โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

The number of squares reachable in k moves with $(2, b)$-knight's move for $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

ชื่อนิสิต นางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย 583 35585 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$

นางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

The number of squares reachable in k moves with $(2, b)$-knight's move for $b \in \{2,4,6,8\}$

Miss Aimbun Niamnoy

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

โครงงาน	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$
โดย	นางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย เลขประจำตัวนิสิต 5833558523
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

จิตรจวบ เปาอินทร์
.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ จิตรจวบ เปาอินทร์)

พงษ์เดช มนทกานติรัตน์
.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์)

นางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย : สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$. (The number of squares reachable in k moves with $(2, b)$-knight's move for $b \in \{2,4,6,8\}$) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 30 หน้า

*กระดานหมากรุก*ขนาด $m \times n$ คือ กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแถวของช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจัดเรียงเป็น m แถวและแต่ละแถวมีอยู่ n หลัก ในกรณีที่ $m \to \infty$ และ $n \to \infty$ จะเรียกกระดานหมากรุกดังกล่าวว่า*กระดานหมากรุกขนาดอนันต์* การเดินของม้าหมากรุกแบบ (a, b) เป็นการเดินบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์จากช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องหนึ่งไปอีกช่องหนึ่ง โดยเดินม้าหมากรุกไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง ซึ่งโครงงานนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2,4,6,8\}$ และนำเสนอสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2,4,6,8\}$ ไปถึงได้บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ และจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงด้วยการเดินเพียง k ครั้ง

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ....อิ่มบุญ...........
สาขาวิชา ... คณิตศาสตร์ ..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน ....
ปีการศึกษา .... 2561 ....

5833558523 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : (a, b)-knight's move, number of squares reachable by a knight

Aimbun Niamnoy : The number of squares reachable in k moves with $(2, b)$-knight's move for $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2,4,6,8\}$. ADVISOR : Asst. Prof. Ratinan Boonklurb, Ph.D., 30 pp.

The $m \times n$ *chessboard* is an array with squares arranged in m rows and n columns. If $m \to \infty$ and $n \to \infty$, then it is called an *infinite chessboard*. An (a, b)-*knight's* move is a move from square to square by moving a knight passing a squares vertically or a squares horizontally and then passing b squares at 90 degrees angle. In this project, we consider the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{2,4,6,8\}$ and obtain formulas for the number of squares reachable by a knight with the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{2,4,6,8\}$ on an infinite chessboard and the cumulative number of squares that the knight can reach in k moves.

Department Mathematics and Computer Science Student's Signature ....อิ่มบุญ
Field of Study . . Mathematics . . . . Advisor's Signature .R. Boonklurb. . . .
Academic Year . . . . . 2018 . . . .

กิตติกรรมประกาศ

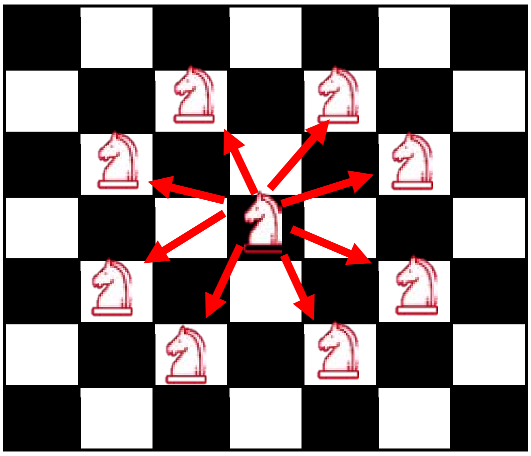
โครงงานนี้สำเร็จได้เพราะได้รับการอนุเคราะห์อย่างเต็มที่จากบุคคลเหล่านี้ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่ให้คำแนะนำ ให้ความรู้ เคี่ยวเข็ญ ดูแลเอาใจใส่เป็นอย่างดีมาโดยตลอดระยะเวลาการทำโครงงานนี้ขอขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำโครงงาน ซึ่งทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ จิตรจวบ เปาอินทร์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์ ซึ่งเป็นกรรมการคุมสอบโครงงานนี้ช่วยตรวจทานและให้คำแนะนำทำให้โครงงานมีความถูกต้องมากขึ้น ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณพ่อแม่และเพื่อนๆ ที่เป็นกำลังใจให้ผ่านลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

สารบัญภาพ

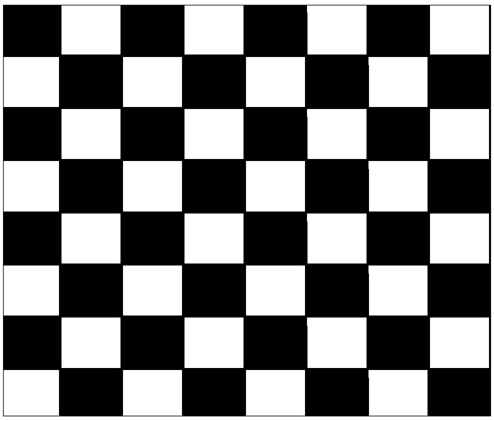
บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน

ในเกมหมากรุก ตัวหมากตัวหนึ่ง คือ *ม้า* ม้าจะมีวิธีการเดินแตกต่างจากตัวหมากตัวอื่นๆ อย่างมาก กล่าวคือ จะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปหนึ่งช่องแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีกสองช่อง เรียกการเดินแบบนี้ว่าการเดินแบบปกติของม้า



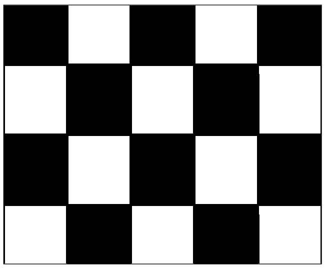
ภาพที่ 1.1 ช่องที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงได้จากตำแหน่งของม้าที่กำหนดให้

กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน คือ กระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถวและแปดหลัก โดยแต่ละช่องทาด้วยสีดำหรือสีขาวดังภาพ



ภาพที่ 1.2 กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน

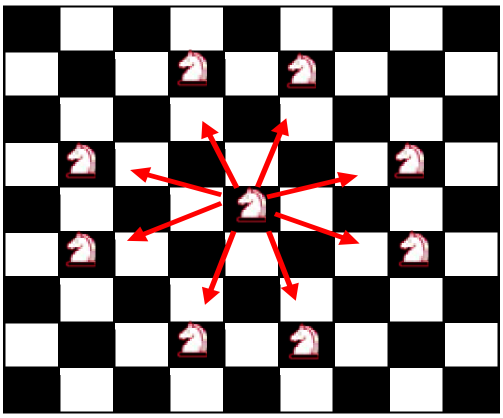
ต่อมามีการขยายกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานให้เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่ง *กระดานหมากรุกขนาด* $m \times n$ ประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว และ n หลัก ทาสีแต่ละช่องด้วยสีดำและสีขาวสลับกันไป



