชนิดที่ 0 จากนั้นให้ชั้นของปัจเจกวัตถุเป็นชั้นชนิดที่ 1 และชั้นของชั้นของปัจเจกวัตถุเป็นชั้นชนิดที่ 2 เป็นเช่นนี้เรื่อยไป เราก็จะสามารถใช้มโนทัศน์เรื่องชั้นและแบบชนิดในการนิยามจำนวนธรรมชาติได้

สิ่งที่ตามมาก็คือการมีปัจเจกวัตถุ (individual object) อยู่เป็นอนันต์ และเพื่อแก้ปัญหาความมีอยู่อย่างเป็นอนันต์ดังกล่าว รัสเซลล์ได้เสนอสัจพจน์ของความเป็นอนันต์ (axiom of infinity) ซึ่งเป็นสัจพจน์ที่ไม่สามารถถูกพิสูจน์ได้และไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงอย่างจำเป็น เป็นจริงก่อนประสบการณ์ หรือเป็นข้อความเชิงวิเคราะห์หรือไม่ ปัญหาก็คือเราไม่อาจถือได้ว่าสัจพจน์ดังกล่าวเป็นหลักการทางตรรกศาสตร์ (logical principle) นอกจากนี้เรายังพบอีกว่าในระบบของรัสเซลล์หลักการอุปนัยมีการนิยามแบบอิมเพรดิเคทีฟ ซึ่งเพื่อที่จะแก้ปัญหาดังกล่าว รัสเซลล์จึงได้เสนอสัจพจน์ของการลดทอนได้ (axiom of reducibility) อย่างไรก็ตาม สัจพจน์นี้ถูกวิพากษ์ค่อนข้างมากว่าเกิดขึ้นอย่างเฉพาะกิจ (ad hoc) เพียงเพื่อที่จะแก้ปัญหาเท่านั้น ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงก่อนประสบการณ์หรือเป็นข้อความเชิงวิเคราะห์หรือไม่ รัสเซลล์ยอมรับว่าสัจพจน์ของการลดทอนได้เป็นข้อบกพร่องในระบบของเขา ดังนั้น ความพยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงไปสู่ตรรกศาสตร์จึงยังไม่ประสบผลสำเร็จอีกครั้ง

กลุ่มแนวคิดต่อมาคือรูปแบบนิยม นักปรัชญาซึ่งเป็นตัวแทนของแนวคิดนี้คือ เดวิด ฮิลเบิร์ต (David Hilbert) รูปแบบนิยมเป็นทัศนะที่มองว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าระบบของสัญลักษณ์ที่เป็นระเบียบแบบแผนและจำนวนก็คือสัญลักษณ์ (symbol) ในระบบนั้น โดยทั่วไปสัญลักษณ์จะมีลักษณะเป็นสิ่งนามธรรม แต่ในบางครั้งสัญลักษณ์ก็มีลักษณะเป็นสิ่งรูปธรรมได้ เช่น เราอาจกำหนดให้ขีดหนึ่งขีดอย่าง | แทนจำนวน 0 ขีดสองขีดอย่าง || แทนจำนวน 1 ขีดสามขีดอย่าง ||| แทนจำนวน 2 เป็นต้น ความรู้ทางคณิตศาสตร์คือความรู้ที่ว่าสัญลักษณ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสัญลักษณ์อื่นอย่างไร โดยสิ่งที่สำคัญสำหรับทัศนะรูปแบบนิยมก็คือระบบของสัญลักษณ์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามีความคงเส้นคงวา (consistency)

อย่างไรก็ดี ทฤษฎีบทความไม่สมบูรณ์ของเกอเดิล (Gödel’s incompleteness theorem)[8] ก็ได้เข้ามาสั่นคลอนแนวคิดรูปแบบนิยมอยู่ไม่น้อย เนื่องจากเป็นการยืนยันว่าระบบบางระบบมีอยู่จริงในคณิตศาสตร์ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าระบบนั้นมีความคงเส้นคงวาหรือไม่ นอกจากนี้แนวคิดรูปแบบนิยมก็ยังประสบปัญหาว่าสัญลักษณ์และระบบของสัญลักษณ์สามารถอธิบายลักษณะของโลกที่มีความซับซ้อนได้อย่างไร

---

[8] ทฤษฎีบทความไม่สมบูรณ์ของเกอเดิลมี 2 รูปแบบ โดยรูปแบบแรกกล่าวว่าถ้ามีประโยค G ซึ่งเป็นระบบแบบแผนในภาษา T และ G ไม่สามารถถูกพิสูจน์ได้แล้ว สมมติว่า T มีคุณสมบัติคงเส้นคงวา สิ่งที่ตามมาก็คือ G จะเป็นจริง แต่ไม่สามารถถูกพิสูจน์ได้ และรูปแบบที่สองกล่าวว่าไม่มีทฤษฎีบทที่มีคุณสมบัติคงเส้นคงวาทฤษฎีบทใดเลยที่จะสามารถถูกพิสูจน์ได้ว่าตัวมันเองนั้นมีความคงเส้นคงวา

กลุ่มแนวคิดที่สามคือสหัชญาณนิยม มีนักปรัชญาคนสำคัญ ได้แก่ แอล. อี. เจ. บราวเวอร์ (L. E. J. Brouwer) และไมเคิล ดัมเมทท์ (Michael Dummett) สหัชญาณนิยมเสนอว่าคณิตศาสตร์เป็นบางสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น จำนวนไม่ใช่สิ่งใดนอกจากการสร้างขึ้นทางจิต (mental constructions) หรือเป็นผลจากสิ่งที่จิตของเราสร้างขึ้น จำนวนหรือวัตถุทางคณิตศาสตร์จะถูกสร้างขึ้นก่อน จากนั้นจึงจะสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์หรือทำการพิสูจน์ต่อไปได้ ในทัศนะสหัชญาณนิยมนั้น กฎบางกฎในตรรกวิทยาแบบดั้งเดิม (classical logic) จะถือว่าไม่สมเหตุสมผล เช่น กฎไม่มีค่ากลาง (the law of excluded middle) เป็นต้น

ด้วยเหตุที่ว่าจำนวนเป็นสิ่งที่จิตสร้างขึ้น สหัชญาณนิยมจึงไม่ประสบปัญหาทางญาณวิทยาที่ว่าเราจะสามารถเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับจำนวนได้อย่างไร ในทางตรงกันข้าม ปัญหาทางอภิปรัชญาที่ว่าอะไรคือสถานะความมีอยู่ของจำนวนก็ยังคงเป็นความท้าทายที่กลุ่มแนวคิดสหัชญาณนิยมตอบได้ไม่ง่ายนัก นอกจากนี้ถ้าจำนวนเป็นเพียงแค่การสร้างขึ้นของจิตแล้ว เหตุใดความรู้เกี่ยวกับจำนวนจึงสามารถนำไปใช้ได้จริงในโลกและมีความแม่นยำสูง

ในปัจจุบันทั้งสามแนวคิดยังมีนักปรัชญาบางกลุ่มที่ยึดถือและสนับสนุนอยู่ ได้แก่ คริสปิน ไรท์ (Crispin Wright) และบ็อบ ฮาล (Bob Hale) ผู้ซึ่งสนับสนุนแนวคิดตรรกนิยมใหม่ (neo-logicism) ฮาสเคลล์ เคอร์รี่ (Haskell Curry) และแดเนียล ไอแซคซอน (Daniel Isaacson) ผู้ปกป้องและเสนอลักษณะรูปแบบ (version) ที่แตกต่างออกไปของแนวคิดรูปแบบนิยม และเนล เทนแนนท์ (Neil Tennant) นักปรัชญาที่พัฒนาและต่อยอดแนวคิดสหัชญาณนิยมของดัมเมทท์

เราได้กล่าวถึงแนวคิดคู่ตรงข้ามของสัจนิยมทางคณิตศาสตร์ไปพอสมควร ในช่วงเวลาเดียวกันนั้นเอง ประเด็นเกี่ยวกับสถานะทางภววิทยาของจำนวนดูเหมือนว่าจะไม่ได้รับความสนใจเท่าที่ควร นักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาต่างก็มุ่งความสนใจไปที่ความพยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงไปสู่ทฤษฎีเซต (set theory) หรือตรรกศาสตร์ (logic) และแนวคิดที่ว่าจำนวนธรรมชาติสามารถลดทอนลงไปสู่ทฤษฎีเซตได้ก็เป็นแนวคิดที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย ในแง่หนึ่งแนวคิดดังกล่าวสอดคล้องกับทัศนะหรือกลุ่มแนวคิดสัจนิยม (realism)

สัจนิยมเป็นกลุ่มแนวคิดที่กว้างและครอบคลุมแนวคิดของนักปรัชญาหลายคน เช่น ดับบลิว. วี. ไควน์ (W. V. Quine), เฟเนลอป แมดดี้ (Penelope Maddy), เบอร์นาร์ด ลินสกี้ (Bernard Linsky) เอ็ดเวิร์ด ซาลต้า (Edward Zalta) สจ๊วต ชาปิโร (Stewart Shapiro) ชาร์ลส์ พาร์สันส์

(Charles Parsons) เจฟฟรีย์ เฮลล์แมน (Geoffrey Hellman) เป็นต้น โดยทัศนะที่จัดว่าเป็นสัจนิยมซึ่งเป็นประเด็นที่ถกเถียงกันอย่างแพร่หลายในปัจจุบันคือทัศนะโครงสร้างนิยม (structuralism)

เราสามารถจำแนกทัศนะโครงสร้างนิยมออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1) โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม (Ante Rem structuralism) เช่น แนวคิดของชาปิโร

2) โครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้ง (Eliminative structuralism) เช่น แนวคิดของพาร์สันส์

3) โครงสร้างนิยมแบบโมดัล (Modal structuralism) เช่น แนวคิดของเฮลล์แมน

ในบรรดาสามประเภทข้างต้นนั้น ถึงแม้ว่าจะเป็นสัจนิยมทางค่าความจริง (realism in truth-value) เหมือนกัน แต่ทัศนะโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม เป็นทัศนะเดียวที่เป็นสัจนิยมทางภววิทยา (realism in ontology) ด้วย[9] ความเป็นสัจนิยมทางภววิทยาดูเหมือนจะทำให้การอธิบายจำนวนมีบางสิ่งที่มีอยู่จริงรองรับ ซึ่งทำให้คณิตศาสตร์มีรากฐานที่มั่นคงและชัดเจน

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน
2. เพื่อประเมินแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน

1.3 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

เริ่มต้นจากการอ่านหนังสือและบทความที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทางอภิปรัชญาและญาณวิทยาเกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งคือจำนวน เพื่อทำความเข้าใจปัญหาดังกล่าวในภาพรวม จากนั้นพิจารณากำหนดขอบเขตของเรื่องที่จะศึกษา โดยแนวคิดที่เลือกศึกษาและประเมินคือแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโร เรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน

ในบทที่ 2 ผู้เขียนจะเขียนในลักษณะวิเคราะห์เชิงวิพากษ์เกี่ยวกับประเด็นทางภววิทยาของแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม ซึ่งปรากฏในหนังสือสองเล่มหลักของชาปิโร ได้แก่ “ปรัชญาคณิตศาสตร์: โครงสร้างและภววิทยา” (Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology) และ “การคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์: ปรัชญาคณิตศาสตร์” (Thinking about Mathematics: The

[9] Stewart Shapiro, "Philosophy of Mathematics and Its Logic," in *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. Stewart Shapiro (Oxford: Oxford University Press, 2005). p.7.

Philosophy of Mathematics) โดยจะอภิปรายข้อโต้แย้งของจัคคา เคราเนน (Jukka Keränen) เกี่ยวกับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ รวมถึงการตอบปัญหาดังกล่าวของชาปิโร

บทที่ 3 ผู้เขียนจะกล่าวถึงประเด็นทางญาณวิทยาว่าด้วยความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างโดยใช้การเข้าถึงแบบองค์รวม ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ลำดับขั้น ได้แก่ การตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา การคาดคะเนล่วงหน้า และการนิยามโดยปริยาย รวมทั้งเหตุผลที่ชาปิโรอ้างเกี่ยวกับการสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด ประเด็นเหล่านี้ปรากฏในหนังสือสองเล่มหลักข้างต้น โดยผู้เขียนจะเขียนในลักษณะวิเคราะห์เชิงวิพากษ์เช่นกัน พร้อมกันนี้ก็จะอภิปรายข้อโต้แย้งของเฟรเซอร์ แมคไบรด์ (Fraser MacBride) เกี่ยวกับปัญหาการเข้าถึงความรู้และการตอบปัญหาของชาปิโรด้วย

บทที่ 4 เป็นบทสรุป เนื่องจากผู้เขียนมีแนวโน้มที่จะคิดว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่เร็มของจำนวนในทัศนะของชาปิโรเป็นแนวคิดที่น่ายอมรับ สามารถอธิบายประเด็นทางอภิปรัชญาและญาณวิทยาได้ ถึงแม้จะยังไม่ประสบผลสำเร็จในการตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ก็ตาม อย่างไรก็ดี เมื่อเปรียบเทียบกับบางแนวคิดที่จัดเป็นโครงสร้างนิยมเหมือนกันอย่างแนวคิดของพาร์สันส์ แนวคิดของชาปิโรน่ายอมรับได้มากกว่า ดังนั้น ในบทนี้จึงเป็นความพยายามของผู้เขียนที่จะสนับสนุนแนวคิดดังกล่าว ซึ่งเป็นแนวคิดที่วิทยานิพนธ์เล่มนี้ศึกษา

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน
2. ได้ข้อประเมินเกี่ยวกับแนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวน
3. เป็นแหล่งค้นคว้าทางวิชาการสายปรัชญาในสาขาอภิปรัชญา ญาณวิทยา และปรัชญาคณิตศาสตร์

บทที่ 2
ประเด็นทางภววิทยากับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้

ในบทนี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มในทัศนะของชาปิโรมีเหตุผลสนับสนุนที่ดีกว่าแนวคิดซึ่งถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นอย่างแนวคิดของเบนาเซอร์ราฟ แนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต และแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบอื่น ได้แก่ แนวคิดของพาร์สันส์ นอกจากนี้จะอธิบายปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ที่เสนอโดยเบอร์เจส เฮลล์แมน และเคราเนน ซึ่งมุ่งทำให้แนวคิดของชาปิโรมีข้อบกพร่อง ในท้ายที่สุดจะอธิบายวิธีตอบปัญหาของชาปิโรที่พยายามจะปกป้องแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม

2.1 จุดเริ่มต้นของแนวคิดโครงสร้างนิยม: ประเด็นทางภววิทยา

ในปี ค.ศ.1965 พอล เบนาเซอร์ราฟ (Paul Benacerraf) ได้เสนอข้อโต้แย้งที่เรียกว่า "ปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนาเซอร์ราฟ" (Benacerraf's Identification problem)[10] ดังนี้

ถ้าจำนวนคือเซตแล้ว จำนวนก็จะต้องเป็นเซตเฉพาะเซตใดเซตหนึ่ง (particular) เนื่องจากเซตแต่ละเซตต่างก็เป็นเซตเฉพาะ แต่เนื่องจากเราสามารถลดทอนจำนวนใดๆ เป็นต้นว่าจำนวน 3 ได้อย่างน้อย 2 วิธี ได้แก่

วิธีที่หนึ่ง (การนิยามแบบเซอร์เมโล): {{{Ø}}}

วิธีที่สอง (การนิยามแบบนอยมันน์): {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}

ซึ่งถ้าจำนวน 3 จะต้องเป็นเซตใดเซตหนึ่งมากกว่าเซตอื่นแล้ว ก็เป็นไปได้ที่เราจะให้เหตุผลที่น่าเชื่อได้ว่าจะต้องเป็นเช่นนั้น อย่างไรก็ดี ไม่มีวิธีใดเลยที่จะเชื่อมโยงได้ว่าเซตใดควรที่จะถูกเลือกว่าเป็นจำนวน 3 มากกว่าเซตอื่นๆ ดังนั้น จำนวนจึงไม่ใช่เซต และในท้ายที่สุดเบนาเซอร์ราฟจึงได้สรุปว่าจำนวนไม่ใช่วัตถุ ข้อสรุปของเบนาเซอร์ราฟนำไปสู่แนวคิดอีกแนวคิดหนึ่งคือนามนิยม (nominalism)

เหตุผลที่เบนาเซอร์ราฟเสนอนั้นก็เป็นจุดเริ่มต้นของแนวคิดโครงสร้างนิยมด้วยเช่นกัน เขากล่าวว่าในการที่จะระบุคุณสมบัติของจำนวน เราเพียงแต่อธิบายคุณลักษณะ (characterize) ของโครงสร้างนามธรรม (abstract structure) ขึ้นมาโครงสร้างหนึ่ง หลังจากนั้นเราก็จะสังเกตว่า

[10] Paul Benacerraf, "What Number Could not Be," *Philosophical Review* 74, no. 1 (1965). และ Paul Benacerraf, "Mathematical Truth," *Philosophical Review* 70, no. 19 (1973).

