โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ	**การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามและตัวแบบพหุนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์สำหรับราคาออปชัน** The Convergence of Trinomial Model and Multinomial Model for Option Pricing
ชื่อนิสิต	**นายธนาทร อินทรปัญญา 5833522923**
ภาควิชา	**คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์** **สาขาวิชา คณิตศาสตร์**
ปีการศึกษา	**2561**

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามและตัวแบบพหุนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์สำหรับราคาออปชัน

นายธนาทร อินทรปัญญา

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

The Convergence of Trinomial Model and Multinomial Model to Black-Scholes Model for Option Pricing

Mr. Tanatorn Intarapanya

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามและตัวแบบพหุนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์สำหรับราคาออปชัน

โดย นายธนาทร อินทรปัญญา

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

.... กรรมการ

(ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์)

.... กรรมการ

(ผศ. ดร.เอื้อมพร ฟักสุวรรณ)

ธนาทร อินทรปัญญา: การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามและตัวแบบพหุนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์ สำหรับราคาออปชัน. (THE CONVERGENCE OF TRINOMIAL MODEL AND MULTINOMIAL MODEL TO BLACK-SCHOLES MODEL FOR OPTION PRICING) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน: ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี, 43 หน้า.

แบบจำลองที่ได้รับความนิยมในการคำนวณราคาออปชัน คือ แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ และแบบจำลองทวินามซึ่งแบ่งเวลาทั้งหมดออกเป็น n ช่วงเท่ากัน เป็นที่ทราบกันดีว่าสำหรับ n ที่มีค่ามาก ราคาออปชันจากแบบจำลองทวินามจะลู่เข้าสู่ราคาออปชันจากแบบจำลองแบล็ค-โชลส์ ในปี 1986 Boyle ได้นำเสนอแบบจำลองไตรนามสำหรับคำนวณราคาออปชันและในปี 2007 Ahn และ Song ได้พัฒนาแบบจำลองไตรนามโดยประยุกต์อัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็นไปตามแบบจำลองของ Cox, Ross และ Rubinstein (1979)

ในโครงงานนี้ เราได้แสดงว่าราคาออปชันที่คำนวณโดยแบบจำลองไตรนามของ Ahn และ Song จะลู่เข้าสู่แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ด้วยความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าของแบบจำลองทวินาม 2 เท่า นอกจากนี้เรายังใช้แนวคิดของ Ahn และ Song เพื่อสร้างแบบจำลองพหุนามที่ราคาหุ้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ k แบบในแต่ละช่วงเวลาและได้แสดงว่าราคาออปชันที่คำนวณจากแบบจำลองพหุนามนี้จะลู่เข้าสู่แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ด้วยความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าของแบบจำลองทวินาม $k-1$ เท่า

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ธนาทร อินทรปัญญา

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน

ปีการศึกษา 2561

5833522923 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : OPTION PRICING/ BLACK-SCHOLES MODEL/ BINOMIAL MODEL/ TRINOMIAL MODEL/ MULTINOMIAL MODEL/ THE RATE OF CONVERGENCE

TANATORN INTARAPANYA : THE CONVERGENCE OF TRINOMIAL MODEL AND MULTINOMIAL MODEL TO BLACK-SCHOLES MODEL FOR OPTION PRICING. ADVISOR : PROF. KRITSANA NEAMMANEE, Ph.D., 43 pp.

Well-known models for computing an option price are the Black-Scholes model and the Binomial model that is divided into n periods. It is known that for large n, the option price from the Binomial model converges to the option price from the Black-Scholes model. In 1986, Boyle presented the Trinomial model for computing an option price and in 2007, Ahn and Song improved the Trinomial model when the movement rates of stock price are based on the model of Cox, Ross and Rubinstein (1979).

In this project, we show that the option price computed by the Trinomial model of Ahn and Song converges to the option price from the Black-Scholes model with errors that are less than the Binomial model 2 times. In addition, we use the idea of Ahn and Song to create the Multinomial model that stock price moves in k directions each period and we show that the option price computed by this model converges to the option price from the Black-Scholes model with errors that are less than the Binomial model $k-1$ times.

Department :Mathematics and Computer Science...Student's Signature ธนาธร อินทรปัญญา

Field of Study : ....Mathematics............Advisor's Signature Kritsana Neammanee

Academic Year :..................2018....................

กิตติกรรมประกาศ

โครงงาน “การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามและตัวแบบพหุนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์สำหรับราคาออปชัน” ของข้าพเจ้านั้นจะไม่สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีถ้าขาด ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน นายยุทธนา รติเบญญากูล พี่ที่ปรึกษาโครงงาน ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณทั้งสองท่านเป็นอย่างยิ่งที่คอยให้คำปรึกษาและคำแนะนำตลอดช่วงระยะเวลาที่ผ่านมา ทั้งยังสละเวลาส่วนตัวเพื่อให้ความช่วยเหลือ ข้าพเจ้าซาบซึ้งใจเป็นอย่างยิ่ง นอกจากนี้ขอขอบพระคุณคณาจารย์คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนและถ่ายทอดความรู้แก่ข้าพเจ้า รวมทั้งพี่ๆเพื่อนๆที่คอยให้คำแนะนำและกำลังใจ และขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้สนับสนุนเงินทุนแก่ข้าพเจ้าสำหรับการจัดทำโครงงานนี้

สุดท้ายนี้ ข้าพเจ้าหวังว่าโครงงานเรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ไม่มากก็น้อยสำหรับผู้ที่สนใจหรือนำไปศึกษาต่อ หากมีข้อผิดพลาดประการใดต้องกราบขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

ตราสารสิทธิ หรือ **ออปชัน** (option) คือ หนังสือสัญญาระหว่างผู้ซื้อและผู้ขาย มีการกำหนดราคาสินค้า (strike price) ที่จะตกลงซื้อขายเมื่อถึงเวลาที่กำหนด ซึ่งผู้ซื้อสัญญาสามารถเลือกได้ว่าจะใช้สิทธิหรือไม่เมื่อครบกำหนดสัญญา โดยสิทธิแบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ **คอลออปชัน** (call option) คือสิทธิในการซื้อสินค้าอ้างอิงตามที่ได้ตกลงไว้กับผู้ขายสิทธิ และ **พุทออปชัน** (put option) คือสิทธิในการขายสินค้าอ้างอิงตามที่ได้ตกลงกันไว้กับผู้ขายสิทธิ และผู้ที่ซื้อสิทธิไม่ว่าจะเป็นคอลออปชันหรือพุทออปชันจะต้องจ่ายค่า**พรีเมียม** (premium) หรือ ราคาออปชันเพื่อแลกกับสิทธิดังกล่าว

ตัวอย่างเช่น ปัจจุบันสินค้าราคา 100 บาท ถ้านาย ก ซื้อคอลออปชันหรือสิทธิในการซื้อกับนาย ข โดยมีเงื่อนไขว่า ในอีก 1 เดือนข้างหน้า นาย ก จะซื้อสินค้าในราคา 95 บาท และค่าพรีเมียม 5 บาทต่อสัญญา โดยที่ 1 สัญญาสามารถซื้อสินค้าได้ 1 หน่วย สมมติว่านาย ก ซื้อ 100 สัญญา นาย ก จะต้องเสียค่าพรีเมียม 500 บาท เพื่อแลกกับสิทธิดังกล่าว เมื่อครบกำหนดเวลา 1 เดือน นาย ก สามารถเลือกได้ว่าจะใช้สิทธิหรือไม่ ซึ่งขึ้นอยู่กับราคาสินค้า ณ วันใช้สิทธิ ถ้าสินค้า ณ วันใช้สิทธิมีราคา 107 บาท นาย ก จะใช้สิทธิในการซื้อสินค้าในราคา 95 บาท รวมกับค่าพรีเมียม 5 บาท เป็น 100 บาทต่อสัญญา ทำให้ได้กำไร 107-100 = 7 บาทต่อสัญญา รวมเป็นเงินทั้งสิ้น 700 บาท ถ้าราคาสินค้า ณ วันใช้สิทธิมีราคา 93 บาท นาย ก จะเลือกไม่ใช้สิทธิโดยจะจ่ายเฉพาะค่าพรีเมียม นั่นคือขาดทุน 500 บาท จะเห็นได้ว่าการลงทุนในออปชันนั้นสามารถได้กำไรมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับราคาสินค้า ณ วันใช้สิทธิ แต่จะขาดทุนได้มากสุดแค่ค่าพรีเมียม

จากตัวอย่างข้างต้น นาย ก สามารถใช้สิทธิได้เมื่อครบกำหนดอายุสัญญาหรือเมื่อถึงวันที่ใช้สิทธิ เราจะเรียกออปชันลักษณะนี้ว่า ตราสารสิทธิแบบยุโรป (European option) และยังมีตราสารสิทธิแบบอเมริกา (American option) คือ ตราสารที่สามารถใช้สิทธิได้ทุกวันทำการใดๆก่อนหรือภายในวันใช้สิทธิ

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะกำหนดตัวแปรดังต่อไปนี้

S_0 คือ ราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน

T คือ ระยะเวลาครบกำหนดอายุสัญญา

S_T คือ ราคาหุ้น ณ วันใช้สิทธิ

S_t คือ ราคาหุ้น ณ เวลา t เมื่อ $0 \leq t < T$

K คือ ราคาใช้สิทธิ

r คือ อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง

σ คือ ความผันผวน

C_T คือ ราคาคอลออปชัน ณ เวลา T

พิจารณาสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา เมื่อถึงเวลาครบกำหนดใช้สิทธิ T ผู้ถือสัญญาสามารถเลือกใช้สิทธิเมื่อราคาหุ้น ณ วันใช้สิทธิ S_T มีค่ามากกว่าราคาใช้สิทธิ K นั่นคือ $S_T - K > 0$ ดังนั้นมูลค่า C_T ของคอลออปชัน ณ เวลา T มีค่าดังนี้

$$C_T = \begin{cases} S_T - K & ; S_T > K \\ 0 & ; S_T \leq K \end{cases}$$

นั่นคือ

$$C_T = \max\{0, S_T - K\}$$

ส่วนมูลค่าคอลออปชัน ณ เวลาเริ่มต้น C_0 สามารถหาได้จากการคิดลดกระแสเงินสด โดยใช้อัตราดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยง r จะได้

$$C_0 = e^{-rT}\max\{0, S_T - K\}$$

การหาราคาคอลออปชัน (C_0) สามารถหาได้หลายวิธี ซึ่งวิธีที่ได้รับความนิยมมี 2 วิธี

1. การใช้แบบจำลองของแบล็ค-โชลส์
2. การใช้แบบจำลองทวินาม

แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes model) สร้างโดย Black, Scholes และ Merton ในปี 1973 ([2]) โดยแนวคิดของแบบจำลองแบล็ค-โชลส์ เกิดจากแนวคิดที่ว่าราคาหุ้นเป็นกระบวนการสุ่มและราคาของคอลออปชันนั้นขึ้นอยู่กับราคาหุ้นและเวลา ถ้าเรากำหนดให้

$f(S_t, t)$ คือ ราคาคอลออปชัน ณ เวลา t $(0 \leq t \leq T)$ เราจะได้ว่า f สอดคล้องสมการ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t\frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = rf$$

โดยเราจะเรียกสมการข้างต้นว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes differential equation)
จากสมการข้างต้นเมื่อพิจารณาในกรณีของคอลออปชันนั้นมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$f(S_T, T) = \max\{0, S_T - K\}$$

เมื่อเราแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบล็ค-โชลส์ แล้วจะได้ว่าราคาคอลออปชัน $C_{BS}(= f(S_0, 0) = C_0)$ มีค่าเท่ากับ

$$C_{BS} = S_0\phi(c_1) - Ke^{-rT}\phi(c_2)$$

เมื่อ

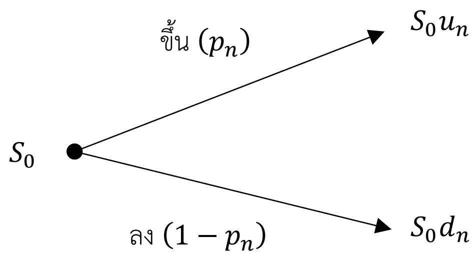
$$c_1 = \frac{log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c_2 = \frac{log(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = c_1 - \sigma\sqrt{T}$$

และ $\phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(สามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [2])

