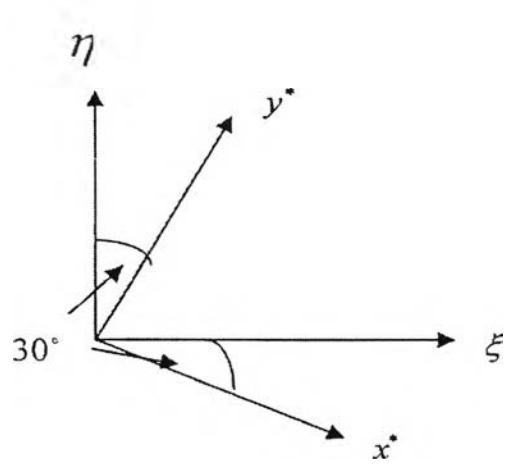
บทที่ 3

การหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่

การเคลื่อนที่น้อยยิ่งของทั้งสองทฤษฎีเป็นการหาการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลของแต่ละทฤษฎีทำให้ทราบประเภทของจุดสมดุลเนื่องจากผลของการเคลื่อนที่น้อยยิ่งที่เกิดขึ้นได้ ทฤษฎีของทีมงานเดอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์ กับ ทฤษฎีของทีมงานโกลด์ริช และ ทรีเมน โดยทั้งสองทฤษฎีนี้มีตำแหน่งของจุดสมดุลเป็นไปตามตำแหน่งสมดุลของสามเหลี่ยมคือตำแหน่งของมวลทั้งสามอยู่ในแนวเส้นตรง และ สามเหลี่ยมด้านเท่า การเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบบริเวณหนึ่งของสามเหลี่ยมด้านเท่ามีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเชิงคาบของจุดลากรานจ์ที่สี่และห้าซึ่งสามารถสังเกตได้จนถึงปัจจุบัน การเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบบริเวณหนึ่งของตำแหน่งมวลเป็นเส้นตรงพบว่าเกิดการเคลื่อนที่แบบแดมของอนุภาควงแหวนจนบังคับอนุภาควงแหวนในเวลาสั้นๆได้ การหาผลเฉลยของทั้งสองทฤษฎีจะทำการเปรียบเทียบผลในธรรมชาติกับผลที่ได้จากการจำลองภาพ

3.1 การหาผลเฉลยของกรณีของการเคลื่อนที่ใกล้กับจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า (1)

สมการการเคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้าเริ่มต้นในการหาสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดของวงโคจรซึ่งการพิจารณาวงโคจรภายใต้พิกัดทางโคจรจะมีการเคลื่อนที่ในลักษณะเดียวกันกับจุดลากรานจ์ที่ไม่เสถียรดัดแปลงจนได้สมการเพื่อนำมาใช้หมุนแกนเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดของการเคลื่อนที่น้อยยิ่ง (ξ, η) ต่อไป



รูปที่15 แสดงความสัมพันธ์ของพิกัดในแนว x,y และ แนวการเคลื่อนที่ของวงโคจร (1)

ความสัมพันธ์ของพิกัดทั้งสองคือ

$$\begin{aligned} x^* &= \xi\cos 30^\circ \mp \eta\sin 30^\circ \\ y^* &= \pm\xi\sin 30^\circ + \eta\cos 30^\circ \end{aligned} \quad \text{------ 26 (1)}$$

$$\begin{aligned} \xi &= x^*\cos 30^\circ \pm y^*\sin 30^\circ \\ \eta &= \mp x^*\sin 30^\circ + y^*\cos 30^\circ \end{aligned} \quad \text{------- 27 (1)}$$

เครื่องหมายด้านบนแสดงเงื่อนไขการเปลี่ยนพิกัดของจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ด้านล่างแสดงเงื่อนไขของการเปลี่ยนพิกัดของจุดลากรานจ์ที่ห้า การคำนวณนี้เริ่มการพิจารณาลักษณะของวงโคจรที่เกิดขึ้นโดยการประมาณของค่า ξ และ η มีค่าเท่ากันแล้วนำไปหาค่าของ x^*, y^* ดังในสมการที่26 เพื่อหาค่าต่างๆต่อไป

3.1.1 การหาสัมประสิทธ์ และ เฟสเริ่มต้นของวงโคจรในพิกัดของวงโคจร (1)

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งในกรณีของพิกัดของวงโคจร คือ

$$\begin{aligned} x^* &= A_S\cos(\omega_S t + \phi) + A_L\cos(\omega_L t + \Phi) \\ y^* &= B_S\sin(\omega_S t + \phi) + B_L\sin(\omega_L t + \Phi) \end{aligned} \quad \text{------- 28 (1)}$$

สัมประสิทธ์ของค่า A_S, A_L มีสมการคือ

$$\begin{aligned} A_S^2 &= \left(\frac{\omega_L^2 - a^*}{\omega_S^2 - \omega_L^2}\right)^2 (x^*(0))^2 + \left(\frac{2n'\omega_S\omega_L^2}{a^*(\omega_S^2 - \omega_L^2)}\right)(y^*(0))^2 \\ A_L^2 &= \left(\frac{\omega_S^2 - a^*}{\omega_S^2 - \omega_L^2}\right)^2 (x^*(0))^2 + \left(\frac{2n'\omega_L\omega_S^2}{a^*(\omega_S^2 - \omega_L^2)}\right)(y^*(0))^2 \\ a^* &= -\frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 3\mu(1-\mu)}\right)n'^2 \qquad \text{----- 29 (1)} \\ \frac{B_i}{A_i} &= -\left(\frac{\omega_i^2 - a^*}{2n'\omega_i}\right)^{-1} = -f_i \\ 0 &< f_L < 0.41421356 < f_S < 0.5 \end{aligned}$$

มุมเฟสของวงโคจรมีสมการคือ

$$\sin\phi = -[\frac{2n'\omega_s\omega_L^2}{A_S a^*(\omega_s^2 - \omega_L^2)}]y^*(0)$$
$$\tan\phi = (\frac{2n'\omega_S\omega_L^2 y^*(0)}{a^*(\omega_L^2 - a^{\cdot\cdot})x^*(0)})$$
$$\sin\Phi = [\frac{2n'\omega_L\omega_S^2}{A_L a^*(\omega_s^2 - \omega_L^2)}]y^*(0)$$
$$\tan\Phi = (\frac{2n'\omega_L\omega_S^2 y^*(0)}{a^*(\omega_S^2 - a^*)x^*(0)})$$

----------30 (1)

3.1.2 **การหาการเคลื่อนที่น้อยยิ่งใกล้จุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า** (1)

การคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่โดยการแทนค่าของสัมประสิทธ์ของวงโคจรคาบสั้นกับวงโคจรคาบยาวในสมการที่29และมุมเฟสในสมการที่30แทนค่าลงในสมการที่28จะได้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามในพิกัดของวงโคจรเพื่อนำมาใช้ในการหมุนแกนดังสมการที่27เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์ที่สี่และห้าโดยมีสมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}[(A_S\cos(\omega_S t + \phi) + A_L\cos(\omega_L t + \Phi)] \pm \frac{1}{2}[(B_S\sin(\omega_S t + \phi) + B_L\sin(\omega_L t + \Phi)]$$
$$\eta = \mp\frac{1}{2}[(A_S\cos(\omega_S t + \phi) + A_L\cos(\omega_L t + \Phi)] + \frac{\sqrt{3}}{2}[(B_S\sin(\omega_S t + \phi) + B_L\sin(\omega_L t + \Phi)] \quad 31$$

เครื่องหมายด้านบนแทนเงื่อนไขจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ด้านล่างแทนเงื่อนไขจุดลากรานจ์ที่ห้า สมการที่31แทนค่ารวมกับพิกัดของจุดลากรานจ์ที่สี่คือ $(0.5-\mu, 0.866)$ และ พิกัดของจุดลากรานจ์ที่ห้าคือ $(0.5-\mu, -0.866)$ เพื่อนำมาใช้หาคาบ และ ลักษณะของวงโคจรที่เกิดขึ้นนี้สามารถเกิดเป็นวงโคจรรูปเกือกม้าตามทฤษฎีนี้ ได้ หรือ ไม่

3.2 **การหาผลเฉลยของกรณีของการเคลื่อนที่ใกล้กับจุดสมดุลที่ไม่เสถียร** (6)

การหาผลเฉลยบริเวณรอบจุดสมดุลของโพมีทรีอัส และ แพนดูล่ามีการเคลื่อนที่คล้ายกับจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม เพราะมีสมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งเหมือนกัน การจำลองภาพของทฤษฎีโกลด์ริช กับ ทรีเมน ต้องมีแดมเกิดขึ้นจึงจะสามารถรักษาอนุภาควงแหวนได้โดยการหา

ผลเฉลยนี้มีผู้หาคำตอบอย่างประมาณของสมการการเคลื่อนที่นี้ในเงื่อนไขของมวลดวงจันทร์มีค่าเป็นศูนย์จึงเกิดแนวคิดว่าถ้าเราพิจารณาหาคำตอบในกรณีนี้ก็จะสามารถได้การเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนอย่างประมาณในแนวการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของ ξ, η

คำตอบทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่ของค่า ξ, η ในกรณีของมวลดวงจันทร์มีค่าเป็นศูนย์ คือ

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{nt} + b_1 e^{-nt} + c_1 \sin nt + d_1 \cos nt \\ \eta &= a_2 e^{nt} + b_2 e^{-nt} + c_2 \sin nt + d_2 \cos nt \end{aligned} \qquad \text{---- 32 (6)}$$

ผลเฉลยของสมการ32ในกรณีที่ค่าของGmของดวงจันทร์มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จะทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ใหม่โดยใช้การประมาณค่าของ e^x โดยใช้ทฤษฎีเทย์เลอร์จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} \xi &= a_1(1+nt) + b_1(1-nt) + c_1 \sin nt + d_1 \cos nt \\ \eta &= a_2(1+nt) + b_2(1-nt) + c_2 \sin nt + d_2 \cos nt \end{aligned} \qquad \text{----- 33}$$

คำตอบของสมการที่ 33 เทียบกับ สมการที่34 (6) โดยใช้ผลของดวงจันทร์กระทำกับอนุภาควงแหวนมากที่สุดเมื่อเริ่มที่เวลาเป็นศูนย์ให้ค่าของ $\xi = C, \eta = 0$ โดยค่า C มีขนาดที่มากที่สุด

$$\begin{aligned} \xi &= D_3 + D_2 \sin nt + D_1 \cos nt \\ \eta &= D_4 - \frac{3}{2} D_3 nt - 2D_1 \sin nt + 2D_2 \cos nt \end{aligned} \qquad \text{---- 34 (6)}$$

การเปรียบเทียบของแต่ละเทอมทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของทฤษฎีของทีมงานของโกลด์ริช และ ทรีเมน คือ

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{\omega_1 t} + a_1 e^{-\omega_1 t} + c_1 \sin \omega_2 t + (C - 2a_1) \cos \omega_2 t \\ \eta &= (-\frac{3}{2} a_1 - c_1) e^{\omega_1 t} + (\frac{3}{2} a_1 - c_1) e^{-\omega_1 t} - 2(C - 2a_1) \sin \omega_2 t + 2c_1 \cos \omega_2 t \end{aligned} \qquad \text{--- 35}$$

สมการที่35เพื่อหาการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลของ แพนดูล่า หรือ โพมีทรีอัส ดังในตารางที่ห้าโดยเหตุผลของการหาคำตอบในลักษณะนี้ก็เพื่อง่ายต่อการหาค่าคงที่ที่เหมาะสมซึ่งดีกว่าการหาค่าคงที่ที่มากกว่าสองค่าจะทำให้เกิดความยากต่อการวิเคราะห์ผลมากเกินไป