องค์ประกอบ (elements) ในโครงสร้างดังกล่าวไม่มีคุณสมบัติอื่นใดมากไปกว่าความสัมพันธ์ที่องค์ประกอบนั้นมีต่อองค์ประกอบอื่นในโครงสร้างเดียวกัน[11] กล่าวคือ จำนวน 3 ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าการมีตัวก่อนหน้าเป็น 2, 1 และ 0 และการมีตัวถัดไปเป็น 4, 5 และต่อไปเรื่อยๆ เบนาเซอร์ราฟกล่าวต่อไปว่าวัตถุใดก็สามารถแสดงบทบาทเป็นจำนวน 3 ได้ทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็น {{{Ø}}} หรือ {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}} นั่นคือ วัตถุใดก็สามารถเป็นองค์ประกอบลำดับที่สาม (the third element) ในลำดับที่เคลื่อนไปข้างหน้า (progression) ได้ และจำนวนอื่นๆ นอกเหนือจาก 3 ก็สามารถระบุคุณสมบัติได้ในทำนองเดียวกัน

สิ่งสำคัญต่อการเป็นจำนวนธรรมชาติสำหรับเบนาเซอร์ราฟไม่ใช่การเป็นสมาชิกของเซตนั้นๆ หากแต่เป็น “โครงสร้าง” ที่สมาชิกแต่ละตัวดำรงอยู่ และเพียงเพราะว่าเราไม่สามารถระบุเอกลักษณ์ (identify) ระหว่างจำนวนเชิงปัจเจก (individual number) ใดๆ กับวัตถุเฉพาะชนิดใดชนิดหนึ่งไปมากกว่าวัตถุชนิดอื่นได้ จำนวนจึงไม่ใช่วัตถุในทัศนะของเบนาเซอร์ราฟ

กล่าวโดยสรุปก็คือ จำนวนแต่ละจำนวนสามารถแยกออกจากกันด้วยคุณลักษณะที่เป็นความสัมพันธ์ภายในโครงสร้าง (intra-structural relational properties) การพูดถึงจำนวนเชิงปัจเจกแต่เพียงอย่างเดียวโดยปราศจากการอ้างอิงถึงโครงสร้างของจำนวนนั้นไร้ความหมาย (nonsense) โครงสร้างนิยมจึงเริ่มต้นมาจากจุดนี้ ผู้เขียนมองว่าเบนาเซอร์ราฟด่วนสรุปเกินไปที่ยืนยันว่าจำนวนไม่ใช่วัตถุ เรายังสามารถตั้งคำถามได้ต่อไปว่าเราจะรักษาสถานภาพความเป็นวัตถุของจำนวนได้อยู่หรือไม่ โดยพิจารณาว่าโครงสร้างในตัวมันเองเป็นระบบจำนวน (number system) และตำแหน่ง (places) ซึ่งเป็นองค์ประกอบในโครงสร้างนั้นเองที่เป็นจำนวน นักโครงสร้างนิยมตั้งคำถามเหล่านี้และเสนอความคิดของพวกเขาออกมาเป็นแนวคิดที่เรียกว่าโครงสร้างนิยม

2.2 แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวนในทัศนะของชาปิโร

2.2.1 โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มในทัศนะของชาปิโร vs. สัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต

เมื่อเปรียบเทียบกับแนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต (Platonism)[12] จะพบว่าแนวคิดของชาปิโรนั้นคล้ายคลึงกับแนวคิดของเพลโตบางส่วน ได้แก่ ความเป็นสัจนิยมทางภววิทยาและค่า

---

[11] Ibid., pp.70

[12] คำว่า “สัจนิยม” ภาษาอังกฤษใช้คำว่า “realism” หรือ “platonism” คำหลังมีความหมายที่ต่างจากคำว่า “Platonism” ที่ใช้ P ตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจาก “platonism” หมายถึงสัจนิยมโดยทั่วไป ส่วนคำว่า “Platonism” หมายถึงสัจนิยมในทัศนะของเพลโต (Plato)

ความจริง และความเป็นอิสระจากกันของจำนวนธรรมชาติกับนักคณิตศาสตร์ จำนวนในทัศนะของทั้งคู่ต่างก็เป็น "วัตถุ" ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ชาปิโรไม่ได้พูดอะไรที่เป็นการสนับสนุนความคล้ายคลึงกันดังกล่าวไปมากกว่าการบอกว่าเพียงการให้รายการ (list) ตัวอย่างของสิ่งๆ หนึ่งไม่สามารถทำให้เราพรรณนา (delineate) เกี่ยวกับความคิดทางปรัชญา (philosophical notion) ของสิ่งๆ นั้นได้[13] กล่าวคือ การให้รายการตัวอย่างของจำนวนธรรมชาติอย่าง 1, 2, 3, ... ไม่ทำให้เราตอบได้ว่า "จำนวนธรรมชาติ" มีอยู่จริงหรือไม่? ซึ่งถ้ามีอยู่แล้ว จะมีอยู่ในแง่ใด? และจำนวนธรรมชาติเป็นวัตถุหรือไม่?

อย่างไรก็ตาม ส่วนที่แตกต่างกันก็มีอยู่ไม่น้อย เมื่อพูดถึงจำนวนธรรมชาติ (natural number) เพลโตกำลังพูดถึงวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่จริงอย่างเป็นอิสระจากนักคณิตศาสตร์และวัตถุเหล่านั้นต่างก็เป็นอิสระจากกันด้วย จำนวนมีอยู่จริงอย่างจำเป็น และเราไม่สามารถพูดได้ว่า 2 มีอยู่จริงโดยปราศจาก 6 (ถึงแม้ว่าความเป็นอิสระจากกันของ 2 กับ 6 จะมีผู้สนับสนุนว่าเป็นไปในทำนองเดียวกับการที่ลูกบอลชายหาดสีแดงเป็นอิสระจากลูกบอลชายหาดสีฟ้าก็ตาม) สารัตถะ (essence) ของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั้นเองในฐานะปัจเจกวัตถุ และไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนธรรมชาติอื่น[14] เรากล่าวถึงสารัตถะของจำนวนแต่ละจำนวนได้โดยปราศจากการกล่าวถึงจำนวนอื่น เช่น การกล่าวถึงสารัตถะของ 2 เราสามารถทำได้โดยปราศจากการกล่าวถึง 1 และ 3 อย่างไรก็ดี จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนจะต้องมีอยู่จริงอย่างจำเป็นด้วยตัวมันเอง ดังนั้น จำนวนธรรมชาติทุกๆ จำนวนจึงต้องมีอยู่จริงพร้อมกัน

ทัศนะโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของชาปิโรค่อนข้างจะแตกต่างออกไป โครงสร้างในทัศนะของชาปิโรนั้นไม่ได้มีเพียงโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (natural number structure) เท่านั้น แต่มีอีกหลายๆ โครงสร้างด้วยกัน อาทิ โครงสร้างของจำนวนจริง (real number structure) โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน (complex number structure) โครงสร้างของพื้นที่แบบยูคลิด (Euclidean space structure) เป็นต้น โดยที่ในแต่ละโครงสร้างจะมีระบบหลายๆ ระบบที่เป็นตัวอย่างของโครงสร้างนั้นได้ เช่น ระบบของเซอร์เมโลและระบบของนอยมันน์ ซึ่งเป็นตัวอย่างของโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ เป็นต้น เมื่อใดก็ตามที่ชาปิโรพูดถึงจำนวนธรรมชาติ เขากำลังพูดถึงบางสิ่งบางอย่างเกี่ยวกับโครงสร้างของจำนวนธรรมชาตินั่นเอง

---

[13] Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (New York: Oxford University Press, 1997). p.73.

[14] Ibid., pp.72

ถ้าอธิบายว่าสารัตถะของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของเพลโตคือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวมันเองแล้ว สารัตถะของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของชาปิโรก็คือความสัมพันธ์ (relations) ที่จำนวนธรรมชาตินั้นมีต่อจำนวนธรรมชาติอื่น[15] ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าสารัตถะของจำนวน 2 ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าการเป็นตำแหน่งที่ 2 ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (หรือเป็นตำแหน่งที่ 3 เมื่อกำหนดให้จำนวนเริ่มต้นคือจำนวน 0) ตำแหน่งที่ 2 เป็นตำแหน่งที่อยู่ถัดจากตำแหน่งที่ 1 และอยู่ก่อนหน้าตำแหน่งที่ 3 (ดังแผนภาพ) ดังนั้น จึงไม่มีจำนวนธรรมชาติใดเลยที่มีอยู่โดยไม่อ้างอิงถึงความสัมพันธ์ที่มีต่อจำนวนธรรมชาติอื่นๆ

สำหรับชาปิโรนั้น โครงสร้าง (structures) มีอยู่จริงและมีอยู่อย่างเป็นอิสระจากระบบใดๆ ที่เป็นตัวอย่าง (exemplify) ของโครงสร้าง เขากล่าวว่าสาระสำคัญ (subject matter) ของเลขคณิตคือโครงสร้างเดี่ยวๆ ที่เป็นนามธรรม (single abstract structure) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมอย่างเป็นอนันต์หรือระบบของวัตถุ (infinite collection or system of object) และสอดคล้องกับความสัมพันธ์ของการเป็นตัวถัดไป (successor relation) ที่ประกอบด้วยวัตถุเริ่มต้นเพียงหนึ่งเดียว (unique initial object) และไปด้วยกันได้กับหลักการอุปนัยของตรรกศาสตร์ลำดับที่สอง (second-order induction principle)[16]

โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมหรือระบบของวัตถุ ดังเช่น

- การรวบรวมของเลขไทย : ๑, ๒, ๓, ...
- การรวบรวมของเลขโรมัน : I, II, III, ...
- การรวบรวมของเซอร์เมโล : {Ø}, {{Ø}}, {{{Ø}}}, ...
- การรวบรวมของนอยมันน์ : {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}, ...

เป็นต้น

---

[15] Stewart Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 2000). p.258.

[16] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.72.

นอกจากนี้ชาปิโรยังได้ยืนยันความมีอยู่จริงของโครงสร้างด้วยการบอกว่าไม่ว่าโครงสร้างดังกล่าวจะมีการรวบรวมหรือระบบของวัตถุที่สอดคล้องกับโครงสร้างนั้นหรือไม่ ก็ไม่กระทบต่อการมีอยู่จริงของโครงสร้างดังกล่าวแต่อย่างใด กล่าวคือ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีอยู่จริงเสมอ แม้ว่าการรวบรวมของเลขไทย เลขโรมัน เซอร์เมโล และนอยมันน์ จะหายไปก็ตาม และสิ่งที่ทำให้แนวคิดของชาปิโรต่างจากแนวคิดของเพลโตมากขึ้นคือ การที่สาระสำคัญของคณิตศาสตร์ในทัศนะของเพลโตไม่ใช่ "โครงสร้าง" หากแต่เป็น "การรวบรวมของวัตถุ" ซึ่งสอดคล้องกับวิธีอธิบายแก่นสารสาระของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของเพลโตที่ได้กล่าวไปแล้ว

ผู้เขียนได้พิจารณาวิเคราะห์เปรียบเทียบระหว่างแนวคิดของเพลโตกับแนวคิดของชาปิโร จะเห็นได้ชัดว่าทัศนะของเพลโตนั้นยอมรับอะไรไว้ก่อนค่อนข้างมาก ขนาดที่ว่าจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวนจะต้องมีอยู่จริงอย่างจำเป็นด้วยตัวมันเอง ภววิทยาของเพลโตจึงน่าจะต้องกว้างใหญ่อย่างเป็นอนันต์ ไม่เช่นนั้นจะไม่สามารถรองรับการมีอยู่ของวัตถุทางคณิตศาสตร์ดังเช่นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งมีอยู่อย่างมากมายมหาศาลได้ ในขณะที่ทัศนะของชาปิโรนั้นยอมรับแต่เพียงการมีอยู่ของโครงสร้างเดี่ยวๆ ที่เป็นนามธรรมเท่านั้น โดยการรวบรวมของวัตถุจะตามมาภายหลังจากการมีอยู่ของโครงสร้างดังกล่าว ด้วยเหตุนี้การมีอยู่ของจำนวนในทัศนะของชาปิโรจึงเป็นไปได้ และดูเหมือนว่าการยอมรับบางสิ่งบางอย่างไว้น้อยกว่า (ทัศนะของชาปิโร) น่าเชื่อถือได้มากกว่าการยอมรับบางสิ่งบางอย่างไว้มากกว่า (ทัศนะของเพลโต)

ผู้เขียนได้พยายามแสดงให้เห็นว่าแนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโตและแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของชาปิโรมีความเหมือนและความแตกต่างในประเด็นใดบ้าง อย่างไรก็ดี มีข้อโต้แย้งว่าหากชาปิโรไม่สามารถตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้อย่างน่าพึงพอใจ แนวคิดของชาปิโรก็จะไม่แตกต่างไปจากแนวคิดของเพลโต (โปรดดูรายละเอียดในหัวข้อ 2.3)

นอกจากปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนาเซอร์ราฟแล้ว แนวคิดของชาปิโรยังสามารถแก้ปัญหาทางปรัชญาได้อีกปัญหาหนึ่งคือปัญหาซีซาร์ เฟรเก้ต้องการเกณฑ์ที่จะใช้ในการตัดสินว่าจำนวนบางจำนวนอย่างจำนวน 2 นั้นเหมือนหรือแตกต่างจากวัตถุอื่นอย่างจูเลียส ซีซาร์ เนื่องจากมีความเป็นไปได้ที่จะมีข้อความอย่างเช่น "จูเลียส ซีซาร์ = 2"[17] โดยที่ข้อความดังกล่าวนี้เราไม่สามารถหาค่าความจริงได้

[17] Ibid., pp.78

ชาปิโรเสนอทางออกให้กับปัญหาซีซาร์ว่าคำถามดังเช่น "จูเลียส ซีซาร์ = 2" หรือไม่? นั้นเป็นคำถามที่ไม่ต้องการคำตอบหรือไม่มีคำตอบที่รอให้เราค้นพบ[18] เนื่องจากจำนวนคือตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ โครงสร้างดังกล่าวเป็นรูปแบบร่วมของทุกๆ แบบ (model) ในเลขคณิต เราจึงสามารถสร้างข้อความเอกลักษณ์ดังเช่น $1 = 1$ และ $1 \neq 4$ ได้ หรือข้อความอื่นในภาษาเลขคณิต เช่น 7 เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 10 เราก็สามารถสร้างได้เช่นกัน ในทางตรงกันข้าม มันดูไม่เข้าที (makes no sense) ที่เราจะสร้างข้อความเอกลักษณ์ระหว่างตำแหน่งในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (จำนวน 2) กับวัตถุอื่นๆ (จูเลียส ซีซาร์) เนื่องจากเอกลักษณ์ระหว่างจำนวนธรรมชาติด้วยกันนั้นได้ถูกกำหนดไว้แล้ว (determinate) แต่เอกลักษณ์ระหว่างจำนวนกับวัตถุประเภทอื่นไม่ได้ถูกกำหนดเอาไว้

เมื่อย้อนกลับมาที่คำถามสำคัญที่ว่า "จำนวนคืออะไร?" ในทัศนะของชาปิโร จำนวนคือ

1) <u>ตำแหน่ง</u>ซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างของจำนวน โครงสร้างดังกล่าวมีความเป็นนามธรรมและมีเพียงหนึ่งเดียว[19] นอกจากนี้ยังเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมของวัตถุ เช่น การรวบรวมของเลขไทย การรวบรวมของเลขโรมัน การรวบรวมของเซอร์เมโล การรวบรวมของนอยมันน์ เป็นต้น

2) <u>วัตถุ</u>และเป็นวัตถุที่จริงแท้ (bona fide object) ในตัวของมันเอง

การแยกออกเป็นสองลักษณะดังกล่าวทำให้ปัญหาหลายๆ ปัญหาในปรัชญาคณิตศาสตร์ไม่เป็นปัญหาอีกต่อไป ชาปิโรได้แบ่งมุมมองตำแหน่งออกเป็นสองประเภท ได้แก่ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ (the places-are-offices perspective) และมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ (the places-are-objects perspective)[20]

2.2.2 มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ

ชาปิโรกล่าวว่ามีความแตกต่างทางสหัชญาณระหว่าง "วัตถุ" กับ "ตำแหน่ง" ซึ่งอยู่ในโครงสร้าง หรือระหว่าง "เจ้าของออฟฟิศ" กับ "ออฟฟิศ" ดังนั้น เราจึงต้องแยก "เจ้าของออฟฟิศ"

---

[18] Ibid., pp.79

[19] โครงสร้างชนิดใดชนิดหนึ่งจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น เช่น โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีเพียงหนึ่งเดียว โครงสร้างของจำนวนจริงมีเพียงหนึ่งเดียว โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนมีเพียงหนึ่งเดียว เป็นต้น

[20] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.82.