แบบจำลองทวินาม (Binomial model) เป็นแบบจำลองที่ใช้คำนวณราคาคอลออปชันโดยแบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่ากัน และราคาหุ้นมีการเปลี่ยนแปลงใน 1 ช่วงเวลาใดๆได้ 2 แบบ คือหุ้นมีราคาเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา u_n ด้วยความน่าจะเป็น p_n หรือหุ้นมีราคาลดลงด้วยอัตรา d_n ด้วยความน่าจะเป็น $1-p_n$



ภาพที่ 1.1 แผนภาพแบบจำลองทวินาม

และเราจะประมาณราคาคอลออปชัน C_T ณ เวลา T ด้วยค่าคาดการณ์ทางสถิติ

$$E[C_T] = E[\max\{0, S_T - K\}]$$

ทำให้ได้ว่าราคาคอลออปชัน ณ ปัจจุบันคือ

$$B_n = e^{-rT}E[\max\{0, S_T - K\}] \tag{1.1}$$

ซึ่งเกิดจากการนำราคาคาดการณ์ $E[C_T]$ มาคิดลดกระแสเงินสด โดยใช้อัตราดอกเบี้ย r นั่นเอง

จาก (1.1) เราสามารถแสดงได้ว่า

$$B_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}\max\{0, S_0u_n^kd_n^{n-k} - K\} \tag{1.2}$$

แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองที่เข้าใจได้ง่าย ซึ่งถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Cox, Ross และ Rubinstein ([5]) ในปี 1979 โดยมีการกำหนดอัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็น

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \text{ และ } d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

ซึ่ง $u_nd_n = 1$ และความน่าจะเป็นที่หุ้นราคาเพิ่มขึ้น p_n มีค่าดังนี้

$$p_n = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d_n}{u_n - d_n}$$

และจะได้สูตรในการประมาณราคาคอลออปชันดังนี้

$$B_n = S_0\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}q_n^k(1-q_n)^{n-k} - Ke^{-rT}\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} \tag{1.3}$$

เมื่อ $q_n = p_nu_ne^{-r\frac{T}{n}}$ และ $a = \min\{j \in \{0,1,2,\dots,n\} \mid S_0u_n^jd_n^{n-j} > K\}$

ตัวอย่าง 1.1 ปัจจุบันหุ้น SCB มีราคา 150 บาท และมีราคาใช้สิทธิในอีก 3 เดือนข้างหน้าที่ 154 บาท ถ้าดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยงมีอัตรา 6% ต่อปีและราคาหุ้นมีความผันผวน $\sigma = 0.50$ จงหา

1) ราคาคอลออปชันโดยใช้สูตรแบล็ค-โชลส์
2) ราคาคอลออปชันโดยใช้สูตรทวินาม เมื่อ $n = 4$
3) ราคาคอลออปชันโดยใช้สูตรทวินาม เมื่อ $n = 50$

วิธีทำ จากโจทย์ $S_0 = 150, K = 154, T = \frac{1}{4}, r = 0.06$ และ $\sigma = 0.50$

1) เนื่องจาก $c_1 = \frac{log\left(\frac{150}{154}\right)+\left(0.06+\frac{0.5^2}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{0.5\sqrt{\frac{1}{4}}} = 0.0797$ และ $c_2 = d_1 - 0.5\sqrt{\frac{1}{4}} = -0.1703$

จะได้ว่า $\phi(c_1) = 0.5318$ และ $\phi(c_2) = 0.4324$ ดังนั้น

$C_{BS} = 150(0.5318) - 154e^{\frac{-0.06}{4}}(0.4324) = 14.1681$

2) จากโจทย์จะได้ $u_4 = e^{0.50\sqrt{\frac{1}{16}}} = 1.1331,\ d_4 = e^{-0.50\sqrt{\frac{1}{16}}} = 0.8825,$

$$p_4 = \frac{e^{0.06\left(\frac{1}{16}\right)} - 0.8825}{1.1331 - 0.8825} = 0.4839\ , q_4 = (0.4839)(1.1331)e^{-0.06\left(\frac{1}{16}\right)} = 0.5462$$

และ $a = \min\{j \in \{0,1,2,3,4\} \mid 150(1.1331)^j(0.8825)^{4-j} > 154\} = 3$ ดังนั้น

$$B_4 = 150\sum_{k=3}^{4}\binom{4}{k}(0.5462)^k(0.4538)^{4-k} - 154e^{-0.06(\frac{1}{4})}\sum_{k=3}^{4}\binom{4}{k}(0.4839)^k(0.5161)^{4-k}$$

$$= 150\sum_{k=3}^{4}\binom{4}{k}(0.5462)^k(0.4538)^{4-k} - 151.7072\sum_{k=3}^{4}\binom{4}{k}(0.4839)^k(0.5161)^{4-k}$$

$$= 13.9260$$

3) จากโจทย์จะได้ $u_{50} = e^{0.50\sqrt{\frac{1}{200}}} = 1.0360,\ d_{50} = e^{-0.50\sqrt{\frac{1}{200}}} = 0.9653$

$$p_{50} = \frac{e^{0.06\left(\frac{1}{200}\right)} - 0.9653}{1.0360 - 0.9653} = 0.4954\ , q_{50} = (0.4954)(1.0360)e^{-0.06\left(\frac{1}{200}\right)} = 0.5131$$

และ $a = \min\{j \in \{0,1,2,\dots,50\} \mid 150(1.0360)^j(0.9653)^{50-j} > 154\} = 26$ ดังนั้น

$$B_{50} = 150\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{k}(0.5131)^k(0.4869)^{50-k} - 154e^{-0.06(\frac{1}{4})}\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{k}(0.4954)^k(0.5046)^{50-k}$$

$$= 150\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{k}(0.5131)^k(0.4869)^{50-k} - 151.7072\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{k}(0.4954)^k(0.5046)^{50-k}$$

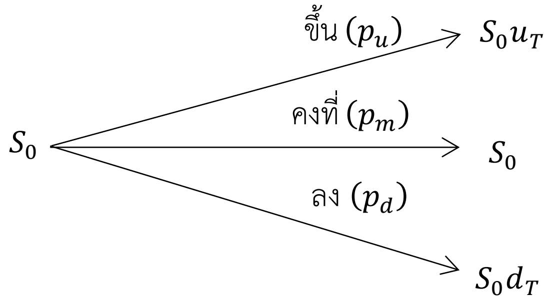
$$= 14.2316$$

(สามารถศึกษาตัวอย่างเกี่ยวกับการเปรียบเทียบแบบจำลองทวินามและแบบจำลองแบล็ค – โชลส์ได้ใน [10])

สังเกตได้ว่าเมื่อ n มีค่ามากๆ จะทำให้ได้ว่า ราคาคอลออปชันที่คำนวณจากแบบจำลองทวินามมีค่าใกล้เคียงราคาคอลออปชันที่คำนวณจากสูตรของแบล็ค-โชลส์ ซึ่งความเป็นจริงนี้เป็นจริงโดยทั่วไป นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} B_n = C_{BS}$ ([5]) มีนักวิจัยหลายคนที่สนใจอัตราการลู่เข้านี้และได้คำนวณหาค่าคงตัวของขอบเขตของอัตราการลู่เข้า โดยสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [4], [6], [7], [9], [11] และ [12]

ต่อมาในปีค.ศ. 1986 Boyle ([3]) ได้นำเสนอ**แบบจำลองไตรนาม (Trinomial model)** ซึ่งแบบจำลองไตรนามเป็นการพิจารณาราคาหุ้นที่ราคาสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ 3 แบบในแต่ละช่วงเวลา นั่นคือ

มีราคาขึ้นด้วยอัตรา u_T ด้วยความน่าจะเป็น p_u
มีราคาลดลงด้วยอัตรา d_T ด้วยความน่าจะเป็น p_d
และมีราคาคงที่ด้วยความน่าจะเป็น p_m

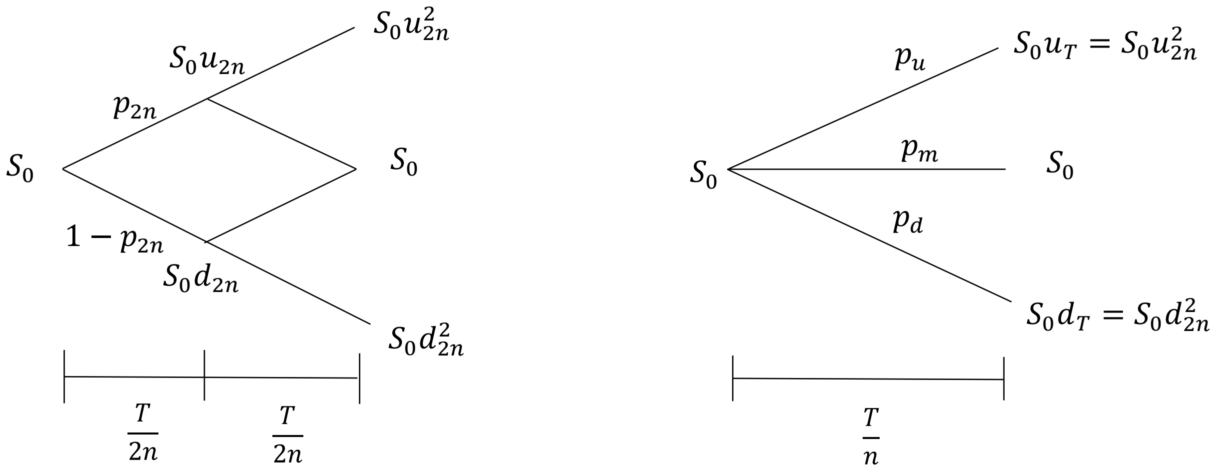


ภาพที่ 1.2 แผนภาพแบบจำลองไตรนาม

ทำนองเดียวกันกับ (1.2) เราสามารถแสดงได้ว่า ราคาคอลออปชัน T_n มีค่าดังนี้

$$T_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\right){p_u}^k{p_d}^l{p_m}^{n-k-l}\max\{0, S_0u_T^kd_T^l - K\} \qquad (1.4)$$

ในปี 2007 Ahn และ Song ([1]) ได้พิจารณาแบบจำลองไตรนามที่แบ่งเป็น n ช่วงเทียบกับแบบจำลองทวินามที่แบ่งเป็น $2n$ ช่วง โดยมีการกำหนดอัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็นไปตามแบบจำลองของ Cox, Ross และ Rubinstein ([5]) เมื่อพิจารณา 2 ช่วงแรกของแบบจำลองทวินามจะได้แผนภาพดังนี้



ภาพที่ 1.3 การเปรียบระหว่างแผนภาพแบบจำลองทวินามและไตรนาม

สังเกตได้ว่าราคาหุ้น ณ ช่วงเวลาที่ 2 ของแบบจำลองทวินามเป็นไปได้ 3 แบบ คือ
$S_0 u_{2n}^2$ ด้วยความน่าจะเป็น p_{2n}^2
S_0 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{2n}(1-p_{2n}) + (1-p_{2n})p_{2n} = 2\,p_{2n}(1-p_{2n})$
$S_0 d_{2n}^2$ ด้วยความน่าจะเป็น $(1-p_{2n})^2$
ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับแบบจำลองไตรนามที่มีอัตราการเคลื่อนที่ของหุ้นดังนี้

$$u_T = u_{2n}^2, 1 = u_{2n} d_{2n},\ d_T = d_{2n}^2 \tag{1.5}$$

และมีความน่าจะเป็น

$$p_u = p_{2n}^2\,, p_m = 2p_{2n}(1-p_{2n}), p_d = (1-p_{2n})^2 \tag{1.6}$$

จาก (1.4), (1.5) และ (1.6) Ahn และ Song ([1]) จึงได้สูตรไตรนามดังต่อไปนี้

$$T_n = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!} \right) {p_{2n}}^{2k} (1-p_{2n})^{2l} (2p_{2n}(1-p_{2n}))^{n-k-l} \max\{0, S_0 u_{2n}^{2k} d_{2n}^{2l} - K\} \tag{1.7}$$

