บทที่ 2

ทฤษฎีและวิธีการทางสถิติที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้เสนอตัวประมาณการถดถอยพหุคูณเชิงเส้น 3 ตัวประมาณ ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดสามัญ (Ordinary Least Squares Estimator (OLS)) ตัวประมาณริดจ์สามัญ (Ridge Ordinary Least Squares Estimator (ROLS)) และตัวประมาณริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุด (Ridge Least Absolute Value Estimator (RLAV)) ซึ่งรายละเอียดของตัวประมาณแต่ละตัวเป็นดังนี้

2.1 การวิเคราะห์ความถดถอยพหุนามและตัวประมาณการถดถอยพหุนาม

2.1.1 การวิเคราะห์ความถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression Analysis)

ตัวแบบและข้อตกลงเบื้องต้นที่นำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ ตัวแบบความถดถอยพหุนาม ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

(2.1) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

เมื่อ β_j เป็นพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของพจน์พหุนามที่ j , $j = 1,2,\ldots,p$

จากสมการที่ (2.1) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของตัวแบบเชิงเส้น ได้ดังนี้

1) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีกำลังสูงสุดเป็น 6 ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

(2.2) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 x_i^4 + \beta_5 x_i^5 + \beta_6 x_i^6 + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

2) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีกำลังสูงสุดเป็น 5 ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

(2.3) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 x_i^4 + \beta_5 x_i^5 + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

3) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีกำลังสูงสุดเป็น 4 ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

(2.4) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 x_i^4 + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

4) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีกำลังสูงสุดเป็น 3 ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

(2.5) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

5) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีกำลังสูงสุดเป็น 2 ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

(2.6) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ตัวแบบความถดถอยพหุนามในกรณีนี้เป็นตัวแบบเชิงเส้นในพารามิเตอร์ หมายความว่าในแต่ละเทอมของตัวแบบมีพารามิเตอร์เพียง 1 ตัว คูณด้วยค่าคงที่ของตัวแปรอิสระและเนื่องจากตัวแบบที่ใช้ในการพิจารณาเป็นตัวแบบเชิงเส้นในพารามิเตอร์ ดังนั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์เราสามารถใช้ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ดังที่จะได้กล่าวต่อไป

2.1.2 **ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดสามัญ** (Ordinary Least Squares Estimator (OLS))

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดใช้หลักการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum Squares Error (SSE)) มีค่าน้อยที่สุด

จากรูปแบบสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{y} = X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{y}$ แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามที่มีขนาด $(n \times 1)$

X แทนเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระที่มีขนาด $(n \times q)$

$\underset{\sim}{\beta}$ แทนเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ถดถอยที่มีขนาด $(q \times 1)$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ แทนเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนที่มีขนาด $(n \times 1)$

n แทนขนาดตัวอย่าง

p แทนจำนวนพจน์พหุนามในสมการดังนี้ คือ 2 , 3 , 4 , 5 และ 6

และ q แทนจำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบเป็น $p+1$

โดยมีข้อกำหนดว่าค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์ X เท่ากับ q เมื่อ $q < n$ ความคลาดเคลื่อนเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเดียวกันที่มีค่าเฉลี่ย $E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{0}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวน $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2 I_n$

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$ แทน เวกเตอร์ของตัวประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดของค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$

และ $\underset{\sim}{e}$ แทน เวกเตอร์ของส่วนเหลือ (Residuals) ที่เป็นตัวประมาณของความคลาดเคลื่อน $\underset{\sim}{\varepsilon}$ เมื่อแทนที่ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วย $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$ และแทน $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ด้วย $\underset{\sim}{e}$ ในตัวแบบเชิงเส้น จะได้

$$\underset{\sim}{y} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} + \underset{\sim}{e}$$

และ

$$\underset{\sim}{e} = \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$$

พิจารณาผลบวกของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง

$$\begin{aligned} SSE &= \left(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e}\right) \\ &= \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}\right)'\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}\right) \\ &= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} \\ &= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} \end{aligned}$$

ผู้วิจัยทำการหาค่าของ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$ ที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ (Differentiate) ของ SSE เทียบกับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS\,h}$ เมื่อ $h = 0,1,\ldots,p$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ $\underset{\sim}{0}$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS\,h}}\left(\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS\,h}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS\,h}'X'X\hat{\beta}_{OLS\,h}\right) = \underset{\sim}{0} \quad , \quad h = 0,1,\ldots,p$$

$$-2X'\underset{\sim}{y} + 2X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} = 0$$

$$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} = X'\underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y} \qquad (2.7)$$

ตัวประมาณ $\underset{\sim}{\beta}_{OLS}$ จะให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณไม่เอนเอียงเชิงเส้น แต่ในการประมาณค่า $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดมีข้อสมมุติฐานสำคัญข้อหนึ่งคือตัวแปรอิสระแต่ละตัวต้องไม่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระตัวอื่นซึ่งในทางปฏิบัติจะเป็นไปได้น้อยมาก เมื่อตัวแปรอิสระมีพหุสัมพันธ์กันสูงจะทำให้เมทริกซ์ $X'X$ เกิดเงื่อนไขที่ไม่ดี (ill – condition) อาจมีผลทำให้การประมาณ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดแล้วไม่ได้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด เราจึงควรตรวจสอบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่ได้โดยเราพิจารณาประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า $\underset{\sim}{\beta}$ สองส่วน กล่าวคือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณ $\underset{\sim}{\beta}$ และค่าเฉลี่ยของกำลังสองของระยะทางจาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ไปยัง $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งเราสามารถเขียนเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ในรูปฟังก์ชันของ $X'X$ และ σ^2 ดังต่อไปนี้

(2.8) $$Cov(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

ให้ L_1 คือระยะทางจาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ไปยัง $\underset{\sim}{\beta}$ ดังนั้น

(2.9) $$L_1^2 = (\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})'(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})$$

และเราจะได้ค่าเฉลี่ยของกำลังสองระยะทางจาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ไปยัง $\underset{\sim}{\beta}$ ในรูปของ

(2.10) $$E(L_1^2) = \sigma^2 trace(X'X)^{-1}$$

$$E(L_1^2) = E[(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})'(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})]$$

$$= E[\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}] - \underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{\beta}$$

(2.11) $$E(\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{\beta} + \sigma^2 trace(X'X)^{-1}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ มีการแจกแจงแบบปกติจะได้ว่า

(2.12) $$Var(L_1^2) = 2\sigma^4 trace(X'X)^{-2}$$

จากสมการที่ (2.8) , (2.10) และ (2.12) เราจะเห็นได้ว่า $Cov(\hat{\underset{\sim}{\beta}})$, $E[L_1^2]$ และ $Var(L_1^2)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันของเมทริกซ์ $X'X$ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจเราจึงแปลงเมทริกซ์ $X'X$ ให้อยู่ในรูปของค่าเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์ $X'X$ โดยใช้ทฤษฎีที่สำคัญข้อหนึ่งคือ ถ้า λ_i เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $X'X$ แล้ว $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = trace(X'X)\,;\, i = 1,2,...,p$ เมื่อ p เป็นจำนวนตัวแปรอิสระ

กำหนดให้ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $X'X$ มีค่าเป็น

$$(\lambda_{\max} = \lambda_1) \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq (\lambda_{\min} = \lambda_p) \qquad ; \lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_p > 0$$

จากสมการที่ (2.10) เราสามารถเขียนค่าเฉลี่ยของกำลังสองระยะทางจาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ไปยัง $\underset{\sim}{\beta}$ ในรูปฟังก์ชันของค่าเฉพาะได้ดังนี้

$$E(L_1^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) \tag{2.13}$$

และจากสมการที่ (2.12) เราสามารถเขียนค่าความแปรปรวนของกำลังสองระยะทางจาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ไปยัง $\underset{\sim}{\beta}$ อยู่ในรูปฟังก์ชันของค่าเฉพาะได้ดังนี้

$$Var(L_1^2) = 2\sigma^4 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^2 \tag{2.14}$$

ในกรณีที่ตัวแปรอิสระมีสภาพไม่เหมาะสม กล่าวคือเกิดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระในอัตราที่สูงจะทำให้ $|X'X|$ มีค่าเล็กลงเข้าใกล้ศูนย์ เนื่องจาก $|X'X|$ มีค่าเท่ากับผลคูณของค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $X'X$ จึงส่งผลให้ค่าเฉพาะบางค่าต่ำมาก ดังนั้นจากสมการที่ (2.12) และ (2.13) เราจะเห็นได้ว่า $E(L_1^2)$ และ $E(L_1^2)$ จึงมีค่าสูงขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้การเกิดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระส่งผลให้ความแปรปรวนของค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยมีค่ามากและเกิดความสัมพันธ์กันสูง ระหว่างสัมประสิทธิ์การถดถอยที่ใช้ประมาณค่า [1]

2.1.3 **ตัวประมาณค่าสัมบูรณ์น้อยสุด** (Least Absolute Value Estimator)[2]

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยพหุคูณด้วยตัวประมาณค่าสัมบูรณ์น้อยสุด จะใช้เทคนิคโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Technique) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด

จากรูปแบบสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \qquad , \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.15}$$

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{LAV}$ เป็นตัวประมาณแบบค่าสัมบูรณ์น้อยสุดของค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$

และ e_i เป็นตัวประมาณของค่าความคลาดเคลื่อน ε_i

เมื่อแทน $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วย $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{LAV}$ และแทนที่ ε_i ด้วย e_i ในสมการ (2.15) จะได้

[1] สมพล จารุธนศักดิ์กูร. "การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีริดจ์รีเกรสชันที่ใช้ข้อมูลสนเทศโดยหลักเกณฑ์ และวิธีลิวคีเจียนทั่วไป เมื่อเกิดพหุสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ", (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาคสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539), หน้า 9 – 11

[2] ปัทมวดี นันทนาเนตร์. "การเปรียบเทียบตัวประมาณการถดถอยเมื่อมีพหุสัมพันธ์และหรือมีค่าผิดปกติ", (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาคสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544), หน้า 12 - 14

(2.16) $$y_i = \hat{\beta}_{0_{LAV}} + \hat{\beta}_{1_{LAV}} x_i + \hat{\beta}_{2_{LAV}} x_i^2 + \ldots + \hat{\beta}_{p_{LAV}} x_i^p + e_i \quad , i = 1,2,\ldots,n$$

และ $$e_i = y_i - \hat{\beta}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}_{1_{LAV}} x_i - \hat{\beta}_{2_{LAV}} x_i^2 - \ldots - \hat{\beta}_{p_{LAV}} x_i^p$$

เราต้องการหาค่า $\hat{\beta}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}_{2_{LAV}}, \ldots, \hat{\beta}_{p_{LAV}}$ ที่ทำให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุดกล่าวคือ

(2.17) $$Minimize \ \sum_{i=1}^{n} |e_i|$$

ภายใต้เงื่อนไข $e_i = y_i - \hat{\beta}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}_{1_{LAV}} x_i - \hat{\beta}_{2_{LAV}} x_i^2 - \ldots - \hat{\beta}_{p_{LAV}} x_i^p$

จากสมการ (2.17) แปลงให้อยู่ในรูปโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

กำหนดให้ $$Z = \sum_{i=1}^{n} |e_i|$$

เนื่องจาก e_i ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย จะได้ว่า

$$e_i = e_i^+ - e_i^- \quad , \quad e_i^+ , e_i^- \geq 0$$

เมื่อ

$$e_i^+ = \begin{cases} e_i & , e_i \geq 0 \\ 0 & , e_i < 0 \end{cases}$$

และ

$$e_i^- = \begin{cases} 0 & , e_i \geq 0 \\ -e_i & , e_i < 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $(e_i^+)(e_i^-) = 0$

นั่นคือ อย่างน้อย 1 ตัวใน e_i^+ และ e_i^- จะมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ

ดังนั้น $$|e_i| = e_i^+ + e_i^-$$

ให้ $u = e_i^+$ และ $v = e_i^-$

เนื่องจากพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_{0_{LAV}}$, $\hat{\beta}_{1_{LAV}}$, $\hat{\beta}_{2_{LAV}}$, … , $\hat{\beta}_{p_{LAV}}$ ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย จึงสามารถเขียนได้ในรูป

$$\hat{\beta}_{0_{LAV}} = \hat{\beta}_{0_{LAV}}^+ - \hat{\beta}_{0_{LAV}}^-$$

$$\hat{\beta}_{1_{LAV}} = \hat{\beta}_{1_{LAV}}^+ - \hat{\beta}_{1_{LAV}}^-$$

และ $$\hat{\beta}_{p_{LAV}} = \hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}$$

เมื่อ $\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}, \ldots, \hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}} \geq 0$

ดังนั้น เราสามารถแปลงปัญหา (2.14) ได้เป็น

$$Minimize\ Z = \sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\left(\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}\right) + \left(\hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}\right)x_i + \left(\hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}\right)x_i^2 + \cdots + \left(\hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}\right)x_i^p + u_i - v_i = y_i$$

$$\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}, \ldots, \hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}} \geq 0 \ , u_i, v_i \geq 0$$

$; i = 1,2,\ldots,n$

หรือหาค่าต่ำสุดของ

$$Z = (u_1 + \ldots + u_n + v_1 + \ldots + v_n) + 0\left(\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}\right) + 0\left(\hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}\right) + \ldots + 0\left(\hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}\right)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\left(\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}\right) + \left(\hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}\right)x_1 + \left(\hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}\right)x_1^2 + \cdots + \left(\hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}\right)x_1^p + u_1 - v_1 = y_1$$

$$\left(\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}\right) + \left(\hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}\right)x_2 + \left(\hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}\right)x_2^2 + \cdots + \left(\hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}\right)x_2^p + u_2 - v_2 = y_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}\right) + \left(\hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}\right)x_i + \left(\hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}\right)x_i^2 + \cdots + \left(\hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}} - \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}\right)x_i^p + u_i - v_i = y_i$$

$$\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}, \ldots, \hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}} \geq 0 , u_i, v_i \geq 0$$

$; i = 1,2,\ldots,n$

และหาค่า $\hat{\beta}^{+}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{0_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{1_{LAV}}, \hat{\beta}^{+}_{2_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{2_{LAV}}, \ldots, \hat{\beta}^{+}_{p_{LAV}}, \hat{\beta}^{-}_{p_{LAV}}$ โดยใช้วิธีการซิมเพล็กซ์ (Simplex Method) ซึ่งได้แสดงรายละเอียดวิธีคำนวณ และขั้นตอนต่าง ๆ ของวิธีการซิมเพล็กซ์

2.1.4 วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)[3]

ปัญหาของโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ไม่ได้จำกัดอยู่กับตัวแปรเพียง 2 ตัว หรือสมการข้อกำหนดเพียง 3 สมการ เราอาจขยายจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการข้อจำกัดได้ตามลักษณะของปัญหาที่เป็นจริง ข้อกำหนดโดยทั่ว ๆ ไปนั้น อยู่ที่ขนาดและความสามารถของคอมพิวเตอร์ที่จะใช้เพื่อการคำนวณเป็นสำคัญ สำหรับในทางคณิตศาสตร์นั้น ไม่ว่าปัญหาที่ต้องการหาคำตอบจะเป็นอย่างไร เราก็ต้องจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ที่มีรูปแบบแน่นนอนดังต่อไปนี้

สมมติให้มีตัวแปรจำนวน n ตัว และสมการข้อจำกัดจำนวน m สมการ เราจะสามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานของโปรแกรมเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

เป้าหมาย : $Max \ \ G = g'x$

ข้อจำกัด : $Ax \ \leq \ T$

หรือเขียนในรูปแบบของสมการคือ

สมการเป้าหมาย : $MAX \ G = g_0 + g_1x_1 + g_2x_2 + \mathrm{K} + g_nx_n$

สมการข้อจำกัด :

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n \ \leq \ T_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathrm{K} + a_{2n}x_n \ \leq \ T_2 \\
\mathrm{M} \\
\mathrm{M} \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \mathrm{K} + a_{mn}x_n \ \leq \ T_m
\end{array}
$$

และต้องไม่ลืมข้อจำกัดที่ว่า $x \geq 0$ (the nonnegativity constraint) คือตัวแปรทุกตัวมีค่าเป็นบวกนั่นเอง ปัญหาดังกล่าวจึงจัดอยู่ในรูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้นแบบมาตรฐาน ซึ่งเราจะได้ศึกษากันถึงวิธีการแก้ปัญหาในรายละเอียดต่อไป

ก่อนที่จะเริ่มต้นวิธีการซิมเพล็กซ์นั้น มีปัญหาใหญ่ที่ต้องแก้อยู่ประการหนึ่งคือ ข้อจำกัดที่มีลักษณะเป็นอสมการนั้น จะต้องทำให้อยู่ในรูปของเครื่องหมาย " = " ก่อน วิธีการก็คือใช้ตัวแปรช่วย (slack vairable) y บางคนเรียกว่าเป็นตัวแปรขาดซึ่งหมายถึง ตัวแปรที่ใส่ในสมการข้อจำกัดเพื่อให้สิ่งที่เราขาดอยู่เต็มนั่นเอง เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ จะยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

สมการเป้าหมาย : $MAX \ G = 10x_1 + 15x_2$

[3] ปัทมวดี นันทนาเนตร์. "การเปรียบเทียบตัวประมาณการถดถอยเมื่อมีพหุสัมพันธ์และหรือมีค่าผิดปกติ" , (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาคสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544), หน้า 369 - 373

สมการข้อจำกัด :

(1) $3x_1 + x_2 \leq 15$

(2) $x_1 + 2x_2 \leq 10$

(3) $2x_1 \leq 9$

เมื่อใช้ตัวแปรช่วย (slack variable) y ปัญหาจะเป็นดังนี้

สมการเป้าหมาย : $MAX\ G = 10x_1 + 15x_2$

สมการข้อจำกัด :

(1) $3x_1 + x_2 + y_1 = 15$

(2) $x_1 + 2x_2 + y_2 = 10$

(3) $2x_1 + y_3 = 9$

และต้องไม่ลืมข้อจำกัดที่ว่า $y \geq 0$ เช่นเดียวกัน ในการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพล็กซ์นั้น จะมีตัวแปรที่ต้องกำหนดค่าให้เป็นศูนย์ เราเรียกตัวแปรนี้ว่า " ตัวแปรไม่ตัวแปรฐาน " (nonbasis variables) และตัวแปรอื่น ๆ นอกไปจากนี้ เราเรียกว่า " ตัวแปรฐาน " (basis variables) ถ้าตัวแปรฐานทุกตัวไม่มีค่าติดลบ เราเรียกว่า " คำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น " (basis feasible solution)

วิธีการซิมเพล็กซ์เริ่มต้นด้วยนำสมการปัญหาที่จัดรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์แล้ว ไปสร้างตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex Tables) ซึ่งมีลักษณะดังนี้

ตัวแปร	G	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	T
y_1	0	3	1	1	0	0	15
y_2	0	1	(2)	0	1	0	10
y_3	0	2	0	0	0	1	9
g_1	-	10	15	0	0	0	0
K_1	-	0	0	0	0	0	0
$(K_1 - g_1)$	-	-10	-15	0	0	0	0

<u>ตารางที่ 1 แสดงตารางซิมเพล็กซ์ที่ได้จากสมการข้างต้น</u>

ตารางซิมเพล็กซ์มีส่วนสำคัญอยู่ 4 ส่วน ด้วยกันคือ ส่วนที่ 1 เป็นตัวแปร g ซึ่งแทนสัมประสิทธิ์ของสมการเป้าหมาย ส่วนที่ 2 คือ ตัวแปรโครงสร้าง x_i ซึ่งจะประกอบด้วย

สัมประสิทธิ์ของ x_i ในสมการข้อจำกัดทั้งหมดซึ่งเราตั้งชื่อให้ว่า เมทริกซ์ A ส่วนที่ 3 คือ ตัวแปรช่วย y ซึ่งจะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) สอดคล้องกับวิธีการที่เราจะหาค่าเมทริกซ์ผกผันของ A นั่นเอง และส่วนที่ 4 คือ ตัวแปรทางด้านขวามือของสมการข้อจำกัด คือ T ในตารางที่ 1 นี้ เรากำหนดให้ตัวแปรช่วยเป็นตัวแปรฐานเริ่มต้น

วิธีการคำนวณนั้น เริ่มด้วยการใส่ค่าของ g_1 ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการเป้าหมาย โดยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรช่วยในสมการเป้าหมายมีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นคำนวณหาค่า K_1 ดังนี้

K_1 = 3.0 + 1.0 + 2.0 = 0 (ของ x_1)

K_2 = 1.0 + 2.0 + 0.0 = 0 (ของ x_2)

⋮

⋮

K_T = 15.0 + 10.0 + 9.0 = 0 (ของ T)

ซึ่งก็คือ เอาค่าของ g คูณกับ A แล้วบวกเข้าด้วยกันนั่นเอง จากนั้น จึงหาค่า $(K_1 - g_1)$ เป็นอันเสร็จสิ้นตารางที่ 1

จากผลลัพธ์ของตารางที่ 1 นี้ มีสิ่งที่จะต้องสังเกต 2 ประการ

1. ให้เลือกค่า $(K_1 - g_1)$ ที่เป็นลบมากที่สุด ตามตัวอย่าง คือ -15 เป็น สดมภ์หลัก(pivot column)
2. ให้นำค่า T หารด้วยค่าของ A ใน สดมภ์หลัก (pivot column) เช่น 15/1 , 10/2 โดยเลือกเฉพาะ A ที่มากกว่าศูนย์ ให้เลือกค่าที่น้อยที่สุดคือ 10/2 เป็น แถวหลัก (pivot row)

สดมภ์หลัก (pivot column) และ แถวหลัก (pivot row) พบกันที่ใด จะทำให้เราได้เลขหลัก (pivot number) ซึ่งในที่นี้ คือ (2)

การแก้ปัญหาด้วยวิธีการซิมเพล็กซ์นั้น ใช้วิธีการทำซ้ำ (Iterative Step) ซึ่งเลียนแบบวิธีการของการหาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยการทำ เลขหลัก (pivot number) ให้มีค่าเป็นหนึ่ง และตัวอื่น ๆ ของ A ในแถวตั้งนั้นมีค่าเป็นศูนย์ นั่นก็คือ เอา (2) หารตลอดแถวนอนของ y_2 จากนั้นทำค่า A ในแถวตั้ง x_2 และแถวนอน y_1 และ y_3 ให้เป็นศูนย์ เช่นกรณีของแถวนอน y_1 จะคำนวณได้ดังนี้

แถวนอน y_1 = 3 – 1(1/2), 1 – 1(2/2), 1 – 1(0/2), 0 – 1(1/2), 0 – 1(0/2), 15 – 1(10/2) สำหรับแถวนอน y_3 ก็ทำด้วยวิธีการเดียวกัน เราจะได้ตารางที่ 2 ดังนี้คือ

ตัวแปร	G	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	T
y_1	0	(2.5)	0	1	-0.5	0	10
x_2	15	0.5	1	0	0.5	0	5
y_3	0	2	0	0	0	1	9
$(K_1 - g_1)$	-	-2.5	0	0	7.5	0	75

ตารางที่ 2 ตารางซิมเพล็กซ์แสดงการทำซ้ำในขั้นตอนก่อนหน้า

สิ่งที่เปลี่ยนไปอย่างเห็นได้ชัดในตารางที่ 2 นี้ก็คือ การนำ x_2 ซึ่งเป็น สดมภ์หลัก (pivot column) เข้าไปอยู่ในฐาน (basis) โดยไปแทน y_2 ซึ่งเป็น แถวหลัก (pivot row) มีความหมายทางเศรษฐศาสตร์ว่า ถ้าเราเพิ่มการผลิต x_2 เป็นจำนวน 5 หน่วย จะทำให้กำไรซึ่งจากเดิมเป็นศูนย์นั้น เพิ่มขึ้นเป็น 75 ต่อวัน แต่กำไรรวมดังกล่าวนี้จะสูงที่สุดหรือไม่นั้น ให้ดูจากค่าของ $(K_1 - g_1)$ ถ้าหากยังคงมีตัวใดตัวหนึ่งที่เป็นลบอยู่ ก็หมายถึงว่ายังจะสามารถเพิ่มกำไรรวมขึ้นได้อีก โดยการผลิตสินค้าดังกล่าวเพิ่มขึ้น เช่นในกรณีของตารางที่ 2 นี้ $(K_1 - g_1)$ เป็นลบที่แถวตั้ง x_1 และจากการหา แถวหลัก (pivot row) ด้วยวิธีเดิม จะเห็นว่า ถ้าเอา x_1 ไปแทน y_1 โดยผลิต x_1 เพิ่มขึ้น จะได้กำไรเพิ่มขึ้นด้วย เลขหลัก (pivot number) คือ (2.5) จากการทำซ้ำเช่นเดียวกัน จะได้ตารางที่ 3 ดังนี้

ตัวแปร	G	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	T
x_1	10	1	0	0.4	-0.2	0	4
x_2	15	0	1	-0.2	0.6	0	3
y_3	0	0	0	-0.8	0.4	1	1
$(K_1 - g_1)$	-	0	0	1	7.5	0	85

ตารางที่ 3 ตารางซิมเพล็กซ์ที่แสดงการทำขั้นตอนซ้ำจากขั้นตอนก่อน

คำตอบที่ได้ในตารางที่ 3 นี้ก็คือ การผลิต x_1 ซึ่งจากเดิมเป็นศูนย์เพิ่มขึ้น 4 หน่วย ในขณะที่การผลิต x_2 ซึ่งจากเดิมเป็น 5 ลดลงเป็น 3 หน่วยนั้น จะทำให้กำไรเพิ่มขึ้นเป็น 85 ต่อวัน ในขณะที่ y_3 เหลืออยู่อีก 1 หน่วย จากการตรวจสอบปรากฏว่า $(K_1 - g_1)$ ทุกตัวมีค่าเป็นบวก คำตอบที่ได้นี้จึงเป็นค่าที่สูงที่สุดหรือกำไรสูงที่สุด

วิธีคำนวณซิมเพล็กซ์แบบมาตรฐานที่แสดงมาแล้วนี้ สามารถสรุปเป็นขั้นตอนในแบบทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้

1. หาค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยที่สุดในสมการเป้าหมาย หรือ $(K_1 - g_1)$

   ถ้า $(K_i - g_i) \geq 0$ แสดงว่าได้กำไรสูงสุดแล้ว

   แต่ถ้า $(K_i - g_i) < 0$ กำหนดแถวตั้งที่มีค่าสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายที่น้อยที่สุดเป็น pivot column

2. หาข้อจำกัดที่แคบที่สุดบนแถวที่เป็น แถวหลัก (pivot column) เพื่อกำหนดแถวนอนเรียก แถวหลัก (pivot row)

   คำนวณ T_j / a_{jK} สำหรับ $a_{jK} > 0$

   เลือก $T_j / a_{jK} = \min(T_j / a_{jK} \ , a_{jK} > 0)$

   ให้ a_{pk} เป็น เลขหลัก (pivot number)

3. คำนวณ $b_{pi} = a_{pi} / a_{pk}$ สำหรับทุกค่าของ i และคำนวณ $T_p = T_p / a_{pk}$

4. คำนวณ
$$b_{ji} = a_{ji} - a_{jk} b_{pi}$$
$$T^*_j = T_j - a_{jk} T^*_p$$
$$(K_i - g_i)^* = (K_i - g_i) - (K_k - g_k) b_{pi}$$
   สำหรับทุกค่าของ i และ j ไม่เท่ากับ p

5. แทน $a_{ji} = b_{ji}$ สำหรับทุกค่าของ j และ i

   $T_j = T^*_j$ สำหรับทุกค่าของ j

   และ $(K_i - g_i) = (K_i - g_i)^*$ สำหรับทุกค่าของ i

6. ทำซ้ำตามข้อ 1.

2.1.5 **ตัวประมาณริดจ์** (Ridge Estimator)

ในกรณีที่ตัวแปรอิสระในสมการถดถอยมีสหสัมพันธ์กันอย่างสูงนั้น ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดจะให้ค่าประมาณที่ขาดความแม่นยำ (imprecise) ลักษณะของสหสัมพันธ์อาจจะเป็นคู่ของตัวแปร หรือ อาจเป็นลักษณะที่ตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง เป็นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของตัวแปรอิสระตัวอื่น ๆ ในสมการการถดถอย ซึ่งในสถานการณ์เช่นนี้ จะมีตัวแปรอิสระอย่างน้อย 1 ตัวที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสูง ซึ่งจะส่งผลให้การทดสอบสมมติฐานโดยใช้การทดสอบที (t-test) ของสัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแปรดังกล่าว มีโอกาสผิดพลาดสูง

ในปี ค.ศ. 1962 โฮเอิล (Hoerl) เป็นผู้คิดค้นตัวประมาณการถดถอยริดจ์ขึ้นมาใช้เป็นครั้งแรก โดยในขั้นแรกนั้นการนำเทคนิคการถดถอยริดจ์มาใช้เพื่อทดสอบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอิสระเพียงเล็กน้อยมีผลในการเปลี่ยนแปลงค่าประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอยอย่างไร และพบว่าในกรณีที่ข้อมูลมีพหุสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอิสระเพียงเล็กน้อยจะส่งผลให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยเปลี่ยนไปอย่างมาก

ต่อมาในปี ค.ศ.1970 โฮเอิล (Hoerl) และ เคนนาร์ด (Kennard) ได้ศึกษาหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุคูณเชิงเส้นที่ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำกว่าตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดเมื่อข้อมูลเกิดพหุสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระซึ่งหลักการโดยทั่วไปของตัวประมาณนี้คือเมื่อพบว่า $|X'X| \to 0$ ซึ่งจะมีผลให้ $(X'X)^{-1}$ มีแนวโน้มที่จะไม่ปรากฏค่า และค่าประมาณของ β คือ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ มีค่าสูงผิดความจริงจึงพยายามปรับรูปเมทริกซ์ $X'X$ โดยการผนวกค่าคงที่ใด ๆ ค่าหนึ่งที่มากกว่าศูนย์ (k) มาบวกกับสมาชิกทุกตัวในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $X'X$ จะทำให้เมทริกซ์ $X'X$ ลดสภาพความเป็นเมทริกซ์ที่ไม่ดี (ill - condition) ลงได้ ก่อนจะหาเมทริกซ์ผกผันของ $X'X$ ดังกล่าว

สมการปกติ (Normal Equation) ของตัวประมาณการถดถอยริดจ์ สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$(X'X + kI_n)\hat{\beta}_{HKB} = X'y$$

ดังนั้นตัวประมาณการถดถอยริดจ์ (Ridge Regression Estimator) เขียนได้ในรูป

(2.18) $$\hat{\beta}_{HKB} = (X'X + kI_n)^{-1}X'y \quad , \quad k > 0$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ หรือเรียกว่าเป็น พารามิเตอร์ที่เอนเอียง (biased parameter)

และ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ที่มีขนาด $(n \times n)$

ตัวประมาณการถดถอยริดจ์เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง แต่จะมีค่าความแปรปรวนน้อยกว่าตัวประมาณกำลังสองน้อยสุด

ในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณเมื่อข้อมูลมีพหุสัมพันธ์นั้น การเลือกค่า k ที่เหมาะสม จะสามารถทำให้ตัวประมาณริดจ์มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำกว่าตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดได้ แต่ในหลายกรณีเราไม่ทราบว่าค่า k ที่เหมาะสมควรเป็นเท่าไร ซึ่งนักวิจัยได้เสนอวิธีการหาค่า k ที่เหมาะสมหลายวิธีด้วยกัน โดยเริ่มแรกในปี ค.ศ.1970 โฮเอิล (Hoerl) และเคนนาร์ด (Kennard) ใช้เทคนิคการหาค่า k โดยพิจารณาจากกราฟ (Graphical Technique) หรือเรียกว่า Ridge Trace แต่เป็นวิธีการที่อาจให้คำตอบไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับการ

เลือกกำหนดของผู้ใช้ จึงมีผู้คิดค้นวิธีการหาค่า k ที่เหมาะสมโดยไม่ใช้กราฟ (Nongraphical Technique) ไว้หลายวิธี ซึ่ง Gibbons (1981) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบวิธีการต่าง ๆ ในการหาค่า k ที่เหมาะสม ผลการวิจัยพบว่า โดยภาพรวม วิธีการประมาณค่า k ที่คิดค้นโดยในปี ค.ศ. 1975 โฮเอิล (Hoerl) , เคนนาร์ด (Kennard) และ บลาดวิน (Bladwin) ซึ่งแทนด้วย k_{HKB} เป็นวิธีการหนึ่งที่มีประสิทธิภาพที่ดีในการประมาณค่า วิธีการประมาณค่า k_{HKB} ประมาณได้จาก

(2.19) $$k_{HKB} = \frac{p\sigma^2}{\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}}$$

เมื่อ p แทนจำนวนตัวแปรอิสระในการวิเคราะห์ความถดถอยพหุคูณ

$\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ แทนค่าสัมประสิทธิ์สมการถดถอยพหุคูณที่ประมาณ

และ σ^2 แทนความแปรปรวนของสมการถดถอยพหุคูณ

ตัวประมาณริดจ์สามัญ (ROLS)

สร้างจากตัวประมาณริดจ์รีเกรสชันและตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดสามัญ ซึ่งเรียกตัวประมาณดังกล่าวว่า ตัวประมาณริดจ์สามัญ (ROLS) โดยมีรูปแบบตัวประมาณดังนี้

เมื่อสมการปกติ (Normal Equation) ของตัวประมาณการถดถอยริดจ์สามัญสามารถเขียนได้ในรูป

$$(X'X + k_{OLS} I_n)\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{ROLS} = X'\underset{\sim}{y}$$

ดังนั้น ตัวประมาณการถดถอยริดจ์สามัญ (Ridge Ordinary Least Square Estimator) เขียนได้ในรูปแบบดังนี้

(2.20) $$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{ROLS} = (X'X + k_{OLS} I_n)^{-1} X'\underset{\sim}{y}$$

การประมาณ k_{OLS} คำนวณได้จากสมการ (2.19) โดยแทนค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ด้วยตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดสามัญ ($\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$) ที่คำนวณได้จากสมการ (2.7) และแทนค่า σ^2 ด้วย s^2_{OLS} ดังนั้น k_{OLS} สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังต่อไปนี้

(2.21) $$k_{OLS} = \frac{q s^2_{OLS}}{\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}}$$

เมื่อ $s^2_{OLS} = \frac{\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}\right)'\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}\right)}{n-q}$ เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ σ^2

และ $q = p + 1$

2.1.6 ตัวประมาณริดจ์ที่มีความแกร่ง (Robust Ridge Estimator)

ในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณเชิงเส้นนั้น เมื่อข้อมูลมีพหุสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและมีค่าผิดปกติขึ้นพร้อมกัน ในกรณีเช่นนี้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมน่าจะเป็นตัวประมาณที่ได้จากการผสมผสานระหว่างตัวประมาณที่ใช้แก้ปัญหาพหุสัมพันธ์และตัวประมาณที่ใช้แก้ปัญหาที่มีค่าผิดปกติเกิดขึ้น ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวประมาณบางตัวที่ได้จากการผสมผสานระหว่างตัวประมาณการถดถอยริดจ์และตัวประมาณการถดถอยที่มีความแกร่งซึ่งเราเรียกตัวประมาณดังกล่าวว่า ตัวประมาณริดจ์ที่มีความแกร่ง (Robust Ridge Estimator) ซึ่งได้แก่ตัวประมาณริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุด (Ridge Least Absolute Value Estimator (RLAV)) เป็นตัวประมาณที่นำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตัวประมาณริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุด (RLAV)

ในปี ค.ศ. 1984 และ 1985 ฟลาฟเฟนเบอร์เกอร์ (Pfaffenberger) และเดิลแมน (Dielman) ได้สร้างตัวประมาณริดจ์รีเกรสชันที่มีความแกร่ง โดยสร้างจากตัวประมาณริดจ์รีเกรสชันและตัวประมาณค่าสัมบูรณ์น้อยสุด ซึ่งเรียกว่าตัวประมาณดังกล่าวว่า ตัวประมาณริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุด (RLAV) ซึ่งมีรูปแบบตัวประมาณดังนี้

เมื่อสมการปกติ (Normal Equation) ของตัวประมาณการถดถอยริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุดสามารถเขียนได้ในรูป

$$(X'X + k_{LAV} I_n)\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{RLAV} = X'\underset{\sim}{y}$$

ดังนั้น ตัวประมาณการถดถอยริดจ์ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยสุด (Ridge Least Absolute Value Estimator) เขียนได้ในรูปแบบดังนี้

(2.22) $$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{RLAV} = (X'X + k_{LAV} I_n)^{-1} X'\underset{\sim}{y}$$

การประมาณ k_{LAV} คำนวณได้จากสมการ (2.19) โดยแทนค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ด้วยตัวประมาณค่าสัมบูรณ์น้อยสุด ($\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LAV}$) ที่คำนวณได้จากสมการ (2.17) และแทนค่า σ^2 ด้วย s^2_{LAV} ดังนั้น k_{LAV} สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังต่อไปนี้

(2.23) $$k_{LAV} = \frac{q s^2_{LAV}}{\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LAV}' \underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LAV}}$$

เมื่อ $s^2_{LAV} = \dfrac{\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LAV}\right)'\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LAV}\right)}{n-q}$ เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ σ^2

และ $q = p + 1$