ภาพที่ 1.3 ตัวอย่างกระดานหมากรุกขนาด 4×5

การเดินของม้าและกระดานหมากรุกสามารถจำลองเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้โดยใช้กราฟ ด้วยการแทนช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละช่องเป็นจุดยอดของกราฟ และจุดยอดสองจุดจะมีเส้นเชื่อมหรือเรียกว่าประชิดกันถ้าม้าสามารถเดินจากช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่งได้

ในปี ค.ศ. 2003 Chia และOng [1] ได้ปรับเปลี่ยนการเดินแบบปกติของม้าไปเป็น *การเดินแบบ* (a, b) *ของม้า* นั่นคือ การเดินม้าไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่าการเดินแบบ (a, b) ของม้า จะเหมือนกับการเดินแบบ (b, a) ของม้า ดังนั้นในโครงงานฉบับนี้จึงพิจารณาการเดินแบบ (a, b) ของม้า เมื่อกำหนดให้ $a < b$ นอกจากนี้ยังได้ด้วยว่าการเดินแบบปกติของม้า คือ การเดินแบบ $(1,2)$ ของม้า ถ้าให้ (i, j) เป็นช่องบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ตรงตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j เมื่อ $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ เป็นจุดเริ่มต้น ม้าจะสามารถเดินแบบ (a, b) ไปได้อย่างมาก 8 ช่อง กล่าวคือ $(i \pm a, j \pm b)$ และ $(i \pm b, j \pm a)$ เช่น ในภาพ 1.4 แสดงการเดินแบบ $(1,3)$ ของม้าบนกระดานขนาด 9×9 จากจุดเริ่มต้น $(5,5)$ ซึ่งจะเดินไปได้ทั้งหมด 8 ช่อง คือ $(2,4)$, $(4,2)$, $(2,6)$, $(6,2)$, $(4,8)$, $(8,4)$, $(6,8)$ และ $(8,6)$ ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าจากจุดเริ่มต้นนั้น ตำแหน่งที่ม้าเดินแบบ $(1,3)$ เพียง 1 ครั้งทั้ง 8 ตำแหน่งมีความสมมาตรกัน



ภาพที่ 1.4 ตำแหน่งทั้ง 8 ที่ม้าเดินแบบ $(1,3)$ จากตำแหน่ง $(5,5)$

ในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [2] ได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่ m และ n ลู่เข้าสู่อนันต์ หรือที่เรียกว่า*กระดานหมากรุกแบบอนันต์*ซึ่งมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวนอนและช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวตั้งเป็นจำนวนอนันต์ แล้วหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง

8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	2	3	K	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8

ภาพที่ 1.5 ส่วนหนึ่งของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์โดยกำหนดให้ K เป็นจุดเริ่มต้นของการเดินม้าแบบปกติ และตัวเลขต่างๆ ที่กำกับในช่องเป็นจำนวนครั้ง $k \leq 9$ ที่น้อยที่สุดที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงช่องเหล่านั้นได้

ทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้เป็นผลจากการศึกษาของ Miller และ Farnsworth [2]

ทฤษฎีบท 1.1 [2] จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 เท่ากับ $1, 8, 32, 68$ และ 96 ช่องตามลำดับ และเมื่อ $k \geq 5$ เท่ากับ $28k - 20$ ช่อง

บทแทรก 1.1 [2] จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2$ และ 3 เท่ากับ $1, 9, 41$ และ 109 ช่องตามลำดับ และเมื่อ $k \geq 4$ เท่ากับ $14k^2 - 6k + 5$

ในปี ค.ศ. 2018 Theprod [3] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] ไปพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง ตลอดจนจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $b \in \{3, 4, 5, 7\}$ ซึ่งได้ผลดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2 [3] จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, 3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 เท่ากับ $1, 8, 32, 68$ และ 80 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ เท่ากับ $56t + 8$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{3, 4, 5 \ldots\}$ เท่ากับ $56t - 20$ ช่อง

บทแทรก 1.2 [3] จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (1,3) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 เท่ากับ $1, 9, 41, 109$ และ 189 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ เท่ากับ $56t^2 + 44t - 3$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{3, 4, 5, \ldots\}$ เท่ากับ $56t^2 - 12t - 11$ ช่อง

ทฤษฎีบท 1.3 [3] จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (1,4) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548$ และ 620 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k \geq 9$ เท่ากับ $92k$ – 132 ช่อง

บทแทรก 1.3 [3] จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (1,4) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ$1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105, 1653$ และ 2273 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k \geq 9$ เท่ากับ $46k^2 - 86k + 17$

ทฤษฎีบท 1.4 [3] จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (1,5) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ 7 เท่ากับ $1,8,32,88,192,304,360$ และ 416 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{4, 5, 6, \ldots\}$ เท่ากับ $136t - 8$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{4, 5, 6, \ldots\}$ เท่ากับ $136t - 72$ ช่อง

บทแทรก 1.4 [3] จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ 7 เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 321, 625, 985$ และ 1401 ช่อง ตามลำดับ และ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{4, 5, 6, \dots\}$ เท่ากับ $136t^2 + 56t + 9$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{4, 5, 6, \dots\}$ เท่ากับ $136t^2 - 80t + 17$ ช่อง

ทฤษฎีบท 1.5 [3] จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,7)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, 11$ เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 192, 360, 608, 872, 960, 956, 1112$ และ 1208 ช่อง ตามลำดับ และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{6,7,8, \dots\}$ เท่ากับ $240t + 8$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{6, 7, 8, \dots\}$ เท่ากับ $144t + 468$ ช่อง