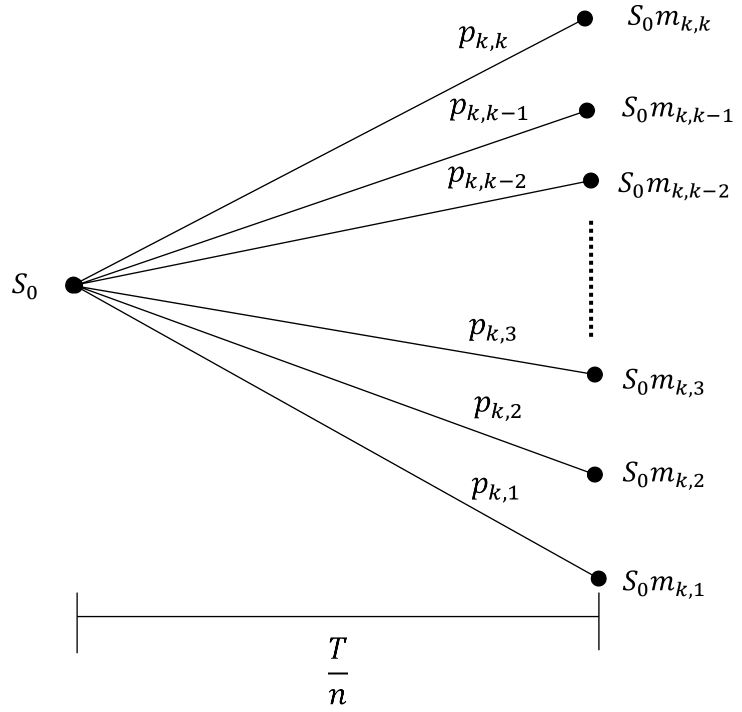
เมื่อพิจารณาแบบจำลองทวินามและแบบจำลองไตรนามในภาพที่ 1.3 เราจะสังเกตได้ว่าแบบจำลองไตรนามที่แบ่ง T เป็น n คาบ ก็คือแบบจำลองทวินามที่แบ่ง T เป็น $2n$ คาบนั่นเอง

จากข้อสังเกตข้างต้น ผู้จัดทำโครงงานจึงมีแนวคิดว่า ราคาคอลออปชันจากสูตรไตรนามควรจะลู่เข้าสู่ค่าที่ได้จากสูตรแบล็ค-โชลส์ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} T_n = C_{BS}$ โดยอัตราการลู่เข้าน่าจะเร็วขึ้นเป็น 2 เท่าด้วย
โดยผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \le \frac{\varepsilon}{n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว

$$|T_n - C_{BS}| \le \frac{\varepsilon}{2n}$$

จากแนวคิดของ Ahn และ Song ([1]) ทำให้ผู้จัดทำมีแนวคิดที่จะขยายแนวคิดจากแบบจำลองไตรนามสู่ **แบบจำลองพหุนาม (Multinomial model)** ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ใช้ในการคำนวณราคาคอลออปชัน โดยที่ราคาหุ้นในแต่ละช่วงเวลาสามารถเปลี่ยนแปลงได้ k แบบ ด้วยอัตรา $m_{k,1}, m_{k,2}, m_{k,3}, \dots, m_{k,k}$ $(k \ge 2)$ ด้วยความน่าจะเป็น $p_{k,1}, p_{k,2}, p_{k,3}, \dots, p_{k,k}$ ตามลำดับ (สามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [8]) และเมื่อพิจารณาช่วงแรกของแบบจำลองพหุนามที่แบ่งช่วงเวลา T เป็น n ช่วงเท่ากัน จะได้แผนภาพต้นไม้ต่อไปนี้



ภาพที่ 1.4 แผนภาพแบบจำลองพหุนาม

ภาพที่ 1.4 เป็นเพียง 1 ช่วงของแบบจำลองพหุนามที่แบ่งเป็น n ช่วง ซึ่งในแต่ละช่วงเวลา ราคาหุ้นก็สามารถเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา $m_{k,1}, m_{k,2}, m_{k,3}, \dots, m_{k,k}$ เช่นกัน

เมื่อพิจารณา ณ เวลา T ซึ่งจะมีทั้งหมด n ช่วง เราจะได้ว่าราคาหุ้นจะมีค่า

$$S_0 m_{k,1}^{j_1} m_{k,2}^{j_2} \dots m_{k,k-1}^{j_{k-1}} m_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} = S_0 \left(\prod_{i=1}^{k-1} m_{k,i}^{j_i} \right) m_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i}$$

เมื่อ $0 \leq j_1, j_2, \dots, j_{k-1} \leq n$ โดยที่ $j_1 + j_2 + \cdots + j_{k-1} \leq n$

ด้วยความน่าจะเป็น

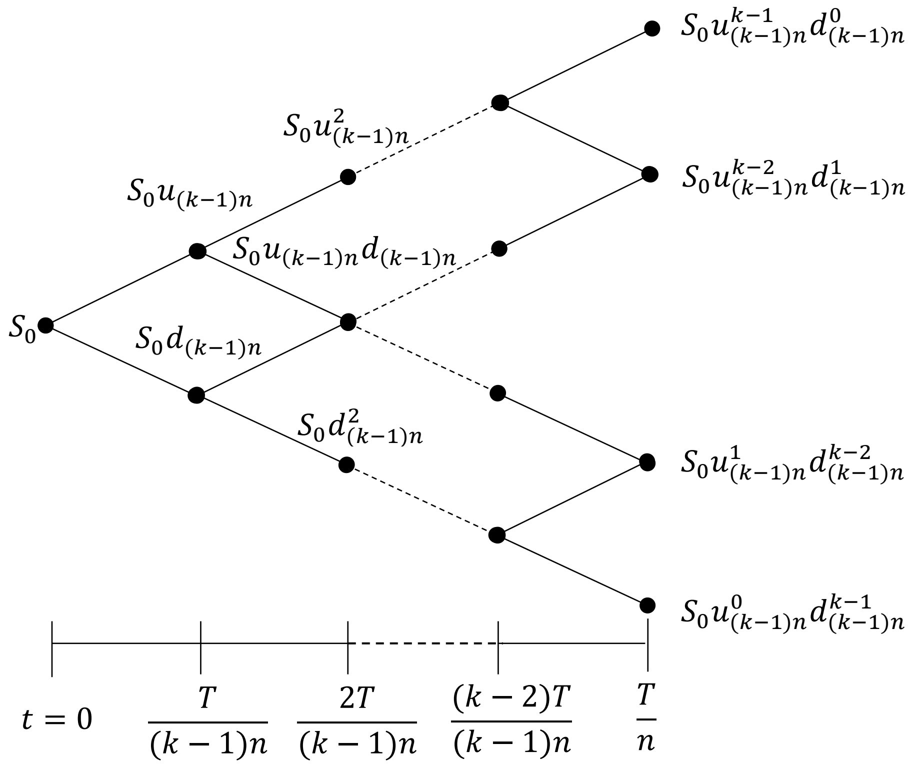
$$\left(\frac{n!}{(j_1)!\,(j_2)! \dots \left(n - \sum_{i=1}^{k-1} j_i\right)!} \right) p_{k,1}^{j_1} p_{k,2}^{j_2} \dots p_{k,k-1}^{j_{k-1}} p_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} = \binom{n}{j_1, j_2, j_3, \dots, j_{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_{k,i}^{j_i} \right) p_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i}$$

เราจะได้สูตรราคาคอลออปชัน ณ ปัจจุบัน $M_{k,n}$ ดังนี้

$$M_{k,n} = e^{-rT} \sum_{j_1=0}^{n} \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \sum_{j_3=0}^{n-j_1-j_2} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n-\sum_{i=1}^{k-2} j_i} \binom{n}{j_1, j_2, j_3, \dots, j_{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_{k,i}^{j_i} \right) p_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} \max\left\{0, S_0 \left(\prod_{i=1}^{k-1} m_{k,i}^{j_i} \right) m_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} - K \right\} \quad (1.8)$$

จะสังเกตได้ว่าเมื่อ $k = 2$ จะได้แบบจำลองทวินาม และเมื่อ $k = 3$ จะได้แบบจำลองไตรนาม

ถ้าเรานำแนวคิดเรื่องอัตราขึ้นและลงของ Ahn และ Song ([1]) มาประยุกต์โดยเปรียบเทียบกับแผนภาพของแบบจำลองทวินามที่แบ่งเป็น $(k-1)n$ ช่วงกับแบบจำลองพหุนามที่เปลี่ยนแปลงได้ k แบบซึ่งแบ่งเป็น n ช่วง เมื่อพิจารณา $k-1$ ช่วงแรกของแบบจำลองทวินาม จะได้แผนภาพดังนี้



ภาพที่ 1.5 แผนภาพแบบจำลองทวินาม $(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\boldsymbol{n}$ ช่วง

สังเกตได้ว่าราคาหุ้น ณ ช่วงเวลาที่ $k-1$ ของแบบจำลองทวินามเป็นไปได้ k แบบ คือ

$S_0u_{(k-1)n}^{0}d_{(k-1)n}^{k-1}$ ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{k-1}{0}p_{(k-1)n}^{0}(1-p_{(k-1)n})^{k-1}$

$S_0u_{(k-1)n}^{1}d_{(k-1)n}^{k-2}$ ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{k-1}{1}p_{(k-1)n}^{1}(1-p_{(k-1)n})^{k-2}$

$\vdots$

$S_0u_{(k-1)n}^{k-2}d_{(k-1)n}^{1}$ ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{k-1}{k-2}p_{(k-1)n}^{k-2}(1-p_{(k-1)n})^{1}$

$S_0u_{(k-1)n}^{k-1}d_{(k-1)n}^{0}$ ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{k-1}{k-1}p_{(k-1)n}^{k-1}(1-p_{(k-1)n})^{0}$

เราจึงกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้น $m_{k,1},\dots,m_{k,k}$ และความน่าจะเป็น $p_{k,1},\dots,p_{k,k}$ ดังนี้

$$m_{k,1}=u_{(k-1)n}^{0}d_{(k-1)n}^{k-1}$$

$$m_{k,2}=u_{(k-1)n}^{1}d_{(k-1)n}^{k-2}$$

$$m_{k,3}=u_{(k-1)n}^{2}d_{(k-1)n}^{k-3}$$

$$\vdots$$

$$m_{k,k}=u_{(k-1)n}^{k-1}d_{(k-1)n}^{0}$$

และ

$$p_{k,1} = \binom{k-1}{0} p_{(k-1)n}^{0} (1 - p_{(k-1)n})^{k-1}$$

$$p_{k,2} = \binom{k-1}{1} p_{(k-1)n}^{1} (1 - p_{(k-1)n})^{k-2}$$

$$p_{k,3} = \binom{k-1}{2} p_{(k-1)n}^{2} (1 - p_{(k-1)n})^{k-3}$$

$$\vdots$$

$$p_{k,k} = \binom{k-1}{k-1} p_{(k-1)n}^{k-1} \left(1 - p_{(k-1)n}\right)^{0}$$

นั่นคือ สำหรับ $1 \leq i \leq k$ จะได้ว่า

$$m_{k,i} = u_{(k-1)n}^{i-1} d_{(k-1)n}^{k-i}$$

และ

$$p_{k,i} = \binom{k-1}{i-1} p_{(k-1)n}^{i-1} \left(1 - p_{(k-1)n}\right)^{k-i}$$

เมื่อพิจารณาแบบจำลองพหุนามที่แบ่งช่วง T ออกเป็น 1 ช่วง $(n = 1)$ จากภาพที่ 1.4 และประมาณราคาคอลออปชัน ณ เวลา T ด้วยค่าคาดการณ์ทางสถิติ จากนั้นทำการคิดลดกระแสเงินสดด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง r จะได้ราคาคอลออปชัน ณ ปัจจุบัน คือ

$$\begin{aligned}
M_{k,1} &= e^{-rT}\left[p_{k,1} \max\{0, S_0 m_{k,1} - K\} + p_{k,2} \max\{0, S_0 m_{k,2} - K\} + \cdots + p_{k,k} \max\{0, S_0 m_{k,k} - K\}\right] \\
&= e^{-rT}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} \max\{0, S_0 m_{k,i} - K\}\right] \\
&= e^{-rT}\left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p_{(k-1)}^{i-1} \left(1 - p_{(k-1)}\right)^{k-i} \max\{0, S_0 u_{(k-1)}^{i-1} d_{(k-1)}^{k-i} - K\}\right] \\
&= e^{-rT}\left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} p_{(k-1)}^{i} \left(1 - p_{(k-1)}\right)^{(k-1)-i} \max\{0, S_0 u_{(k-1)}^{i} d_{(k-1)}^{(k-1)-i} - K\}\right] \\
&= B_{k-1} \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

ผู้จัดทำโครงงานจึงมีแนวคิดว่า ราคาคอลออปชันจากสูตร $M_{k,n}$ ควรจะลู่เข้าสู่ค่าที่ได้จากสูตรแบล็ค-โชลส์ โดยอัตราการลู่เข้าน่าจะเร็วขึ้นเป็น $k - 1$ เท่าของแบบสูตร B_n โดยผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่าทุกจำนวนนับ $k \geq 2$

$$\left|M_{k,n} - C_{BS}\right| \leq \frac{\varepsilon}{(k-1)n}$$

บทที่ 2

การประมาณค่าแบบจำลองไตรนามด้วยแบบจำลองแบล็ค-โชลส์

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการลู่เข้าสู่สูตรแบล็ค-โชลส์ของแบบจำลองไตรนามพร้อมทั้งเศษของการประมาณค่า โดยกำหนดตัวแปรต่างๆดังต่อไปนี้

S_0 คือ ราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน
S_T คือ ราคาหุ้น ณ วันใช้สิทธิ
K คือ ราคาใช้สิทธิ
r คือ อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง
T คือ ระยะเวลาครบกำหนดอายุสัญญา
σ คือ ความผันผวน

ในโครงงานนี้จะใช้อัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นแบบ Cox, Ross และ Rubinstein โดยกำหนดให้

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \text{ และ } p_n = \frac{e^{\frac{rT}{n}}-d_n}{u_n-d_n}$$

ในการประมาณราคาคอลออปชันที่แบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่าๆกันนั้น เราจะได้ว่าสูตรแบบจำลองทวินามและไตรนาม เป็นไปดังต่อไปนี้

สูตรของแบบจำลองทวินามคือ

$$B_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\max\{0, S_0u_n^kd_n^{n-k}-K\} \tag{2.1}$$

และสูตรของแบบจำลองไตรนามคือ

$$T_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n}{k,l}p_{2n}^{2k}(1-p_{2n})^{2l}(2p_{2n}(1-p_{2n}))^{n-k-l}\max\{0, S_0u_{2n}^{2k}d_{2n}^{2l}-K\} \tag{2.2}$$

โดยสูตรจากแบบจำลองทั้ง 2 สูตร จะลู่เข้าสู่ราคาจากสูตรของแบล็ค-โชลส์ต่อไปนี้เมื่อ $n \to \infty$

สูตรของแบบจำลองแบล็ค-โชลส์คือ

$$C_{BS} = S_0\phi(c_1) - Ke^{-rT}\phi(c_2)$$

เมื่อ

$$c_1 = \frac{log(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c_2 = \frac{log(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = c_1 - \sigma\sqrt{T}$$

และ $\phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

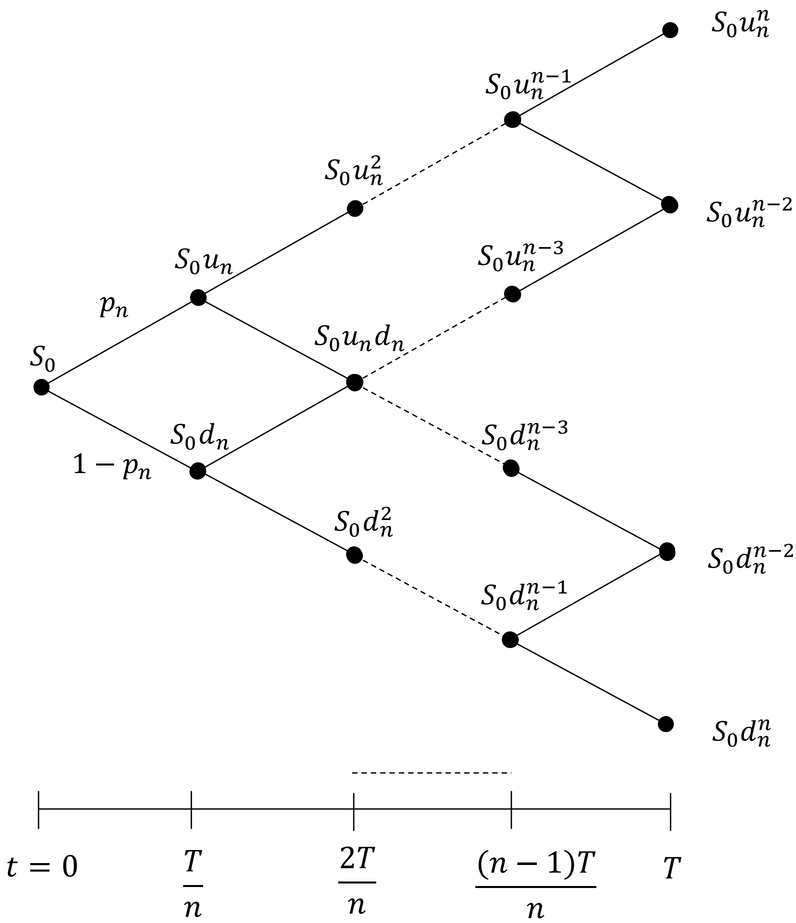
ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงว่าอัตราการลู่เข้าของสูตรของแบบจำลองไตรนามสู่สูตรของแบบจำลองแบล็ค-โชลส์นั้นมีความเร็วเป็น 2 เท่าของการลู่เข้าของสูตรทวินามสู่ราคาคอลออปชันที่ได้จากสูตรของแบล็ค-โชลส์

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว

$$|T_n - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 จะใช้ความจริงที่ว่า ราคาคอลออปชันของแบบจำลองไตรนามที่แบ่งเป็น n ช่วงจะมีค่าเท่ากับราคาคอลออปชันของแบบจำลองทวินามที่แบ่งเป็น $2n$ ช่วง โดยใช้ทฤษฎีประกอบที่ 1 และ 2 ช่วยในการพิสูจน์

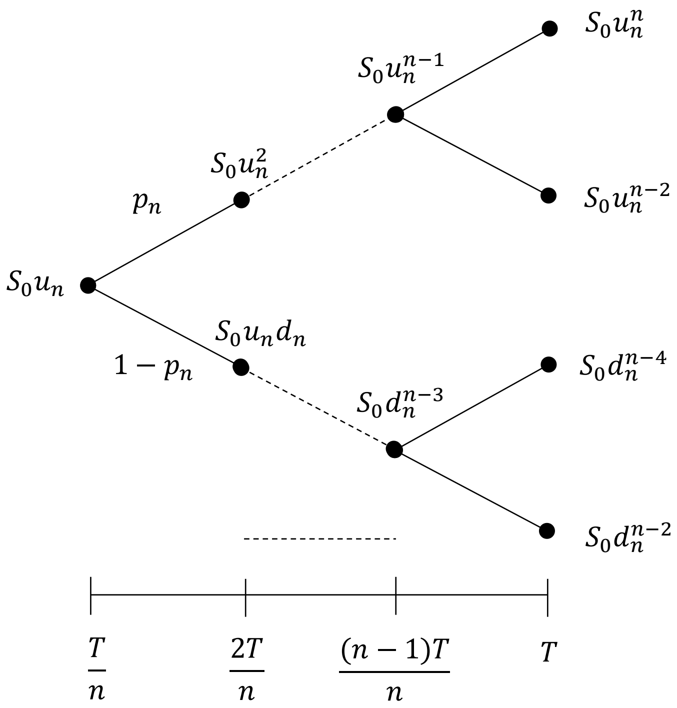
ต่อไปนี้เป็นการอธิบายสูตรทวินามที่ใช้ในทฤษฎีประกอบที่ 1



ภาพที่ 2.1 แผนภาพแบบจำลองทวินาม n ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น S_0

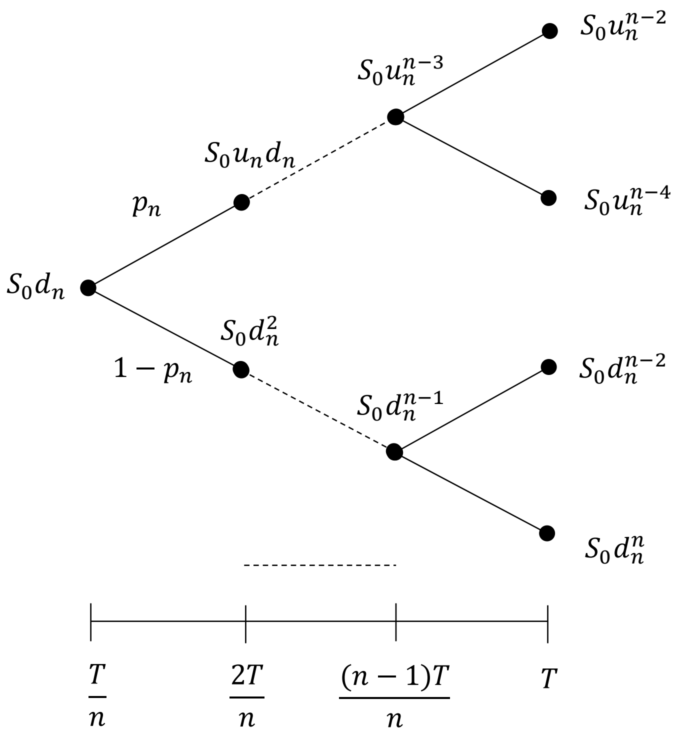
ภาพที่ 2.1 เป็นแผนภาพของแบบจำลองทวินามเมื่อแบ่งช่วงเวลา T เป็น n ช่วง ๆละ $\frac{T}{n}$ โดยมีราคาเริ่มต้นที่ S_0

ถ้าพิจารณาช่วงเวลา $\left[\frac{T}{n}, T\right]$ จากภาพที่ 2.1 จะได้แบบจำลองทวินามซึ่งมีแผนภาพดังนี้



ภาพที่ 2.2 (ก) แผนภาพแบบจำลองทวินาม $n-1$ ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น S_0u_n

และ



ภาพที่ 2.2 (ข) แผนภาพแบบจำลองทวินาม $n-1$ ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น S_0d_n

จากภาพที่ 2.2 (ก) และ 2.2 (ข) เป็นการพิจารณาราคาคอลออปชันของสูตรทวินามที่มีราคาเริ่มต้นที่ S_0u_n และ S_0d_n บนช่วงเวลา $\frac{(n-1)T}{n}$ โดยแบ่งเป็น $n-1$ ช่วง ๆละ $\frac{T}{n}$ มีราคาคอลออปชันคือ

$$B_{n,n-1}^{u_n} = e^{-\frac{r(n-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p_n^k(1-p_n)^{(n-1)-k}\max\left\{0,(S_0u_n)u_n^kd_n^{(n-1)-k}-K\right\}$$

และ

$$B_{n,n-1}^{d_n} = e^{-\frac{r(n-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p_n^k(1-p_n)^{(n-1)-k}\max\left\{0,(S_0d_n)u_n^kd_n^{(n-1)-k}-K\right\}$$

ตามลำดับ

ในการพิจารณาราคาคอลออปชันที่มีราคาเริ่มต้นที่ S_0 ซึ่งมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา T โดยแบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่ากัน สำหรับจำนวนเต็ม m ซึ่ง $0 \le m \le n$ และจำนวนจริง $x > 0$ เรากำหนดให้ $B_{n,m}^x$ คือ ราคาคอลออปชันที่คำนวณได้จากสูตรทวินามโดยมีราคาเริ่มต้นที่ S_0x และมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา $\frac{mT}{n}$ ซึ่งแบ่งเป็น m ช่วงเท่ากัน $\left(\text{ช่วงละ } \frac{T}{n}\right)$ ดังนั้น

$$B_{n,m}^x = e^{-\frac{rmT}{n}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}p_n^k(1-p_n)^{m-k}\max\{0,(S_0x)u_n^kd_n^{m-k}-K\} \qquad (2.3)$$

เนื่องจาก $B_n = B_{n,n}^1$ และจากแผนภาพในภาพที่ 2.1, 2.2 (ก) และ 2.2 (ข) จะได้ว่า

$$B_n = B_{n,n}^1 = e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_nB_{n,n-1}^{u_n} + (1-p_n)B_{n,n-1}^{d_n}\right] \qquad (2.4)$$

ซึ่งข้อสังเกตนี้เป็นจริงโดยทั่วไปดังทฤษฎีประกอบที่ 1 ต่อไปนี้

ทฤษฎีประกอบที่ 1 สำหรับ $x > 0$ และ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \le n$ จะได้ว่า

$$B_{n,m}^x = e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_nB_{n,m-1}^{xu_n} + (1-p_n)B_{n,m-1}^{xd_n}\right]$$

พิสูจน์

จาก (2.3) จะได้ว่า

$$B_{n,m-1}^{xu_n} = e^{-\frac{r(m-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}p_n^k(1-p_n)^{m-1-k}\max\{0,(S_0xu_n)u_n^kd_n^{m-1-k}-K\}$$

$$B_{n,m-1}^{xd_n} = e^{-\frac{r(m-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}p_n^k(1-p_n)^{m-1-k}\max\{0,(S_0xd_n)u_n^kd_n^{m-1-k}-K\}$$

และความจริงที่ว่า

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!\,(m-1-k)!}$$

$$= \frac{k(m-1)!}{k!\,(m-k)!} + \frac{(m-k)(m-1)!}{k!\,(m-k)!}$$

$$= \frac{k(m-1)! + (m-k)(m-1)!}{k!\,(m-k)!}$$

$$= \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

$$= \binom{m}{k} \text{ ทุก } m \in \mathbb{N} \text{ และ } 1 \le k \le m-1 \qquad (2.5)$$

ดังนั้น

$B_{n,m}^{x}$

$$= e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p_n^k (1-p_n)^{m-k} \max\{0, (S_0x)u_n^k d_n^{m-k} - K\}$$

$$= e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m}{0} p_n^0 (1-p_n)^{m-0} \max\left\{0, (S_0x)u_n^0 d_n^{m-0} - K\right\} +$$

$$e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=1}^{m-1} \left[\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\right] p_n^k (1-p_n)^{m-k} \max\left\{0, (S_0x)u_n^k d_n^{m-k} - K\right\} +$$

$$e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m}{m} p_n^m (1-p_n)^0 \max\left\{0, (S_0x)u_n^m d_n^0 - K\right\}$$

$$= e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m}{0} p_n^0 (1-p_n)^{m-0} \max\left\{0, (S_0x)u_n^0 d_{2n}^{m-0} - K\right\} +$$

$$\left[e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} p_n^k (1-p_n)^{m-k} \max\left\{0, (S_0x)u_n^k d_n^{m-k} - K\right\}\right] +$$

$$\left[e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} p_n^k (1-p_n)^{m-k} \max\left\{0, (S_0x)u_n^k d_n^{m-k} - K\right\}\right] +$$

$$e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m}{m} p_n^m (1-p_n)^0 \max\left\{0, (S_0x)u_n^m d_n^0 - K\right\}$$

$$= e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m-1}{0} p_n^0 (1-p_n)^{m-0} \max\left\{0, (S_0x)u_n^0 d_n^{m-0} - K\right\} +$$

$$\left[e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} p_n^{k+1} (1-p_n)^{m-k-1} \max\left\{0, (S_0x)u_n^{k+1} d_n^{m-k-1} - K\right\}\right] +$$

$$\left[e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} p_n^k (1-p_n)^{m-k} \max\left\{0, (S_0x)u_n^k d_n^{m-k} - K\right\}\right] +$$

$$e^{-\frac{rmT}{n}} \binom{m-1}{m-1} p_n^{m-1+1} (1-p_n)^{m-(m-1)-1} \max\left\{0, (S_0x)u_n^{m-1+1} d_n^{m-(m-1)-1} - K\right\}$$

$$= e^{-\frac{rT}{n}}\left[e^{-\frac{r(m-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}p_n^{k+1}(1-p_n)^{m-k-1}\max\left\{0,(S_0xu_n)u_n^kd_n^{m-k-1}-K\right\}\right]+$$

$$e^{-\frac{rT}{n}}\left[e^{-\frac{r(m-1)T}{n}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}p_n^{k}(1-p_n)^{m-k}\max\left\{0,(S_0xd_n)u_n^kd_n^{m-k-1}-K\right\}\right]$$

$$= e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_nB_{n,m-1}^{xu_n}+(1-p_n)B_{n,m-1}^{xd_n}\right] \qquad \square$$

ทฤษฎีประกอบที่ 2 สำหรับ $x > 0$ และ $n, m, s \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $0 \le m - s \le n$ จะได้ว่า

$$B_{n,m}^{x} = e^{-\frac{srT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}p_n^i(1-p_n)^{s-i}B_{n,m-s}^{xu_n^id_n^{s-i}}\right]$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $x > 0$ และ $n, m, s \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $0 \le m - s \le n$

$$P(s):\ \ B_{n,m}^{x} = e^{-\frac{srT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}p_n^i(1-p_n)^{s-i}B_{n,m-s}^{xu_n^id_n^{s-i}}\right]$$

เราจะพิสูจน์ว่า $P(s)$ จริง โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน s

โดยทฤษฎีประกอบที่ 1 จะได้ว่า

$$B_{n,m}^{x} = e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_n^1B_{n,m-1}^{xu_n^1}+(1-p_n)^1B_{n,m-1}^{xd_n^1}\right]$$

$$= e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}p_n^i(1-p_n)^{1-i}B_{n,m-1}^{xu_n^id_n^{1-i}}\right]$$

ดังนั้น $P(s)$ เป็นจริงเมื่อ $s = 1$

สมมติให้ $P(s)$ เป็นจริงเมื่อ $s = j - 1$ ดังนั้น

$$B_{n,m}^{x} = e^{-\frac{(j-1)rT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^i(1-p_n)^{j-1-i}B_{n,m-(j-1)}^{xu_n^id_n^{j-1-i}}\right] \qquad (2.6)$$

เมื่อพิจารณา (2.6) โดยทฤษฎีประกอบที่ 1 จะได้ว่า

$B_{n,m}^{x}$

$$= e^{-\frac{(j-1)rT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^i(1-p_n)^{j-1-i}e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_nB_{n,m-j}^{xu_n^{i+1}d_n^{j-1-i}}+(1-p_n)B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}\right]\right]$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^{i+1}(1-p_n)^{j-1-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i+1}d_n^{j-1-i}}+\ \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}\right]$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j-1}{i}p_n^{i+1}(1-p_n)^{j-1-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i+1}d_n^{j-1-i}}+\binom{j-1}{j-1}p_n^{j}(1-p_n)^{0}B_{n,m-j}^{xu_n^{j}d_n^{0}}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}+\binom{j-1}{0}p_n^{0}(1-p_n)^{j}B_{n,m-j}^{xu_n^{0}d_n^{j}}\right]$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j-1}{i-1}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}+\binom{j}{j}p_n^{j}(1-p_n)^{0}B_{n,m-j}^{xu_n^{j}d_n^{0}}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j-1}{i}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}+\binom{j}{0}p_n^{0}(1-p_n)^{j}B_{n,m-j}^{xu_n^{0}d_n^{j}}\right]$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{j-1}\left[\binom{j-1}{i-1}+\binom{j-1}{i}\right]p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}+\binom{j}{j}p_n^{j}(1-p_n)^{0}B_{n,m-j}^{xu_n^{j}d_n^{0}}\right.$$

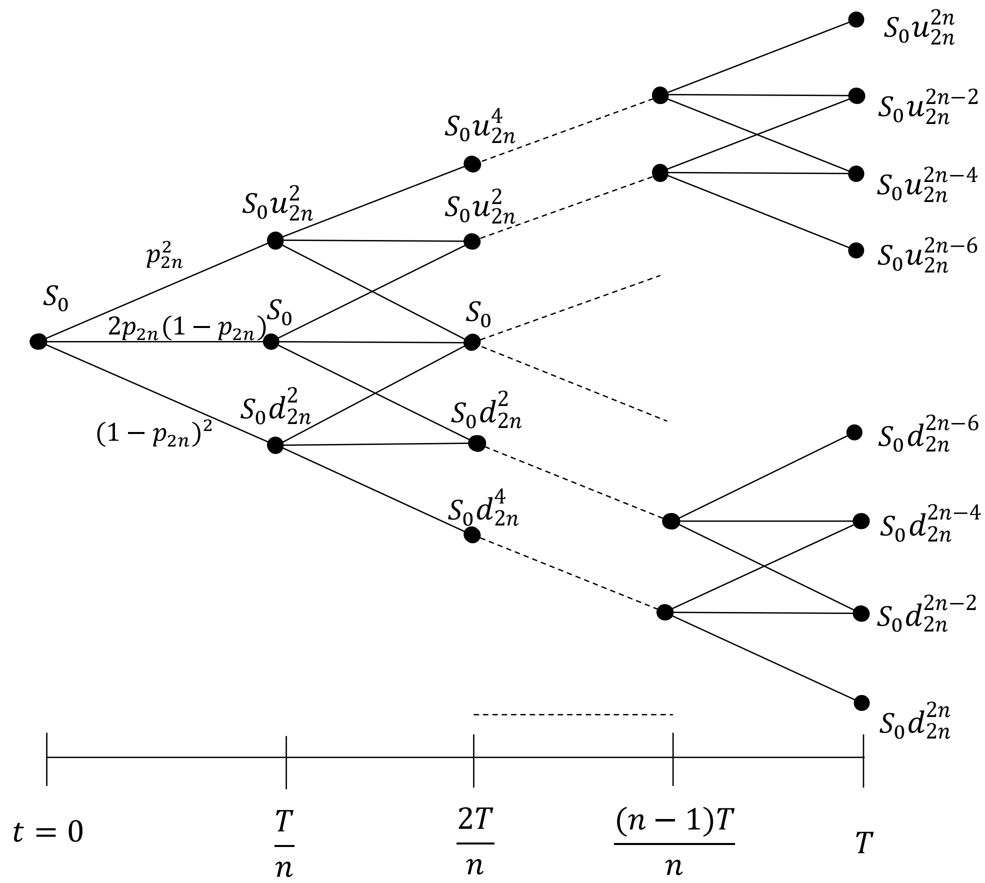
$$\left.+\binom{j}{0}p_n^{0}(1-p_n)^{j}B_{n,m-j}^{xu_n^{0}d_n^{j}}\right]\text{(จาก (2.5))}$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j}{i}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}+\binom{j}{j}p_n^{j}(1-p_n)^{0}B_{n,m-j}^{xu_n^{j}d_n^{0}}+\binom{j}{0}p_n^{0}(1-p_n)^{j}B_{n,m-j}^{xu_n^{0}d_n^{j}}\right]$$

$$= e^{-\frac{jrT}{n}}\left[\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}p_n^{i}(1-p_n)^{j-i}B_{n,m-j}^{xu_n^{i}d_n^{j-i}}\right]$$

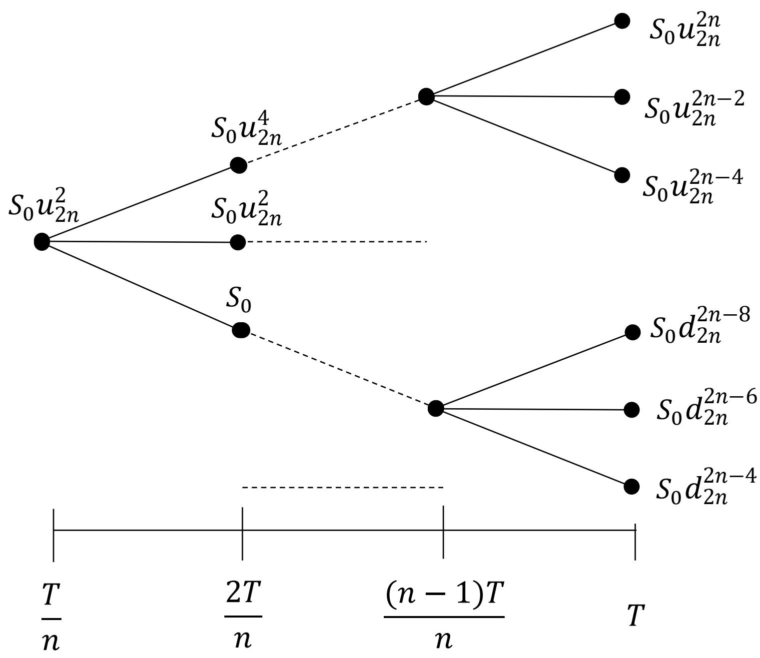
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(s)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ s ใดๆ □

ในทำนองเดียวกับแผนภาพของแบบจำลองทวินาม แผนภาพต่อไปนี้เป็นการอธิบายสูตรไตรนามที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.1

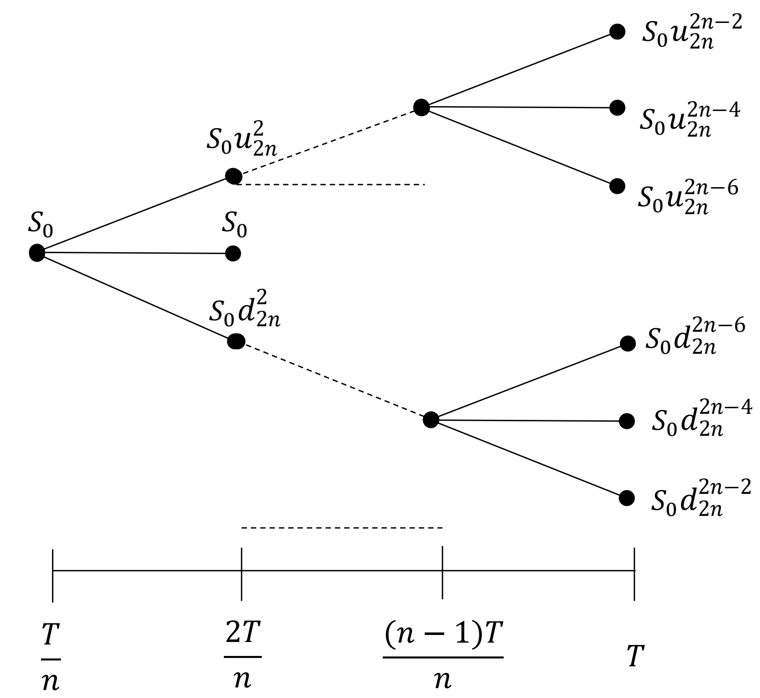


ภาพที่ 2.3 แผนภาพแบบจำลองไตรนาม n ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น S_0

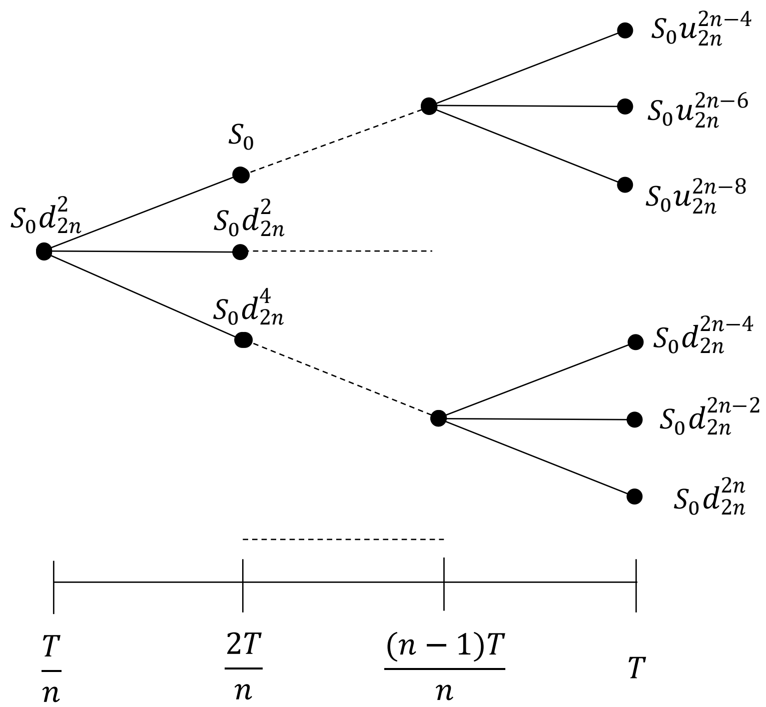
ภาพที่ 2.3 เป็นแผนภาพของแบบจำลองไตรนามเมื่อแบ่งช่วงเวลา T เป็น n ช่วง ๆละ $\frac{T}{n}$ โดยมีราคาเริ่มต้นที่ S_0 ถ้าพิจารณาช่วงเวลา $\left[\frac{T}{n}, T\right]$ จากภาพที่ 2.3 จะได้แบบจำลองไตรนามซึ่งมีแผนภาพดังนี้



ภาพที่ 2.4 (ก) แผนภาพแบบจำลองไตรนาม $n-1$ ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น $S_0u_n^2$



ภาพที่ 2.4 (ข) แผนภาพแบบจำลองไตรนาม $n-1$ ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น S_0



ภาพที่ 2.4 (ค) แผนภาพแบบจำลองไตรนาม $n-1$ ช่วง โดยมีราคาเริ่มต้น $S_0d_n^2$

จากภาพที่ 2.4 (ก), 2.4 (ข) และ 2.4 (ค) เป็นการพิจารณาราคาคอลออปชันของสูตรไตรนามที่มีราคาเริ่มต้นที่ $S_0u_{2n}^2, S_0$ และ $S_0d_{2n}^2$ บนช่วงเวลา $\frac{(n-1)T}{n}$ โดยแบ่งเป็น $n-1$ ช่วง ๆละ $\frac{T}{n}$ มีราคาคอลออปชันคือ

$$T_{n,n-1}^{u_{2n}^2} = e^{-\frac{r(n-1)T}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \binom{n-1}{k,l} p_{2n}^{2k}\left(1-p_{2n}\right)^{2l} \left(2p_{2n}\left(1-p_{2n}\right)\right)^{n-1-k-l} \max\{0, (S_0u_{2n}^2)u_{2n}^{2k}d_{2n}^{2l} - K\}$$

$$T_{n,n-1}^{1} = e^{-\frac{r(n-1)T}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \binom{n-1}{k,l} p_{2n}^{2k}\left(1-p_{2n}\right)^{2l} \left(2p_{2n}\left(1-p_{2n}\right)\right)^{n-1-k-l} \max\{0, (S_0)u_{2n}^{2k}d_{2n}^{2l} - K\}$$

และ

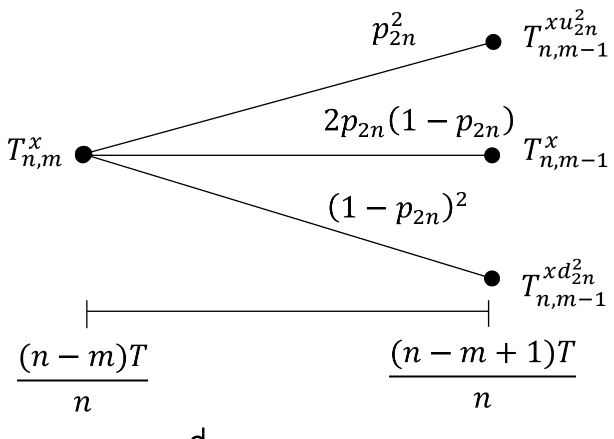
$$T_{n,n-1}^{d_{2n}^2} = e^{-\frac{r(n-1)T}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} \binom{n-1}{k,l} p_{2n}^{2k}\left(1-p_{2n}\right)^{2l} \left(2p_{2n}\left(1-p_{2n}\right)\right)^{n-1-k-l} \max\{0, (S_0d_{2n}^2)u_{2n}^{2k}d_{2n}^{2l} - K\}$$

ตามลำดับ

ในการพิจารณาราคาคอลออปชันที่มีราคาเริ่มต้นที่ S_0 ซึ่งมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา T โดยแบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่ากัน สำหรับจำนวนเต็ม m ซึ่ง $0 \leq m \leq n$ และจำนวนจริง $x > 0$ เรากำหนดให้ $T_{n,m}^x$ คือ ราคาคอลออปชันที่คำนวณได้จากสูตรไตรนามโดยมีราคาเริ่มต้นที่ S_0x และมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา $\frac{mT}{n}$ ซึ่งแบ่งเป็น m ช่วงเท่ากัน ดังนั้น

$$T_{n,m}^x = e^{-\frac{rmT}{n}} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m}{k,l} p_{2n}^{2k}\left(1-p_{2n}\right)^{2l} \left(2p_{2n}\left(1-p_{2n}\right)\right)^{m-k-l} \max\{0, (S_0x)u_{2n}^{2k}d_{2n}^{2l} - K\} \tag{2.7}$$

และสำหรับ $1 \leq m \leq n$ สามารถอธิบายได้โดยใช้แผนภาพต้นไม้ต่อไปนี้



ภาพที่ 2.5 แผนภาพของ $T_{n,m}^x$

จากภาพที่ 2.5 จะเห็นว่า

ราคาคาดการณ์ของคอลออปชัน ณ เวลา $\frac{(n-m+1)T}{n}$ มีค่าเป็น

$$p_{2n}^2 T_{n,m-1}^{xu_{2n}^2} + 2p_{2n}(1-p_{2n})T_{n,m-1}^{x} + (1-p_{2n})^2 T_{n,m-1}^{xd_{2n}^2}$$

เมื่อนำราคาคาดการณ์ ณ เวลา $\frac{(n-m+1)T}{n}$ มาคิดลดกระแสเงินสดโดยใช้อัตราดอกเบี้ย r จะได้ว่า

$$T_{n,m}^{x} = e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_{2n}^2 T_{n,m-1}^{xu_{2n}^2} + 2p_{2n}(1-p_{2n})T_{n,m-1}^{x} + (1-p_{2n})^2 T_{n,m-1}^{xd_{2n}^2}\right] \qquad (2.8)$$

พิสูจน์ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้ $x > 0$ และ $n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $m \leq n$

$$P(m) : \ T_{n,m}^{x} = B_{2n,2m}^{x}$$

เราจะแสดงว่า $T_{n,m}^{x} = B_{2n,2m}^{x}$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน m

จาก (2.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&T_{n,1}^{x}\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_{2n}^2 T_{n,0}^{xu_{2n}^2} + 2p_{2n}(1-p_{2n})T_{n,0}^{x} + (1-p_{2n})^2 T_{n,0}^{xd_{2n}^2}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}[p_{2n}^2 \max\{0, S_0 x u_{2n} - K\} + 2p_{2n}(1-p_{2n}) \max\{0, S_0 x - K\}\\
&\quad +(1-p_{2n})^2 \max\{0, S_0 x d_{2n} - K\}]\\
&= e^{-\frac{r2T}{2n}}\left[\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i} p_{2n}^{i}(1-p_{2n})^{2-i}\max\{0, (S_0 x)u_{2n}^{i} d_{2n}^{2-i} - K\}\right]\\
&= B_{2n,2}^{x}
\end{aligned}$$

สมมติให้ $P(m)$ เป็นจริงสำหรับ $m = j-1$ นั่นคือ

$$T_{n,j-1}^{x} = B_{2n,2j-2}^{x} \qquad (2.9)$$

เมื่อพิจารณา $B_{2n,2j}^{x}$ โดยใช้ทฤษฎีประกอบที่ 2, (2.8) และ (2.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
B_{2n,2j}^{x} &= e^{-\frac{2rT}{2n}}\left[\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i} p_{2n}^{i}(1-p_{2n})^{2-i} B_{2n,2j-2}^{xu_{2n}^{i} d_{2n}^{2-i}}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[(1-p_{2n})^2 B_{2n,2j-2}^{xd_{2n}^2} + 2p_{2n}(1-p_{2n}) B_{2n,2j-2}^{xu_{2n}d_{2n}} + p_{2n}^2 B_{2n,2j-2}^{xu_{2n}^2}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[(1-p_{2n})^2 T_{n,j-1}^{xd_{2n}^2} + 2p_{2n}(1-p_{2n}) T_{n,j-1}^{xu_{2n}d_{2n}} + p_{2n}^2 T_{n,j-1}^{xu_{2n}^2}\right]\\
&= T_{n,j}^{x}
\end{aligned}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$T_{n,m}^{x} = B_{2n,2m}^{x}$$

สำหรับ $x > 0$ และ $n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $m \leq n$

ดังนั้น

$$T_n = T_{n,n}^1 = B_{2n,2n}^1 = B_{2n}$$

จาก $T_n = B_{2n}$ จะได้ว่า ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$ แล้ว

$$|T_n - C_{BS}| = |B_{2n} - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{2n} \qquad \square$$

บทที่ 3

การประมาณค่าแบบจำลองพหุนามด้วยแบบจำลองแบล็ค-โชลส์

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการลู่เข้าสู่สูตรแบล็ค-โชลส์ของแบบจำลองพหุนาม ซึ่งใช้แนวคิดเดียวกับทฤษฎีหลักในบทที่ 2 โดยใช้สูตรในการคำนวณราคาคอลออปชันของแบบจำลองพหุนาม ดังนี้

สูตรของแบบจำลองพหุนามคือ

$$M_{k,n} = e^{-rT} \sum_{j_1=0}^{n} \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \sum_{j_3=0}^{n-j_1-j_2} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n-\sum_{i=1}^{k-2} j_i} \binom{n}{j_1, j_2, j_3, \dots, j_{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_{k,i}^{j_i} \right) p_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i}$$
$$\times \max\left\{0, S_0 \left(\prod_{i=1}^{k-1} m_{k,i}^{j_i} \right) m_{k,k}^{n-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} - K \right\} \qquad (3.1)$$

โดยกำหนดให้

$$u_{(k-1)n} = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{(k-1)n}}} \text{ และ } d_{(k-1)n} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{(k-1)n}}}$$

และสำหรับ $1 \leq i \leq k$

$$m_{k,i} = u_{(k-1)n}^{i-1} d_{(k-1)n}^{k-i}$$

และ

$$p_{k,i} = \binom{k-1}{i-1} p_{(k-1)n}^{i-1} \left(1 - p_{(k-1)n}\right)^{k-i}$$

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่าทุกจำนวนนับ $k \geq 2$

$$|M_{k,n} - C_{BS}| \leq \frac{\varepsilon}{(k-1)n}$$

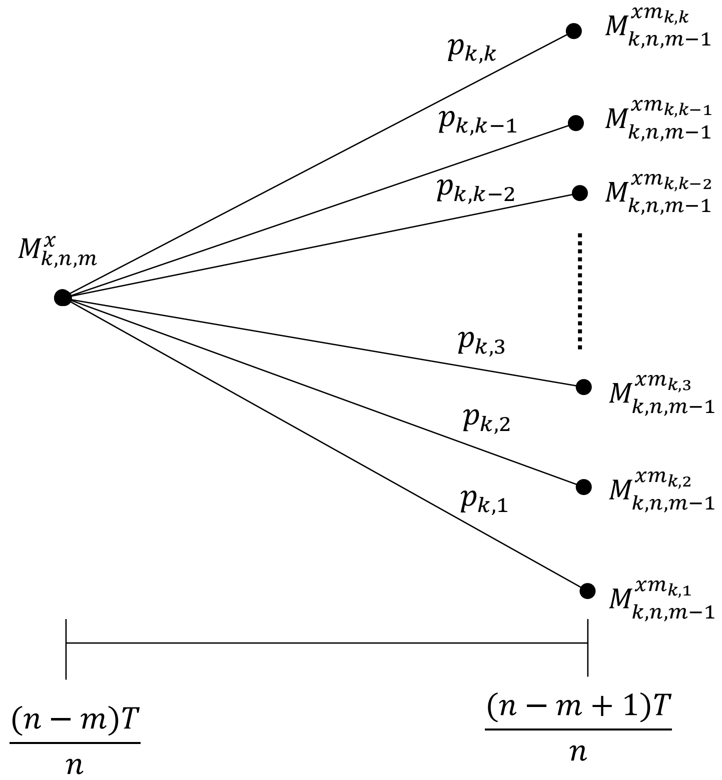
ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2 จะใช้ความจริงที่ว่า ราคาคอลออปชันของแบบจำลองพหุนาม $M_{k,n}$ ที่แบ่งเป็น n ช่วง จะมีค่าเท่ากับราคาคอลออปชันของแบบจำลองทวินามที่แบ่งเป็น $(k-1)n$ ช่วง โดยใช้ทฤษฎีประกอบที่ 2 ช่วยในการพิสูจน์

พิจารณาราคาคอลออปชันที่มีราคาเริ่มต้นที่ S_0 ซึ่งมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา T โดยแบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่ากัน สำหรับจำนวนเต็ม m ซึ่ง $0 \leq m \leq n$ และจำนวนจริง $x > 0$ เรากำหนดให้ $M_{k,n,m}^{x}$ คือราคาคอลออปชันที่คำนวณได้จากสูตรของแบบจำลองพหุนามที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงได้ k แบบในแต่ละช่วงเวลาโดยมีราคาเริ่มต้นที่ $S_0 x$ และมีระยะเวลาครบกำหนดสัญญา $\frac{mT}{n}$ ซึ่งแบ่งเป็น m ช่วงเท่ากัน ดังนั้น

สำหรับ $x > 0,\ k, n \in \mathbb{N}$ และ $m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq m \leq n$ และ $k \geq 2$ จะได้ว่า

$$M_{k,n,m} = e^{\frac{-rmT}{n}} \sum_{j_1=0}^{m} \sum_{j_2=0}^{m-j_1} \sum_{j_3=0}^{m-j_1-j_2} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{m-\sum_{i=1}^{k-2} j_i} \binom{m}{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_{k,i}^{j_i} \right) p_{k,k}^{m-\sum_{i=1}^{k-1} j_i}$$
$$\times \max\left\{0, S_0 x \left(\prod_{i=1}^{k-1} m_{k,i}^{j_i} \right) m_{k,k}^{m-\sum_{i=1}^{k-1} j_i} - K \right\} \qquad (3.2)$$

และสำหรับ $1 \leq m \leq n$ สามารถอธิบายได้โดยใช้แผนภาพต้นไม้ต่อไปนี้



ภาพที่ 3.1 แผนภาพของ $M_{k,n,m}^{x}$

จากภาพที่ 3.1 จะเห็นว่า

ราคาคาดการณ์ของคอลออปชัน ณ เวลา $\frac{(n-m+1)T}{n}$ มีค่าเป็น $\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} M_{k,n,m-1}^{m_{k,i}}$

เมื่อนำราคาคาดการณ์ ณ เวลา $\frac{(n-m+1)T}{n}$ มาคิดลดกระแสเงินสดโดยใช้อัตราดอกเบี้ย r จะได้ว่า

$$M_{k,n,m}^{x} = e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} M_{k,n,m-1}^{x m_{k,i}}\right] \tag{3.3}$$

พิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2

กำหนดให้ $x > 0$ และ $k, n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $m \leq n$ และ $k \geq 2$

$$P(m):\ M_{k,n,m}^{x} = B_{(k-1)n,(k-1)m}^{x}$$

เราจะแสดงว่า $M_{k,n,m}^{x} = B_{(k-1)n,(k-1)m}^{x}$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน m

จาก (2.3), (3.2) และ (3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&M_{k,n,1}^{x}\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} M_{k,n,0}^{x m_{k,i}}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[p_{k,1}\max\{0,(S_0x)m_{k,1}-K\} + p_{k,2}\max\{0,(S_0x)m_{k,2}-K\} + \cdots\right.\\
&\quad \left.+p_{k,k}\max\{0,(S_0x)m_{k,k}-K\}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i}\max\{0,(S_0x)m_{k,i}-K\}\right]\\
&= e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1} p_{(k-1)n}^{i-1}\left(1-p_{(k-1)n}\right)^{k-i}\max\{0,(S_0x)u_{(k-1)n}^{i-1}d_{(k-1)n}^{k-i}-K\}\right]\\
&= e^{-\frac{r(k-1)T}{(k-1)n}}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} p_{(k-1)n}^{i}\left(1-p_{(k-1)n}\right)^{(k-1)-i}\max\{0,(S_0x)u_{(k-1)n}^{i}d_{(k-1)n}^{(k-1)-i}-K\}\right]\\
&= B_{(k-1)n,(k-1)}^{x}
\end{aligned}$$

สมมติให้ $P(m)$ เป็นจริงสำหรับ $m = j-1$ นั่นคือ

$$M_{k,n,j-1}^{x} = B_{(k-1)n,(k-1)(j-1)}^{x} \tag{3.4}$$

เมื่อพิจารณา $B_{(k-1)n,(k-1)j}^{x}$ โดยใช้ทฤษฎีประกอบที่ 2, (3.3) และ (3.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&B_{(k-1)n,(k-1)j}^{x}\\
&= e^{-\frac{(k-1)rT}{(k-1)n}}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} p_{(k-1)n}^{i}\left(1-p_{(k-1)n}\right)^{k-1-i} B_{(k-1)n,(k-1)j-(k-1)}^{x u_{(k-1)n}^{i} d_{(k-1)n}^{k-1-i}}\right]\\
&= e^{-\frac{(k-1)rT}{(k-1)n}}\left[\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1} p_{(k-1)n}^{i-1}\left(1-p_{(k-1)n}\right)^{k-i} B_{(k-1)n,(k-1)j-(k-1)}^{x u_{(k-1)n}^{i-1} d_{(k-1)n}^{k-i}}\right]
\end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{(k-1)rT}{(k-1)n}}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} B_{(k-1)n,(k-1)(j-1)}^{xm_{k,i}}\right]$$

$$= e^{-\frac{rT}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k} p_{k,i} M_{k,n,j-1}^{xm_{k,i}}\right]$$

$$= M_{k,n,j}^{x}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$M_{k,n,m}^{x} = B_{(k-1)n,(k-1)m}^{x}$$

สำหรับ $x > 0$ และ $k, n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $m \leq n$ และ $k \geq 2$

ดังนั้น

$$M_{k,n} = M_{k,n,n}^{1} = B_{(k-1)n,(k-1)n}^{1} = B_{(k-1)n}$$

จาก $M_{k,n} = B_{(k-1)n}$ จะได้ว่า ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $|B_n - C_{BS}| \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$ แล้ว

$$\left|M_{k,n} - C_{BS}\right| = \left|B_{(k-1)n} - C_{BS}\right| \leq \frac{\varepsilon}{(k-1)n} \qquad \square$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Ahn, J., and Song, M. Convergence of the Trinomial Tree Method for Pricing European/American Options. Applied Mathematics and Computation 189 (June 2007): 575-582.

[2] Black, F., and Scholes, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy 81, No. 3 (May-June 1973): 637-654.

[3] Bolye, P.P. A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. Journal of Financial and Quantitative Analysis 23, No. 1 (March 1988): 1-12.

[4] Chang, LB., and Palmer, K. Smooth convergence in the binomial model. Finance and Stochastics 11 (January 2007): 91–105.

[5] Cox, J., Ross, S.A., and Rubinstein, M. Option pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7 (September 1979): 229-263.

[6] Diener, F., and Diener, M. Asymptotics of the price oscillations of a European call option in a tree model. Mathematical Finance 14, No. 2 (April 2004): 271–293.

[7] Heston, S., and Zhou, G. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims. Mathematical Finance 10, No. 1 (January 2000): 53-75.

[8] Kamrad, B., and Ritchken, P. Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. Management Science 37, No. 12 (December 1991): 1640-1652.

[9] Leisen, D.P.J., and Reimer, M. Binomial models for option valuation–examining and improving convergence, Applied Mathematical Finance 3 (1996): 319-346.

[10] Puspita, E., Agustina, F., and Sispiyati, R. Convergence Numerically of Trinomial Model in European Option Pricing. International Research Journal of Business Studies 6 (2013-2014): 195-201.

[11] Ratibenyakool, Y. Rate of Convergence of Binomial Formula for Option Pricing. Master's Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, 2017.

[12] Walsh, J.B. The rate of convergence of the binomial tree scheme. Finance and Stochastics 7 (July 2003): 337–361.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การลู่เข้าของตัวแบบไตรนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์สำหรับราคาออปชัน
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	The Convergence of Trinomial Model to Black-Scholes Model for Option Pricing
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผู้ดำเนินการ	ธนาทร อินทรปัญญา เลขประจำตัวนิสิต 5833522923 สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ตราสารสิทธิ หรือ **ออปชัน** (option) คือ หนังสือสัญญาระหว่างผู้ซื้อและผู้ขาย มีการกำหนดราคาสินค้า (strike price) ที่จะตกลงซื้อขายเมื่อถึงเวลาที่กำหนด ซึ่งผู้ซื้อสัญญาสามารถเลือกได้ว่าจะใช้สิทธิหรือไม่เมื่อครบกำหนดสัญญา โดยสิทธิแบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ **คอลออปชัน** (call option) คือสิทธิในการซื้อสินค้าอ้างอิงตามที่ได้ตกลงไว้กับผู้ขายสิทธิ และ **พุทออปชัน** (put option) คือสิทธิในการขายสินค้าอ้างอิงตามที่ได้ตกลงกันไว้กับผู้ขายสิทธิ และผู้ที่ซื้อสิทธิไม่ว่าจะเป็นคอลออปชันหรือพุทออปชันจะต้องจ่ายค่า**พรีเมียม** หรือ **ราคาออปชัน** เพื่อแลกกับสิทธิดังกล่าว

ออปชันแบ่งตามการใช้สิทธิโดยลักษณะที่สามารถใช้สิทธิได้เมื่อครบกำหนดอายุสัญญาหรือเมื่อถึงวันที่ใช้สิทธิ เราจะเรียกออปชันลักษณะนี้ว่า **ตราสารสิทธิแบบยุโรป** (European option) และยังมีตราสารสิทธิแบบอเมริกา (American option) คือ ตราสารที่สามารถใช้สิทธิได้ทุกวันทำการใดๆก่อนหรือภายในวันใช้สิทธิ
เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะกำหนดตัวแปรดังต่อไปนี้

S_0	คือ ราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน
S_T	คือ ราคาหุ้น ณ วันใช้สิทธิ
S_t	คือ ราคาหุ้น ณ เวลา t เมื่อ $0 \leq t < T$
K	คือ ราคาใช้สิทธิ
C_T	คือ มูลค่าคอลออปชัน ณ เวลา T
r	คือ อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง
T	คือ ระยะเวลาครบกำหนดอายุสัญญา
σ	คือ ความผันผวน

พิจารณาสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา เมื่อถึงเวลาครบกำหนดใช้สิทธิ T ผู้ถือสัญญาสามารถเลือกใช้สิทธิเมื่อราคาหุ้น ณ วันใช้สิทธิ S_T มีค่ามากกว่าราคาใช้สิทธิ K นั่นคือ $S_T - K > 0$ ดังนั้นมูลค่า C_T ของคอลออปชัน ณ เวลา T มีค่าดังนี้

$$C_T = \begin{cases} S_T - K \; ; S_T > K \\ 0 \qquad\;\; ; S_T \leq K \end{cases}$$

นั่นคือ

$$C_T = \max\{0, S_T - K\}$$

ส่วนมูลค่าคอลออปชัน ณ ปัจจุบัน C_0 สามารถหาได้จากการคิดลดกระแสเงินสด โดยใช้อัตราดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยง r จะได้

$$C_0 = e^{-rT}\max\{0, S_T - K\}$$

การหาราคาคอลออปชัน ณ ปัจจุบัน (C_0) สามารถหาได้หลายวิธี ซึ่งวิธีที่ได้รับความนิยมมี 2 วิธี

1. การใช้แบบจำลองของแบล็ค-โชลส์
2. การใช้แบบจำลองทวินาม

แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes model) สร้างโดย Fischer Black, Myron Scholes และ Robert Merton ในปี 1973 ([2]) โดยแนวคิดของแบบจำลองแบล็ค-โชลส์เกิดจากแนวคิดที่ว่าราคาหุ้นเป็นกระบวนการสุ่มและราคาของคอลออปชันนั้นขึ้นอยู่กับราคาหุ้นและเวลา ถ้าเรากำหนดให้

$f(S_t, t)$ คือ ราคาคอลออปชัน ณ เวลา t $(0 \leq t \leq T)$ เราจะได้ว่า f สอดคล้องสมการ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t\frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = rf$$

โดยเราจะเรียกสมการข้างต้นว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes differential equation) จากสมการข้างต้นเมื่อพิจารณาในกรณีของคอลออปชันนั้นมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$f(S_T, T) \; = \; max(0, S_T - K)$$

เมื่อเราแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบล็ค-โชลส์ แล้วจะได้ว่าราคาออปชัน ณ ปัจจุบัน $C_{BS}(= f(S_0, 0) = C_0)$ มีค่าเท่ากับ

$$C_{BS} = S_0\phi(c_1) - Ke^{-rT}\phi(c_2)$$

เมื่อ

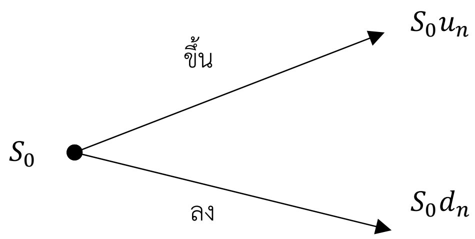
$$c_1 = \frac{log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c_2 = \frac{log(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = c_1 - \sigma\sqrt{T}$$

และ $\phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

สามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [2]

แบบจำลองทวินาม (Binomial model) เป็นแบบจำลองที่ใช้คำนวณราคาออปชันโดยแบ่งช่วงเวลา T ออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน และราคาหุ้นมีการเปลี่ยนแปลงใน 1 ช่วงเวลาใดๆได้ 2 แบบ คือหุ้นมีราคาเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา u_n ด้วยความน่าจะเป็น p_n หรือหุ้นมีราคาลดลงด้วยอัตรา d_n ด้วยความน่าจะเป็น $1 - p_n$



รูปที่ 1

และเราจะประมาณราคาคอลออปชัน C_T ณ เวลา T ด้วยค่าคาดการณ์ทางสถิติ

$$E[C_T] = E[\max\{0, S_T - K\}]$$

ทำให้ได้ว่าราคาคอลออปชัน B_n ณ ปัจจุบันคือ

$$B_n = e^{-rT}E[\max\{0, S_T - K\}] \tag{1}$$

ซึ่งเกิดจากการนำราคาคาดการณ์ $E[C_T]$ มาคิดลดกระแสเงินสด โดยใช้อัตราดอกเบี้ย r นั่นเอง
จาก (1) เราสามารถแสดงได้ว่า

$$B_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{p_n}^k(1 - p_n)^{n-k}\max\{0, S_0u_n^kd_n^{n-k} - K\} \tag{2}$$

แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองที่เข้าใจได้ง่าย ถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Cox, Ross และ Rubinstein ในปี 1979 ([4]) โดยมีการกำหนดอัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็น $u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ และ $d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ ซึ่งทำให้ความน่าจะเป็นที่หุ้นราคาเพิ่มขึ้น $p_n = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d_n}{u_n - d_n}$ และจะได้สูตรในการประมาณราคาคอลออปชันดังนี้

$$B_n = S_0\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}q_n^k(1 - q_n)^{n-k} - Ke^{-rT}\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}p_n^k(1 - p_n)^{n-k} \tag{3}$$

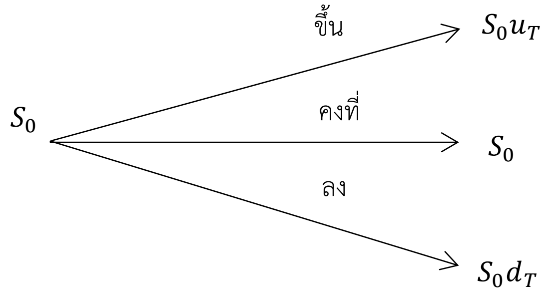
เมื่อ $q_n = p_nu_ne^{-r\frac{T}{n}}$ และ $a = \min\{j \in \{0,1,2,\dots,n\} | S_0u^jd^{n-j} > K\}$

ต่อมาในปีค.ศ. 1986 Phelim P. Boyle ([3]) ได้นำเสนอ**แบบจำลองไตรนาม (Trinomial model)** ซึ่งแบบจำลองไตรนามเป็นการพิจารณาราคาหุ้นที่ราคาสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ 3 แบบในแต่ละช่วงเวลา นั่นคือ

มีราคาขึ้นด้วยอัตรา u_T ด้วยความน่าจะเป็น p_u

มีราคาลดลงด้วยอัตรา d_T ด้วยความน่าจะเป็น p_d

และมีราคาคงที่ด้วยความน่าจะเป็น p_m

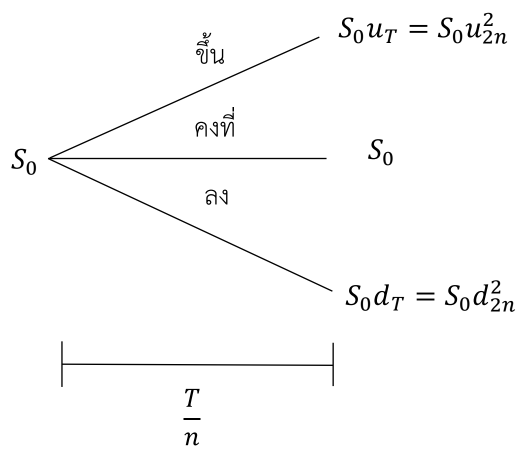


รูปที่ 2

ทำนองเดียวกันกับ (2) เราสามารถแสดงได้ว่า ราคาคอลลออปชัน T_n มีค่าดังนี้

$$T_n = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\right){p_u}^k{p_d}^l{p_m}^{n-k-l}\max\{0, S_0u_T^kd_T^l - K\} \qquad (4)$$

ในปี 2007 Jaemin Ahn และ Minsu Song ได้ประยุกต์แนวคิดของ Cox, Ross และ Rubinstein ([1]) โดยกำหนดให้ $p_u = p_{2n}^2$, $p_m = 2p_{2n}(1-p_{2n}), p_d = (1-p_{2n})^2, u_T = u_{2n}^2$ และ $d_T = d_{2n}^2$ จะได้แผนภาพดังนี้

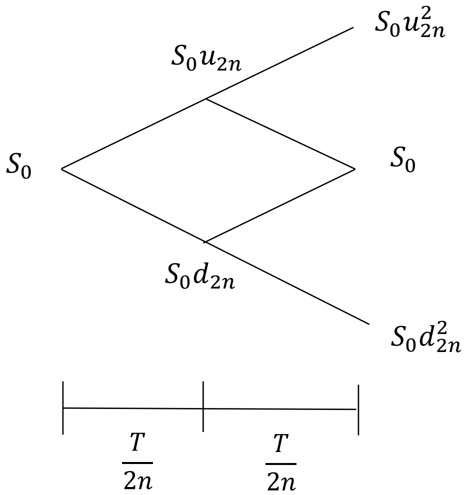


รูปที่ 3

จาก (4) เราจะได้ว่า

$$T_n = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\right) {p_{2n}}^{2k} (1-p_{2n})^{2l} (2p_{2n}(1-p_{2n}))^{n-k-l} \max\{0, S_0 u_{2n}^{2k} d_{2n}^{2l} - K\} \tag{5}$$

เราจะสังเกตได้ว่า ถ้าเราใช้แบบจำลองทวินามที่แบ่ง T เป็น $2n$ คาบ
จะได้แผนภาพดังนี้



รูปที่ 4

เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 3 และรูปที่ 4 เราจะเห็นว่าแบบจำลองไตรนามที่แบ่ง T เป็น n คาบ ก็คือแบบจำลองทวินามที่แบ่ง T เป็น $2n$ คาบนั่นเอง

วัตถุประสงค์

จากข้อสังเกตว่า $T_n = B_{2n}$ ผู้จัดทำโครงงานจึงมีแนวคิดว่า ราคาคอลออปชันจากสูตรไตรนาม (T_n) ควรจะลู่เข้าค่าที่ได้จากสูตรแบล็ค-โชลส์ (C_{BS}) นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} T_n = C_{BS}$ โดยอัตราการลู่เข้าน่าจะเร็วขึ้นเป็น 2 เท่าของราคาคอลออปชันจากสูตรทวินาม (B_n) ดังนั้น โครงงานนี้จึงมีวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} T_n = C_{BS}$
2. แสดงว่าขอบเขตของการลู่เข้าของ T_n จะน้อยกว่าขอบเขตการลู่เข้าของ B_n 2 เท่า

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาการลู่เข้าของราคาคอลออปชันจากตัวแบบทวินามและไตรนามสู่ราคาออปชันที่ได้จากตัวแบบแบล็ค-โชลส์ โดยกำหนดอัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็นไปตามแบบจำลองของ Cox, Ross และ Rubinstein ดังนี้

$u_n = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ และ $d_n = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$ สำหรับแบบจำลองทวินามและ
$u_T = u_{2n}^2$ และ $d_T = d_{2n}^2$ สำหรับแบบจำลองไตรนาม

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. คำนวณค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของแบบจำลองทวินามสู่แบบจำลองแบล็ค-โชลส์
4. คำนวณค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของแบบจำลองไตรนามสู่แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ โดยคาดว่า ค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของตัวแบบทวินามจะเป็น 2 เท่าของค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของตัวแบบไตรนาม
5. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน
6. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	**สิงหาคม 2561 - เมษายน 2562**								
	ส.ค.	**ก.ย.**	**ต.ค.**	**พ.ย.**	**ธ.ค.**	**ม.ค.**	**ก.พ.**	**มี.ค.**	**เม.ย.**
1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง									
3. แสดงว่าราคาออปชันจากแบบจำลองไตรนามจะลู่เข้าสู่แบบจำลองแบล็ค-โชลส์ โดยคาดว่าค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของตัวแบบทวินามจะเป็น 2 เท่าของค่าคงตัวของขอบเขตการลู่เข้าของตัวแบบไตรนาม									
4. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน									
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับอัตราการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นแบบ Cox, Ross และ Rubinstein นั้น เราจะทราบว่าขอบเขตการลู่เข้าของตัวแบบไตรนามสู่ตัวแบบแบล็ค-โชลส์นั้นจะเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของตัวแบบทวินาม ดังนั้นการประมาณค่าราคาคอลออปชันด้วยตัวแบบไตรนามจะลู่เข้าสู่ค่าที่ได้จากตัวแบบแบล็ค-โชลส์เร็วกว่าการประมาณราคาด้วยตัวแบบทวินาม 2 เท่า

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word, Mathlabs และ Mathematica
4. วารสารและหนังสือที่เกี่ยวข้อง

งบประมาณ

รายการ	ราคาต่อหน่วย(บาท)	จำนวน	จำนวนเงิน(บาท)
1. กระดาษ A4 80 แกรม (รีม)	120	5	600
2. ค่าถ่ายเอกสารและจัดทำรูปเล่ม	250	4	1000
3. ค่าวารสารและหนังสือที่เกี่ยวข้อง	2400	1	2400
4. ค่าพิมพ์โปสเตอร์และค่าเดินทางไปนำเสนอผลงาน	1000	1	1000
รวม			5000

ประวัติผู้เขียน

นายธนาทร อินทรปัญญา

เลขประจำตัวนิสิต 5833522923

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย