บทที่ 4

ทฤษฎีฟัซซี่เซต

เนื้อหาในบทนี้จะเกี่ยวข้องกับทฤษฎีฟัซซี่เซต ซึ่งเป็นทฤษฎีที่นำมาใช้ในงานวิจัยร่วมกับเจนเนติกอัลกอริทึม เนื่องจากข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยมีลักษณะที่เป็นฟัซซี่ โดยเนื้อหาจะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของฟัซซี่เซต นิยามและคุณสมบัติเบื้องต้น ประกอบด้วย ตัวดำเนินการของฟัซซี่เซต และการสร้างฟังก์ชันการเป็นสมาชิก การแปลงผลลัพธ์ที่มีค่าฟัซซี่กลับเป็นค่าที่แน่นอน และส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการนำเอาหลักการฟัซซี่ในการแก้ปัญหาประเภทที่ต้องการคำตอบที่ดีที่สุด (Optimization Problem)

4.1 ความเป็นมาและความสำคัญของฟัซซี่เซต

ปัญหาที่เกิดขึ้นในความเป็นจริง มักมีลักษณะที่ยุ่งยากซับซ้อน เนื่องจากข้อมูลมีความคลุมเครือ ไม่ชัดเจน หรือไม่มีค่าที่แน่นอน ดังนั้นในการแก้ปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้ จำเป็นต้องมีการพัฒนาวิธีการให้เหมาะสมกับความซับซ้อนของปัญหา สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนน้อย วิธีที่เหมาะสม คือ Mathematical Equation ปัญหาที่มีความซับซ้อนปานกลาง ควรใช้วิธี Model Free Methods เช่น Artificial Neural Networks และสำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนมาก วิธีการที่เหมาะสมคือ Fuzzy System (Timothy J Ross,1995)

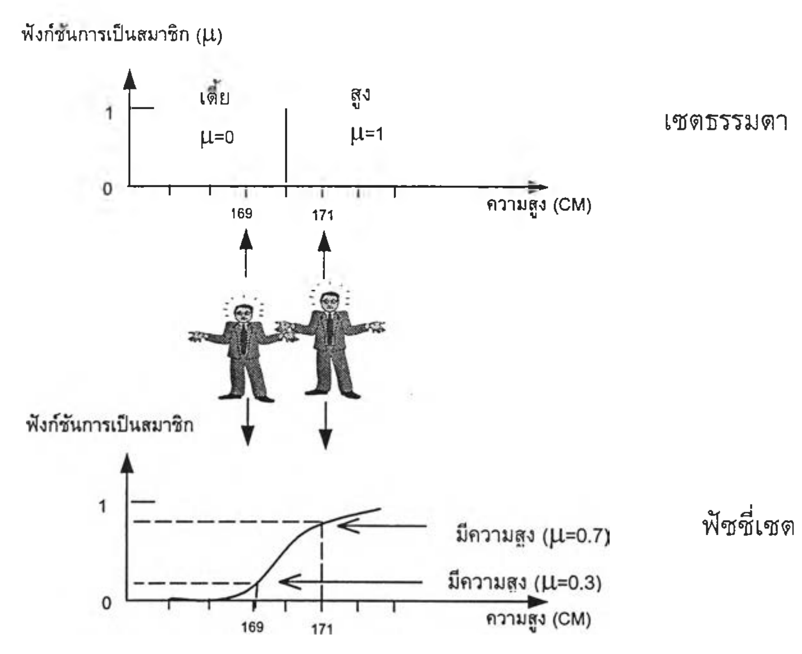
แนวความคิดเรื่องฟัซซี่ เป็นเครื่องมือพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการจัดการกับ ข้อมูลซึ่งไม่ชัดเจน คลุมเครือ หรือกำกวม ซึ่งพบได้ทั่วไปในโลกความเป็นจริง แนวความคิดเรื่องฟัซซี่เซตริเริ่มขึ้นมาในช่วงคริสตศักราชที่ 1960 โดย Prof. Lotfi A. Zadeh แห่ง University of California at Berkeley ในบทความเชิงสนทนาในเรื่องเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของความไม่แน่นอนของภาษาธรรมชาติ ฟัซซี่เซตช่วยให้แก้ปัญหาดังกล่าวได้ง่ายขึ้นเป็นอย่างมาก

ฟัซซี่เซต คือ เซตที่มีขอบเขตของเซตคลุมเครือ สมาชิกของฟัซซี่เซตไม่จำเป็นต้องมีค่าความเป็นสมาชิก (Membership,μ) เพียงแค่ "เป็นสมาชิก" หรือ "ไม่เป็นสมาชิก" คือ "1 หรือ 0" เท่านั้น ซึ่งต่างกับเซตธรรมดาที่เป็นเซตดั้งเดิม (Classical set หรือ Crisp set) แต่เป็นการขยายความคิดของเซตแบบธรรมดา เพื่อให้สามารถจัดการกับความไม่แน่นอนของระดับความเป็นสมาชิกของสิ่งที่เราสนใจได้ ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตสามารถมีค่าระหว่างกลางของ "เป็นสมาชิก" และ "ไม่เป็นสมาชิก" นั่นคือสามารถมีความเป็นสมาชิกมากหรือน้อยได้ โดยฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตธรรมดาและฟัซซี่เซต ดังแสดงในสมการที่ 4.1 และ 4.2

เซตธรรมดา $$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{4.1}$$

เซตฟัซซี่ $$\mu_A(x) \in [0,1] \tag{4.2}$$

เซตธรรมดา มีข้อเสียในความไม่เป็นธรรมชาติของเซต ตัวอย่างเช่น การจัดกลุ่มของคนสูง โดยกำหนดความสูงที่ใช้แบ่งคือ 170 เซนติเมตร คนที่มีความสูง 169 เซนติเมตร ไม่จัดว่า "สูง" ในขณะที่คนมีความสูง 170.5 เซนติเมตร จัดว่า "สูง" ทั้งที่มีความสูงมากกว่าคนแรกเพียง 1.5 เซนติเมตร และคนที่มีความสูง 198 เซนติเมตร กลับจัดอยู่ในกลุ่มเดียวกับคนที่สูง 170.5 เซนติเมตร ทั้งที่ความสูงแตกต่างกันมาก ความไม่เป็นธรรมชาติที่กล่าวมานี้เกิดขึ้นเพราะคุณสมบัติที่พยายามสร้างเซตขึ้นมา เป็นคุณสมบัติที่กำหนดโดยคำในภาษาธรรมชาติ ตัวอย่างคำในภาษาธรรมชาติหรือแทนความรู้สึกต่างๆ ได้แก่ เร็ว ช้า ร้อน เย็น ฯลฯ ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวนี้มีความไม่แน่นอนอยู่ด้วยเสมอจึงไม่สามารถบอกได้ว่าคนหนึ่งๆสูงหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบความสูงของคนๆนั้นกับความสูงที่ได้ตั้งเอาไว้ นอกจากนั้นคุณสมบัติเรื่องความสูงที่เรารู้สึกจริงๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันเหมือนในเซตที่ได้สร้างไว้ในข้างต้น แต่ยิ่งมีความสูงมากเท่าไหร่ก็จะยิ่งรู้สึกว่าคนที่มีความสูงดังกล่าวยิ่งสูงมากขึ้นเท่านั้น ดังนั้นการนำเอาเซตธรรมดาแทนความหมายของคุณสมบัติความสูง ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่กำหนดโดยคำในภาษาธรรมชาติ จึงไม่เหมาะสม จึงมีการนำเอาฟัซซี่เซตมาใช้แทนค่าของตัวแปรทางภาษา ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นภาษาที่มนุษย์ใช้ โดยแนวความคิดเรื่องตัวแปรทางภาษานี้ถูกนำมาใช้ในปัญหาซึ่งยากต่อการจำกัดค่าของตัวแปรหนึ่งๆ ด้วยค่าที่แน่นอนเพียงค่าเดียว เช่นในเรื่องความสูงดังที่กล่าวข้างต้น รูปที่ 4.1 แสดงตัวอย่างระดับการเป็นสมาชิกของเซตธรรมดาและฟัซซี่เซต



***รูปที่ 4.1** ระดับความเป็นสมาชิกของเซตธรรมดาและฟัซซี่เซต*

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นว่าการแบ่งกลุ่มของคนตามความสูงของเซตธรรมดา จะมีแค่เตี้ยหรือสูง นั่นคือ มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิก (μ) แค่ 0 หรือ 1 แต่สำหรับฟัซซี่เซต จะแสดงค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกตามความสูงที่มากหรือน้อย โดยคนที่มีความสูงน้อยกว่าจะมีค่าของฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.3 ในขณะที่คนที่สูงกว่าจะมีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่มากกว่าคือ 0.7

4.2 นิยามและคุณสมบัติเบื้องต้นของฟัซซี่เซต

4.2.1 นิยามฟัซซี่เซต

ให้ X เป็นกลุ่มของวัตถุหรือปริมาณที่สนใจ เช่น $X=R^n$ และเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ ฟัซซี่เซต A ใน X กำหนดลักษณะสมบัติโดยฟังก์ชันการเป็นสมาชิก (Membership Function) $\mu_A = X \longrightarrow [0,1]$ โดยที่ $\mu_A(x)$ แสดงระดับการเป็นสมาชิกในฟัซซี่เซต A ของ $x \in X$ ดังนั้นฟัซซี่เซต A ใน X อาจแสดงได้ด้วยคู่ลำดับของสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์กับค่าระดับการเป็นสมาชิกของสมาชิกตัวนั้น $A = \{(x,\mu_A(x)) / x \in X\}$ หรืออาจเขียนโดยย่อได้โดย

ถ้า U เป็นเซตต่อเนื่อง $\qquad A = \int_x \mu_F(x) / x \qquad$ (4.3)

ถ้า U เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง $\qquad A = \sum_x \mu_A(x) / x$

หรือ $\qquad A = \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \ldots + \mu_A(x_n) / x_n$

หมายเหตุ: เครื่องหมายผลรวมและอินทิกรัลในความสัมพันธ์ข้างต้นแทนการผนวกสมาชิก $(u,\mu_F(u))$ แต่ละตัวเข้าด้วยกันเป็นเซต มิได้หมายถึงการหาผลรวมหรืออินทิกรัลในทางคณิตศาสตร์แบบปกติ และ "/" เป็นเพียงเครื่องหมายคั่นแยกมิได้หมายถึงการดำเนินการหาร

4.2.2 คุณสมบัติเบื้องต้นของฟัซซี่เซต

ฟัซซี่เซตมีนิยามและคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกับเซตธรรมดา โดยสามารถใช้ตัวดำเนินการต่างๆ ที่ใช้ในเซตธรรมดา ไม่ว่าจะเป็นการยูเนียน การอินเตอร์เซคชัน การคอมพลีเมนท์ ฯลฯ โดยตัวดำเนินการที่ใช้บนเซตฟัซซี่เรียกว่า "ตัวดำเนินการฟัซซี่" มีดังนี้

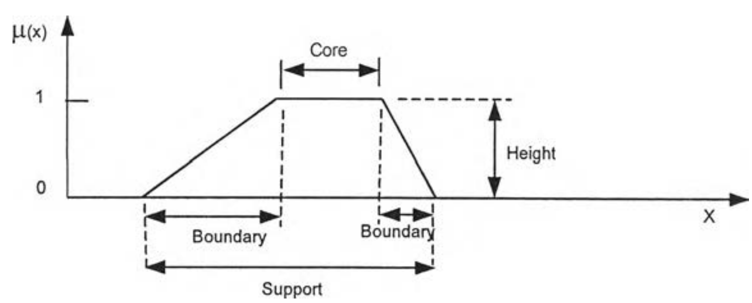
- Union $\qquad \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ *หรือ* $\max\{\mu_A, \mu_B\}$ $\qquad$ (4.4)
- Intersection $\qquad \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ *หรือ* $\min\{\mu_A, \mu_B\}$ $\qquad$ (4.5)
- Complement $\qquad \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ $\qquad$ (4.6)

นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติต่าง ๆของฟัซซี่เซต คือ

- Commutativity $A \cup B = B \cup A$ (4.7)
  $A \cap B = B \cap A$
- Associativity $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (4.8)
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributivity $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (4.9)
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Idempotency $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$ (4.10)
- Identity $A \cup \varnothing = A$ และ $A \cap X = A$ (4.11)
  $A \cap \varnothing = \varnothing$ และ $A \cup X = X$
  เมื่อ X คือ เอกภพสัมพัทธ์
- Transitivity ถ้า $A \subseteq B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ (4.12)
- Involution $\bar{\bar{A}} = A$ (4.13)

4.2.3 ฟังก์ชันการเป็นสมาชิก

ฟังก์ชันการเป็นสมาชิก (Membership Function) ของฟัซซี่เซตใด ๆ สามารถอธิบายได้ในรูปแบบของกราฟ โดยมีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 4.2



***รูปที่ 4.2** กราฟแสดงลักษณะฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซต*

1. แกน (Core) คือ ขอบเขตของฟัซซี่เซตที่ทุก ๆค่า $x \in X$ มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 ($\mu_A(x) = 1$)

2. ซัพพอร์ต (Support) คือ ขอบเขตของฟัซซี่เซตที่ทุก ๆ ค่า $x \in X$ มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกมากกว่า 0 ($\mu_A(x) > 0$)

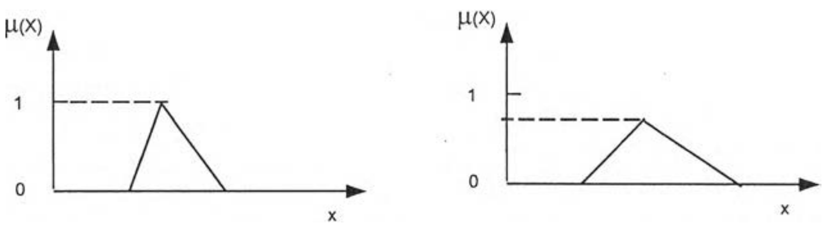
3. เบาน์ดริ (Boundary) คือ ขอบเขตของฟัซซี่เซตที่ทุกๆ ค่า $x \in X$ มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกมากกว่า 0 แต่น้อยกว่า 1 ($0< \mu_A(x) <1$)

4. ความสูง (Height) คือ ความสูงของฟัซซี่เซต เป็นค่าที่สูงที่สุดของค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิก ($\mu_A(x)$)ใน X

ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตใดๆ สามารถแบ่งเป็นประเภทใหญ่ๆได้ดังนี้

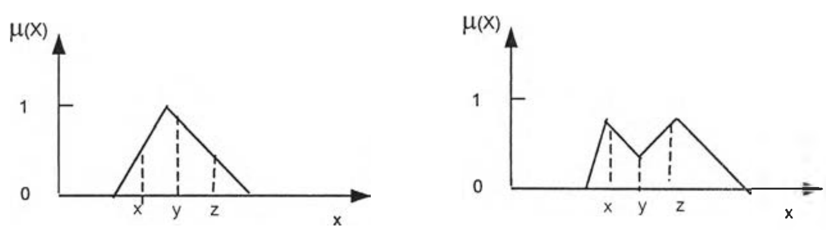
1. นอร์มอลฟัซซี่เซต (Normal Fuzzy Set) คือ เซตที่มีค่า $x \in X$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 และถ้ามีเพียงจุดเดียวที่มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 จะเรียกฟัซซี่เซตนี้ว่าเป็น “เซตโทนฟัซซี่” (Fuzzy Singleton) ดังแสดงในรูปที่ 4.3

2. คอนเวคฟัซซี่เซต (Convex Fuzzy Set)หรือเซตนูนฟัซซี่ คือ เซตที่เมื่อ $\forall x,y,z \in A$ และ $x<y<z$ แล้ว $\mu_A(y) \geq min\ (\mu_A(x)\ ,\mu_A(z))$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4



(ก) *นอร์มอลฟัซซี่เซต* (ข) *ซับนอมอลฟัซซี่เซต*

รูปที่ 4.3 *ลักษณะของนอร์มอลฟัซซี่เซต*

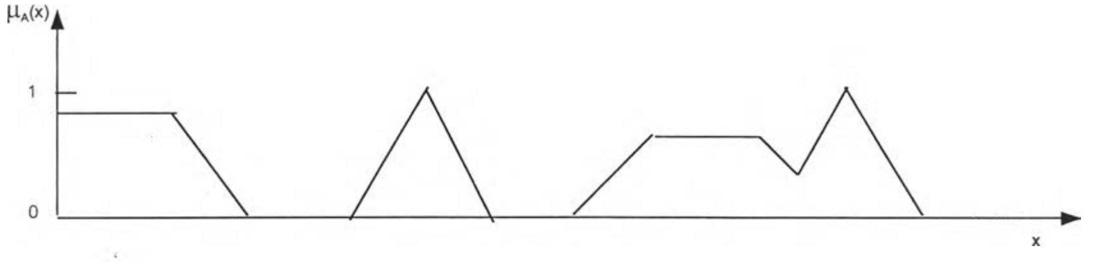


(ก)คอนเวคฟัซซี่เซต (ข) *นอนคอนเวคฟัซซี่เซต*

รูปที่ 4.4 ***ลักษณะของคอนเวคฟัซซี่เซต***

รูปแบบของกราฟที่แสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซต สามารถสร้างได้หลากหลายรูปแบบ ตามลักษณะของปัญหาและข้อมูล เช่น ปัญหาการจัดตารางการผลิตที่มีเวลาการทำงานและเวลากำหนดส่งแบบฟัซซี่ (Masatoshi Sakawa, Tetsuya Mori,1999) ซึ่งเวลาการ

ทำงานมีฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangular Fuzzy Processing Time) ประกอบด้วย เวลาน้อยที่สุด เวลาเฉลี่ย และ เวลามากที่สุด และสำหรับเวลากำหนดส่งมีลักษณะฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal) ตัวอย่างรูปแบบกราฟแสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซต ดังแสดงในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 *ลักษณะกราฟแสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตแบบต่าง ๆ*

4.2.4 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของฟัซซี่เซต

รูปร่างของกราฟฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตและช่วงที่ฟัซซี่เซตปรากฏมีผลต่อตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดยสำหรับฟัซซี่เซตแบบสามเหลี่ยมที่มีค่าอยู่ในช่วงจำนวนจริงบวก มีตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

$$-(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3) \quad (4.14)$$

$$(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \quad (4.15)$$

$$(a_1, a_2, a_3) \ominus (b_1, b_2, b_3) = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3) \quad (4.16)$$

$$(a_1, a_2, a_3) \otimes (b_1, b_2, b_3) = (a_1*b_1, a_2*b_2, a_3*b_3) \quad (4.17)$$

$$(a_1, a_2, a_3) \oslash (b_1, b_2, b_3) = (a_1/b_1, a_2/b_2, a_3/b_3) \quad (4.18)$$

$$c(a_1, a_2, a_3) = (c*a_1, c*a_2, c*a_3) \quad (4.19)$$

เมื่อ (a_1, a_2, a_3) และ (b_1, b_2, b_3) เป็นฟัซซี่เซตแบบสามเหลี่ยมอยู่ในช่วงจริงบวก โดยที่ a_1, a_2, a_3 และ b_1, b_2, b_3 เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์หรือตามที่กำหนดในสมการ และ c เป็นค่าคงที่ซึ่งเป็นจำนวนจริง

4.3 การแปลงค่าผลลัพธ์แบบฟัซซี่กลับเป็นค่าที่แน่นอน

การนำฟัซซี่มาใช้แก้ปัญหาที่มีความไม่แน่นอน คลุมเครือ หรือใช้แทนค่าของตัวแปรทางภาษา ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นภาษามนุษย์ ข้อมูลหรือผลลัพธ์ที่ได้ออกมาในรูปฟัซซี่ ไม่สามารถนำไปใช้งานจริงในการควบคุมการทำงานหรือเมื่อต้องการเปรียบเทียบเพื่อเลือกคำตอบ

ที่ดีที่สุดเพียงคำตอบเดียว ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องทำการแปลงผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปฟัซซี่ให้เป็นค่าที่แน่นอนค่าหนึ่ง (Fuzzy-to-Crisp Conversion)

วิธีการแปลงค่าผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปฟัซซี่ให้เป็นค่าที่แน่นอน (Defuzzification Methods) โดยนำเอากราฟมาช่วยในการหาคำตอบมีหลายวิธี ในที่นี้จะเสนอวิธีที่มีการใช้อย่างแพร่หลาย 7 วิธี (Hellendoorn and Thomas,1993) ดังนี้

1. Max-membership principle หรือเรียกว่า “Height Method” นั่นคือ เลือกจุดที่มีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกสูงสุด ดังแสดงในสมการที่ 4.20 และรูปที่ 4.6 (ก)

$$\mu_A(x^*) \geq \mu_A(x) \quad \text{สำหรับทุกๆ ค่า } x \text{ เมื่อ } x \in X \tag{4.20}$$

2. Centroid Method หรือเรียกว่า “Center of Area หรือ Center of gravity” เป็นวิธีการที่มีการใช้อย่างแพร่หลาย (Sugeno,1985; Lee,1990) ดังแสดงในสมการที่ 4.21 และรูปที่ 4.6 (ข)

$$\mathrm{Z}^* = \frac{\int \mu_c(\mathrm{Z}) \cdot \mathrm{Z}d\mathrm{Z}}{\int \mu_c(\mathrm{Z})d\mathrm{Z}} \tag{4.21}$$

3. Weighted Average Method วิธีนี้ใช้ในเฉพาะกรณีที่กราฟของฟังก์ชันการเป็นสมาชิกมีความสมมาตรและมีมากกว่า 1 รูป โดยการนำเอาค่าการเป็นสมาชิกคูณกับจุดที่มีค่าการเป็นสมาชิกสูงสุดของกราฟแต่ละรูป แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย ดังแสดงในสมการที่ 4.22

$$\mathrm{Z}^* = \frac{\sum \mu_c(\mathrm{Z}) \cdot \mathrm{Z}d\mathrm{Z}}{\sum \mu_c(\mathrm{Z})} \tag{4.22}$$

ตัวอย่างการใช้วิธี Weighted Average Method โดยอ้างอิงจากรูปที่ 4.6 (ค) เป็นดังนี้

$$\mathrm{Z}^* = \frac{a(.5) + b(.9)}{.5 + .9}$$

4. Mean-Max Membership หรือเรียกว่า “Middle of maxima” เป็นวิธีการที่คล้ายคลึงกับวิธีการที่ 1 แต่แตกต่างที่วิธีการนี้จะใช้ในกรณีที่มีจุดที่มีค่าการเป็นสมาชิกสูงสุดเท่ากันหลายจุด ดังแสดงในรูปที่ 4.6 (ง) ดังนั้นจึงต้องทำการหาค่าเฉลี่ย ดังแสดงในสมการที่ 4.23

$$\mathrm{Z}^* = \frac{a + b}{2} \tag{4.23}$$

5. Center of Sum วิธีการนี้จะทำให้ได้คำตอบที่รวดเร็วกว่าวิธีการอื่นๆ โดยจะคล้ายคลึงกับวิธี Weighted Average แต่วิธีนี้จะทำการหาจุดศูนย์กลางของพื้นที่หลังทำการรวมพื้นที่ภาย

ใต้กราฟที่แสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกหลายๆอันเข้าด้วยกันโดยการยูเนี่ยน ซึ่งจะมีข้อเสียคือ อาจมีการรวมพื้นที่ส่วนที่มีการอินเตอร์เซคชั่นกันซ้ำซ้อนทำให้พื้นที่หลังการรวมมีขนาดใหญ่กว่าความเป็นจริง ดังแสดงในรูปที่ 4.6(จ) สมการการหา Center of Sum ดังแสดงในสมการที่ 4.24

$$Z^* = \frac{\int_z z \sum_{k=1}^{n} \mu_{Ck}(z) dz}{\int_z \sum_{k=1}^{n} \mu_{Ck}(z) dz} \tag{4.24}$$

6. Center of Large Area ใช้ในกรณีที่ผลลัพธ์มีลักษณะที่ประกอบด้วยเซตนูนฟัซซี่อย่างน้อย 2 เซต ทำให้กราฟมีลักษณะที่เป็นแบบนอนคอนเวคคือมีการเพิ่มขึ้นและลดลงของเส้นกราฟมากกว่า 1 ครั้ง ดังนั้นการหาคำตอบทำได้โดยหาจุดศูนย์กลางของเซตที่มีรูปกราฟแสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่มีพื้นที่ขนาดใหญ่กว่า ดังแสดงในรูปที่ 4.6 (ฉ) ซึ่งวิธีนี้จะคล้ายคลึงกับวิธี Centroid Method แตกต่างกันที่วิธี Centroid Method ใช้กับกรณีที่มีเซตนูนฟัซซี่เพียงเซตเดียว สมการการหา Center of Large Area ดังแสดงในสมการที่ 4.25

$$Z^* = \frac{\int \mu_{cm}(Z) \cdot Z dZ}{\int \mu_{cm}(Z) dZ} \tag{4.25}$$

7. First (or Last) of Maxima เป็นวิธีที่หาคำตอบโดยการรวมพื้นที่ใต้กราฟที่แสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตแต่ละเซตโดยการยูเนียนแล้วหาค่าการเป็นสมาชิกสูงที่สุด โดยสมการที่ 4.26

$$hgt(C_k) = \sup_{z \in Z} \mu_c \tag{4.26}$$

จากนั้นหาจุดที่มีค่าการเป็นสมาชิกสูงสุด (Z*) โดยสมการที่ 4.27 และ 4.28

$$Z^* = \inf_{z \in Z} \{z \in Z \,/\, \mu_c = hgt(C_k)\} \tag{4.27}$$

$$Z^* = \sup_{z \in Z} \{z \in Z \,/\, \mu_c = hgt(C_k)\} \tag{4.28}$$

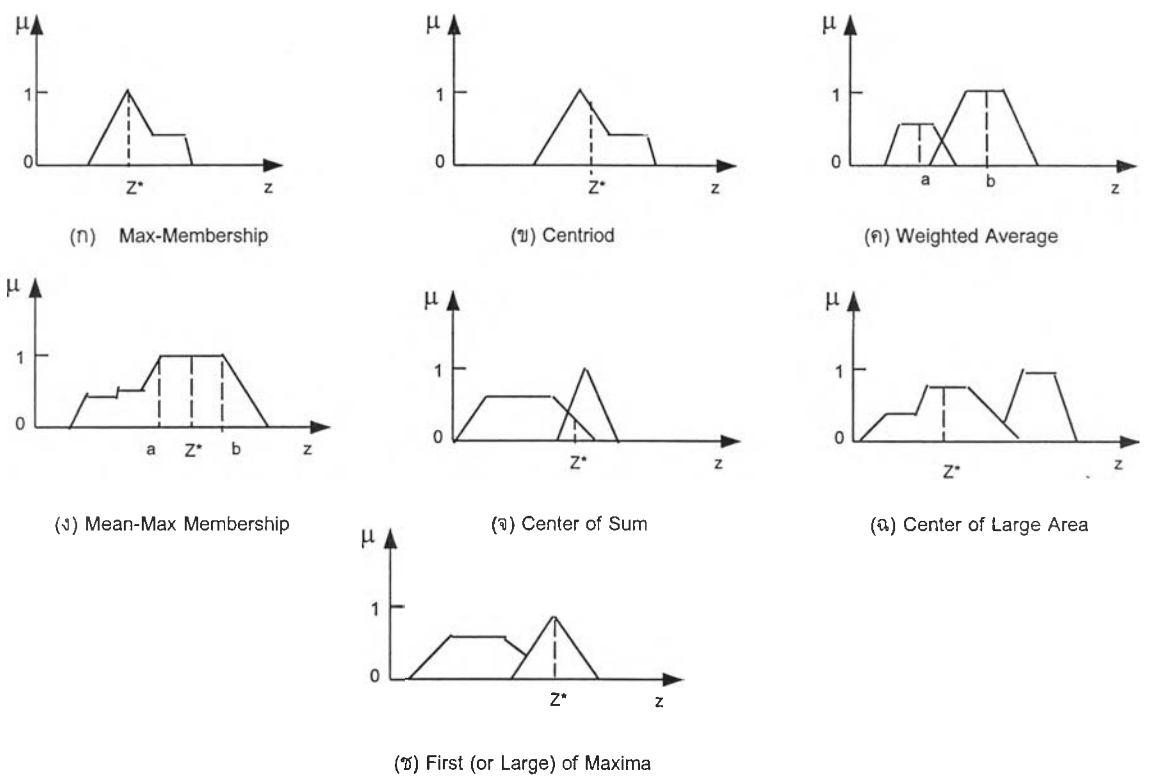
เมื่อ sup คือ ค่าขอบเขตบนของเซตที่น้อยที่สุด

Inf คือ ค่าขอบเขตล่างของเซตที่มากที่สุด

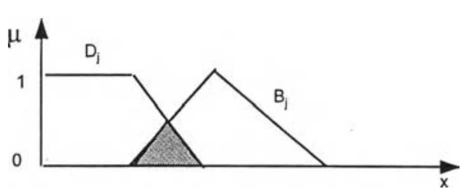
โดยคำตอบที่ได้จะเรียกว่า First of Maxima เมื่อเป็นคำตอบที่ได้จากสมการที่ 4.27 และจะเรียกว่า Last of Maxima เมื่อเป็นคำตอบที่ได้จากสมการที่ 4.28 ดังแสดงในรูปที่ 4.6 (ช)

นอกจากวิธีการทั้ง 7 วิธีนี้ ยังมีวิธีอื่นๆที่มีการนำมาใช้ โดย Masatoshi Sakawa และ Tetsuya Mori เสนอการหาค่า Agreement Index ระหว่าง ฟังก์ชันของเวลาการทำงานเสร็จสิ้น และฟังก์ชันของเวลากำหนดส่ง โดยการหาค่าอินเตอร์เซคชั่นของพื้นที่ของกราฟแสดงฟังก์ชัน การเป็นสมาชิกของฟัซซี่เซตทั้ง 2 ดังแสดงในรูปที่ 4.7 และหารด้วยพื้นที่กราฟของฟังก์ชันของ เวลาการทำงานเสร็จสิ้น ดังแสดงในสมการที 4.29

$$Agreement\ Index = (area\ B_j \cap D_j)/(area\ B_j) \tag{4.29}$$



*รูปที่ **4.6** กราฟแสดงวิธีการแปลงผลลัพธ์ฟัซซี่เป็นค่าที่แน่นอน*



*รูปที่ **4.7** กราฟแสดงการหาค่า Agreement Index*

วิธีการแปลงค่าผลลัพธ์แบบฟัซซี่กลับเป็นค่าที่แน่นอน ไม่มีวิธีการใดที่ดีที่สุดทั้งนี้ขึ้นกับลักษณะปัญหาและข้อมูล โดยมีเกณฑ์ในการเลือกวิธีที่เหมาะสม 5 ข้อ (Hellendorn and Thomas,1993) ดังนี้

1. มีการสืบเนื่อง (Continuity) นั่นคือ เมื่อข้อมูลที่เข้าสู่กระบวนการของฟัซซี่มีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย ผลลัพธ์ที่ได้ควรมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยด้วย

2. ให้คำตอบที่แน่นอนไม่คลุมเครือ (Disambiguity) นั่นคือ ควรเป็นวิธีที่ให้คำตอบที่แน่นอนเพียงค่าเดียว ซึ่งวิธี Center of Large Area จะหาคำตอบโดยหาจุดศูนย์กลางของกราฟฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่มีพื้นที่มากที่สุด เป็นวิธีที่ไม่สามารถตอบสนองเกณฑ์ข้อนี้ได้ เนื่องจากหากกรณีที่มีฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่มีพื้นที่เท่ากัน จะทำให้ไม่สามารถเลือกคำตอบที่แน่นอนได้

3. ให้คำตอบอย่างสมเหตุสมผล (Plausibility) นั่นคือ คำตอบที่ได้ควรเป็นคำตอบที่สมเหตุสมผล ซึ่งวิธี Center of Sum ไม่สามารถตอบสนองเกณฑ์ข้อนี้ได้ เนื่องจากเมื่อรวมพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันการเป็นสมาชิกทั้งหมด แล้วหาจุดศูนย์กลาง จุดที่ได้อาจไม่ได้มีค่าการเป็นสมาชิกสูงสุด

4. เวลาในการหาคำตอบ (Computational Simplicity) แต่ละวิธีใช้เวลาในการหาคำตอบที่แตกต่างกัน เนื่องจากมีขั้นตอนที่แตกต่างกัน โดย วิธี Height Method Mean-Max Method และ First of Maxima ใช้เวลาในการหาคำตอบน้อยกว่าวิธี Centriod หรือ Center of Sum

5. วิธีการให้น้ำหนัก (Weighting Method) ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินเลือกวิธีการที่มีขั้นตอนการให้น้ำหนักของฟังก์ชันการเป็นสมาชิก นั่นคือเป็นการเปรียบเทียบความแตกต่างของวิธี Centroid, Weighted Average และ Center of Sum ซึ่งจะเลือกวิธีใดขึ้นกับลักษณะปัญหา

4.4 ปัญหาการหาคำตอบที่ดีที่สุดแบบฟัซซี่

ปัจจุบันปัญหาการหาคำตอบที่ดีที่สุด (Optimization Problem) มีแนวคิดในการหาคำตอบโดยแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนที่สำคัญคือ ขั้นตอนที่ 1 เป็นการหาคำตอบอย่างคร่าวๆ เพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงคำตอบที่ดีที่สุดในเวลาอันรวดเร็ว ส่วนขั้นตอนที่ 2 เป็นการหาคำตอบอย่างพิถีพิถันมากขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบที่ดี น่าเชื่อถือมากขึ้น ซึ่งการหาคำตอบโดยใช้หลักการของฟัซซี่เป็นการตอบสนองการหาคำตอบในขั้นตอนแรก (Sakawa,1993)

การแก้ปัญหา Optimization โดยใช้หลักการฟัซซี่ (Fuzzy Optimization Method) มีการกำหนดฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของวัตถุประสงค์ (μ_o) และข้อจำกัดเป็นเซตฟัซซี่ (μ_c) ผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในรูปของเซตฟัซซี่ เกิดจากการอินเตอร์เซคชั่นของเซตของวัตถุประสงค์และเซตของข้อจำกัด โดยสามารถแสดงฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตคำตอบได้ดังสมการที่ 4.30

$$\mu_s(x) = min\{\mu_0(x), \mu_c(x)\} \quad (4.30)$$

และ คำตอบที่ดีที่สุด (Optimal Solution) คือ ค่า x ที่ทำให้ค่า $\mu_s(x)$ มีค่าสูงสุด นั่นคือการใช้ Max-Min Operator ดังแสดงในสมการที่ 4.31 และ 4.32 และแสดงได้ดังรูปที่ 4.8

$$max\mu_s(x) = max\{min\{\mu_0(x), \mu_c(x)\}\} \quad (4.31)$$

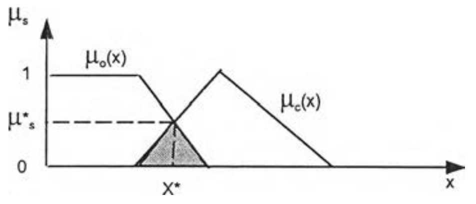
เมื่อ $\mu_s(x)$ = ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตคำตอบ

$\mu_0(x)$ = ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตวัตถุประสงค์

$\mu_c(x)$ = ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตข้อจำกัด

หรือ x^* คือคำตอบที่ดีที่สุดเมื่อ

$$\mu_s(x^*) \geq \mu_s(x) \qquad \text{สำหรบทุกๆ ค่า } x \in X \quad (4.32)$$



รูปที่ 4.8 การหาคำตอบ Fuzzy Optimization โดยใช้ Max-Min Operator

4.5 สรุปท้ายบท

เนื้อหาที่ได้กล่าวไปในบทนี้เป็นทฤษฎีของฟัซซี่เซต ซึ่งเป็นการขยายแนวความคิดของเซตธรรมดาเพื่อให้สามารถจัดการกับความไม่แน่นอนของระดับสมาชิกที่เราสนใจ โดยค่าความเป็นสมาชิกจะไม่ได้เป็นแค่ 0 หรือ 1 เท่านั้น แต่จะมีค่าได้ในช่วง [0,1] โดยมีการกำหนดเป็นค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิก ได้หลากหลายรูปแบบตามลักษณะของปัญหาและข้อมูล ฟัซซี่เซตมีนิยามและคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกับเซตธรรมดา โดยสามารถใช้ตัวดำเนินการต่างๆ ที่ใช้ในเซตธรรมดา ไม่ว่าจะเป็นการยูเนียน การอินเตอร์เซคชัน การคอมพลีเมนท์ และตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ หลังจากการแก้ปัญหาโดยกระบวนการทางฟัซซี่ จะมีการแปลงผลลัพธ์ที่มีค่าแบบฟัซซี่ให้เป็นค่าที่แน่นอนโดยวิธีการที่เรียกว่า “Defuzzification Methods” เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้ประโยชน์จริง และนอกจากนี้ยังมีการนำเอาหลักการทางฟัซซี่ใช้ในการแก้ปัญหา Optimization ต่างๆ ซึ่งสมการฟัซซี่เป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนหรือไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนได้ แต่สำหรับปัญหาที่มีข้อมูลที่ชัดเจนหรือมีค่าที่แน่นอน วิธีการของฟัซซี่จะให้ผลที่มีประสิทธิภาพต่ำว่าวิธีการที่เป็น Precise Algorithm