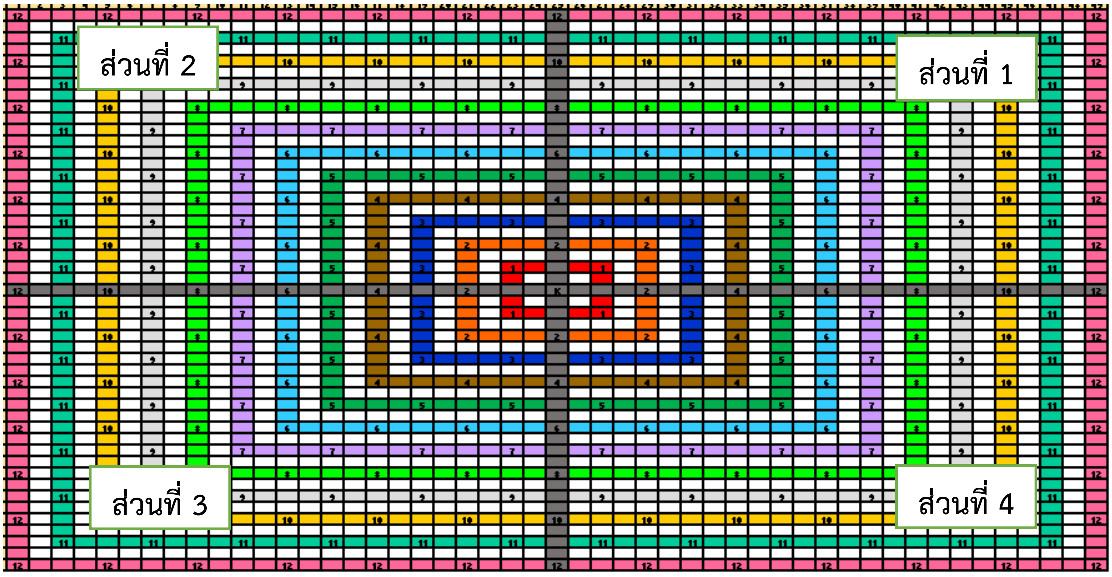
บทแทรก 1.5 [3] จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,7)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, 11$ เท่ากับ $1, 9, 41, 129$ $321, 681, 1298, 2161, 3121, 4161, 5273$ และ 6481 ช่อง ตามลำดับ และ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{6, 7, 8, \dots\}$ เท่ากับ $192t^2 + 668t - 1659$ ช่อง และ $k = 2t$ ที่ $t \in \{6, 7, 8, \dots\}$ เท่ากับ $192t^2 + 428t - 1667$ ช่อง

โครงงานฉบับนี้ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] และ Theprod [3] มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$

บทที่ 2
ทฤษฎีบทหลัก

2.1 การเดินของม้าแบบ (2,2)

พิจารณาการเดินของม้าแบบ (2,2) บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังภาพ



ภาพที่ 2.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2)ออกเป็น 4 ส่วน

เนื่องจากการเดินของม้าแบบ (2,2) จะเดินจากช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 4 ช่อง ทำให้ได้ว่าม้าไม่สามารถเดินไปทั่วทุกช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ได้ อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0$ จะได้ 1 ช่อง และเป็น k ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

บทพิสูจน์ กรณี 1 $k = 0$ ช่องที่กำกับด้วยเลข 0 (คือ ช่องที่กำกับด้วย K) ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคี่ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 1 ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

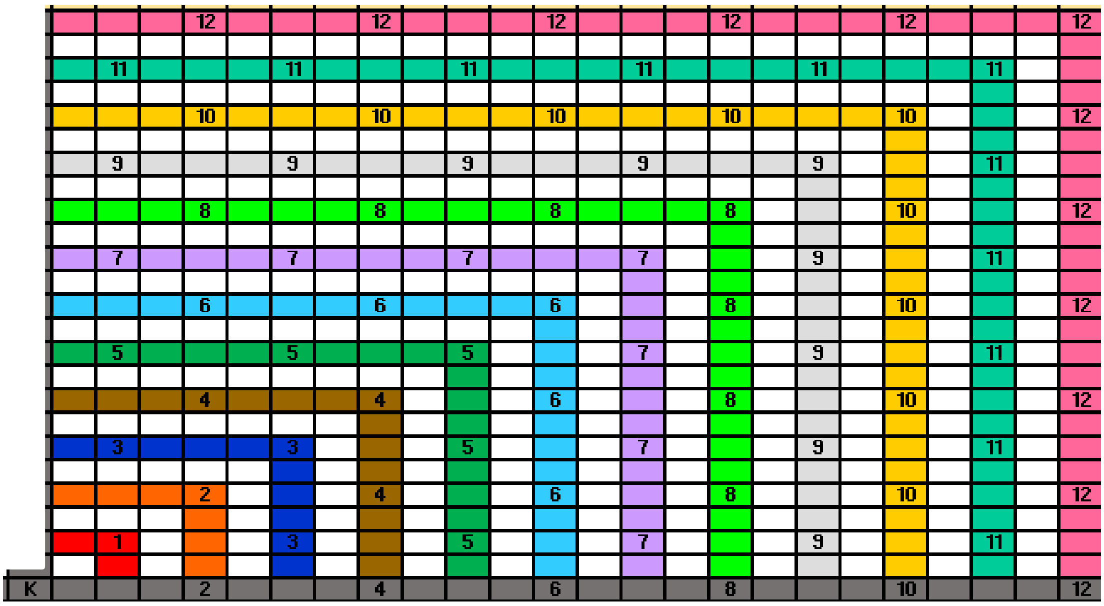
ช่องที่กำกับด้วยเลข 3 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 2 = 3$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 3 = 5$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 1 + 4 = 7$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+1}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน

$$\underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{\frac{k-1}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+1}{2} = k \text{ ช่อง}$$



ภาพที่ 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

กรณี 3 k เป็นจำนวนเต็มคู่บวก จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 2 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 = 2$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 4 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 2 = 4$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1+1+1+3=6$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 5 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1+1+1+1+4=8$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+2}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน

$$\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-2}{2}\text{ ตัว}}+\left(\frac{k}{2}+1\right)=k \text{ ช่อง} \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0$ จะได้ 1 ช่อง และเป็น $4k$ ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

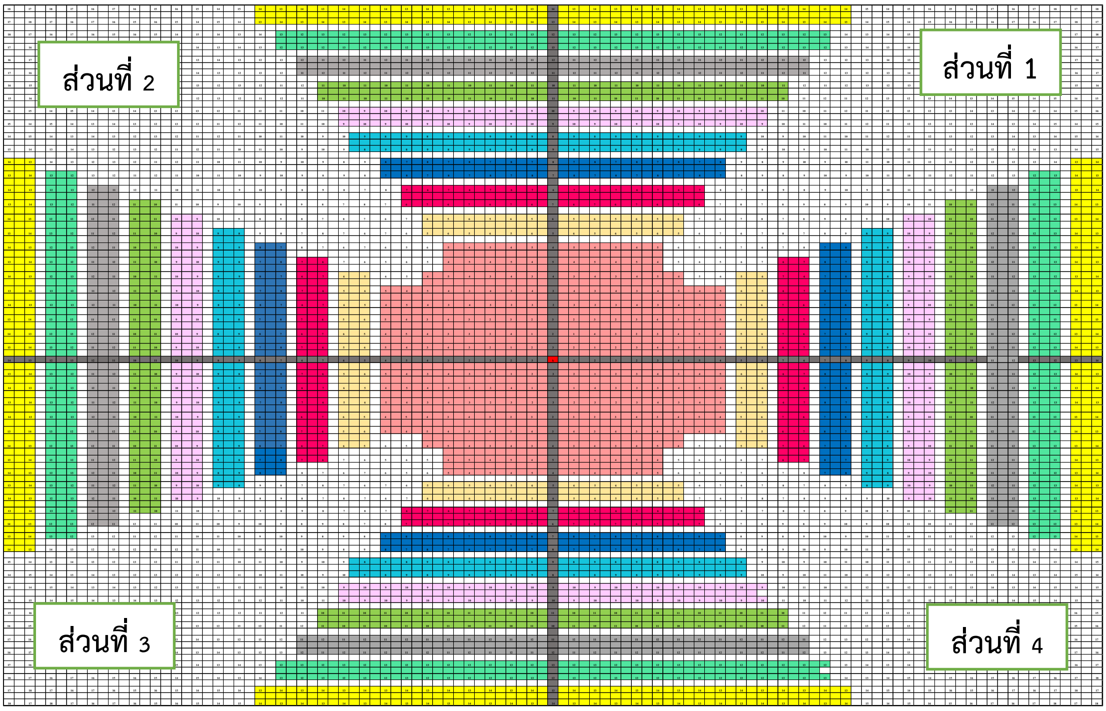
บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K $\square$