ออกจาก “ออฟฟิศ” ก่อน หรือหากเปรียบเทียบกับบางสิ่งในชีวิตประจำวันคือ การแยก “บุคคล” ออกจาก “ตำแหน่งหน้าที่ของบุคคล” เช่น เราต้องแยก “โดนัลด์ ทรัมป์” (บุคคล) ออกจาก “ออฟฟิศของประธานาธิบดี” ของคณะรัฐบาลสหรัฐอเมริกา (ตำแหน่งหน้าที่ของบุคคล) เนื่องจากในยุคสมัยหนึ่ง บุคคลที่ดำรงตำแหน่งประธานาธิบดีของสหรัฐอเมริกาอาจจะเป็นคนอื่นที่ไม่ใช่โดนัลด์ ทรัมป์ก็เป็นได้ เช่นเดียวกับที่เราจะต้องแยก “วัตถุ” ที่แสดงบทบาทเป็น 2 ออกจาก “ตำแหน่งที่สอง” วัตถุดังเช่น “๒”, “II”, “{{Ø}}” และ “{Ø, {Ø}}” ต่างก็สามารถแสดงบทบาทเป็นตำแหน่งที่สองได้ทั้งสิ้น

พิจารณาตารางเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่าง “วัตถุ” (object) กับ “ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง” (a place in a structure) หรือ “เจ้าของออฟฟิศ” (officeholder) กับ “ออฟฟิศ” (office) ดังนี้

วัตถุ/เจ้าของออฟฟิศ	ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง/ออฟฟิศ
โดนัลด์ ทรัมป์	ออฟฟิศของประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกา
ชัชชาติ สิทธิพันธุ์	ออฟฟิศของแคนดิเดตนายกรัฐมนตรีลำดับที่ 2 จากพรรคเพื่อไทย
ธนาธร จึงรุ่งเรืองกิจ	ออฟฟิศของแคนดิเดตนายกรัฐมนตรีจากพรรคอนาคตใหม่
ผลิตโชค อายนบุตร	ออฟฟิศของศิลปินเจ้าของหน้ากากจิงโจ้จากรายการ The Mask Singer หน้ากากนักร้อง
ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ	ออฟฟิศของเจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงาน ชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย
๒	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
II	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
{{Ø}}	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
{Ø, {Ø}}	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ

ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างนั้นอาจจะถูกกล่าวถึงในบริบทของระบบเดียวกันหรือหลายๆ ระบบก็ได้ ทั้งนี้ ก็เพื่อความสะดวกเวลาที่เรากล่าวถึงข้อความต่างๆ อาทิ

“ประธานาธิบดีคนปัจจุบันของสหรัฐอเมริกามีทรัพย์สินมากกว่าประธานาธิบดีคนก่อน”

“เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทยคนปัจจุบันมีอายุน้อยกว่าเจ้าหน้าที่ (หลัก) คนก่อน”

“จำนวน 2 ในระบบของเซอร์เมโลมีจำนวนสมาชิกน้อยกว่าจำนวน 2 ในระบบของนอยมันน์อยู่ 1 ตัว”

2.2.3 มุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ

ภายใต้มุมมองนี้เราจะกล่าวถึง “ตำแหน่ง” ราวกับว่าเป็น “วัตถุ” ในตัวของมันเอง โดยสิ่งที่บ่งชี้ถึง (denote) ตำแหน่งในโครงสร้างจะถือว่าเป็นเทอมเดี่ยวๆ ที่จริงแท้ (bona fide singular terms)[21] เช่น

“ประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกาทำหน้าที่เป็นประธานสภาสูง (Senate)”

“แคนดิเดตนายกรัฐมนตรีลำดับที่ 2 จากพรรคเพื่อไทยเป็นสมาชิกของพรรคเพื่อไทย”

“แคนดิเดตนายกรัฐมนตรีจากพรรคอนาคตใหม่เป็นสมาชิกของพรรคอนาคตใหม่”

“ศิลปินเจ้าของหน้ากากจิงโจ้จากรายการ The Mask Singer เป็นศิลปินในสังกัดค่ายไวท์มิวสิกในเครือบริษัท จีเอ็มเอ็ม แกรมมี่ จำกัด (มหาชน)”

“เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทยเป็นนิสิตปริญญาโท ชั้นปีที่ 4 สาขาปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย”

“2 < 3”

“7 เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 10”

จะเห็นว่าเราสามารถเรียกชื่อของ “ตำแหน่ง” แทนชื่อของ “วัตถุ” หรือสามารถเรียกชื่อของ “ออฟฟิศ” แทนชื่อของ “เจ้าของออฟฟิศ” ได้เลย เป็นการละไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น เราเรียก “ประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกา” แทน “โดนัลด์ ทรัมป์” เราเรียก “เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย” แทน “ขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ” เป็นต้น สำหรับเรื่องจำนวนนั้น เราสามารถเรียก “ตำแหน่งที่ 2” ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ ว่า “2” ได้เลย ในทำนองเดียวกัน เราจะเรียก “ตำแหน่งที่ x” ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติว่า “x” และกล่าวถึง “x” ราวกับว่าเป็นวัตถุจริงๆ ไม่ใช่เป็นตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง

ดังนั้น เมื่อมองด้วยมุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ จำนวนคือ “ตำแหน่ง” ในขณะที่เมื่อมองด้วยมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ จำนวนก็คือ “วัตถุ” นั่นเอง[22]

---

[21] Ibid., pp.83

[22] มีข้อสังเกตบางประการเกี่ยวกับการใช้ “is” ในทั้งสองมุมมองที่แตกต่างกัน ดังนี้

มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ จะใช้ “is” ในลักษณะที่เป็นภาคแสดง (predicate) เช่น {{Ø}} is 2.

มุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ จะใช้ “is” ในลักษณะที่เป็นเอกลักษณ์ (identity) เช่น 2 is prime.

เมื่อพิจารณาปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนาเซอร์ราฟ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศของชาปิโรสามารถให้คำตอบได้ว่าวิธีนิยามจำนวนธรรมชาติโดยลดทอนลงไปสู่ทฤษฎีเซตทั้งสองวิธีตามที่เบนาเซอร์ราฟเสนอล้วนถูกต้องทั้งสิ้น (เมื่อให้จำนวน 0 อยู่ในตำแหน่งที่ 1) ดังนี้

วิธีการนิยามแบบที่หนึ่ง : Ø {Ø} {{Ø}} {{{Ø}}} ...

วิธีการนิยามแบบที่สอง : Ø {Ø} {Ø, {Ø}} {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}} ...

หรือถ้าจะนิยามแบบอื่น เราก็สามารถทำได้เช่นกัน

วิธีการนิยามแบบที่สาม : I II III ...

วิธีการนิยามแบบที่สี่ : ๐ ๑ ๒ ๓ ...

มุมมองสถานที่เป็นออฟฟิศทำให้การนิยามจำนวนธรรมชาติเป็นไปได้หลายวิธี เพราะไม่ว่าจะนิยามด้วยวิธีใด ก็ล้วนกลายเป็นระบบใดระบบหนึ่งทั้งสิ้น และทุกๆ ระบบจะสอดคล้องกับโครงสร้างเดียวกัน นั่นคือ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ อาจกล่าวได้ว่าเราสามารถสกัด (abstract) "โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ" ออกมาจากระบบเหล่านั้นได้ ดังแผนภาพต่อไปนี้

ตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 ตำแหน่งที่ 3 ตำแหน่งที่ 4 ตำแหน่งที่ 5 ตำแหน่งที่ 6

ปัญหาของเบนาเซอร์ราฟจึงไม่ใช่ปัญหาสำหรับชาปิโร เนื่องจากการลดทอนจำนวนธรรมชาติลงไปสู่ทฤษฎีเซตสามารถทำได้หลายวิธีและแต่ละวิธีก็สามารถจัดเป็นการรวบรวมหรือระบบแบบหนึ่ง เช่น การรวบรวมของเซอร์เมโล การรวบรวมของนอยมันน์ เป็นต้น และทุกการรวบรวมจะมีสิ่งที่เหมือนกันคือการเป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างๆ เดียว นั่นคือ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ ดังนั้นจุดแข็งของแนวคิดของชาปิโรอีกประการหนึ่งก็คือความสามารถที่จะตอบปัญหาของเบนาเซอร์ราฟได้และยังรักษาไว้ซึ่งความเป็นวัตถุของจำนวนธรรมชาติ

2.2.4 โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มในทัศนะของชาปิโร vs. **โครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งในทัศนะของพาร์สันส์**

พาร์สันส์[23] ปฏิเสธลักษณะเอนเท่ เร็มของชาปิโร และเสนอแนวคิดที่เรียกว่าโครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้ง ซึ่งหากจะอธิบายให้เข้าใจง่ายๆ ด้วยมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุก็คือความเข้าใจที่ว่าข้อความทางคณิตศาสตร์ (จากมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ) ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าการทำทุกๆ ระบบซึ่งเป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างเดียวกันให้กลายเป็นรูปทั่วไป (generalizations)[24] ดังนี้

ข้อความอย่าง “3+9 = 12” มีความหมายว่าในระบบของจำนวนธรรมชาติ S ใดๆ วัตถุในตำแหน่งที่ 3 ของ S บวกแบบ S (S-added to) กับวัตถุในตำแหน่งที่ 9 ของ S มีผลลัพธ์เป็นวัตถุในตำแหน่งที่ 12 ของ S

ข้อความอย่าง “3 มีอยู่” (3 exists) หมายความว่าระบบของจำนวนธรรมชาติใดๆ จะมีวัตถุในตำแหน่งที่ 3 และ “จำนวนมีอยู่” (numbers exist) หมายความว่าระบบของจำนวนธรรมชาติใดๆ ต่างก็มีวัตถุในตำแหน่งของมัน

จะเห็นว่าในท้ายที่สุดความเป็น “โครงสร้าง” แทบไม่เหลืออยู่ เราสามารถกำจัดโครงสร้างทิ้งไปได้ แทนที่จะพูดถึงระบบทั้งหมดซึ่งเป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างๆ เดียว เราสามารถพูดถึงจำนวนได้เลย เป็นความสะดวกกว่าและตรงกับวิธีใช้ในคณิตศาสตร์ของเรามากกว่าด้วย กล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ นักโครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งกำลังถอดความ (paraphrase) ของข้อความเกี่ยวกับตำแหน่งเป็นวัตถุ (places-are-objects statements) ให้อยู่ในเทอมของมุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศนั่นเอง

ชาปิโรวิพากษ์ว่าแนวคิดของพาร์สันส์ต้องการภาววิทยาเบื้องหลัง (background ontology) ที่ค่อนข้างแข็งแรง (robust) ไม่เช่นนั้นจะไม่สามารถรองรับวัตถุที่มีอยู่เป็นจำนวนมากได้ (เนื่องจากโครงสร้างได้ถูกกำจัดทิ้งไปแล้ว) ซึ่งถ้าหากภาววิทยาเบื้องหลังมีจำกัด ก็จะเกิดปัญหาตามมาว่าจะไม่มีระบบใดที่เป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติได้ กล่าวคือ ข้อความอย่าง “3+5 = 4” และ “ทุกจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ” จะถูกตีความว่าเป็นจริงเสมอ ซึ่งแน่นอนว่าขัดแย้งกับความจริง (truth) ในคณิตศาสตร์ ในทางกลับกัน ถ้าภาววิทยาเบื้องหลังมีลักษณะอนันต์ สิ่งที่ตามมาก็คือภาววิทยาดังกล่าวก็จะไม่สามารถถูกเข้าใจได้ในเทอมของนักโครงสร้างนิยม (structuralist terms)[25]

---

[23] Charles Parsons, "The Structuralist View of Mathematical Objects," *Synthese* 84, no. 3 (1990).

[24] Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. p.270.

[25] Ibid., pp.273

พาร์สันส์ไม่ได้ตอบข้อแย้งของชาปิโรอย่างตรงไปตรงมา เขากล่าวว่าการพูดถึงโครงสร้างมีลักษณะเป็นสิ่งที่เหนือกว่าภาษา (meta-linguistic) โดยในการพูดถึงวัตถุทางคณิตศาสตร์ทุกครั้งจะมีโครงสร้างเบื้องหลัง (background structure) ที่วัตถุนั้นอาศัยอยู่ (reside) เสมอ และเราอาจจะมีโครงสร้างที่แตกต่างกันจำนวนมากซึ่งเป็นที่อยู่ (homes) สำหรับวัตถุแต่ละชนิดที่แตกต่างกัน[26] และความเข้าใจโครงสร้างในลักษณะดังกล่าวก็ไปด้วยกันได้กับภาษาทางคณิตศาสตร์อย่างไม่เป็นทางการ (the language of informal mathematics) ที่เราใช้อยู่ในชีวิตประจำวัน

อย่างไรก็ดี ผู้เขียนเห็นว่าแนวคิดของพาร์สันส์นั้นมีปัญหา เพราะนอกจากจะไม่ได้ตอบคำถามของชาปิโร ซึ่งผู้เขียนเห็นด้วยว่าเป็นปัญหาต่อแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งเป็นอย่างมากแล้ว พาร์สันส์ยังอ้างถึง “ลักษณะที่เหนือกว่าภาษา” ของโครงสร้างด้วย เป็นอีกครั้งที่ลักษณะที่เหนือกว่าภาษาดังกล่าวนั้นไม่อาจเข้าใจได้ในเทอมของ “โครงสร้าง” นอกจากนี้การมีโครงสร้างที่แตกต่างกันอยู่เป็นจำนวนมากซึ่งเป็นที่อยู่ของวัตถุที่แตกต่างกัน ก็ดูเหมือนว่าจะขัดแย้งกับแนวคิดพื้นฐานของโครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งเองที่พยายามทำทุกระบบ (ซึ่งเป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างๆ เดียวกัน) ให้กลายเป็นรูปทั่วไปในรูปของข้อความทางคณิตศาสตร์

กล่าวโดยสรุป หากเปรียบเทียบระหว่างแนวคิดของชาปิโรกับแนวคิดของพาร์สันส์ ซึ่งเป็นโครงสร้างนิยมเหมือนกัน แนวคิดของชาปิโรนั้นน่ายอมรับได้มากกว่าด้วยเหตุผลดังที่ได้กล่าวมา

2.2.5 ภววิทยาแบบองค์รวม

ความมีอยู่ของโครงสร้างที่ได้อธิบายไปแล้วในหัวข้อ 2.2 (รวมถึงการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้าง ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 3) ยืนยันด้วยข้อเสนอของชาปิโรที่เรียกว่า “ภววิทยาแบบองค์รวม” (holism ontology) เขากล่าวว่าภววิทยาแบบองค์รวมหรือความเป็นองค์รวม (holism) เป็นสิ่งที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง “หลักการปรัชญา-อันดับแรก” (philosophy-first principle) กับ “หลักการปรัชญา-อันดับสุดท้าย-ถ้าใช่-ทั้งหมด” (philosophy-last-if-at-all principle)[27]

หลักการปรัชญา-อันดับแรกสนับสนุนว่าในแง่หนึ่งปรัชญานั้นมาก่อน (precede) และกำหนด

---

[26] Charles Parsons, "Structuralism and Metaphysics," *The Philosophical Quarterly* 54, no. 214 (2004).

[27] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.25.

ความเป็นไปของวิถีปฏิบัติ (practice) ทางคณิตศาสตร์ ความคิดที่ว่าคณิตศาสตร์มีอยู่อย่างไร อาทิ สิ่งทางคณิตศาสตร์ (mathematical entities) มีลักษณะเป็นภววิสัยหรือไม่เป็นอิสระจากจิต เป็นต้น เป็นตัวกำหนดว่าคณิตศาสตร์จะถูกดำเนินการต่อไปอย่างไร นักปรัชญาที่เชื่อในความมีอยู่อย่างเป็นอิสระของวัตถุทางคณิตศาสตร์มีแนวโน้มที่จะยอมรับกฎในตรรกวิทยาแบบดั้งเดิม (classical logic) เช่น กฎไม่มีค่ากลาง นิยามแบบอิมเพรดิเคทีฟ สัจพจน์ของตัวเลือก (axiom of choice) เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม หลักการปรัชญา-อันดับแรกไม่เป็นจริงสำหรับประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์ที่ผ่านมา เนื่องด้วยการเข้ามาของตรรกวิทยาที่ไม่ใช่แบบดั้งเดิม (non-classical logic) นอกจากนี้ก็ยังไม่เคยมีช่วงเวลาใดเลยที่ชุมชนทางคณิตศาสตร์ (mathematical community) จะยอมรับว่าวัตถุทางคณิตศาสตร์ (เป็นต้นว่าจำนวน) มีอยู่จริงๆ และเป็นอิสระจากความคิดของนักคณิตศาสตร์

ในทางกลับกัน หลักการปรัชญา-อันดับสุดท้าย-ถ้าใช่-ทั้งหมดเสนอว่าปรัชญากับคณิตศาสตร์ไม่มีอะไรเกี่ยวข้องกัน (irrelevant) คณิตศาสตร์มีวิถีทางเป็นของมันเอง (mathematics has a life of its own) และเป็นอิสระจากข้อพิจารณาใดๆ ทางปรัชญา (philosophical considerations) สถานะของวัตถุหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ไม่ได้สนับสนุน (contribute) สิ่งใดให้กับคณิตศาสตร์และนักปรัชญาพร้อมที่จะละทิ้งงานของพวกเขาทันที ถ้ามีพัฒนาการใดทางคณิตศาสตร์ที่ขัดแย้งกับบางสิ่งในปรัชญาคณิตศาสตร์[28]

ไควน์เป็นนักปรัชญาคนหนึ่งที่สนับสนุนหลักการปรัชญา-อันดับสุดท้าย-ถ้าใช่-ทั้งหมดข้างต้น ทัศนะธรรมชาตินิยม (naturalism) ของไควน์เสนอให้เราละทิ้งปรัชญาอันดับแรกและยืนยันความเป็นจริง (reality) ทั้งหมดว่าอยู่ในวิทยาศาสตร์แล้วในตัวของมันเอง[29] อย่างไรก็ตาม ชาปิโรไม่เห็นด้วยกับข้อเสนอของไควน์ เขากล่าวว่าสมมติว่าหลักการปรัชญา-อันดับสุดท้าย (philosophy-last) นั้นถูกต้องจริงๆ แต่นั่นก็ไม่ได้หมายความว่าปรัชญาคณิตศาสตร์ทั้งหมดจะไร้ความหมาย

"ความเป็นองค์รวม"[30] ที่ชาปิโรเสนอจึงเป็นสิ่งที่อยู่กึ่งกลางและประนีประนอมระหว่างหลักการทั้งสอง ปรัชญากับคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันอย่างแนบแน่นและมีความเชื่อมโยงถึงกัน ไม่มีสิ่งใดที่อยู่เหนืออีกสิ่ง ทั้งคู่ต่างก็สนับสนุนซึ่งกันและกัน ผู้เขียนเข้าใจว่าชาปิโรน่าจะกำลังพยายามอธิบาย "ความเป็นสัจนิยม" กับ "การใช้งานได้ของคณิตศาสตร์" ซึ่งเป็นฐานให้กับวิทยาศาสตร์แบบหนึ่ง ว่าสามารถไปด้วยกันได้อย่างไรโดยใช้ข้อเสนอเรื่องความเป็นองค์รวมของเขา

---

[28] Ibid., pp.28

[29] Ibid., pp.29

[30] Ibid., pp.34

2.3 ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้

แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของชาปิโรเผชิญกับปัญหาที่สำคัญทางภววิทยา[31] คือ ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ (Identity of Indiscernibles)[32] ซึ่งเสนอโดยจอห์น พี. เบอร์เจส (John P. Burgess)[33], เจฟฟรีย์ เฮลล์แมน (Geoffrey Hellman)[34] และจัคคา เคราเนน (Jukka Keränen)[35]

การที่จะอธิบายจำนวน x บางจำนวนตามแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม เราทำได้เพียงแค่อธิบายคุณสมบัติภายในเชิงโครงสร้าง (structurally internal properties) ของจำนวนนั้นในฐานะที่เป็นตำแหน่งหนึ่งในโครงสร้าง เช่น จำนวน 2 ไม่ใช่สิ่งอื่นใดนอกจากการเป็นตำแหน่งที่ 2 ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ ซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งที่ 1 และอยู่ก่อนหน้าตำแหน่งที่ 3 เป็นต้น หากยอมรับเช่นนี้ สิ่งที่ตามมาก็คือ จำนวนบางจำนวนซึ่งมองดูภายนอก (ในลักษณะของการนำไปใช้ในคณิตศาสตร์) เห็นได้ชัดว่าแตกต่างกัน แต่เมื่อพิจารณาเฉพาะคุณสมบัติภายในเชิงโครงสร้างแล้วกลับเหมือนกันและถือว่าเป็นจำนวนเดียวกัน

เบอร์เจสกล่าวว่าในจำนวนเชิงซ้อนเรามีรากสองรากที่เป็นคำตอบของสมการ $z^2 + 1 = 0$ โดยที่ทั้งสองรากนั้นเป็นสังยุคของกันและกัน (conjugate) โดยเมื่อให้คำตอบหนึ่งเป็น i อีกคำตอบหนึ่งจะเป็น -i อย่างไรก็ดี ถ้าพิจารณาฟังก์ชันอัตสมสัณฐาน (automorphism) ซึ่งเป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism) แบบหนึ่งหรือการสมสัณฐานกับตัวเอง[36] จะได้ว่า i และ -i ไม่แตกต่างกันโดยคุณสมบัติเชิงพีชคณิต (algebraic properties) อย่างไรก็ดี ทั้งสองจำนวนนั้นแตกต่างกันในทัศนะของชาปิโร ถึงแม้ดูเหมือนว่าจะไม่มีอะไรที่แยกทั้งคู่ออกจากกันได้เลยก็ตาม เบอร์เจสกล่าวว่าชาปิโร

[31] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*.

[32] รากฐานของปัญหานี้มาจากก็อตต์ฟรีด ไลบ์นิซ (Gottfried Leibniz) มีใจความสำคัญว่าวัตถุสองวัตถุจะเป็นเอกลักษณ์กัน/เหมือนกัน/เป็นสิ่งเดียวกันเมื่อสอดคล้องกับหลักการดังต่อไปนี้: สำหรับคุณสมบัติ F ใดๆ ถ้าวัตถุ x มีคุณสมบัติ F เมื่อและก็ต่อเมื่อ วัตถุ y มีคุณสมบัติ F แล้ว x และ y จะเป็นเอกลักษณ์กัน

[33] John Burgess, "Review of Shapiro (1997)," *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40, no. 2 (1999).

[34] Geoffrey Hellman, "Three Varieties of Mathematical Structuralism," *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001).

[35] Jukka Keränen, "The Identity Problem for Realist Structuralism," *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001).

[36] พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ, ระบบจำนวน (กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์ (1991), 2558). น.22.

ละเลยและไม่ได้ให้คำตอบในสิ่งที่เป็นปัญหาดังกล่าว[37] ซึ่งนอกจาก i และ -i แล้ว ก็ยังมีกรณีอื่นๆ ที่เป็นปัญหาด้วย เช่น พื้นที่แบบยูคลิด (Euclidean space) เบอร์เจสพบว่าจุดสองจุดใดๆ บนระนาบแบบยูคลิด (Euclidean plane) จะมีฟังก์ชันอัตสมสัณฐานอยู่เสมอ ซึ่งทำให้เราไม่สามารถแยกความแตกต่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบได้

ในทำนองเดียวกับข้อแย้งของเฮลล์แมน ซึ่งนอกจากจะยกตัวอย่างแย้งในกรณีของจำนวนเชิงซ้อนและพื้นที่แบบยูคลิดแล้ว ยังได้กล่าวถึงกรณีของจำนวนเต็มด้วย เช่น 1 และ -1 ที่ไม่สามารถแยกแยะได้โดยคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายใน (internal relational properties) หรือโดยฟังก์ชันอัตสมสัณฐาน และสิ่งนี้นำไปสู่ข้อสรุปที่แอบเสิร์ด (absurd)[38]

เคราเนนให้ข้อแย้งไปในทิศทางเดียวกัน แต่เริ่มต้นด้วยข้อเสนอที่ว่าชาปิโรมีภาระที่จะต้องสามารถให้สูตรความเป็นเอกลักษณ์ (identity schema) ได้ นั่นคือ จะต้องสามารถเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้

(IS) $\forall x \forall y\ (x = y \Leftrightarrow \ldots)$[39]

โดยสูตรที่ชาปิโรนำมาปรับเพื่อให้ง่ายขึ้น คือ

(IND) $\forall x(x=a \equiv \ldots)$

การเติมข้อความลงในสูตรข้างต้นจะต้องมีความชัดเจนและไม่กำกวม นักปรัชญาบางส่วนเสนอว่าวัตถุแต่ละวัตถุต่างก็มี “ความเป็นสิ่งนี้” (haecceity) หรือความเป็นตัวของมันเอง (thisness) ที่ทำให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุนั้นและไม่เป็นวัตถุอื่น

นั่นคือ เราสามารถเติมข้อความลงใน (IND) ได้เป็น

$\forall x\ (x = a \equiv H_a(x))$

หรือ

$\forall x\ (x = a \equiv x = a)$

[37] Burgess, "Review of Shapiro (1997)." p.288.

[38] Hellman, "Three Varieties of Mathematical Structuralism." p.193.

[39] Keränen, "The Identity Problem for Realist Structuralism." p.312.
สูตรนี้เป็นสูตรความเป็นเอกลักษณ์ที่เฉพาะเจาะจงสำหรับนักโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มหรือชาปิโร ซึ่งจะต้องระบุให้ชัด

วิธีตอบแบบนี้เป็นวิธีหนึ่งที่นักปรัชญาบางส่วนยอมรับ อย่างไรก็ดี ถ้าชาปิโรยอมรับมโนทัศน์ดังกล่าว ก็จะทำให้แนวคิดของชาปิโรนั้นไม่ได้แตกต่างไปจากแนวคิดของเพลโต[40] เนื่องจากการบอกว่าจำนวนใดจำนวนหนึ่งมีคุณสมบัติ "ความเป็นจำนวนนั้น" ไม่ได้แตกต่างไปจากการบอกว่าแก่นสารสาระของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวของมันเอง ซึ่งตรงกับทัศนะของเพลโต นอกจากนั้นมโนทัศน์ "ความเป็นสิ่งนี้" ยังไม่ใช่คุณสมบัติเชิงโครงสร้างอีกด้วย

เคราเนนเสนอว่าสูตรที่เหมาะสมสำหรับแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม คือ

(STR) $\forall x \forall y(x=y \Leftrightarrow \forall \emptyset(\emptyset \in \phi \rightarrow (\emptyset(x) \Leftrightarrow \emptyset(y))))$[41]

หรือสูตรที่ชาปิโรปรับ ดังนี้

$(STR)_s$ $\forall x\ (x=a \equiv \forall \phi(\phi \in S_{\mathbf{a}} \equiv \emptyset(x)))$

ปัญหาความเป็นเอกลักษณ์ (the identity problem) ที่ตามมาเมื่อใช้สูตรดังกล่าว[42] คือ 1 และ -1 ในระบบ (Z, +) ใดๆ จะมีคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายในระบบ (intra-systemic relational properties) ที่เหมือนกัน กล่าวคือ 1 = -1 โดยปัญหาที่ตามมานั้น เราจะได้ว่า 0 = 1 + (-1) = 1 + 1 = 2 หรือ 0 = 2 ซึ่งไม่เป็นความจริง เนื่องจาก 0 และ 2 ไม่มีคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายในระบบที่เหมือนกัน

2.4 การตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ของชาปิโร

ก่อนที่จะอธิบายถึงการตอบปัญหาของชาปิโรเกี่ยวกับสูตรความเป็นเอกลักษณ์ที่เสนอโดยเคราเนน จะขอกล่าวถึงวิธีตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะ โดยเฉพาะอย่างยิ่งใน

---

[40] James Ladyman, "Mathematical structuralism and the identity of indiscernibles," *Analysis* 65, no. 3 (2005). p.219.

[41] Keränen, "The Identity Problem for Realist Structuralism." p.316.

"... the realist structuralist will complete (IS) as follows.

Given a system *S*, and given two quantifiers '∀x' and '∀x' ranging over the places of the structure **S** of *S*,

(STR), where '∀ϕ' is taken to be ranging over the relational properties in *S.*"

[42] Ibid., pp.317

กรณีของ i และ -i ซึ่งเสนอโดยเจมส์ เลดีแมน (James Ladyman)[43]

เลดีแมนเสนอว่าสำหรับ i และ -i มีการสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน (weakly discernibility)[44] ตามหลักการดังนี้: "วัตถุสองสิ่งใดๆ จะสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน เมื่อมีความสัมพันธ์ทวิภาคแบบไม่สะท้อนกัน (two-place irreflexive relation)"

เนื่องจาก i และ -i มีความสัมพันธ์ทวิภาคแบบไม่สะท้อนกัน ดังนั้น โดยหลักการดังกล่าวทั้งคู่จึงสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน นั่นคือ มีความเป็นไปได้ที่จะมีระบบสองระบบซึ่งสมสัณฐานกัน แต่สมาชิกที่จับคู่กันสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน ส่วนในกรณีของพื้นที่แบบยูคลิดก็เช่นเดียวกัน จุดสองจุดใดๆ บนระนาบต่างก็สอดคล้องกับหลักการดังกล่าว ดังนั้น เราจึงสามารถแยกความแตกต่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบได้ โดยที่ความแตกต่างนั้นก็คือการสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนนั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ชาปิโรปฏิเสธข้อเสนอนี้ของเลดีแมน[45] เนื่องจากโดยข้อเสนอของเลดีแมน เราจะได้ว่าตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ (the cardinal-four structure) ก็จะสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนด้วย ซึ่งมโนทัศน์ดังกล่าวครอบคลุมมากเกินความจำเป็น เนื่องจากเราต้องการให้ใช้ได้กับบางเรื่องเท่านั้น (เป็นต้นว่าจำนวนเชิงซ้อนและพื้นที่แบบยูคลิด) สำหรับโครงสร้างเชิงการนับ-สี่นั้นเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยตำแหน่ง 4 ตำแหน่งที่ไม่อยู่เรียงชิดติดกัน โดยโครงสร้างที่ประกอบด้วยจำนวน 1, 2, 3 และ 4 เราไม่จัดว่าเป็นโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ แต่จัดว่าเป็นโครงสร้างเชิงอันดับ-สี่ (the ordinal-four structure) ตัวอย่างของโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ เช่น โครงสร้างของผู้เล่นในกีฬาบริดจ์ที่ประกอบด้วยผู้เล่น 4 คน เป็นต้น

เมื่อเราย้อนกลับมาที่สูตรความเป็นเอกลักษณ์ (STR) ที่เคราเนนเสนอ ชาปิโรยอมรับว่าสูตรนี้ทำให้ได้ว่าการแก้ปัญหาที่เป็นสาระสำคัญ (non-trivial resolution) ของการทำให้เป็นปัจเจก (individuation task) นั้นมีอยู่จริง อย่างไรก็ตาม ชาปิโรปฏิเสธสูตรดังกล่าว เนื่องจากถ้าต้องการให้

[43] Ladyman, "Mathematical structuralism and the identity of indiscernibles."

[44] W. V. Quine, "Grades of discriminability," *The Journal of Philosophy* 73, no. 5 (1976). เลดีแมนอ้างอิงแนวคิดของไควน์จากหนังสือ "Word and Object" (1960: pp.230) และบทความ "Grades of discriminability" (1976: pp.113-116) เกี่ยวกับความแยกออกจากกันได้สามประเภท ได้แก่ ความแยกออกจากกันได้สัมบูรณ์ (absolutely discernibility), ความแยกออกจากกันได้สัมพัทธ์ (relatively discernibility) และความแยกออกจากกันได้อย่างอ่อน (weakly discernibility)

[45] Stewart Shapiro, "Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and -i"," *Philosophia Mathematica (III)* 16 (2008). p.288.

แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มกลายเป็นปรัชญาคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์พร้อม (full philosophy of mathematics) นอกจากสูตรสำหรับ i และ -i แล้ว ก็จะต้องมีสูตรสำหรับพื้นที่แบบยูคลิดและลำดับชั้นเชิงทฤษฎีเซต (set-theoretic hierarchy) ด้วย แต่เนื่องจากมีวัตถุอยู่มากเกินไปและไม่มีสูตรที่มากเพียงพอสำหรับวัตถุเหล่านั้น[46] ดังนั้น จึงไม่มีการแก้ปัญหาที่เป็นสาระสำคัญข้างต้น และนักโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มจะต้องปฏิเสธสูตร (STR) ด้วย

นอกจากนี้ชาปิโรยังไม่ได้มองการมีวัตถุสองวัตถุที่แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันว่าเป็นปัญหา[47] เขายกตัวอย่างดังนี้: ให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป b + ci (เมื่อ b และ c เป็นจำนวนจริงที่ c ≠ 0) สิ่งที่ตามมาก็คือจะมีเซต S_a ของคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ที่เป็นจริงสำหรับทุก a และเมื่อกำหนดให้ a' อยู่ในรูป b – ci แล้ว เราจะได้ว่า a' มีคุณสมบัติทุกประการเหมือน S_a กล่าวคือ a และ a' มีคุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันทุกประการ อย่างไรก็ตาม a และ a' นั้นแตกต่างกัน นั่นคือ มีความเป็นไปได้เสมอที่ i และ -i แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติทุกอย่างเหมือนกัน

สำหรับชาปิโรแล้ว i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปร (parameter) ในระบบนิรนัยธรรมชาติ (natural deduction systems)[48] ในกรณีของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อไม่สามารถหาค่ารากที่สองของ -1 ได้ ก็เพียงแต่แทนค่าเหล่านั้นด้วย “i” และ “-i” หรือมองว่า i เป็นค่าตัวแปรหนึ่ง โดยให้พหุคูณของ i เป็นส่วนจินตภาพ นอกไปจากนั้นให้เรียกว่าส่วนจริง แยกส่วนจริงออกจากส่วนจินตภาพ และแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยคู่อันดับที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง[49] ดังนั้น ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้จึงไม่เป็นปัญหาสำหรับชาปิโร ซึ่งเมื่อพิจารณาในการวิเคราะห์เชิงซ้อน (complex analysis) ก็เป็นจริงที่ว่า i และ -i นั้นไม่สามารถแยกแยะได้ ทุกสิ่งที่เป็นจริงสำหรับ i จะเป็นจริงสำหรับ -i ด้วย และ i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปรในระบบนิรนัยธรรมชาติ

[46] Stewart Shapiro, "Structure and identity," in *Identity and Modality*, ed. Fraser MacBride (Oxford: Oxford University Press, 2006). p.134.

[47] Ibid., pp.140

[48] Shapiro, "Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and -i”." p.294.

[49] Ibid., pp.295

เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูป a + bi โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ b ≠ 0 เราจะเรียก a ว่าส่วนจริง และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพ และเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน a + bi ด้วยคู่อันดับ (a, b) ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนแทน i ด้วย 0 + 1i หรือคู่อันดับ (0, 1) และเขียนแทน -i ด้วย 0 + (-1)i หรือคู่อันดับ (0, -1)

บทที่ 3
ประเด็นทางญาณวิทยากับปัญหาการเข้าถึงความรู้

ในบทนี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้าง โดยชาปิโรได้เสนอแนวคิด "การเข้าถึงแบบองค์รวม" ซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่าง "มูลฐานนิยมแบบลดทอน" กับ "ญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ" ชาปิโรแบ่งญาณวิทยาออกเป็น 3 ลำดับขั้น ได้แก่ การตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา การคาดคะเนล่วงหน้า และการนิยามโดยปริยาย นอกจากนี้จะอธิบายปัญหาการเข้าถึงความรู้ที่เสนอโดยแมคไบรด์ ซึ่งมุ่งทำให้ญาณวิทยาของชาปิโรมีช่องโหว่ที่ไม่อาจยอมรับได้ ในท้ายที่สุดจะอธิบายวิธีตอบปัญหาดังกล่าวของชาปิโร

3.1 ความรู้เกี่ยวกับโครงสร้าง: การเข้าถึงแบบองค์รวม

คำถามทางญาณวิทยาเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematical knowledge) ที่ว่าเราจะสามารถเข้าถึงความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร? สำหรับชาปิโรแล้ว คำถามดังกล่าวจะต้องเฉพาะเจาะจงลงไปว่านักคณิตศาสตร์จะสามารถรู้สิ่งต่างๆ เกี่ยวกับตำแหน่ง (place) ในโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็ม (ante rem structures) ได้อย่างไร? ชาปิโรยอมรับว่ามนุษย์เป็นสัตตะธรรมชาติ (natural being) ที่อยู่ในจักรวาลอันเป็นรูปธรรม (แตกต่างจากความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม) ดังนั้น สมรรถนะ (faculty) ใดๆ ก็ตามที่ผู้รู้มีอยู่จึงต้องได้มาโดยผ่านกระบวนการทางธรรมชาติ (natural processes) เท่านั้น ซึ่งเป็นไปตามการพินิจพิจารณาทางวิทยาศาสตร์ธรรมดาสามัญ (ordinary scientific scrutiny) ด้วยเหตุนี้เอง ภาระหน้าที่ของนักสัจนิยมอย่างชาปิโรจึงคือการแสดงให้เห็นว่าสัจนิยมทางภววิทยานั้นสามารถไปด้วยกันได้ (compatible) กับญาณวิทยาเชิงธรรมชาติอย่างไร?[50]

อย่างไรก็ตาม แม้จะเป็นปัญหาที่สำคัญ แต่ชาปิโรก็ได้เน้นย้ำว่ามันไม่ควรถูกทำให้หนักขึ้นโดยการอ้างถึงเฉพาะขอบเขตนามธรรม ซึ่งมนุษย์ที่มีลักษณะเป็นรูปธรรมไม่สามารถรับรู้ได้ เราไม่ควรถามคำถามดังเช่น สิ่งนามธรรมนั้นอยู่ที่ใด? อยู่ในโลกของสัตตะหรือโลกของการกลายเป็น? (the world of being or the world of becoming) ชาปิโรเปรียบเทียบการถามคำถามเช่นนี้ว่าไม่ได้ต่าง

[50] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.110.

ไปจากการถามในวิชาเรขาคณิตที่ว่าจุด ณ ตำแหน่งอนันต์ (point at infinity) อยู่ที่ใด[51] โดยแนวคิดที่ทำให้สัจนิยมทางภววิทยาไปด้วยกันได้กับญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ ชาปิโรเรียกว่า "การเข้าถึงแบบองค์รวม" (holistic access)

การเข้าถึงแบบองค์รวมเป็นแนวคิดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง "มูลฐานนิยมแบบลดทอน" (reductive foundationalism) กับ "ญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ" (naturalized epistemology) โดยชาปิโรจะต้องสามารถตอบคำถามที่สำคัญ 2 คำถามต่อไปนี้

1. ปัญหาที่แน่นอนคืออะไร? (What is exactly the problem?)
2. อะไรที่นับว่าเป็นการแก้ปัญหา? (What would count as solving it?)

ชาปิโรตอบคำถามข้างต้นโดยอธิบาย 2 ประเด็น ได้แก่ ทรัพยากร (resources) ที่จะสามารถนำมาใช้ในการให้ญาณวิทยา และภาระหน้าที่ซึ่งนักสัจนิยมจะต้องกำหนดขึ้นมาพร้อมระบุมาตรฐานบางอย่างที่ใช้

สำหรับประเด็นทรัพยากรที่นำมาใช้นั้น ชาปิโรให้พิจารณาจุดยืนสองฝั่งที่สุดโต่งคือ มูลฐานนิยมแบบลดทอน และญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ ในจุดยืนมูลฐานนิยมแบบลดทอนเมื่อกล่าวถึงที่มาของความรู้ เราจะต้องบอกได้ว่าผู้รู้มีกระบวนการได้มาซึ่งความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างไร โดยที่มานั้นจะต้องเป็นเทอมที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์ (non-mathematical terms) กล่าวคือ ต้องไม่มีสมมติฐานล่วงหน้าเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องเสียเอง และกระบวนการดังกล่าวจะทำให้ได้มาซึ่งความรู้เกี่ยวกับวัตถุนามธรรม อาทิ จำนวน จุด เซต และตำแหน่งในโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มในกรณีของชาปิโร[52]

อย่างไรก็ดี ชาปิโรปฏิเสธมูลฐานนิยมแบบลดทอน เขากล่าวอย่างชัดเจนว่าเราไม่สามารถวางรากฐานของคณิตศาสตร์บนโดเมนหรือบนทฤษฎีใดๆ ได้มากกว่าคณิตศาสตร์ในตัวของมันเอง ความพยายามที่จะทำเช่นนั้น (วางรากฐานคณิตศาสตร์บนทฤษฎีอื่นๆ) จะล้มเหลวเสมอ[53] ทั้งนี้ ก็ด้วยเหตุผลสำคัญที่ได้กล่าวไปแล้วว่าสมรรถนะใดๆ ก็ตามที่ผู้รู้มีอยู่จะต้องได้มาโดยผ่านกระบวนการทางธรรมชาติเท่านั้น และถึงแม้จะกันประเด็นเกี่ยวกับความจำเป็นอย่างขาดเสียไม่ได้ (Quine-Putnum

[51] Stewart Shapiro, "Epistemology of mathematics: What are the questions? What count as answers?," *The Philosophical Quarterly* 61, no. 242 (2011). p.132.

[52] Ibid., pp.132

[53] Ibid., pp.133

Indispensability Thesis) ออกไป แต่การพินิจพิจารณาทางวิทยาศาสตร์ธรรมดาสามัญก็ยังเกี่ยวข้องกับการได้มาซึ่งความรู้ทางคณิตศาสตร์อยู่นั่นเอง

จุดยืนที่สุดโต่งอีกฝั่งหนึ่งเกี่ยวข้องกับญาณวิทยาเชิงธรรมชาติ[54] ที่สนับสนุนว่าไม่มีปัญหาเรื่องการเข้าถึง (access problem) แต่อย่างใด เราไม่อยู่ในฐานะที่จะวิพากษ์วิจารณ์คณิตศาสตร์ได้ยกเว้นแต่บนพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ธรรมดาสามัญ (ordinary mathematical grounds) และเราไม่อยู่ในฐานะที่จะให้เหตุผลสนับสนุน (justify) คณิตศาสตร์จากมุมมองอื่นที่มั่นคงปลอดภัยไปมากกว่านี้ได้[55] ถ้าถามว่าเรารู้คณิตศาสตร์ได้อย่างไร ก็สามารถตอบได้ง่ายๆ ว่าเรารู้ผ่านเทคนิควิธีจำนวนหนึ่งซึ่งรับรองโดยนักคณิตศาสตร์ผู้เชี่ยวชาญ (เนื้อหาในตำรา งานวิจัย บทความวิชาการ ฯลฯ) และงานของนักญาณวิทยาคือการอธิบายเทคนิควิธีเหล่านี้

ชาปิโรกล่าวถึงจุดยืนที่สองว่ามักจะถูกวิจารณ์ว่ามีลักษณะเป็นโครงการเชิงพรรณนาบริสุทธิ์ (purely descriptive enterprises) ทั้งๆ ที่ในขณะที่ข้อโต้แย้งดำเนินไปนั้น ญาณวิทยามีลักษณะเป็น (หรือควรจะเป็น) เชิงบรรทัดฐาน เขากล่าวว่าการวิจารณ์ข้างต้นทำให้เกิดภาวะกลืนไม่เข้าคายไม่ออกที่ผิด (false dilemma) เนื่องจากโครงการเชิงพรรณนา ดังเช่นระเบียบปฏิบัติทางคณิตศาสตร์ (mathematical practice) มีลักษณะเชิงบรรทัดฐานในตัวมันเองอยู่แล้ว[56] นักธรรมชาตินิยม (naturalist) ไม่ได้กำลังพูดถึงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและมาตรฐานของความถูกต้องดังกล่าวก็มีนัยที่ซ่อนอยู่ในระเบียบปฏิบัติทางคณิตศาสตร์อยู่แล้ว

สำหรับประเด็นภาระหน้าที่ในการพิสูจน์ของนักสัจนิยมและมาตรฐานบางอย่างที่ใช้นั้น เนื่องจากในทัศนะของชาปิโร คณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับขอบเขต (realm) ของโครงสร้างแบบเอนเท่เร็ม ดังนั้น ผู้ที่มีความรู้ทางเลขคณิตก็จะต้องรู้เกี่ยวกับโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มของจำนวนธรรมชาติด้วย นั่นคือ มันขึ้นอยู่กับความรู้ของนักคณิตศาสตร์ว่าสิ่งที่พวกเขากำลังทำอยู่คืออะไร ชาปิโรกล่าวว่าสิ่งที่ขาดหายไปในที่นี้ (ภาระหน้าที่ในการพิสูจน์) อาจเป็นความเชื่อมโยงระหว่าง “ญาณวิทยา” แบบที่เขากำลังนำเสนอกับประเด็นทาง “ภววิทยา” (ที่กล่าวถึงแล้วในบทที่ 2) รวมทั้งการอธิบายว่าเทคนิคที่นักคณิตศาสตร์ใช้ (ดังที่จะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป) เกี่ยวข้องกับตำแหน่งในโครงสร้างแบบ

[54] วุฒิ เลิศสุขประเสริฐ, "ญาณวิทยาเชิงธรรมชาติของไควน์" (วิทยานิพนธ์อักษรศาสตรมหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545).

[55] Ibid., pp.133

[56] Ibid., pp.133

เอนเท่ เร็มอย่างไร[57] อย่างน้อยที่สุด ชาปิโรก็จะแสดงให้เห็นว่าเทคนิคเหล่านี้ก่อให้เกิดผลลัพธ์เป็นความรู้ และท้ายที่สุดเป้าหมายทางญาณวิทยาของเขาก็คือการแสดงให้เห็นว่าทั้งคนธรรมดาสามัญ (ordinary folk) และนักคณิตศาสตร์สามารถที่จะได้มาซึ่งความรู้อย่างไร

อาจมีคำถามว่าชาปิโรใช้มาตรฐานอะไรในการยืนยันว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์ (ภายใต้ข้อเสนอทางญาณวิทยาของเขา) ถูกต้อง? นักปรัชญาจะต้องพิสูจน์หรือไม่? ว่าจากข้ออ้างที่ชัดเจนในตัวเอง (self-evident premises) โดยกฎของการสรุปอ้างอิงนั้นจะนำไปสู่ประเด็นทางญาณวิทยาที่ถูกต้องได้ ชาปิโรตอบคำถามดังกล่าวโดยที่ยังคงอ้างถึง "โครงการแบบองค์รวม" (holistic enterprise)[58] เขากล่าวว่าเป้าหมายนั้นไม่ใช่การให้ข้อโต้แย้งเชิงนิรนัย (deductive argument) ว่าจากข้ออ้างซึ่งเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปจะนำมาซึ่งข้อสรุปที่ว่าโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มมีอยู่จริงและเราสามารถเข้าถึงโครงสร้างเหล่านั้นได้ หากแต่ทั้งหมดเป็นไปในลักษณะแบบ "องค์รวม" อย่างไรก็ดีความสามารถที่จะอภิปรายเกี่ยวกับโครงสร้างได้อย่างสอดคล้องต้องกัน (coherently) เป็นหลักฐานที่แสดงว่าโครงสร้างมีอยู่จริง และข้อโต้แย้งสำหรับนักสัจนิยม (รวมถึงที่ชาปิโรจะนำมาใช้) ก็คือการสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด (an inference to the best explanation)[59]

ในทัศนะของชาปิโรการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มถูกแบ่งออกเป็น 3 ลำดับขั้น ได้แก่ การตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา (pattern recognition and abstraction) การคาดคะเนล่วงหน้า (projection) และการนิยามโดยปริยาย (implicit definition) โดยเราอาจจะเรียกญาณวิทยาของชาปิโรว่าเป็น "ญาณวิทยาแบบลำดับขั้น" (stratified epistemology) เนื่องจากในแต่ละลำดับขั้นก็จะบ่งชี้ถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเรื่อยๆ

3.1.1 การตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา

ญาณวิทยาในลำดับขั้นนี้จะเริ่มที่ความสามารถในการตระหนักรู้ถึงรูปแบบบางอย่างก่อน เช่น รูปแบบตัวอักษร รูปแบบตัวเลข เป็นต้น จากนั้นก็จะสกัดเอาแบบชนิดหรือความเป็นสากล

[57] Ibid., pp.134

[58] Ibid., pp.135

[59] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.118.

(types/universals) ซึ่งแต่ละลักษณะเฉพาะ (tokens) มีอยู่ร่วมกันออกมา พิจารณาลักษณะเฉพาะหลายๆ ลักษณะของตัวอักษร F ตัวพิมพ์ใหญ่ ดังนี้

"Ḟ", "₣", "℉", "ᖷ"

เด็กเริ่มเรียนรู้ตัวอักษรจากที่พ่อแม่ชี้ให้ดูหลายๆ ตัวอย่างข้างต้น พร้อมบอกว่านี่คือ F (ตัวพิมพ์ใหญ่) และออกเสียงว่า "เอฟ" หลังจากผ่านกระบวนการเรียนรู้ระยะหนึ่ง เด็กจะเรียนรู้ว่ามีลักษณะเฉพาะหลายๆ ลักษณะในท่ามกลางเสียงหนึ่งที่เหมือนกัน และจะคุ้นเคยกับแบบชนิด F รวมทั้งจะสามารถแยกแยะแบบชนิด (ซึ่งมีเพียงหนึ่งเดียว) ออกจากลักษณะเฉพาะหลายๆ ลักษณะของตัวอักษร F ได้ ต่อจากนั้นก็จะสามารถคิดถึง F ในเทอมตำแหน่งที่อยู่ในรูปแบบหรือโครงสร้างได้ นั่นคือ ในตัวอักษรภาษาอังกฤษ F ถือเป็นตำแหน่งในลำดับที่ 6 (the sixth place)[60] ความรู้ดังกล่าวได้มาจากการนิยามโดยการชี้ (ostensive definition)

ความสามารถในการตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมาทำให้เราเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างจำกัดขนาดเล็ก (small finite structures) ได้ เช่น รูปแบบ-2 ซึ่งเป็นรูปแบบร่วมของทุกๆ ระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 2 ชิ้น รูปแบบ-3 ซึ่งเป็นรูปแบบร่วมของทุกๆ ระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 3 ชิ้น และต่อไปเรื่อยๆ เป็นต้น เราเรียกรูปแบบ-n เหล่านี้ว่าเป็นโครงสร้างเชิงการนับ (เช่นเดียวกับโครงสร้างเชิงอันดับที่เราก็สามารถเข้าถึงได้ในทำนองเดียวกัน)

ขั้นนี้ถือเป็นขั้นแรกที่ทำให้เราตระหนักรู้ว่าโครงสร้างทางคณิตศาสตร์นั้นมีลักษณะที่เป็น "อิสระ" (freestanding) ในแง่ที่ว่าโครงสร้างเหล่านั้นจะถูกแสดงผ่านระบบของวัตถุประเภทใดก็ได้ เช่น วัตถุที่เป็นตัวอักษร เซต ตัวเลข เป็นต้น

มีข้อสังเกตบางประการเกี่ยวกับลักษณะก่อนประสบการณ์ (a priority) ว่าการตระหนักรู้ถึงรูปแบบในตัวมันเองนั้นไม่ได้มาจากสิ่งที่เรียกว่าเป็นความรู้ก่อนประสบการณ์ (a priori knowledge) อย่างไรก็ตาม เราสามารถรู้อย่างก่อนประสบการณ์ว่าระบบที่เป็นรูปแบบร่วมของรูปแบบ-4 (ระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 4 ชิ้น) จะต้องใหญ่กว่าระบบที่เป็นรูปแบบร่วมของรูปแบบ-3 (ระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 3 ชิ้น)[61] และสิ่งนี้เป็นลักษณะก่อนประสบการณ์เพียงหนึ่งเดียวของญาณวิทยาในลำดับขั้นที่หนึ่งที่ชาปิโรยอมรับ

[60] Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. p.277.

[61] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.116.

3.1.2 การคาดคะเนล่วงหน้า

ความสามารถในขั้นแรกไม่เพียงพอสำหรับจำนวนที่ใหญ่ขึ้นเรื่อยๆ ชาปิโรกล่าวว่ามนุษย์มีสมรรถนะที่คล้ายคลึงกับการตระหนักรู้ถึงรูปแบบ หากแต่ไปไกลกว่าการสกัดออกมาอย่างง่าย (simple abstraction)[62] สมรรถนะดังกล่าวก็คือการคาดคะเนล่วงหน้านั่นเอง

สมมติว่าตอนนี้เราเรียนรู้รูปแบบ-1, รูปแบบ-2, รูปแบบ-3 และรูปแบบ-4 แล้ว และเขียนแทนรูปแบบของรูปแบบเหล่านี้ด้วย | , | | , | | | และ | | | | ตามลำดับ สมมติต่อไปว่าเรามีเวลาไม่จำกัด แน่นอนว่าเราก็จะต้องสามารถเรียนรู้รูปแบบ-n ไปได้เรื่อยๆ และสามารถเขียนแทนรูปแบบเหล่านั้นด้วยสัญลักษณ์ “|” ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ความจริงก็คือเรามีเวลาจำกัดและไม่สามารถทำสิ่งที่กล่าวมาแล้วได้ แต่ความสามารถในการคาดคะเนล่วงหน้าจะมาทดแทนและทำให้เราไปถึงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างจำกัดขนาดใหญ่ (large finite structures) ขึ้นได้ เช่น รูปแบบ-12,444 เป็นรูปแบบร่วมของทุกๆ ระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 12,444 ชิ้น และมีรูปแบบของรูปแบบเป็น “|” ที่เรียงต่อกัน 12,444 ขีด เป็นต้น[63]

พิจารณาการเขียนเรียงกันของรูปแบบของรูปแบบดังต่อไปนี้

| , | | , | | | , | | | | , . . .

เราจะรู้ว่ารูปแบบ-1 ตามมาด้วยรูปแบบ-2, รูปแบบ-2 ตามมาด้วยรูปแบบ-3 และรูปแบบ-3 ตามมาด้วยรูปแบบ-4 และต่อไปเรื่อยๆ จึงอาจกล่าวโดยทั่วไปได้ว่าสำหรับรูปแบบใดๆ จะมีรูปแบบถัดไปที่ยาวกว่ารูปแบบนั้นอยู่เพียงรูปแบบเดียวและไม่มีรูปแบบใดเลยที่ยาวที่สุด[64] และด้วยความสามารถในการคาดคะเนล่วงหน้าเช่นนี้ เราก็จะสามารถเข้าถึงโครงสร้างอนันต์ (infinite structures) ดังเช่นโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติได้

3.1.3 การนิยามโดยปริยาย

นอกจากการตระหนักรู้ถึงรูปแบบ&การสกัดออกมา และการคาดคะเนล่วงหน้าแล้ว อีกวิธีหนึ่งที่เราจะสามารถทำความเข้าใจรูปแบบเฉพาะใดๆ ได้ก็คือการให้คำบรรยายที่ตรงไปตรงมา (direct description) อาทิ สำหรับโครงสร้างของคณะรัฐบาลสหรัฐอเมริกา เราอาจระบุเกี่ยวกับ

[62] Ibid., pp.118

[63] Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. p.279.

[64] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.118.

ตำแหน่งที่มีอยู่ในโครงสร้างหรือออฟฟิศ พร้อมทั้งอธิบายว่าวัตถุหรือเจ้าของออฟฟิศในแต่ละตำแหน่งนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

การนิยามโดยปริยายเป็นการให้คำบรรยายที่ตรงไปตรงมาอย่างหนึ่ง กล่าวคือ เป็นการบรรยายลักษณะของจำนวนในแง่ที่ว่าแต่ละจำนวนมีความสัมพันธ์กับจำนวนอื่นอย่างไร ซึ่งจะทำให้เราสามารถอธิบายลักษณะของโครงสร้างได้[65] นอกจากนั้นการนิยามโดยปริยายยังสนับสนุนความเชื่อที่ว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์มีลักษณะก่อนประสบการณ์ ชาปิโรกล่าวว่าถ้าประสบการณ์ทางผัสสะ (sensory experience) ไม่เกี่ยวกับความสามารถที่จะเข้าใจการนิยามโดยปริยาย ไม่เกี่ยวกับการให้เหตุผลสนับสนุนว่าการนิยามโดยปริยายนั้นประสบผลสำเร็จ และไม่เกี่ยวกับความเข้าใจของเราในผลทางตรรกะ (logical consequence) แล้วความรู้เกี่ยวกับโครงสร้าง (ซึ่งผ่านการนิรนัยจากการนิยามโดยปริยาย) จะมีลักษณะก่อนประสบการณ์[66]

เรามักพบการนิยามโดยปริยายนี้ในตำราทฤษฎีจำนวนทั่วไป โดยอาจเริ่มต้นว่าจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวนมีตัวถัดไปเพียงตัวเดียวเท่านั้น ศูนย์ไม่เป็นตัวถัดไปของจำนวนใด และจำนวนทั้งหมดสอดคล้องกับหลักการอุปนัย[67] เมื่อผ่านการนิรนัยจากการนิยามโดยปริยายแล้วจะทำให้ได้มาซึ่งความรู้เกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติที่เราคุ้นเคย จะเห็นว่าการนิยามโดยปริยายมีลักษณะเถนตรง (straightforward) บางครั้งเราจึงอาจเรียกข้อความในการนิยามโดยปริยายว่า “สัจพจน์” (axioms)

อย่างไรก็ดี มีเงื่อนไขสองประการสำหรับการนิยามโดยปริยาย ได้แก่ เงื่อนไขการมีอยู่ (existence condition) และเงื่อนไขการมีเพียงหนึ่งเดียว (uniqueness condition) โดยเงื่อนไขแรกเป็นความจำเป็นที่ว่าอย่างน้อยที่สุด (at least) โครงสร้างหนึ่งโครงสร้างจะต้องสอดคล้องกับสัจพจน์เหล่านั้น และเงื่อนไขที่สอง อย่างมากที่สุด (at most) โดยสมสัณฐานโครงสร้างหนึ่งโครงสร้างจะต้องมีคำบรรยาย (description) ออกมา

สำหรับเงื่อนไขที่สองเรื่องการมีเพียงหนึ่งเดียว ชาปิโรอธิบายว่ามันขึ้นอยู่กับว่าตรรกศาสตร์ที่อยู่เบื้องหลังของการทำให้เป็นระบบสัจพจน์ (axiomatization) นั้นคืออะไร ซึ่งหากเป็นตรรกศาสตร์ลำดับที่หนึ่ง (first-order logic) ก็จะได้ผลลัพธ์คล้ายๆ กับที่พบในทฤษฎีบทของโลเวนเฮม-สโคเลม (The Löwenheim-Skolem theorem) ที่ว่าสำหรับระบบอนันต์ที่สอดคล้องกับโครงสร้างที่มีเพียง

---

[65] Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. p.283.

[66] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.132.

[67] Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. p.284.

หนึ่งเดียว จะไม่มีทฤษฎีใดเลยที่เป็นจริงได้ กล่าวคือ ตรรกศาสตร์ลำดับที่หนึ่งทำให้เงื่อนไขการมีเพียงหนึ่งเดียวไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ในทางตรงกันข้าม ตรรกศาสตร์ลำดับที่สอง (second-order logic) ที่ชาปิโรยึดถือนั้นสนับสนุนว่าสำหรับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์อันอุดมสมบูรณ์ มีการให้ลักษณะเฉพาะกับโครงสร้างดังกล่าวได้เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น (there are unique characterizations of rich mathematical structures)[68] ซึ่งตรรกศาสตร์ลำดับที่สองนี้เองที่ทำให้เงื่อนไขการมีเพียงหนึ่งเดียวเกิดขึ้นได้

ย้อนกลับมาที่เงื่อนไขแรกคือเรื่องการมีอยู่ ชาปิโรกล่าวว่าถ้าเราสามารถบอกได้ว่าการนิยามโดยปริยายมีความสอดคล้องต้องกัน (coherence) ภายในระบบสัจพจน์ ผลที่ตามมาก็คือการนิยามดังกล่าวจะต้องมีอยู่จริงหรือเงื่อนไขการมีอยู่เกิดขึ้นหรือเป็นไปตามหลักการความสอดคล้องต้องกัน (coherence principle)[69] ที่ว่า:

ถ้า ϕ เป็นกลุ่มประโยคที่มีความสอดคล้องต้องกันแล้วจะมีโครงสร้างที่เป็นจริงตาม ϕ

อย่างไรก็ดี มีข้อถกเถียงเกี่ยวกับความสอดคล้องต้องกันอยู่ไม่น้อยในทางปรัชญา แต่สิ่งนี้ไม่เป็นปัญหาสำหรับชาปิโร เนื่องจากในท้ายที่สุดความสอดคล้องต้องกันในทัศนะของชาปิโรมีลักษณะเป็นเช่นนั้นอยู่แต่เดิม (primitive) เป็นความคิดที่รับรู้ด้วยสหัชญาณ (intuitive notion) และไม่สามารถลดทอนลงเป็นอย่างอื่นได้[70]

ดังนั้น เมื่อครบเงื่อนไขทั้งเรื่องการมีอยู่และการมีเพียงหนึ่งเดียวแล้ว เราจะได้ว่าอย่างน้อยที่สุดและอย่างมากที่สุด โครงสร้างหนึ่งโครงสร้างจะต้องสอดคล้องกับสัจพจน์เหล่านั้น หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ มีเพียงโครงสร้างเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับการนิยามโดยปริยาย เช่น โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีเพียงโครงสร้างเดียว โครงสร้างของจำนวนเต็มมีเพียงโครงสร้างเดียว โครงสร้างของจำนวนจริงมีเพียงโครงสร้างเดียว โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนมีเพียงโครงสร้างเดียว เป็นต้น

[68] Ibid., pp.285

[69] Ibid., pp.286

[70] Ibid., pp.288

3.2 การสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด

นอกจากความสามารถที่จะอภิปรายเกี่ยวกับโครงสร้างได้อย่างสอดคล้องต้องกันจะเป็นหลักฐานที่แสดงว่าโครงสร้างดังกล่าวมีอยู่จริงแล้ว การสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุดก็เป็นข้อโต้แย้งที่ชาปิโรนำมาใช้เช่นกัน โดยเฉพาะกับญาณวิทยาในลำดับขั้นสุดท้ายคือการนิยามโดยปริยาย

ผู้เขียนเข้าใจว่าชาปิโรมีข้อโต้แย้งเกี่ยวกับประเด็นนี้ ดังนี้

ข้ออ้างที่ 1: ถ้าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มเป็นแนวคิดที่จริงแล้ว
โครงสร้างและระบบต่างๆ ในคณิตศาสตร์ก็จะเป็นจริงด้วย

ข้ออ้างที่ 2: โครงสร้างและระบบต่างๆ ในคณิตศาสตร์เป็นจริง

ข้อสรุป: แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มน่าจะเป็นแนวคิดที่จริง

สิ่งที่สนับสนุนข้ออ้างที่ 1 คือคำอธิบายในหัวข้อ 3.1.3 ทั้งหมด กล่าวคือ เงื่อนไขการมีเพียงหนึ่งเดียวและเงื่อนไขการมีอยู่ซึ่งเป็นไปตามหลักการความสอดคล้องต้องกันทำให้โครงสร้างที่สอดคล้องกับการนิยามโดยปริยายมีอยู่จริงและมีอยู่เพียงโครงสร้างเดียวเท่านั้น (ในกรณีของจำนวนธรรมชาติ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีอยู่เพียงโครงสร้างเดียว)

สำหรับข้ออ้างที่ 2 ซึ่งเป็นการยืนยันว่าโครงสร้างและระบบต่างๆ ในคณิตศาสตร์เป็นจริงนั้น ชาปิโรกล่าวว่าความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างมีความเชื่อมโยงอย่างแนบแน่นกับความเข้าใจในภาษา (grasp of language) กล่าวคือ ความเข้าใจในโครงสร้างและความสามารถที่จะอ้างถึงตำแหน่งที่อยู่ในโครงสร้างได้ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าความสามารถที่จะใช้ภาษาได้อย่างถูกต้อง[71] ซึ่งการใช้ภาษาได้อย่างถูกต้องนี้สะท้อนออกมาผ่านการใช้ในคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นการบวกลบคูณหารตัวเลขของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์หรือเทคนิควิธีที่นักคณิตศาสตร์ใช้

ดังนั้น โดยโครงสร้างของการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล (valid) ชาปิโรจึงได้ข้อสรุปว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มจึงน่าจะเป็นแนวคิดที่จริง

[71] Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. p.137.

3.3 ปัญหาการเข้าถึงความรู้

เฟรเซอร์ แมคไบรด์ (Fraser MacBride) เห็นด้วยกับชาปิโรในประเด็นญาณวิทยาในลำดับขั้นแรกคือการตระหนักรู้ถึงรูปแบบและการสกัดออกมา อย่างไรก็ดี มีปัญหาอีกมากสำหรับญาณวิทยาในลำดับขั้นถัดๆ ไป คือ การคาดคะเนล่วงหน้า และการนิยามโดยปริยาย ตามลำดับ

3.3.1 ปัญหาเกี่ยวกับการคาดคะเนล่วงหน้า

แมคไบรด์วิพากษ์ชาปิโรเกี่ยวกับปัญหาการเข้าถึงความรู้โดยใช้การคาดคะเนล่วงหน้าใน 2 ประเด็น ได้แก่ ความเป็นโครงการเชิงพรรณา และการเปลี่ยนผ่านจากความรู้เฉพาะสู่ความรู้ทั่วไป

1) ความเป็นโครงการเชิงพรรณนา[72]

แมคไบรด์กล่าวว่าโครงการเชิงพรรณนา (descriptive project) ที่ชาปิโรเสนอเกี่ยวกับการคาดคะเนล่วงหน้านั้นไม่เพียงพอที่จะแก้ปัญหาการเข้าถึงความรู้ได้ ญาณวิทยาควรจะเป็นโครงการเชิงบรรทัดฐานที่มีลักษณะพิเศษ (distinctively normative project) กล่าวคือ โครงการเชิงพรรณนาเป็นเพียงแค่การให้รายละเอียดเกี่ยวกับอุปนิสัยในการสร้างความเชื่อบางอย่างของเรา ไม่ได้อธิบายเกี่ยวกับการให้เหตุผลสนับสนุนความเชื่อทางคณิตศาสตร์ (mathematical beliefs) ซึ่งโครงการเชิงบรรทัดฐานจะสามารถให้ได้

การให้เหตุผลสนับสนุนดังกล่าวจะทำให้เราสามารถแยกแยะสิ่งที่เป็น “ความรู้ทางคณิตศาสตร์” ออกจากสิ่งที่เป็นเพียง “ความเชื่อที่จริง” (true beliefs) ได้ ดังที่ชาปิโรเคยกล่าวไว้ในหนังสือของเขาที่ว่าเราจะต้องตอบให้ได้ว่า “เราจะสามารถสร้างความเชื่อที่น่าเชื่อถือ (warranted beliefs) เกี่ยวกับวัตถุทางคณิตศาสตร์และมั่นใจได้ว่าความเชื่อเหล่านั้นเป็นจริงได้อย่างไร” แมคไบรด์แย้งว่าญาณวิทยาแบบลำดับขั้นของชาปิโรไม่สามารถตอบคำถามเกี่ยวกับความเชื่อที่น่าเชื่อถือนี้ได้

2) การเปลี่ยนผ่านจากความรู้เฉพาะสู่ความรู้ทั่วไป[73]

พิจารณารูปแบบของรูปแบบดังต่อไปนี้

---

[72] Fraser MacBride, "Can “Ante Rem” Structuralism Solve the Access Problem?," *The Philosophical Quarterly* 58, no. 230 (2008). p.159.

[73] Ibid., pp.160

$$|, ||, |||, ||||, \ldots$$

สังเกตว่ารูปแบบ-1 มีรูปแบบถัดไปคือรูปแบบ-2 ซึ่งมีจำนวนขีดที่มากกว่ารูปแบบ-1 อยู่เพียง 1 ขีด สำหรับรูปแบบอื่นก็เช่นเดียวกัน การรู้ว่ารูปแบบที่กำหนดให้นั้นมีตัวถัดไปที่แตกต่างจากตัวมันอยู่เพียงรูปแบบเดียว เราเรียกสิ่งนี้ว่าเป็น “ความรู้เฉพาะ” (particular knowledge) ยิ่งไปกว่านั้นเราก็จะรู้ว่าสำหรับรูปแบบใดๆ จะมีรูปแบบถัดไปที่ยาวกว่ารูปแบบนั้นอยู่เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น และไม่มีรูปแบบใดเลยที่ยาวที่สุด เราเรียกสิ่งนี้ว่าเป็น “ความรู้ทั่วไป” (general knowledge)

จากการได้มาซึ่งความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเรื่อยๆ ดังกล่าว แมคไบรด์ตั้งคำถามว่าผู้เริ่มเรียนคณิตศาสตร์ (mathematical novice) จะสามารถเปลี่ยนผ่านจากการมีความรู้เฉพาะไปสู่การมีความรู้ทั่วไปได้อย่างไร? เนื่องจากหากปราศจากการรับหลักการบางอย่างไว้ก่อนแล้ว เช่น สัจพจน์ทางเลขคณิตของเปอาโน (axioms of Peano arithmetic) ZF ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์อื่นๆ เป็นต้น ก็จะไม่มีสิ่งใดเลยที่รับประกันได้ว่าลักษณะบางประการที่โครงสร้างจำกัดมีนั้นจะเป็นตัวแทนของลักษณะเดียวกันในโครงสร้างอนันต์ กล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือการได้มาซึ่งความรู้ทั่วไปจากความรู้เฉพาะนั้น ผู้เริ่มเรียนคณิตศาสตร์น่าจะต้องรับความจริง (truths) บางอย่างไว้ก่อนอยู่แล้ว และความจริงก็มีลักษณะทั่วไปที่ไม่ได้แตกต่างไปจากความรู้ทั่วไปซึ่งเป็นข้อสรุปสุดท้าย ดังนั้น จึงดูเหมือนว่าจะยังไม่มีคำอธิบายใดที่จะตอบคำถามดังกล่าวได้โดยปราศจากการมีสมมติฐานล่วงหน้าหรือมีสิ่งที่รับไว้ในใจอยู่ก่อนแล้ว

3.3.2 ปัญหาเกี่ยวกับการนิยามโดยปริยาย

แมคไบรด์ตั้งคำถามเกี่ยวกับเงื่อนไขแรกคือเรื่องการมีอยู่[74] โดยพยายามเทียบเคียงกับข้อแย้งที่เฟรเก้มีต่อฮิลเบิร์ต ดังนี้

คำอธิบาย: เราจินตนาการถึงวัตถุบางอย่างที่ชื่อว่าพระเจ้า (God) ได้

สัจพจน์ที่ 1: พระเจ้าทุกพระองค์มีอำนาจล้นเหลือ (omnipotent)

สัจพจน์ที่ 2: พระเจ้าทุกพระองค์มีอยู่ทุกแห่งในเวลาเดียวกัน (omnipresent)

สัจพจน์ที่ 3: มีพระเจ้าอย่างน้อยหนึ่งพระองค์

[74] Ibid., pp.161

จะเห็นว่าระบบสัจพจน์นี้มีความคงเส้นคงวา (consistence) ทุกประการ อย่างไรก็ตาม เป็นข้อสรุปที่แอบเสิร์ดถ้าเราจะเชื่อว่าพระเจ้ามีอยู่จริง เนื่องจากความคงเส้นคงวาของระบบไม่สามารถยืนยันความมีอยู่จริงของระบบได้ และถึงแม้ว่าความสอดคล้องต้องกัน (coherence) ของชาปิโรจะเป็นมโนทัศน์ที่กว้างกว่าความคงเส้นคงวาของฮิลเบิร์ต แต่ก็ไม่ได้ทำให้ชาปิโรรอดพ้นจากปัญหาเดียวกันกับที่ฮิลเบิร์ตเผชิญอยู่ได้

ดังนั้น คำถามสำคัญที่ชาปิโรจะต้องตอบให้ได้ก็คือ อะไรที่เป็นเครื่องยืนยัน (guarantee) ว่าการนิยามโดยปริยายที่มีครบทั้งสองเงื่อนไข (การมีอยู่และการมีเพียงหนึ่งเดียว) จะไม่ว่างเปล่า (empty) เหมือนในกรณีของฮิลเบิร์ต?[75] ชาปิโรตอบคำถามนี้ในลักษณะที่ว่าทั้งหมดถูกค้นพบแล้วในคณิตศาสตร์ในตัวของมันเอง (found in mathematics itself) และเป็นสิ่งที่อธิบายอย่างชัดเจนแล้วในตัวของมันเอง อย่างไรก็ดี แมคไบรด์ไม่เห็นด้วยกับวิธีการตอบดังกล่าว เนื่องจากการตอบเช่นนี้เท่ากับการพูดว่ามีโมเดลทางทฤษฎีเซต (ที่รองรับเงื่อนไขทั้งสองประการของการนิยามโดยปริยาย) ด้วยเช่นกัน จึงทำให้โครงสร้างมีอยู่ด้วยในความหมายนี้และทั้งหมดต่างก็มีอยู่แล้วในทฤษฎีเซตในตัวของมันเอง แมคไบรด์วิพากษ์ว่ามีลักษณะที่วนเป็นวงกลมอย่างไม่อาจยอมรับได้ (vicious circularity)

3.4 การตอบปัญหาการเข้าถึงความรู้ของชาปิโร

ชาปิโรตอบปัญหาที่นำเสนอโดยแมคไบรด์ในประเด็นการเข้าถึงความรู้โดยใช้การคาดคะเนล่วงหน้าและการนิยามโดยปริยาย ดังนี้

3.4.1 การตอบปัญหาเกี่ยวกับการคาดคะเนล่วงหน้า

1) การตอบปัญหาเรื่องความเป็นโครงการเชิงพรรณนา

ชาปิโรสนับสนุนว่าคณิตศาสตร์ (หรืออย่างน้อยที่สุด คณิตศาสตร์ที่เป็นจริง) นั้นจะถูกรับรู้ก็โดยผ่านเทคนิควิธีที่นักคณิตศาสตร์ผู้เชี่ยวชาญนำไปใช้และภาระเพียงอย่างเดียวของนักญาณวิทยาก็คือการอธิบายเทคนิควิธีเหล่านั้นออกมา เขายอมรับการถูกวิพากษ์ว่าทัศนะเช่นนี้ดูเหมือนจะเป็นโครงการเชิงพรรณนาที่ไม่อาจให้คำตอบเกี่ยวกับความเชื่อที่น่าเชื่อถือได้ อย่างไรก็ตาม ชาปิโรแย้งว่า

[75] Ibid., pp.162

เป้าหมายของโครงการเชิงพรรณนาในตัวของมันเองนั้นมีลักษณะในเชิงบรรทัดฐานอยู่แล้ว[76] กล่าวคือ นักธรรมชาตินิยมไม่ได้กำลังพูดถึงสิ่งที่นับว่าเป็นคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง เนื่องจากมาตรฐานของความถูกต้องนั้น จริงๆ แล้วก็มีนัยที่ซ่อนอยู่ในวิถีทางที่นักคณิตศาสตร์ปฏิบัติอยู่แล้วนั่นเอง ดังนั้น คำตอบของคำถามที่ว่า "คณิตศาสตร์ควรจะเป็นเช่นไร?" แทบจะเป็นสิ่งเดียวกับคำตอบของคำถามที่ว่า "คณิตศาสตร์ในตัวของมันเองแล้วคืออะไร?"

2) การตอบปัญหาเรื่องการเปลี่ยนผ่านจากความรู้เฉพาะสู่ความรู้ทั่วไป

พิจารณาข้อแย้งของแมคไบรด์ที่ว่าผู้เริ่มเรียนคณิตศาสตร์จะสามารถเปลี่ยนผ่านจาก

(1) ความรู้เฉพาะ: โครงสร้างที่กำหนดให้มีตัวถัดไปที่แตกต่างจากตัวมันอยู่เพียงแบบเดียว

ไปสู่

(2) ความรู้ทั่วไป: ทุกๆ โครงสร้างใดจะมีตัวถัดไปที่แตกต่างจากตัวมันอยู่เพียงแบบเดียว

ได้อย่างไร?

ชาปิโรยอมรับว่า (2) ไม่ได้เป็นผลลัพธ์ที่ตามมาจาก (1) ด้วยตัวของมันเอง จากมุมมองแบบองค์รวม เมื่อเราย้อนกลับมาดูความแตกต่างระหว่างข้ออ้าง (premise)[77] กับประพจน์ที่รู้แล้ว (known proposition) ชาปิโรพบว่าขอบเขตระหว่างสองสิ่งนี้ค่อนข้างคลุมเครือ (fuzzy) อย่างไรก็ดี สมมติฐานที่ใช้งานได้หรือแม้กระทั่งการคาดเดาที่มืดบอด (blind guess) ก็อาจจะกลายมาเป็นข้อเท็จจริงที่รู้แล้ว (known fact) ได้หากเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าสิ่งนั้นมีประโยชน์ (fruitful) นั่นคือ จากการสังเกต (โดยใช้การคาดคะเนล่วงหน้า) ว่าโครงสร้างเชิงการนับจำกัดขนาดเล็กมีตัวถัดไปที่แตกต่างจากตัวมันอยู่เพียงแบบเดียว ก็จะทำให้เราได้มาซึ่ง (2) ที่เป็นการคาดเดาหรือเป็นสมมติฐานอย่างหนึ่ง โดยที่ (2) อาจจะจริงในฐานะที่เป็นผลลัพธ์ของบางสิ่งบางอย่างที่มีมาแต่กำเนิด (innate) ก็เป็นได้[78] กล่าวคือ สำหรับชาปิโร (1) ได้มาจากประสบการณ์หรือผ่านการสังเกต ในขณะที่ (2) นั้น

[76] Shapiro, "Epistemology of mathematics: What are the questions? What count as answers?." p.133.

[77] ข้ออ้างหรือสิ่งที่รับไว้ชั่วคราว (tentative postulate) หรือสมมติฐานที่ใช้งานได้ (working hypothesis) หรือความเชื่อที่ถูกสร้างขึ้น (established belief)

[78] Shapiro, "Epistemology of mathematics: What are the questions? What count as answers?." p.140.

เป็นเพียงสมมติฐานในเบื้องต้น แต่เมื่อได้รับการพิสูจน์แล้วว่ามีประโยชน์ในทางปฏิบัติสำหรับนักคณิตศาสตร์ เราก็จะสามารถเลื่อนสถานะ (2) ขึ้นมาเป็นข้อเท็จจริงที่รู้แล้วได้

ชาปิโรเปรียบเทียบการยอมรับ (2) หรือหลักการตัวถัดไป (successor principle) ว่าอยู่ในลักษณะเดียวกับสัจพจน์ของตัวเลือก (axioms of choice) ของเซอร์เมโล ซึ่งถูกอ้างว่ามีความเด่นชัดในตัวเอง (self-evident) แม้ว่าจะเป็นสัจพจน์ที่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ก็ตาม อย่างไรก็ดี เซอร์เมโลกล่าวว่าความไม่สามารถพิสูจน์ได้ (unprovability) ดังกล่าวไม่สมนัยกับความไม่สมเหตุสมผล (non-validity) ยิ่งไปกว่านั้น เขาสังเกตว่าแม้แต่สูตรของเปอาโนเองก็ตั้งอยู่บนหลักการที่พิสูจน์ไม่ได้ (unprovable principle) จำนวนมาก สิ่งที่ทำให้สัจพจน์ของตัวเลือกเป็นที่ยอมรับได้โดยทั่วไป (สำหรับเซอร์เมโล) จึงไม่ใช่การสามารถถูกพิสูจน์ได้ หากแต่เป็นความจำเป็นอย่างขาดเสียไม่ได้สำหรับวิทยาศาสตร์ (necessary for science) ซึ่งพิสูจน์ได้ด้วยการที่หลายๆ ทฤษฎีบทในวิทยาศาสตร์นั้นตั้งอยู่บนสัจพจน์ของตัวเลือก และในท้ายที่สุดเซอร์เมโลไม่ได้เรียกสัจพจน์ของเขาว่าเป็นเพียงแค่ "สมมติฐาน" อีกต่อไป[79]

ดังนั้น ชาปิโรจึงเรียกร้องบางอย่างคล้ายๆ กับในกรณีของเซอร์เมโล เขากล่าวว่าถ้าหลักการตัวถัดไปอย่าง (2) นั้นเป็นการคาดคะเนล่วงหน้าที่ดี แล้วข้อเสนอของเซอร์เมโลก็จะเป็นที่ยอมรับได้ กล่าวคือ ในเวลาไม่นานผู้ที่ต่อต้านเซอร์เมโลก็จะได้เห็นบทบาทของสัจพจน์หรือหลักการที่เขาเสนอได้ชัดเจนยิ่งขึ้น (อาทิ ในวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์) และจากมุมมองแบบองค์รวมในทำนองเดียวกับเซอร์เมโล ญาณวิทยาของชาปิโรจึงมีความหมายในลักษณะนี้ ความรู้ทั่วไปอย่าง (2) นั้นไม่ใช่ผลที่ตามมาจาก (1) หากแต่จะถูกตัดสินว่ายอมรับได้หรือไม่ก็ด้วยบทบาทที่จะถูกนำไปใช้ในเลขคณิต (ไม่ว่าจะในเลขคณิตบริสุทธิ์หรือประยุกต์) ต่อไป[80]

3.4.2 การตอบปัญหาเกี่ยวกับการนิยามโดยปริยาย

หลักการความสอดคล้องต้องกัน[81] :

ถ้า ϕ เป็นสูตรที่มีความสอดคล้องต้องกัน (coherent formula) ในตรรกศาสตร์ลำดับที่สองแล้วจะมีโครงสร้างที่เป็นจริงตาม ϕ

---

[79] Ibid., pp.141

[80] Ibid., pp.142

[81] Ibid., pp.147

ชาปิโรมักจะกล่าวถึงหลักการดังกล่าวซ้ำๆ ดังนี้

ความสามารถที่จะอภิปรายเกี่ยวกับโครงสร้างที่กำหนดให้ได้อย่างสอดคล้องต้องกันเป็นหลักฐานที่แสดงให้เห็นว่าโครงสร้างมีอยู่จริง[82] โดยที่หลักการความสอดคล้องต้องกันนี้เราไม่สามารถนิรนัยจากข้ออ้างที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์ (non-mathematical premises) ได้ และชาปิโรไม่ยอมรับภาระหน้าที่ที่จะอ้างเหตุผลสนับสนุนหลักการความสอดคล้องต้องกันบนพื้นฐานของข้ออ้างดังกล่าว หลักการความสอดคล้องเป็นบางสิ่งที่โชติช่วง (active) ในคณิตศาสตร์ในตัวของมันเอง และนักคณิตศาสตร์จะใช้หลักการนี้เป็นคำบรรยายในฐานะที่เป็นหลักฐานว่าคำบรรยายนั้นประสบผลสำเร็จในการอธิบายสิ่งต่างๆ ได้

สำหรับชาปิโรสิ่งที่ช่วยยืนยันว่าการนิยามโดยปริยายที่มีครบทั้งสองเงื่อนไข ได้แก่ การมีอยู่และการมีเพียงหนึ่งเดียวนั้นจะไม่ว่างเปล่าเหมือนในกรณีของฮิลเบิร์ตคือ การที่ทุกสิ่งทุกอย่างถูกค้นพบอย่างชัดเจนแล้วในตัวคณิตศาสตร์เอง แมคไบรด์แย้งว่าการพูดเช่นนี้เท่ากับการพูดว่ามีโมเดลทางทฤษฎีเซตด้วย โครงสร้างจึงมีอยู่ด้วยในทฤษฎีเซตในตัวของมันเอง ซึ่งการกล่าวเช่นนี้มีลักษณะที่วนเป็นวงกลมอย่างไม่อาจยอมรับได้

ชาปิโรยอมรับลักษณะที่วนเป็นวงกลมดังกล่าว อย่างไรก็ตาม การวนเป็นวงกลมนี้เป็นสิ่งที่ยอมรับได้[83] เนื่องจากญาณวิทยาในทัศนะของเขาไม่ใช่ญาณวิทยาแบบลดทอน (reductive epistemology) เขาเน้นย้ำเสมอว่าเราไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนคณิตศาสตร์จากข้ออ้างที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์ได้ คณิตศาสตร์นั้นถูกต้องดีแล้ว (fine) อย่างที่มันเป็น และสิ่งที่นักคณิตศาสตร์ทำจะนำพาพวกเขาไปสู่ความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มได้

การยอมรับว่ามีโมเดลทางทฤษฎีเซต และดังนั้น โครงสร้างมีอยู่ด้วยในทฤษฎีเซตนี้ขึ้นอยู่กับความเชื่อ (ซึ่งนักคณิตศาสตร์จำนวนมากมีร่วมกัน) ที่ว่าทฤษฎีเซตในตัวของมันเองมีลักษณะสอดคล้องต้องกัน ถ้ายึดตามแนวคิดของเซอร์เมโล ก็อาจพูดได้ว่าความสอดคล้องต้องกันของทฤษฎีเซตนั้นเป็นสมมติฐานที่ใช้งานได้ สิ่งที่ตามมาคือโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มในตัวของมันเองไม่ได้มั่นคงปลอดภัยไปมากกว่าทฤษฎีเซต ด้วยเหตุนี้ลักษณะที่วนเป็นวงกลมดังกล่าวจึงเป็นสิ่งที่ยอมรับได้และทั้งหมดต่างก็สอดคล้องกับความเป็นโครงการแบบองค์รวมตามข้อเสนอของชาปิโร

[82] the ability to discuss a given structure coherently is evidence that the structure exists.

[83] Shapiro, "Epistemology of mathematics: What are the questions? What count as answers?." p.149.

บทที่ 4
บทสรุป

4.1 ประเด็นทางภววิทยา

สำหรับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของ i และ -i นั้น ผู้เขียนเห็นด้วยกับชาปิโรที่ปฏิเสธวิธีการตอบด้วยมโนทัศน์การสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนของเลดีแมน เนื่องจากมโนทัศน์ดังกล่าวทำให้ตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างเชิงอันดับ (หรือแม้กระทั่งโครงสร้างเชิงการนับ) สามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนด้วย อย่างไรก็ตาม สิ่งนี้ขัดแย้งกับข้อเท็จจริง เนื่องจากถ้าแบ่งความแยกออกจากกันได้ออกเป็นสามประเภทตามข้อเสนอของเลดีแมน ตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างเชิงอันดับก็น่าจะแยกออกจากกันได้สัมบูรณ์ (มากกว่าที่จะแยกออกจากกันได้อย่างอ่อน) นอกจากนี้ผู้เขียนก็ยังเห็นด้วยกับชาปิโรที่ปฏิเสธสูตรความเป็นเอกลักษณ์ (STR) ที่เสนอโดยเคราเนน เนื่องจากเคราเนนเรียกร้องบางสิ่งบางอย่างที่มากเกินไปและคงจะไม่มีสูตรที่มากเพียงพอสำหรับวัตถุทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีอยู่เป็นจำนวนมากได้

อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนไม่เห็นด้วยที่ชาปิโรสนับสนุนว่ามีความเป็นไปได้ที่จะมีวัตถุสองวัตถุที่แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันทุกประการ กล่าวคือ ข้อเสนอของชาปิโรที่ว่า i และ -i มีความแตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติทุกอย่างเหมือนกันนั้นเป็นปัญหา และวิธีการที่เขาตอบว่า i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปรในระบบนิรนัยธรรมชาติเป็นวิธีการตอบที่มีลักษณะกำปั้นทุบดินหรือไม่ได้ให้ข้อมูลที่ผู้ถามต้องการจะทราบ และไม่ได้กำลังตอบข้อแย้งอย่างตรงไปตรงมา

ผู้เขียนเสนอว่าในขณะนี้ยังไม่มีคำตอบของปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ใดที่มีเหตุผลที่ดีเพียงพอและน่าพึงพอใจ อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนตั้งคำถามต่อมโนทัศน์ความเป็นสิ่งนี้หรือมโนทัศน์ความเป็นตัวมันเอง ซึ่งทำให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุนั้นและไม่เป็นวัตถุอื่นว่า เราจะสามารถอธิบายมโนทัศน์ดังกล่าวได้อย่างไรที่จะไม่ทำให้แนวคิดของชาปิโรเป็นเหมือนกับแนวคิดของเพลโต เนื่องจากสำหรับทัศนะของเพลโตนั้น แก่นสารสาระของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวของมันเอง ดังนั้น หากเราจะตอบว่า “i” และ “-i” มีความเป็นตัวของมันเองที่ทำให้ทั้งคู่ต่างกัน (แต่ไม่สามารถแยกแยะได้โดยฟังก์ชันอัตสมสัณฐาน) เราก็ต้องอธิบายให้ได้ว่าวิธีการตอบแบบนี้ทำให้ทัศนะของชาปิโรแตกต่างจากทัศนะของเพลโตอย่างไร ผู้เขียนไม่ทราบในจุดนี้และให้ถือว่าเป็นปัญหาของชาปิโรที่จะต้องพยายามตอบให้ได้ต่อไป

ถึงอย่างนั้นก็ตาม ผู้เขียนก็ยังเห็นด้วยกับชาปิโรที่ยืนยันอย่างหนักแน่นว่าแนวคิดของเขาไม่เหมือนกับแนวคิดของเพลโต โดยเฉพาะอย่างยิ่งในประเด็นเรื่องความเป็นสากล (Universals) และความเป็นสิ่งเฉพาะ (Particulars) เพื่อให้เข้าใจง่ายก็อาจเทียบเคียงทัศนะของเพลโตเรื่องแบบ (Form) / สิ่งเฉพาะ กับ โครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มหรือสิ่งสากลแบบเอนเท่ เร็ม (an ante rem structure or an ante rem universal) / ระบบหรือการรวบรวมของวัตถุ (ร่วมด้วยความสัมพันธ์ที่แน่นอนซึ่งแต่ละวัตถุมีต่อกัน) ชาปิโรยอมรับว่าโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มกับระบบของวัตถุอยู่ในลักษณะของสิ่งหนึ่งเหนืออีกสิ่ง (one-over-many)[84] อย่างไรก็ดี สิ่งนี้ไม่เป็นปัญหาและไม่ใช่ความลึกลับแต่อย่างใด โครงสร้างเดียวกันอาจเป็นตัวอย่างร่วมหรือเป็นรูปแบบร่วมของระบบหลายๆ ระบบได้ และการมีอยู่ของโครงสร้างเป็นอิสระจากระบบของวัตถุทั้งหลาย ซึ่งอาจอยู่ในขอบเขตอื่นที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์ (non-mathematical realm)

โครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มโครงสร้างใดโครงสร้างหนึ่งจะมีตำแหน่งอยู่หลายตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งจะมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน[85] เราจึงอาจเทียบเคียงตำแหน่งได้กับออฟฟิศในโครงสร้างที่เราคุ้นเคย (เช่น ออฟฟิศต่างๆ ในโครงสร้างของรัฐบาลสหรัฐอเมริกา เป็นต้น) จากมุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ โครงสร้างถูกประกอบสร้างขึ้นจากตำแหน่งและความสัมพันธ์ของแต่ละตำแหน่งในวิถีทางเดียวกับที่องค์กร (organization) ถูกประกอบสร้างขึ้นจากออฟฟิศและความสัมพันธ์ระหว่างออฟฟิศนั่นเอง

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าโครงสร้างเป็นอิสระจากระบบของวัตถุ ดังนั้น ลักษณะที่สำคัญประการหนึ่งของโครงสร้างก็คือการมีสถานะที่เป็นอิสระ (free-standing) ไม่ว่าสิ่งใดก็สามารถแทนที่ตำแหน่งในโครงสร้างได้ ด้วยเหตุนี้บางครั้งเราจึงอาจคิดถึงตำแหน่งในโครงสร้างแบบเอนเท่ เร็มว่าตำแหน่งในตัวของมันเองนั้นก็เป็นสิ่งสากลด้วย[86] และจริงๆ แล้วตำแหน่งในโครงสร้างอาจเป็นเพียง “สิ่ง” (thing) หรือ “วัตถุ” หรือ “สิ่งเฉพาะ” นี่เป็นอีกวิธีการมองจากมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ ซึ่งสนับสนุนว่าตำแหน่งเป็นวัตถุที่จริงแท้ในตัวของมันเอง ดังนั้น จากมุมมองตำแหน่งสองประเภทก็คงจะทำให้พอเข้าใจได้ว่าทัศนะของชาปิโรนั้นแตกต่างจากทัศนะของเพลโต

[84] Shapiro, "Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and -i”." p.302.

[85] Ibid., pp.303

[86] Ibid., pp.307

4.2 ประเด็นทางญาณวิทยา

4.2.1 ความเป็นโครงการเชิงพรรณนา

สำหรับปัญหาการเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับข้อแย้งเรื่องความเป็นโครงการเชิงพรรณนา ผู้เขียนสนับสนุนว่าที่จริงแล้วโครงการของชาปิโรไม่ใช่โครงการเชิงพรรณนาอย่างเดียว หากแต่เป็นโครงการเชิงบรรทัดฐานในตัวของมันเองด้วย เนื่องจากเป็นการตอบปัญหาปรัชญาเกี่ยวกับลักษณะธรรมชาติของวัตถุทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น โครงการของชาปิโรจึงเป็นโครงการทางอภิปรัชญามาตั้งแต่ต้น ไม่ใช่โครงการทางญาณวิทยาที่แมคไบรด์พยายามตั้งคำถาม

ผู้เขียนเข้าใจว่าปัญหาทางญาณวิทยาที่สำคัญไม่น่าจะเป็นเรื่องของการเข้าถึงความรู้ แต่น่าจะเป็นการทำอย่างไรเพื่อที่จะยืนยันว่าคณิตศาสตร์เป็นความรู้ที่ถูกต้อง ซึ่งคำตอบของชาปิโรที่ว่าคณิตศาสตร์นั้นยืนยันตัวของมันเองเป็นคำตอบที่เรียกได้ว่าสมเหตุสมผล เนื่องจากเราไม่สามารถหาสิ่งใดภายนอกคณิตศาสตร์เพื่อมายืนยันคณิตศาสตร์ได้ และถ้าจะจัดประเภทว่าโครงสร้างของการอ้างเหตุผลใดๆ ในคณิตศาสตร์มีข้อความพื้นฐานหรือไม่ หรือการอ้างเหตุผลในคณิตศาสตร์จัดเป็นมูลฐานนิยมหรือไม่ ผู้เขียนเข้าใจว่าโครงการแบบองค์รวมของชาปิโรควรที่จะถูกจัดว่าเป็นอมูลฐานนิยม[87]

ความเป็นอมูลฐานนิยมของชาปิโรเห็นได้ชัดจากการที่เขาปฏิเสธญาณวิทยาแบบลดทอน (ในแง่หนึ่งคือปฏิเสธมูลฐานนิยม) ชาปิโรกล่าวบ่อยครั้งในงานของเขาว่าเราไม่สามารถวางรากฐานของคณิตศาสตร์บนโดเมนหรือทฤษฎีใดๆ ได้มั่นคงปลอดภัยไปมากกว่าคณิตศาสตร์ในตัวของมันเอง ความพยายามที่จะลดทอนดังกล่าวมักจะล้มเหลวเสมอ[88] ในทางกลับกัน แนวคิดคู่ตรงข้ามของมูลฐานนิยมอย่างแนวคิดธรรมชาตินิยม (เป็นต้นว่าแนวคิดของไควน์) ชาปิโรก็ไม่ได้เห็นด้วย เนื่องจากแนวคิดดังกล่าวสุดโต่งไปในทางหนึ่งคือการอ้างว่าไม่มีปัญหาเรื่องการเข้าถึงอีกต่อไป ชาปิโรยังไปไม่ถึงจุดนั้น อย่างไรก็ดี ถ้าเราจะจัดประเภทให้กับแนวคิดของชาปิโรด้วยเทอมของไควน์ เราก็อาจจะจัดว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของชาปิโรนั้นเป็น “ธรรมชาตินิยมอย่างอ่อน” (weakly naturalism) ซึ่งข้อเรียกร้องเกี่ยวกับความเป็นบรรทัดฐานของคำอธิบายทางญาณวิทยาจะยังไม่เกิดขึ้น อย่างไรก็ดี แนวคิดธรรมชาตินิยมอย่างอ่อนไม่ได้ใช้ข้อโต้แย้งเรื่องความจำเป็นอย่างขาดเสียไม่ได้ และยังคงให้ความสำคัญกับปรัชญาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะก้าวไปพร้อมๆ กับพัฒนาการของคณิตศาสตร์

---

[87] สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ, "ทฤษฎีเกี่ยวกับการอ้างเหตุผลสนับสนุนความเชื่อ: มูลฐานนิยมหรืออมูลฐานนิยม" (วิทยานิพนธ์ระดับมหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527).

[88] We cannot ground mathematics in any domain or theory that is more secure than mathematics itself. All attempts to do so have failed.

4.2.2 การเปลี่ยนผ่านจากความรู้เฉพาะสู่ความรู้ทั่วไป

ผู้เขียนค่อนข้างจะไม่เห็นด้วยกับวิธีตอบของชาปิโรที่ว่า (2) ไม่ได้ตามมาจาก (1) โดยตรง หากแต่ (2) เป็นสมมติฐานที่คาดคะเนได้จาก (1) และเมื่อได้รับการพิสูจน์ด้วยวิธีการหลายอย่าง (ซึ่งส่วนมากมักเป็นวิธีการทางอ้อมคือดูว่า (2) นำไปใช้ประโยชน์ต่อได้หรือไม่ หรือ (2) เป็นรากฐานของทฤษฎีบทอื่นๆ ที่เป็นจริงในคณิตศาสตร์หรือไม่) เราก็จะเลื่อนสถานะของ (2) จาก “สมมติฐาน” มาเป็น “ข้อเท็จจริง” และในท้ายที่สุดก็อาจกลายมาเป็น “สัจพจน์” หรือ “ทฤษฎีบท” ได้

ในแง่หนึ่งเหตุผลในลักษณะดังกล่าวของชาปิโรก็ฟังขึ้นและสอดคล้องกับความเป็นโครงการแบบองค์รวมในทัศนะของเขา อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนเข้าใจว่าในท้ายที่สุดแล้ว (2) ก็ยังคงเป็นสิ่งที่ตามมาจาก (1) อยู่นั่นเอง ไม่ว่าจะใช้วิธีใดในการพิสูจน์ ใช้เวลานานเท่าใด หรือถึงแม้จะมีการค่อยๆ เปลี่ยนสถานะจากสมมติฐานมาเป็นสัจพจน์หรือทฤษฎีบทแล้วก็ตาม

อย่างไรก็ดี ประเด็นของแมคไบรด์ที่แย้งเรื่องการเปลี่ยนผ่านจากความรู้เฉพาะสู่ความรู้ทั่วไปว่าการมีความรู้คณิตศาสตร์จะต้องยอมรับความจริงบางอย่างไว้ก่อนแล้วนั้นอาจจะไม่ใช่ประเด็นสำคัญที่ต้องมาถกเถียงกัน เพราะโดยความเป็นโครงการแบบองค์รวมก็น่าจะต้องเป็นแบบนั้นอยู่แล้ว

ผู้เขียนเข้าใจว่าแมคไบรด์ดูเหมือนจะมีข้อโต้แย้งว่า

เนื่องจาก

(1)* การรับรู้คณิตศาสตร์จะต้องมีบางอย่างรับรู้ไว้ก่อนแล้ว

ดังนั้น

(2)* ข้อเสนอของชาปิโรไม่น่าเชื่อถือ

จากข้ออ้างที่ว่ามีสิ่งที่รับรู้ไว้ก่อนแล้ว แมคไบรด์กำลังสรุปว่าข้อเสนอของชาปิโรนั้นไม่ถูกต้อง ซึ่งเป็นการสรุปที่ไกลเกินไป และไม่มีหลักฐานใดเพียงพอที่จะยืนยันว่า (1)* และ (2)* เชื่อมโยงถึงกันได้อย่างไร

4.2.3 การนิยามโดยปริยาย

สำหรับปัญหาที่เกี่ยวกับการนิยามโดยปริยาย ผู้เขียนมองว่าคำบรรยายที่ว่าเราจินตนาการถึงวัตถุบางอย่างที่ชื่อว่าพระเจ้าได้นั้นไม่เป็นคำบรรยายที่ว่างเปล่า เนื่องจากเป็นไปได้ที่เราจะมีนิยามเกี่ยวกับพระเจ้าได้หลายๆ แบบ และการมีนิยามหลายแบบก็ไม่ได้หมายความว่าจะต้องไม่มีพระเจ้า

(พระเจ้าอาจจะมีอยู่จริงๆ ก็ได้ และเข้ากันได้กับทุกๆ นิยามที่มีอยู่) ดังนั้น การมีนิยามที่คงเส้นคงวาเกี่ยวกับพระเจ้าจึงไม่ได้ยืนยันว่าพระเจ้าจะต้องไม่มีอยู่ ในทำนองเดียวกันกับการนิยามโดยปริยาย ความสอดคล้องต้องกันของคำบรรยายเกี่ยวกับโครงสร้างหนึ่งๆ ไม่ได้หมายความว่าโครงสร้างดังกล่าวจะต้องไม่มีอยู่ โครงสร้างนั้นอาจจะมีอยู่ก็ได้ โดยสิ่งที่สนับสนุนความสอดคล้องต้องกันก็คือ ความเป็นโครงการแบบองค์รวม ลักษณะอมูลฐานนิยมที่ว่าคณิตศาสตร์นั้นยืนยันตัวของมันเอง และการสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด

ในประเด็นสุดท้ายคือการสรุปอ้างอิงถึงการอธิบายที่ดีที่สุด ซึ่งกล่าวถึงในหัวข้อ 3.4 ผู้เขียนยอมรับว่ายังคงเป็นปัญหาสำหรับทัศนะของชาปิโร เพราะจากข้อโต้แย้งในประเด็นดังกล่าวที่ว่า

ข้ออ้างที่ 1: ถ้าแนวคิด “*โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม*” เป็นแนวคิดที่จริงแล้ว
โครงสร้างและระบบต่างๆ ในคณิตศาสตร์ก็จะเป็นจริงด้วย

ข้ออ้างที่ 2: โครงสร้างและระบบต่างๆ ในคณิตศาสตร์เป็นจริง

ข้อสรุป: แนวคิด “*โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็ม*” น่าจะเป็นแนวคิดที่จริง

ทำให้มีความเป็นไปได้ที่ข้อความในเครื่องหมาย “” จะถูกแทนที่ด้วยแนวคิดอื่นนอกเหนือจากแนวคิดของชาปิโร ไม่ว่าจะเป็นแนวคิด “โครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้ง” “โครงสร้างนิยมแบบโมดัล” หรือแม้กระทั่ง “สัจนิยมแบบอื่น” เช่น แนวคิดของไควน์ แนวคิดของแมดดี้ เป็นต้น ซึ่งถ้าเป็นเช่นนั้นก็จะทำให้แนวคิดอื่นๆ สามารถที่จะเป็นจริงได้ด้วยเช่นกัน

อย่างไรก็ตาม ในหัวข้อ 2.2.4 ผู้เขียนได้พยายามเปรียบเทียบแนวคิดของชาปิโรกับแนวคิดโครงสร้างนิยมอีกแบบหนึ่ง ได้แก่ โครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งในทัศนะของพาร์สันส์ ผู้เขียนพบว่าพาร์สันส์ไม่สามารถตอบข้อแย้งของชาปิโรได้ และวิธีการตอบของพาร์สันส์นั้นมีปัญหา ไม่ว่าจะเป็นการพยายามอ้างถึงลักษณะที่เหนือกว่าภาษาของโครงสร้าง ซึ่งทำให้เราไม่สามารถเข้าใจลักษณะดังกล่าวในเทอมของโครงสร้างได้ และวิธีอธิบายการมีโครงสร้างที่แตกต่างกันเป็นจำนวนมากก็ดูเหมือนว่าจะขัดแย้งกับแนวคิดพื้นฐานของโครงสร้างนิยมแบบกำจัดทิ้งที่เขาเสนอขึ้นมาเสียเอง

ถึงแม้ว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของจำนวนในทัศนะของชาปิโรจะยังไม่ประสบผลสำเร็จในการตอบปัญหาบางประเด็น ทั้งทางภววิทยาและญาณวิทยา อย่างไรก็ดี เมื่อเปรียบเทียบกับบางแนวคิดที่จัดว่าเป็นโครงสร้างนิยมเหมือนกันอย่างแนวคิดของพาร์สันส์ แนวคิดของชาปิโรน่ายอมรับได้มากกว่า ดังนั้น แนวคิดของชาปิโรจึงยังคงเป็นแนวคิดหนึ่งที่เราสามารถยอมรับได้

บรรณานุกรม

Benacerraf, Paul. "Mathematical Truth." *Philosophical Review* 70, no. 19 (1973): 661-79.

———. "What Number Could Not Be." *Philosophical Review* 74, no. 1 (1965): 47-73.

Burgess, John. "Review of Shapiro (1997)." *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40, no. 2 (1999): 283-91.

Hellman, Geoffrey. "Three Varieties of Mathematical Structuralism." *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 184-211.

Horsten, Leon. "Philosophy of Mathematics." In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2017. plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics.

Keränen, Jukka. "The Identity Problem for Realist Structuralism." *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 308-30.

Ladyman, James. "Mathematical Structuralism and the Identity of Indiscernibles." *Analysis* 65, no. 3 (2005): 218-21.

MacBride, Fraser. "Can “Ante Rem” Structuralism Solve the Access Problem?". *The Philosophical Quarterly* 58, no. 230 (2008): 155-64.

Parsons, Charles. "Structuralism and Metaphysics." *The Philosophical Quarterly* 54, no. 214 (2004): 56-77.

———. "The Structuralist View of Mathematical Objects." *Synthese* 84, no. 3 (1990): 303-46.

Quine, W. V. "Grades of Discriminability." *The Journal of Philosophy* 73, no. 5 (1976): 113-16.

Shapiro, Stewart. "Epistemology of Mathematics: What Are the Questions? What Count as Answers?". *The Philosophical Quarterly* 61, no. 242 (2011): 130-50.

———. "Identity, Indiscernibility, and Ante Rem Structuralism: The Tale of I and -I”." *Philosophia Mathematica (III)* 16 (2008): 285-309.

———. "Philosophy of Mathematics and Its Logic." In *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, edited by Stewart Shapiro, 3-28. Oxford: Oxford University Press, 2005.

———. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* New York: Oxford University Press, 1997.

———. "Structure and Identity." In *Identity and Modality*, edited by Fraser MacBride, 109-45. Oxford: Oxford University Press, 2006.

———. *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 2000.

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. ระบบจำนวน. กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์ (1991), 2558.

วุฒิ เลิศสุขประเสริฐ. "ญาณวิทยาเชิงธรรมชาติของไควน์." วิทยานิพนธ์อักษรศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

สิริเพ็ญ พิริยจิตรกรกิจ. "ทฤษฎีเกี่ยวกับการอ้างเหตุผลสนับสนุนความเชื่อ: มูลฐานนิยมหรืออมูลฐานนิยม." วิทยานิพนธ์ระดับมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นางสาวขวัญตา ทรัพย์สินบูรณะ
วัน เดือน ปี เกิด	23 ตุลาคม 2534
สถานที่เกิด	นครพนม
วุฒิการศึกษา	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ที่อยู่ปัจจุบัน	นิติบุคคลอาคารชุด รีเจ้นท์พัฒนาการ อาคาร C ห้อง 116 เลขที่ 97, 99 ถนนอ่อนนุช ซอยอ่อนนุช 17 แยก 18 แขวงสวนหลวง เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250