บทแทรก 2.1 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $2k^2+2k+1$ ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $1+\sum_{i=1}^{k}4i=2k^2+2k+1$ ช่อง $\square$

2.2 การเดินของม้าแบบ $(2,4)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2,4)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังภาพ



ภาพที่ 2.3 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ออกเป็น 4 ส่วน

จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 เท่ากับ $1, 8, 32, 68$ และ 96 ช่องตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 5$ เนื่องจากการเดินของม้าแบบ $(2,4)$ จะเดินจากช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 8 ช่อง ทำให้ได้ว่าม้าไม่สามารถเดินไปทั่วทุกช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ได้ อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน

ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งบนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็น $7k - 5$ ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$

บทพิสูจน์ กรณี 1 k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \in \{2, 3, 4, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 10 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3) + 5 + 4 + 4 + 3 = 30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 14 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3) + 6 + 5 + 5 + 4 = 44$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 18 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 7 + 6 + 6 + 5 = 58$ ช่อง

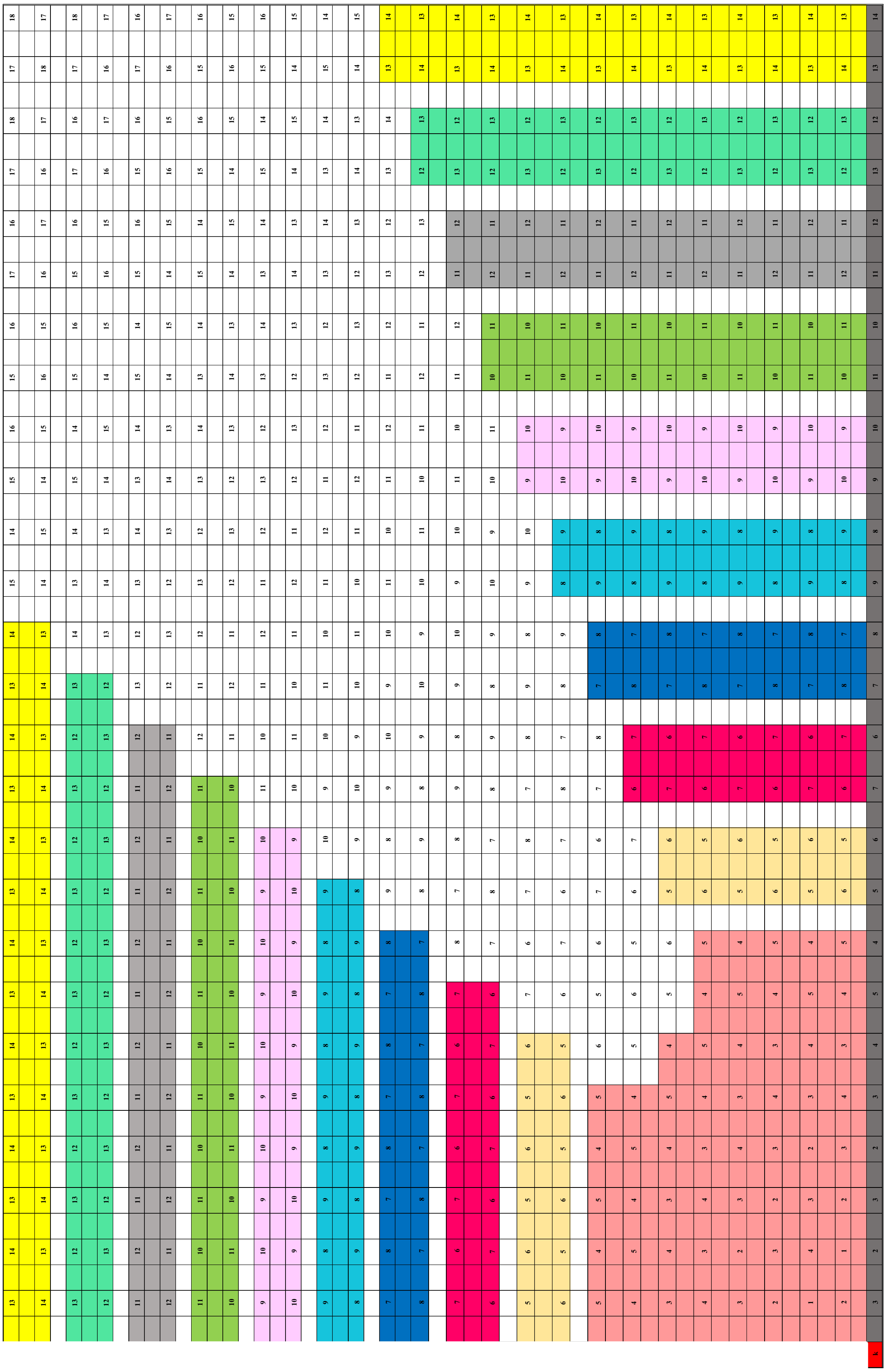
ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 22 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 8 + 7 + 7 + 6 = 72$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{2, 3, 4, \dots\}$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \cdots + 2)}_{2t \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1) = 14t + 2 = 7k - 5$ ช่อง

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \in \{3,4,5, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 12 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3) + 5 + 5 + 4 + 4 = 37$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 16 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 6 + 6 + 5 + 5 = 51$ ช่อง



ภาพที่ 2.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 20 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3)+7+7+6+6=65$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 24 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3+3+3)+8+8+7+7=79$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k=2t$ ที่ $t \in \{3,4,5,\dots\}$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t-1\text{ ตัว}}+\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-3\text{ ตัว}}+(t+2)+(t+2)+(t+1)+(t+1)=14t-5=7k-5$ ช่อง $\square$

ทฤษฎีบท 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,4) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 เท่ากับ $1,8,32,68$ และ 96 ช่องตามลำดับ และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$ เท่ากับ $28k-20$ ช่อง

บทพิสูจน์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2 และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$ สามารถสรุปผลได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.3 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K $\square$

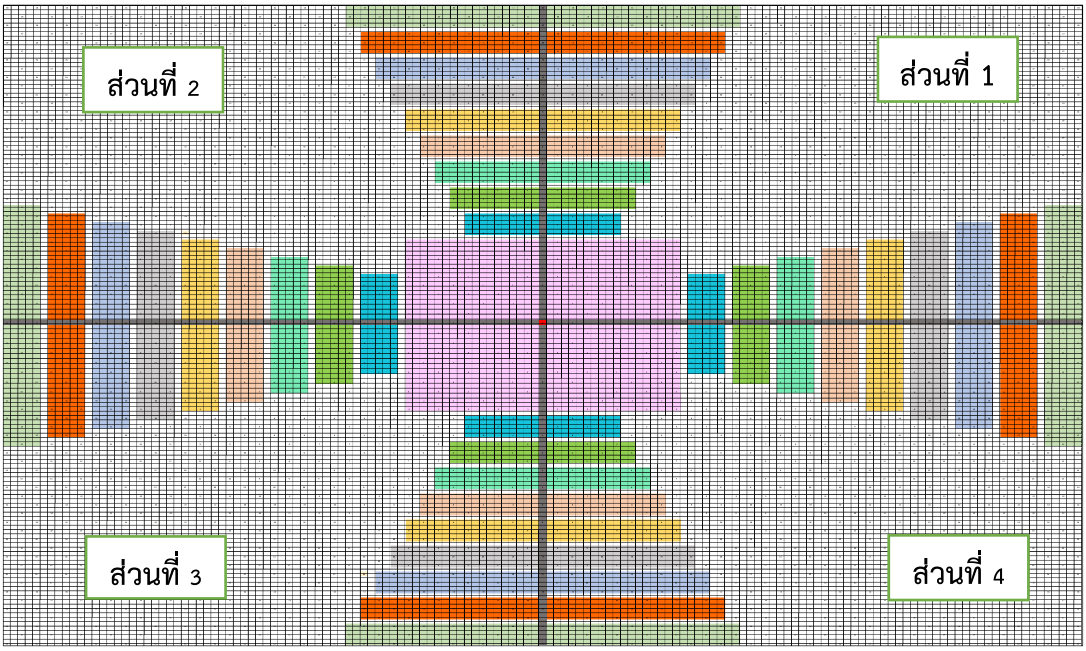
บทแทรก 2.2 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,4) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 เท่ากับ $1,9,41,109$ และ 205 ช่องตามลำดับ และเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$ เท่ากับ $14k^2-6k+5$ ช่อง

บทพิสูจน์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากส่วนแรกของทฤษฎีบท 2.2 และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$ สามารถสรุปจากส่วนหลังของทฤษฎีบท 2.2 ได้ว่าจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,4) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $205+\sum_{i=5}^{k}(28i-20)=14k^2-6k+5$ ช่อง

$\square$

2.3 การเดินของม้าแบบ (2,6)

พิจารณาการเดินของม้าแบบ (2,6) บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังรูป



ภาพที่ 2.5 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ออกเป็น 4 ส่วน

จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 เท่ากับ $1, 8, 32, 68$ และ 96 ช่องตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 5$ เนื่องจากการเดินของม้าแบบ (2,6) จะเดินจากช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 8 ช่อง ทำให้ได้ว่าม้าไม่สามารถเดินไปทั่วทุกช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ได้ อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้

ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.5 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็น $7k - 5$ ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 5$

บทพิสูจน์ กรณี 1 k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \in \{2, 3, 4, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 8 หลัก มีอยู่ $(3 + 3) + (4 + 4 + 4) + 5 + 4 + 3 = 30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 11 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 6 + 5 + 4 = 44$

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 14 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 7 + 6 + 5 = 58$

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 17 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 8 + 7 + 6 = 72$ ช่อง

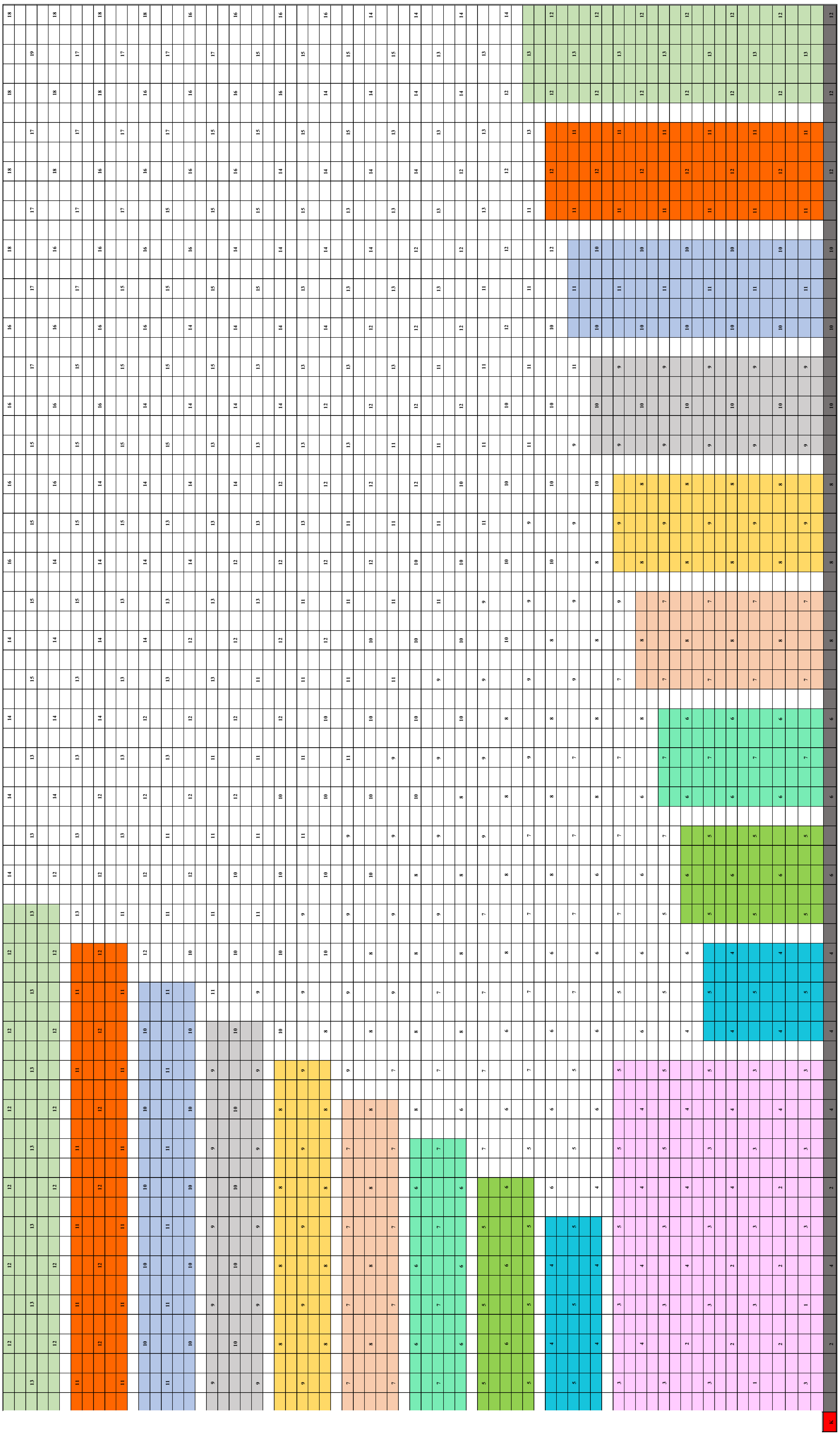
ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{2,3,4, \dots\}$ มีอยู่ $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{t\text{ ตัว}} + \underbrace{(4 + 4 + 4 + \cdots + 4)}_{2t-1\text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) + (t + 1) = 14t + 2 = 7k - 5$ ช่อง

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \in \{3,4,5, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 9 หลัก มีอยู่ $(3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4) + 6 + 5 + 4 = 37$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 12 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 7 + 6 + 5 = 51$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 15 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 8 + 7 + 6 = 65$ ช่อง



ภาพที่ 2.6 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 18 หลัก มีอยู่ $(3+3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+9+8+7=79$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k=2t$ ที่ $t\in\{3,4,5,\dots\}$ มีอยู่ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t-1\text{ ตัว}}+\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-2\text{ ตัว}}+(t+3)+(t+2)+(t+1)=14t-5=\ 7k-5$ ช่อง $\square$

ทฤษฎีบท 2.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 เท่ากับ $1,8,32,68$ และ 96 ช่องตามลำดับ และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k\geq 5$ เท่ากับ $28k-20$ ช่อง

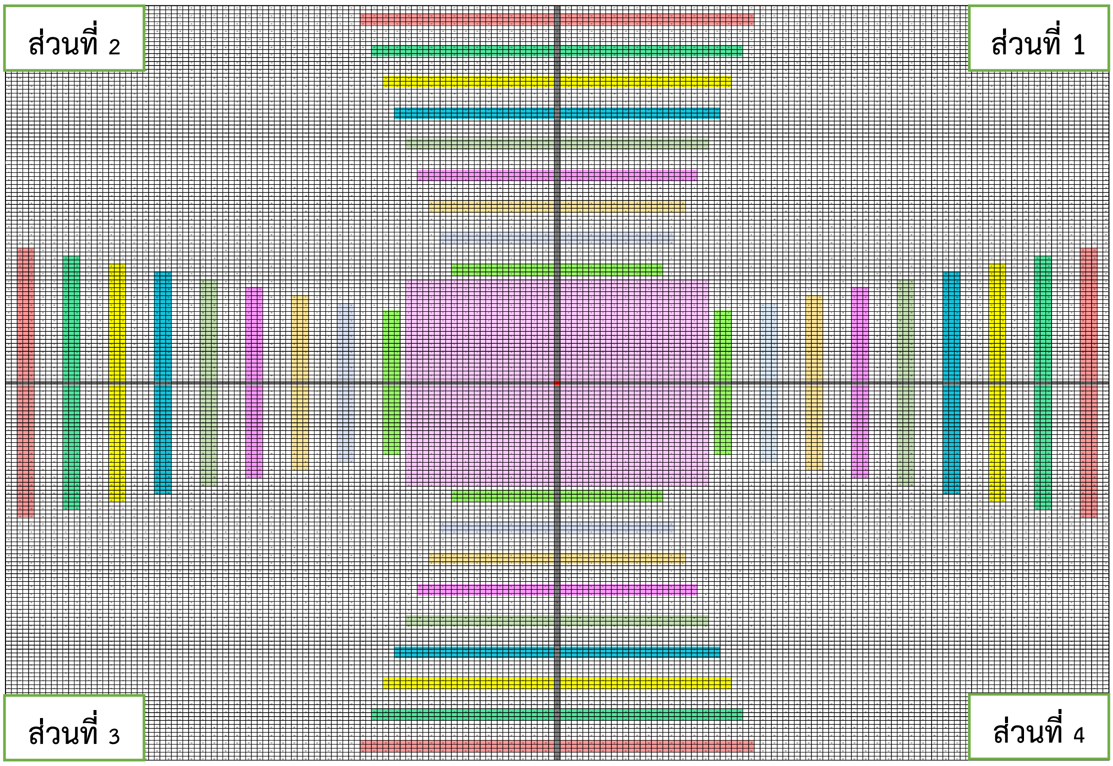
บทพิสูจน์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.4 และเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k\geq 5$ สามารถสรุปผลได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.5 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K $\square$

บทแทรก 2.3 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 เท่ากับ $1,9,41,109$ และ 205 ช่องตามลำดับ และเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k\geq 5$ เท่ากับ $14k^2-6k+5$

บทพิสูจน์ เมื่อ $k=0,1,2,3$ และ 4 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากส่วนแรกของทฤษฎีบท 2.3 และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k\geq 5$ สามารถสรุปจากส่วนหลังของทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่าจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,6) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $205+\sum_{i=5}^{k}(28i-20)=14k^2-6k+5$ ช่อง $\square$

2.4 การเดินของม้าแบบ (2,8)

พิจารณาการเดินของม้าแบบ (2,8) บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังภาพ



ภาพที่ 2.7 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ออกเป็น 4 ส่วน

จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548$ และ 620 ช่องตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 9$ เนื่องจากการเดินของม้าแบบ (2,8) จะเดินจากช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 8 ช่อง ทำให้ได้ว่าม้าไม่สามารถเดินไปทั่วทุกช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ได้ อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น

ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็น $23k - 33$ ช่อง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 9$

บทพิสูจน์ กรณี 1 k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \in \{4,5,6, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 32 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4) + 5 + (4+4) + 6 + (4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + 13 + (4+4) + 11 + 4 + 8 + 10 + 4 + 8 + 7 + 7 + 5 = 174$ ช่อง

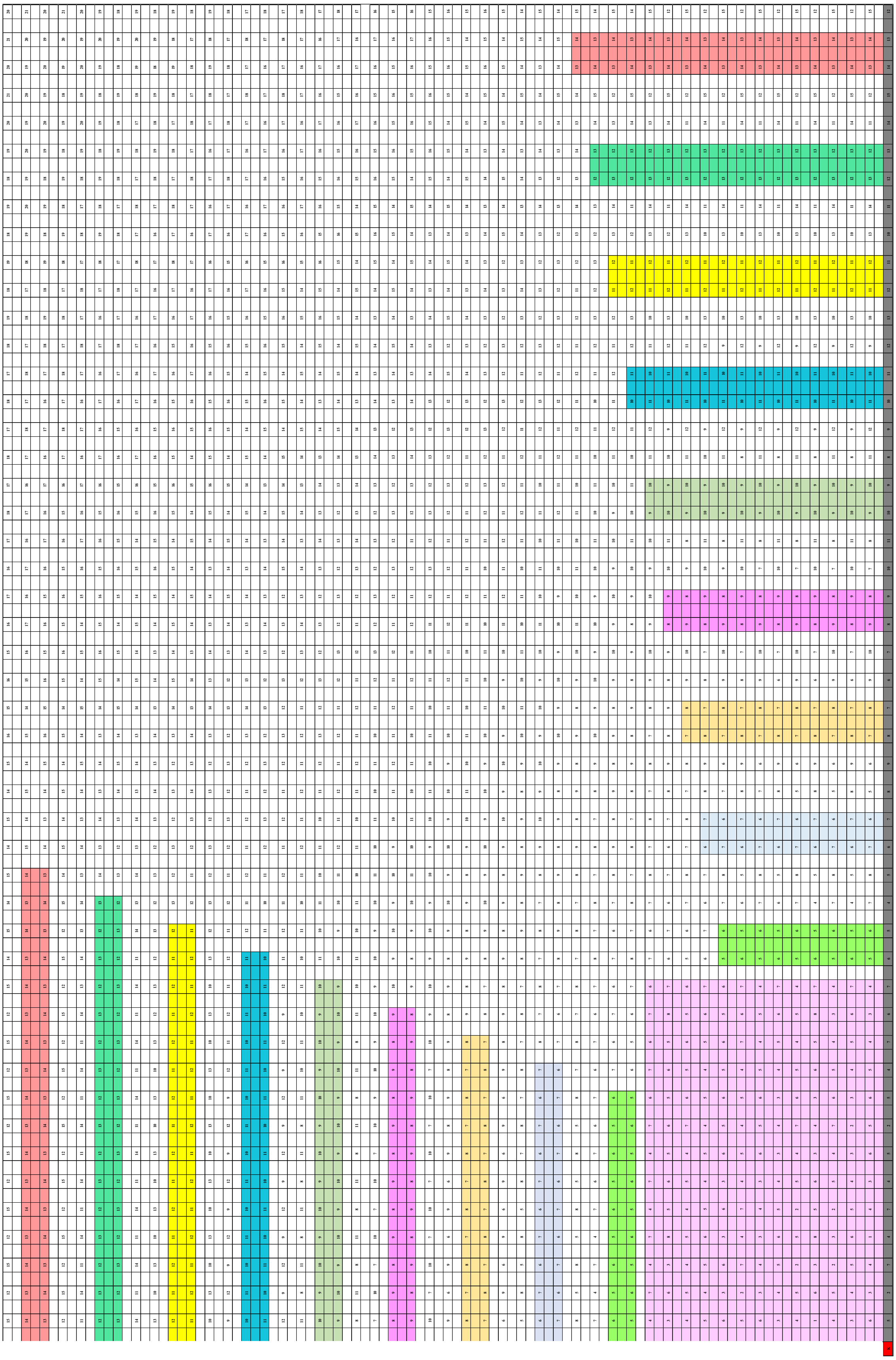
ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 40 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4) + 5 + (4+4) + 6 + (4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + 14 + (4+4) + 12 + 4 + 9 + 11 + 4 + 9 + 8 + 8 + 6 = 220$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 13 ปรากฏ 48 หลัก มีอยู่$(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4) + (5+4+4) + (6+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + 15 + (4+4) + 13 + 4 + 10 + 12 + 4 + 10 + 9 + 9 + 7 = 266$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \in \{4, 5, 6 \dots\}$ มีอยู่ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t \text{ ตัว}} + (5+4+4) + (6+4+4) + \underbrace{((7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + \cdots + (7+4+4)}_{2t-6 \text{ ตัว}} + (t+9) + (4+4) + (t+7) + 4 + (t+4) + (t+6) + 4 + (t+4) + (t+3) + (t+3) + (t+1) = 46t - 10 = 23k - 33$ ช่อง

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \in \{5, 6, 7, \dots\}$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 36 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4) + 5 + (4+4) + 6 + (4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + 13 + (4+4) + 12 + 4 + 9 + 10 + 4 + 9 + 7 + 7 + 6 = 197$ ช่อง



ภาพที่ 2.8 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \le k \le 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 44 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4) + 5 + (4+4) + 6 + (4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + (7+4+4) + 14 + (4+4) + 13 + 4 + 10 + 11 + 4 + 10 + 8 + 8 + 7 = 243$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 14 ปรากฏ 52 หลัก มีอยู่ $\big(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4\big) + \big(5+4+4\big) + \big(6+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + \big(7+4+4\big) + 15 + \big(4+4\big) + 14 + 4 + 11 + 12 + 4 + 11 + 9 + 9 + 8 = 289$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $k = 2t+1$ ที่ $t \in \{5, 6, 7 \ldots\}$ มีอยู่ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + (5+4+4) + (6+4+4) + \underbrace{(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4)}_{2t-7 \text{ ตัว}} + (t+8) + (4+4) + (t+7) + 4 + (t+4) + (t+5) + 4 + (t+4) + (t+2) + (t+2) + (t+1) = 46t - 33 = 23k - 33$ ช่อง □

ทฤษฎีบท 2.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 192, 324, 448, 548$ และ 620 ช่องตามลำดับ และเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 9$ เท่ากับ $92k - 132$ ช่อง

บทพิสูจน์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 9$ สามารถสรุปผลได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K □

บทแทรก 2.4 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105, 1653$ และ 2273 และเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 9$ เท่ากับ $46k^2 - 86k + 17$

บทพิสูจน์ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากส่วนแรกของทฤษฎีบท 2.4 และ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 9$ สามารถสรุปจากส่วนหลังของทฤษฎีบท 2.4 ได้ว่าจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $2273 + \sum_{i=9}^{k}(92i - 132) = 46k^2 - 86k + 17$ ช่อง $\square$

บทที่ 3
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

3.1 ข้อสรุป

โครงงานฉบับนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$ บนกระดานหมากรุกขนานอนันต์ โดยสามารถหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง ดังต่อไปนี้

b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง	สูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง
2	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง $k \geq 1$ เดินได้ $4k$ ช่อง	$2k^2 + 2k + 1$
4 และ 6	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินได้ 8 ช่อง $k = 2$ เดินได้ 32 ช่อง $k = 3$ เดินได้ 68 ช่อง $k = 4$ เดินได้ 96 ช่อง $k \geq 5$ เดินได้ $28k - 20$ ช่อง	$k = 0$ เดินสะสมได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินสะสมได้ 9 ช่อง $k = 2$ เดินสะสมได้ 41 ช่อง $k = 3$ เดินสะสมได้ 109 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 205 ช่อง $k \geq 5$ เดินสะสมได้ $14k^2 - 6k + 5$ ช่อง
8	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินได้ 8 ช่อง $k = 2$ เดินได้ 32 ช่อง $k = 3$ เดินได้ 88 ช่อง $k = 4$ เดินได้ 192 ช่อง $k = 5$ เดินได้ 324 ช่อง $k = 6$ เดินได้ 448 ช่อง $k = 7$ เดินได้ 548 ช่อง $k = 8$ เดินได้ 620 ช่อง $k \geq 9$ เดินได้ $92k - 132$ ช่อง	$k = 0$ เดินสะสมได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินสะสมได้ 9 ช่อง $k = 2$ เดินสะสมได้ 41 ช่อง $k = 3$ เดินสะสมได้ 129 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 333 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 657 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 1105 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 1653 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 2273 ช่อง $k \geq 9$ เดินสะสมได้ $46k^2 - 86k + 17$ ช่อง

3.2 ข้อเสนอแนะ

โครงงานฉบับนี้สามารถศึกษาต่อไปได้ โดยสามารถหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ที่เป็นจำนวนคู่ทั้งหมด หรือ หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ที่เป็นจำนวนคี่ แต่ในกรณีนี้ม้าหมากรุกจะเดินไปได้ทั้งช่องขาวและดำ ซึ่งทำให้การนับจำนวนช่องมีความยุ่งยากมากขึ้น ยิ่งไปกว่านั้นยัง สามารถขยายไปหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ (n, b) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 3$ ได้ แต่ในกรณีดังกล่าวการเดินหนึ่งครั้งของม้าหมากรุกจะออกไปจากจุดเริ่มต้นที่กำหนดไกลมากทำให้ต้องสร้างกระดานหมากรุกขนาดใหญ่ และสูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ได้จะเริ่มหาได้เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากๆ

เอกสารอ้างอิง

[1] Chai, G.L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's tours on rectangular chessboard, Discrete Applied Math, 150, 80-89.

[2] Miller, A.M. and Farnsworth, D.L. (2013). Counting the number of Squares reachable in k knight's move, Open J. of Discreate Math, 3, 151-154.

[3] Theprod, R. Formula for Number of squares Reachable by a Knight [Master Thesis]. Bangkok : Ramkhamhaeng university; (2018).

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ (2, b) สำหรับจำนวนเต็ม $b \geq 2$ บางจำนวน
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	The number of squares reachable in k moves with (2,b)-knight's move for some b
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย เลขประจำตัวนิสิต 5833558523 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในเกมหมากรุก ตัวหมากตัวหนึ่ง คือ ม้า จะมีวิธีการเดินแตกต่างจากตัวหมากตัวอื่นๆ อย่างมาก กล่าวคือ ม้าจะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปหนึ่งช่องแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีกสองช่อง เรียกการเดินแบบนี้ว่าการเดินของม้าแบบปกติ กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน คือ กระดานหมากรุกขนาด 8×8 ประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถว และแปดหลัก โดยแต่ละช่องทาด้วยสีดำหรือสีขาว ต่อมามีการขยายกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานให้เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว และ n หลัก ทาสีแต่ละช่องด้วยสีดำและสีขาวสลับกันไป การเดินของม้าและกระดานหมากรุกสามารถจำลองเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้โดยใช้กราฟด้วยการแทนช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละช่องเป็นจุดยอดของกราฟ และจุดยอดสองจุดจะมีเส้นเชื่อมหรือเรียกว่าประชิดกันถ้าม้าสามารถเดินจากช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่งได้

ในปี ค.ศ. 2003 Chia และคณะได้ปรับเปลี่ยนการเดินของม้าไปเป็น การเดินของม้าแบบ (a, b) นั่นคือ การเดินม้าไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่าการเดินของม้าแบบ (a, b) จะเหมือนกับการเดินของม้าแบบ (b, a) ดังนั้นจึงกำหนดให้ $a < b$ นอกจากนี้ยังได้ด้วยว่าการเดินของม้าแบบปกติ คือ การเดินของม้าแบบ (1, 2) ในปี ค.ศ. 2013 Miller และคณะได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่ m และ n ลู่เข้าสู่อนันต์ หรือที่เรียกว่ากระดานหมากรุกแบบอนันต์ซึ่งมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวนอนและช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวตั้งเป็นจำนวนอนันต์ โดยหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้า

สามารถเดินแบบ (1, 2) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง

ในโครงงานฉบับนี้ขยายแนวคิดของ Miller และคณะ มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน

วัตถุประสงค์

เพื่อหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษากระดานหมากรุกแบบอนันต์ โดยจะพิจารณาเฉพาะการเดินของม้าแบบ (2, b) และจะหาเฉพาะสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาการเดินของม้าแบบปกติบนกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน
2. ศึกษาการเดินของม้าแบบ (2, b) สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน บนกระดานหมากรุกแบบอนันต์
3. หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b)ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน
4. หาสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินการ	เดือน										
	ก.ค	ส.ค	ก.ย	ต.ค	พ.ย	ธ.ค	ม.ค	ก.พ	มี.ค	เม.ย	พ.ค
1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและเสนอหัวข้อโครงงาน											
2. ดำเนินการโครงงาน - ศึกษาการเดินของม้าแบบปกติบนกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน - ศึกษาการเดินของม้าแบบ (2, b) - หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน - หาสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน											
3. เขียนรายงานและนำเสนอโครงงาน											

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, b) ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้นสำหรับจำนวนเต็ม b ≥ 2 บางจำนวน
2. ได้ฝึกฝนการคิด วิเคราะห์ ตั้งคำถาม และขยายปัญหา

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

กระดาษ A4	1000	บาท
ค่าถ่ายเอกสาร	1000	บาท
อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	1500	บาท
อุปกรณ์เครื่องเขียน	500	บาท
ค่าพิมพ์โปสเตอร์และค่าเดินทางไปนำเสนอผลงาน	1000	บาท

เอกสารอ้างอิง

Chai, G.L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's tours on rectangular chessboard, Discrete Applied Math, 150, 80-89.

Miller, A.M. and Farnsworth, D.L. (2013). Counting the number of Squares reachable in k knight's move, Open J. of Discreate Math, 3, 151-154.

ประวัติผู้เขียน

นางสาว อิ่มบุญ เนียมน้อย
ID 583 35585 23
สาขา คณิตศาสตร์
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการ
คอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย