บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 แบบจำลองวัสดุของคอนกรีต (Material model for concrete)

การศึกษาแบบจำลองวัสดุของคอนกรีตมี 2 ประการหลักที่จะต้องศึกษาคือ การจำลองแบบรอยแตก และฟังก์ชันที่ใช้สัมพันธ์กับแบบจำลองนั้น

2.1.1 การจำลองแบบรอยแตก (Crack modelling)

ในการพิจารณาความไม่เชิงเส้น (Nonlinearity) สิ่งสำคัญที่จะต้องพิจารณาสำหรับคอนกรีตเสริมเหล็ก คือ การแตกด้วยแรงดึง (Tensile cracking) โดยที่จะมีผลกระทบต่อพฤติกรรมของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กอย่างมากเนื่องจากคอนกรีตจะไม่สามารถรับรับแรงดึงได้มากนัก ดังนั้นการเลือกแบบจำลองรอยแตกที่เหมาะสม จะทำให้สามารถหาแบบจำลองที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลองคอนกรีต ส่วนประกอบพื้นฐานของการจำลองแบบรอยแตกจะอธิบายถึง (22):

2.1.1.1 ตัวแทนของการแตก (Crack representation)

ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หน่วยแรงและความเครียดถูกสมมุติให้ต่อเนื่องภายในหนึ่งชิ้นส่วน แต่หลังจากคอนกรีตเกิดการแตก จะเกิดความไม่ต่อเนื่องในหน่วยแรงและความเครียด ซึ่งตัวแทนของการแตกจะรวมความไม่ต่อเนื่องนี้เข้าไปในแบบจำลองคอนกรีตด้วย โดยทั่วไปจะแบ่งออกเป็น

1. แบบจำลองรอยแตกแบบแยกจุด (Discrete crack model)
2. แบบจำลองรอยแตกแบบกระจาย (Smeared crack model)

ในแบบจำลองรอยแตกแบบแยกจุด การแตกจะแทนด้วยการแตกของจุดต่อ (Node) ตามขอบเขตของชิ้นส่วน (Element) แสดงดังรูปที่ 2.1 แบบจำลองนี้ถูกเสนอครั้งแรกโดย Ngo และ Scordelis (1)

ในแบบจำลองรอยแตกแบบกระจาย จะสมมุติให้คอนกรีตยังคงต่อเนื่องหลังการแตก โดยความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงและความเครียดที่ผ่านรอยแตกถูกเฉลี่ยบนชิ้นส่วนที่อยู่ใกล้กันของรอยแตกนั้น ดังนั้นความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่แตกจะสามารถอธิบายในลักษณะที่ต่อเนื่องได้ในแต่ละจุดที่ถูกอินทิเกรตในชิ้นส่วนคอนกรีตนั้น รอยแตกจะขนานกันและกระจายอย่างชิดกัน ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเฉลี่ยของคอนกรีตที่แตกแทนด้วยเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด (Constitutive matrix) ดังแสดงดังรูปที่ 2.2 แบบจำลองนี้เสนอครั้งแรกโดย Rashid (23)

2.1.1.2 การเริ่มต้นและการแพร่กระจายของรอยแตก (Crack inititation and crack propagation)

แบบจำลองคอนกรีตส่วนมากจะใช้กฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรง (Strength criterion) ในการพิจารณาการเริ่มต้นการแตก รอยแตกที่จุดหนึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อหน่วยแรงหลัก (Principal stress) ที่จุดนั้นเกินหน่วยแรงของการแตก (Cracking stress) หรือ โมดูลัสของการร้าวแตก (Modulus of rupture) หรือ กำลังแรงดึงในการดัด (Tensile strength in flexural) ซึ่งเป็นกำลังในการทดสอบด้านการดัดของคานคอนกรีตล้วนซึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 150 มิลลิเมตร (35)

หลังจากการแตกเริ่มเกิดและขยายไปยังชิ้นส่วนคอนกรีตที่ติดกัน มีกฎเกณฑ์ที่ใช้ในการตรวจสอบการแพร่กระจายของรอยแตกดังนี้

1. กฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรง (Strength criterion)
2. กฎเกณฑ์ด้านกลศาสตร์ของรอยแตก (Fracture mechanics criterion)

กฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรงจะเหมือนกับการเริ่มต้นแตก กล่าวคือ การแพร่กระจายของรอยแตกจะเกิดขึ้นเมื่อหน่วยแรงที่ปลายของรอยแตกเกินหน่วยแรงของการแตก แต่ในช่วงปี ค.ศ. 1979-1980 Bazant และ Cedolin (24) ได้ทำการศึกษาและแย้งว่า กฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรงเป็นกฎเกณฑ์ที่ไม่สมบูรณ์นักเนื่องจากพวกเขาพบว่าเมื่อจัดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กลง หรือที่ปลายของรอยแตกที่เกิดขึ้นมีลักษณะ แหลมมากขึ้น จะเกิดการรวมกันของหน่วยแรง (Stress concentration) สูงที่ปลายของรอยแตกแม้จะมีแรงกระทำน้อย

กฎเกณฑ์ด้านกลศาสตร์ของรอยแตกของแบบจำลองรอยแตกแบบกระจาย ถูกเสนอขึ้นครั้งแรกโดย Bazant และ Cedolin (24) ในช่วงปี ค.ศ. 1979-1980 โดยไม่มีจุดมุ่งหมายในกฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรง แต่ละรอยแตกถูกจำลองเป็นแถบชิ้นส่วนคอนกรีตกว้างและไม่แหลม และใช้สมมุติฐานที่ว่า งานที่ใช้เพื่อให้แถบของรอยแตกขยายไปหนึ่งหน่วยมีค่าคงที่ กล่าวคือ การแพร่กระจายของรอยแตกไปที่ชิ้นส่วนถัดไปที่ปลายของแถบของรอยแตกจะเกิดเมื่อ อัตราการลดลงของพลังงานที่คำนวณได้ของแถบของรอยแตกเกินค่าวิกฤติ ซึ่งขึ้นอยู่กับพลังงานการแตกของคอนกรีต

2.1.1.3 การจำลองความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด (Constitutive) ของคอนกรีตที่แตก

การจำลองความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด (Constitutive) ของคอนกรีตที่แตกประกอบด้วย 2 ส่วนที่สำคัญคือ ความสัมพันธ์เฉลี่ยของหน่วยแรงและความเครียด และแบบจำลองรอยแตก ในส่วนแรกนั้นจะแทนความสัมพันธ์เฉลี่ยของหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่แตกในทิศทางของการแตก

สำหรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร ความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดต้องรวมหลักเกณฑ์ที่สำคัญของพฤติกรรมของคอนกรีตที่รับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร เช่น การปิดของรอยแตกร้าวและการเปิดใหม่ พร้อมด้วยผลกระทบของหน่วยแรงอัดและหน่วยแรงเฉือนที่รับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร ในส่วนที่สอง แบบจำลองการแตกมี 3 แบบที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ

1. แบบจำลองรอยแตกคงที่ (Fixed crack model)

แบบจำลองนี้ การแตกจะเกิดขึ้นบนเส้นตั้งฉากกับทิศทางของหน่วยแรงหลักที่มากที่สุด เมื่อหน่วยแรงหลักที่มากที่สุดมีค่าถึงค่าหน่วยแรงแตก ทิศทางของการแตกจะยังคงที่ตลอดการวิเคราะห์

2. แบบจำลองรอยแตกแบบหมุน (Rotating crack model)

แบบจำลองนี้ จะคล้ายกับแบบจำลองแรก เพียงแต่ทิศทางของการแตกจะไม่คงที่และมีการหมุนเกิดขึ้น

3. แบบจำลองรอยแตกแบบไม่ตั้งฉากและมีหลายรอย (Non-orthogonal multi-crack model)

ในปี ค.ศ. 1985 De Borst และ Nauta (25) ได้เสนอแบบจำลองนี้ หลักการของแบบจำลองนี้คือ แยกการเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมดเป็นการเพิ่มขึ้นของความเครียดของคอนกรีต และการเพิ่มขึ้นของความเครียดของรอยแตก โดยที่ในความเครียดของรอยแตกนั้นเป็นการรวมการแตกทุกๆอันที่จุดๆหนึ่งซึ่งรอยแตกแต่ละอันจะเป็นอิสระต่อกันและรอยแตกที่ไม่ตั้งฉากกันจำนวนมากสามารถเกิดขึ้นที่จุดๆเดียวกัน

ในงานวิจัยนี้จะใช้คุณลักษณะเริ่มต้นของแบบจำลองตามคำแนะนำของ C.Sittipunt และ S.L.Wood (18,19) ดังนี้คือ ใช้แบบจำลองรอยแตกแบบกระจายโดยมีรอยแตกตั้งฉากและคงที่ และใช้กฎเกณฑ์ด้านความแข็งแรงในการพิจารณาการเริ่มต้นและการแพร่กระจายของรอยแตก แต่เนื่องจากแบบจำลองรอยแตกที่คงที่จะไม่สามารถใช้แทนการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนมากๆซึ่งเกิดในบริเวณส่วนล่างของกำแพงได้ จึงจำลองการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนในกำแพงเป็นการแยกความเครียดเฉือนจากองค์ประกอบความเครียดอื่นๆดังแสดงในรูปที่ 2.3 กล่าวคือ เมื่อความเครียดเฉือนถูกแยกออกจากความเครียดอื่นๆในระบบพิกัดโกลบัล (Global coordinate) ความเครียดเหล่านี้จะยังคงรวมกันอยู่ในระบบพิกัดการแตก (Crack coordinate) ในทิศทางของรอยแตก ซึ่งในระบบพิกัดนี้จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดได้ และจะสามารถแยกออกได้เป็น ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนและความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดแนวตั้งฉากในระบบพิกัดโกลบัลได้ ในทำนองเดียวกันในระบบพิกัดการแตกจะสามารถหาหน่วยแรงจากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดได้และจะแยกออกเป็น หน่วยแรงเฉือนและหน่วยแรงตั้งฉากในระบบพิกัดโกลบัลได้เช่นกัน

ในส่วนของฟังก์ชันที่ใช้ในแบบจำลองนี้มี 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันหน่วยแรงตั้งฉากกับรอยแตก (Normal stress function) และ ฟังก์ชันหน่วยแรงเฉือน (Shear stress function) ลักษณะที่พิเศษที่สำคัญ 2 ประการของฟังก์ชันทั้งสองคือ การไม่เชิงเส้นของวัสดุ (Material nonlinearity) และ การขึ้นอยู่กับประวัติการรับแรง (History dependency) พฤติกรรมการไม่เชิงเส้นของคอนกรีตเกิดขึ้นเมื่อคอนกรีตเกิดการแตกหรือได้รับหน่วยแรงอัดสูงๆ หรือได้รับแรงกระทำแบบเป็นวัฎจักร ส่วนประวัติการรับแรงนั้นจะทำให้เกิดหน่วยแรงและความเครียดในอดีตที่มีผลต่อหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในปัจจุบัน ซึ่งจะขึ้นกับความเครียดในขณะนั้น

2.1.2 ฟังก์ชันของหน่วยแรงตั้งฉากกับรอยแตก (Normal stress function)

ฟังก์ชันของหน่วยแรงตั้งฉากแทนด้วยความสัมพันธ์เฉลี่ยของหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตในทิศทางตั้งฉากกับรอยแตก และเนื่องจากคอนกรีตถูกสมมุติให้ยังคงต่อเนื่องหลังการแตก ดังนั้นความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงและความเครียดข้ามรอยแตกจะกระจายไปทั่วชิ้นส่วนคอนกรีต และทำให้ฟังก์ชันของหน่วยแรงตั้งฉากไม่เพียงแต่แทนความสัมพันธ์เฉลี่ยของหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่ยังไม่แตกเท่านั้นแต่ยังแทนความไม่ต่อเนื่องจากรอยแตกด้วย ฟังก์ชันของหน่วยแรงตั้งฉากที่ใช้ในแบบจำลองคอนกรีตนี้ มีสมมุติฐานหลัก 2 ประการคือ

1. อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของคอนกรีตที่แตกมีค่าเป็นศูนย์
2. พฤติกรรมของคอนกรีตที่แตกเป็นพฤติกรรม Uniaxial ในทิศทางของการแตก

ในสมมุติฐานแรก อัตราส่วนปัวซองของคอนกรีตที่แตกถูกสมมุติให้มีค่าเป็นศูนย์ เพราะการมีผลกระทบต่อกันระหว่างแกน 2 แกนที่ตั้งฉากกันลดลงอย่างมากหลังการแตก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะสมมุติอัตราส่วนปัวซองของคอนกรีตที่แตกมี่ค่าเป็นศูนย์

ในสมมุติฐานที่สอง คอนกรีตถูกสมมุติให้มีพฤติกรรม Uniaxial ในทิศทางของรอยแตก และสมมุติให้หน่วยแรงในทิศทางที่แตกขึ้นกับเพียงความเครียดในทิศทางนั้นเท่านั้น

หน่วยแรงที่จุดๆหนึ่งในชิ้นส่วนแต่ละชิ้นส่วน สามารถเปลี่ยนได้เนื่องจากการเปลี่ยนทิศทางของแรงที่มากระทำหรือการกระจายแรงใหม่ของหน่วยแรงเนื่องจากการตอบสนองไม่เชิงเส้นทุกๆแห่งในโครงสร้าง ดังนั้นทุกๆชิ้นส่วนจะได้รับแรงกระทำ (Loading), คลายแรงกระทำ (Unloading) และ รับแรงกระทำอีก (Reloading) ในระหว่างการวิเคราะห์ และฟังก์ชันของหน่วยแรงตั้งฉากต้องสามารถกำหนดความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดของลำดับการรับแรงกระทำได้ จากงานวิจัยของ C.Sittipunt และ S.L.Wood (18,19) ฟังก์ชันนี้จะสามารถแทนด้วยหลักเกณฑ์ที่สำคัญดังนี้

2.1.2.1 การทำให้แข็งขึ้นด้านแรงดึง (Tension stiffening)

2.1.2.2 การเปิดและการปิดใหม่ของรอยแตก (Crack closing and crack reopening)

2.1.2.3 การทำให้อ่อนลงด้านแรงอัด (Compression softening)

2.1.2.4 ผลของการโอบรัดด้วยเหล็กปลอก (Effect of steel confinement)

2.1.2.5 การลดลงของคุณสมบัติคอนกรีตภายใต้แรงกระทำแบบวัฎจักร (Degradation of concrete properties with cyclic loading)

2.1.2.1 **การทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึง** (Tension stiffening)

เมื่อคอนกรีตเสริมเหล็กเกิดการแตก คอนกรีตที่อยู่ระหว่างรอยแตกยังสามารถรับหน่วยแรงดึงได้โดยแรงยึดเหนี่ยวระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีตที่อยู่รอบๆ ซึ่งทำให้ค่าสติฟเนสเฉลี่ยด้านแรงดึงของเหล็กเสริมที่ฝังอยู่ในคอนกรีตมีค่าสูงกว่าเหล็กธรรมดา (Plain bar) ซึ่งเรียกว่า การทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึง (Tension Stiffening) เนื่องจากการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงเป็นผลมาจากบทบาทระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมดังนั้นพฤติกรรมของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึง จะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของคอนกรีตและเหล็ก เช่น ขนาดของรอยแตก, อัตราส่วนเหล็กเสริม และค่าแรงยึดเหนี่ยวระหว่างผิวสัมผัส

พฤติกรรมของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงในการวิเคราะห์คอนกรีตเสริมเหล็กด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแสดงได้ 2 วิธีคือ โดยวิธีแรกผลของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึง จะถูกรวมอยู่ในพฤติกรรมของเหล็กเสริมโดยหลังจากการแตก จะสมมุติให้คอนกรีตไม่สามารถรับหน่วยแรงดึงในทิศทางตั้งฉากกับรอยแตกร้าวได้ ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมจะถูกรวมผลของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงเข้าไปด้วย

ในวิธีที่สอง ผลของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงจะถูกรวมอยู่ในชิ้นส่วนของคอนกรีตหลังจากคอนกรีตเกิดการแตก ความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมยังคงเหมือนกับเหล็กธรรมดา ขณะที่หน่วยแรงดึงที่ตั้งฉากกับรอยแตกของคอนกรีตแทนที่จะลดลงเป็นศูนย์ในทันทีแต่จะค่อยๆลดลงซึ่งใช้แทนผลของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึง ซึ่งในงานวิจัยนี้พฤติกรรมการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงจะรวมอยู่ในชิ้นส่วนของคอนกรีต ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตหลังจากการแตกแทนด้วยแบบจำลองเส้นตรงไม่ต่อเนื่องดังแสดงในรูปที่ 2.4 ในแบบจำลองนี้หน่วยแรงดึงของคอนกรีตจะลดลงทันทีทันใด จากหน่วยแรงแตก (σ_{cr}) จนถึงหน่วยแรงที่น้อยกว่า ($\alpha\sigma_{cr}$) หลังการแตก จากนั้นเมื่อความเครียดดึง (Tensile strain) เพิ่มขึ้น หน่วยแรงดึงจะลดลงเป็นเส้นตรงจนถึงหน่วยแรงขอบล่าง (σ_l) ที่ ความเครียดดึง ε_l และจะยังคงมีค่าคงที่เป็น σ_l ดังนั้นจะเห็นได้ว่า พารามิเตอร์ที่กำหนดพฤติกรรมของการทำให้แข็งขึ้นทางด้านแรงดึงจะมีอยู่ 3 ตัว คือ α, ε_l และ σ_l

2.1.2.2 **การปิดและการเปิดใหม่ของรอยแตก** (Crack closing and crack reopening)

เมื่อชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กได้รับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร รอยแตกจะปิดและเปิดใหม่ตลอดการรับแรง โดยที่รอยแตกจะเปลี่ยนจากการเปิดเต็มที่ไปจนถึงการปิดเต็มที่ และสติฟเนสของคอนกรีตที่แตกจะเพิ่มขึ้นจากค่าใกล้ศูนย์จนถึงค่าใกล้โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต (E_c)

เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด เนื่องจากการปิดและเปิดของรอยแตกสามารถแบ่งได้ดังนี้

- เส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก (Envelope curve) ของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงดึงและความเครียดดึงในการรับแรงแบบเป็นวัฏจักร สามารถประมาณได้โดยเส้นโค้งเมื่อรับแรงกระทำทางเดียว (Monotonic curve) ของคอนกรีตเมื่อรับแรงดึงทางเดียว (Uniaxial tension) และเส้นโค้งความสัมพันธ์หลักของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงอัดและความเครียดอัดในการรับแรงแบบเป็นวัฏจักร สามารถประมาณได้โดยเส้นโค้งรับแรงกระทำทางเดียว ของคอนกรีตเมื่อรับแรงอัดทางเดียว (Uniaxial compression)

- เส้นโค้งคลายแรงกระทำ (Unloading curve) ด้านแรงดึงเมื่อรอยแตกปิด ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 3 ประการ ได้แก่ ส่วนเริ่มต้นแข็งตัว (The initially stiff region), ส่วนอ่อนตัวลง (The softened region) และ ส่วนแข็งตัว (The stiffened region) และจะรวมเข้ากับเส้นโค้งความสัมพันธ์หลักด้านแรงอัดที่จุดใดจุดหนึ่งในช่วงความเครียดอัด

- เส้นโค้งการรับแรงกระทำใหม่ (Reloading curve) ด้านแรงดึงเมื่อรอยแตกเปิด โดยเริ่มมีค่าสติฟเนสเดียวกับค่าสติฟเนสของคอนกรีตที่ไม่แตก จากนั้นเส้นโค้งจะอ่อนลงทีละน้อยจนกระทั่งรวมเขากับเส้นโค้งความสัมพันธ์หลักด้านรับแรงดึงที่จุดใดจุดหนึ่งในช่วงความเครียดดึง

รูปแบบของกฎการปิดและเปิดของรอยแตกอธิบายได้ ดังรูปที่ 2.5 และ รูปที่ 2.6 รอยแตกจะถูกพิจารณาว่าปิดเต็มที่เมื่อความเครียดอัดเกินกว่า ε_n และรอยแตกถูกพิจารณาว่าเปิดบางส่วนเมื่อความเครียดอยู่ระหว่าง ε_n และ ε_l และรอยแตกจะถูกพิจารณาว่าเปิดเต็มที่เมื่อความเครียดดึงเกินกว่า ε_l ในแต่ละขั้นของแรงกระทำ (Load Step) คอนกรีตที่แตกจะถูกพิจารณาว่าเปิดถ้าหากความเครียดที่เพิ่มขึ้นเป็นการขยายและจะถูกพิจารณาว่าปิดถ้าหากความเครียดที่เพิ่มขึ้นเป็นการอัด แบบจำลองที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่นำมาใช้เสนอโดย Yankelevsky และ Reinhardt (26) ในแบบจำลองที่เสนอนี้จะเห็นว่ามีอยู่ 5 จุด คือ $(0,\sigma_1)$, (ε_l,σ_2) , (ε_l,σ_l) , (ε_3,σ_3)และ (ε_n,σ_n) ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของคอนกรีตด้านแรงดึงเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร ทุกๆจุดจะมีค่าคงที่ตลอดการรับแรงยกเว้นจุด (ε_n,σ_n) ซึ่งจะขึ้นกับประวัติการรับแรงแบบเป็นวัฏจักรทางด้านแรงอัด กฎที่ใช้อธิบายถึงรอยแตกปิดและเปิดในทิศทาง i สามารถอธิบายได้ดังนี้

การปิดของรอยแตก (Crack closing , $\Delta\varepsilon < 0$)

เส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดอธิบายได้ดังรูปที่ 2.5 โดยมีส่วนสำคัญอยู่ 3 ส่วน คือ

1. ส่วนเริ่มต้นแข็งตัว (Initially stiff region, เมื่อ $\sigma > \sigma_2$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดคือเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่าง (ε,σ) และ ($0,\sigma_1$) โดยจะแทนการตอบสนองของคอนกรีตเมื่อรอยแตกเริ่มปิด ซึ่งการแข็งตัวจะน้อยเมื่อรอยแตกเริ่มปิดที่หน่วยความเครียดสูงๆ ส่วนที่ 1 นี้จะสิ้นสุดเมื่อหน่วยแรงอัดมีค่าเกิน σ_2

2. ส่วนอ่อนตัวลง (Softened region, เมื่อ $\sigma = \sigma_2$ และ $\varepsilon > \varepsilon_i$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด คือเส้นในแนวราบที่เชื่อมต่อระหว่าง (ε,σ) และ (ε_i,σ_2) โดยที่หน่วยแรงมีค่าคงที่เท่ากับ σ_2 และสติฟเนสสัมผัส (Tangent stiffness) มีค่าเป็นศูนย์ เส้นนี้จะแทนการปิดของรอยแตกที่ ปิดเต็มที่เนื่องจากผิวของรอยแตกที่อยู่ตรงข้ามกันอยู่ห่างกันมากและจะไม่มีความต้านทานต่อการปิดของรอยแตก จนกระทั่งความเครียดดึงมีค่าลดลงถึง ε_i และเกิดการสัมผัสระหว่างผิวของรอยแตกทั้งสอง

3. ส่วนแข็งตัว (Stiffened region, เมื่อ $\sigma < \sigma_2$ และ $\varepsilon_i < \varepsilon < \varepsilon_n$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด คือเส้นโค้งที่เชื่อต่อระหว่าง (ε,σ) และ (σ_n,σ_n) ซึ่งกำหนดด้วยสมการที่ (1)

$$\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_n}{\varepsilon_{os}} = \frac{\sigma_c - \sigma_n}{\sigma_{os}} + \left(\frac{\sigma_c - \sigma_n}{\sigma_{os}}\right)^s \tag{1}$$

โดยที่

$$s = \left(\frac{E_c}{E_t} - 1\right)\left(\frac{k_2}{k_1 E_c - k_2}\right)$$

$$\sigma_{os} = \frac{|k_2|^{\frac{s}{s-1}}}{|k_1 E_c - k_2|^{\frac{1}{s-1}}}$$

$$\varepsilon_{os} = \frac{\sigma_{os}}{E_c}$$

$$k_1 = \varepsilon_c - \varepsilon_n$$

$$k_2 = \sigma_c - \sigma_n$$

E_t = สติฟเนสสัมผัสที่จุดเริ่มต้นของเส้นโค้งคลายแรงกระทำ

E_c = โมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต

การเปิดของรอยแตก (Crack opening , $\Delta\varepsilon > 0$)

เส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดอธิบายได้ดังรูปที่ 2.6 โดยมีส่วนสำคัญอยู่ 4 ส่วน คือ

1. ส่วนเริ่มต้นแข็งตัว (Initially stiff region, เมื่อ $\sigma < \sigma_4$ และ $\varepsilon_n < \varepsilon < \varepsilon'_{max}$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด คือเส้นที่มีสติฟเนสสัมผัสเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต (E_c) เส้นโค้งนี้แสดงถึงการแข็งตัวของคอนกรีตที่แตกเมื่อรอยแตกเริ่มเปิด

2. ส่วนอ่อนตัวลงเป็นเส้นตรง (Linear softening region I, เมื่อ $\sigma_2 > \sigma > \sigma_1$ และ $\varepsilon_n < \varepsilon < \varepsilon'_{max}$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดคือ เส้นที่เชื่อมต่อระหว่าง (ε,σ) และ $(\varepsilon'max/2,\sigma_2)$

3. ส่วนอ่อนตัวลงเป็นเส้นตรงช่วงที่สอง (Linear softening region II, เมื่อ $\sigma > \sigma_2$และ $\varepsilon_n < \varepsilon < \varepsilon'_{max}$)เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดคือ เส้นที่เชื่อมต่อระหว่าง $(\varepsilon'max/2,\sigma_2)$ และ $(\varepsilon'max,\sigma_1)$

4. ส่วนอ่อนตัวลง (Softening region, เมื่อ $\sigma = \sigma_1$ และ $\varepsilon'_{max} < \varepsilon$) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด คือเส้นในแนวราบโดยที่หน่วยแรง σ มีค่าเท่ากับ σ_1และสติฟเนสสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์

โดยที่ (ε,σ) คือ ความเครียดและหน่วยแรงที่ขั้นตอนของแรงท้ายสุด (Last load step)

(ε_n,σ_n) คือ ความเครียดและหน่วยแรงที่ขั้นตอนของแรงปัจจุบัน (Current load step)

ε'_{max} คือ ความเครียดดึงมากที่สุดของครั้งก่อนในทิศทาง I

$\Delta\varepsilon$ คือ ความเครียดที่เพิ่มขึ้น , $\varepsilon_c - \varepsilon$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมการปิดและเปิดใหม่ของรอยแตก จะมีอยู่ 5 ตัว คือ σ_1, σ_2,σ_3,σ_4 และ σ_n

2.1.2.3 **การทำให้อ่อนตัวลงทางด้านแรงอัด** (Compression softening)

เมื่อคอนกรีตได้รับหน่วยแรงอัดสูงๆ คอนกรีตจะมีพฤติกรรมอ่อนตัวลง ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตภายใต้แรงอัดทางเดียว (Uniaxial Compression) จะเป็นเส้นตรงเมื่อคอนกรีตได้รับหน่วยแรงอัดน้อยๆ เมื่อได้รับหน่วยแรงอัดเพิ่มขึ้นเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตจะเริ่มมีแนวโน้มที่อ่อนตัวลงทีละน้อยจนกระทั่งถึงจุดยอดของเส้นโค้งดังรูปที่ 2.7 จากนั้นหน่วยแรงอัดจะเริ่มลดลงเมื่อความเครียดอัดเพิ่มขึ้น การลดลงของกำลังเช่นนี้จะแทนการเสียหายสะสมในคอนกรีตเนื่องจากความเครียดอัดสูงๆ

ในงานวิจัยนี้จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่เสนอในงานวิจัยของ C.Sittipunt และ S.L.Wood (18,19) ซึ่งสามารถแทนความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตภายใต้แรงอัดทางเดียวได้อย่างถูกต้องทั้งในส่วนที่ขึ้นและส่วนที่ลดลงด้วยฟังก์ชันง่ายๆเพียงฟังก์ชันเดียว ซึ่งฟังก์ชันนี้จะต้องกำหนดเพียงกำลังของคอนกรีตและสติฟเนสของคอนกรีตเริ่มต้นเท่านั้น เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของการทำให้อ่อนตัวลงทางด้านแรงอัด จะมีสติฟเนสสัมผัส (Tangent Stiffness) เหมือนกับของพฤติกรรมการปิดของรอยแตกซึ่งเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต (E_c) ที่จุดรอยต่อ (Transition point) (ε_n,σ_n) ดังรูปที่ 2.7 ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (2) และ (3)

เมื่อ $\varepsilon > \varepsilon_n$ $$\sigma = E_c \varepsilon \quad (2)$$

เมื่อ $\varepsilon < \varepsilon_n$ $$\frac{\sigma - \sigma_n}{\sigma_{oc}} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{\varepsilon_{oc}} e^{\left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{\varepsilon_{oc}}\right)} \quad (3)$$

โดยที่ $\sigma_{oc} = f_{cult} - \sigma_n$

f_{cult} = หน่วยแรงอัดประลัยของคอนกรีต

E_c = โมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมการทำให้อ่อนลงทางด้านแรงอัดจะมีอยู่ 4 ตัว คือ ε_n, σ_n, E_c และ f_{cult} แต่ ε_n, σ_n ได้นิยามไว้ในพฤติกรรมการเปิดและปิดของรอยแตกแล้ว ดังนั้นจะต้องนิยามพารามิเตอร์ในพฤติกรรมนี้ 2 ตัว คือ E_c และ f_{cult}

2.1.2.4 **ผลคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอก** (Effect of steel confinement)

จากผลการทดลองเห็นได้ชัดว่ากำลัง (strength) และ ความเหนียว (ductility)ของคอนกรีตเพิ่มขึ้นจะอย่างมากภายใต้สภาวะของแรงอัดสามแกน (triaxial compression) ในชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กสภาวะของแรงอัดสามแกนจะเกิดขึ้นเมื่อคอนกรีตถูกโอบรัดด้วยเหล็กปลอก(Confined concrete) เมื่อหน่วยแรงอัดมีค่าน้อยเหล็กปลอกจะถูกดันจากคอนกรีตเพียงเล็กน้อยซึ่งไม่สามารถให้ผลของการโอบรัดแก่คอนกรีตได้ ดังนั้นคอนกรีตที่อยู่ภายในเหล็กปลอกจะไม่ได้รับผลของการโอบรัดเมื่อหน่วนแรงอัดมีค่าน้อยๆ แต่เมื่อหน่วยแรงอัดมีค่าเข้าใกล้กำลังรับแรงอัดของคอนกรีต เหล็กปลอกจะเริ่มให้ผลของการโอบรัดเนื่องจากคอนกรีตที่แตกจะไปดันเหล็กปลอกซึ่งจะทำให้ เกิดแรงอัดกลับไปยังคอนกรีต

แบบจำลองของคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอกที่เป็นต้นแบบในงานวิจัยนี้นำเสนอโดย Shiekh และUzumeri (12) เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอก แสดงดังรูปที่ 2.8 ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. ส่วนที่ยังไม่ถูกอัดแตก (The uncrushed section)

ส่วนนี้ เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดคล้ายกับเส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดด้านแรงอัดของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก (Unconfined concrete) ก่อนที่จะเกิดการแตก ความสัมพันธ์จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงโดยมีสติฟเนสสัมผัสเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต (E_c) จนกระทั่งถึงจุด (ε_n,σ_n) และจะเริ่มเป็นไปตามเส้นโค้งของพฤติกรรมการอ่อนลงด้านแรงอัดเมื่อ $\varepsilon < \varepsilon_n$ จนกระทั่งถึงหน่วยแรงอัดของคอนกรีต f_{cult} ค่าของ f_{cult} จะเท่ากับ $k_s f'_c$ ซึ่งจะมากกว่าหน่วยแรงอัดของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก f'_c เทอม k_s จะใช้แทนการเพิ่มขึ้น

ของกำลังรับแรงอัดเนื่องมาจากการ โอบรัดด้วยเหล็กปลอก หลังจากนั้นเส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจะเข้าสู่ส่วนที่ 2

2. ส่วนที่ถูกอัดแตก (The crush plateau)

ส่วนนี้จะมีหน่วยแรงอัดคงที่เท่ากับ f_{cult} จนกระทั่งความเครียดอัดมีค่าถึง ε_2 หลังจากนั้นเส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจะเข้าสู่ส่วนที่ 3

3. ส่วนที่ถูกอัดแตก (The totally crushed section)

ส่วนนี้เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียจะลดลงเป็นเส้นตรงจากจุด(ε_2,f_{cult}) จนถึงจุด (ε_{85},0.85f_{cult}) และจะยังคงลดลงเป็นเส้นตรงจนกระทั่งหน่วยแรงอัดเป็น 0.30f_{cult} สำหรับความเครียดอัดสูงๆหน่วยแรงอัดก็จะยังคงมีค่าคงที่เท่ากับ 0.30f_{cult}

ดังนั้นพารามิเตอร์ที่ใช้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอกจะมีอยู่ 3 ตัว คือ k_s , ε_2 และ ε_{85} ซึ่งขึ้นกับองค์ประกอบดังต่อไปนี้

- อัตราส่วนต่อปริมาตรของเหล็กปลอก
- ระยะห่างของเหล็กปลอก
- คุณสมบัติของเหล็กปลอก
- การกระจายของเหล็กเสริมหลัก

ซึ่งสามารถค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 และองค์ประกอบดังกล่าวได้จากการคำนวณโดยใช้งานวิจัยของ Shiekh และUzumeri (12)

2.1.2.5 การลดลงของคุณสมบัติคอนกรีตภายใต้แรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร (Degradation of concrete properties under cyclic loadings)

แบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดแบบเป็นวัฏจักรของคอนกรีตซึ่งมีพื้นฐานจากการทดลองโดย Karsan, Jirsa และ Sinha (28) โดยมีขั้นตอนที่ใช้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดแบบเป็นวัฏจักร ซึ่งนำมาจากแบบจำลองพฤติกรรมของคอนกรีตที่รับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรที่ เสนอโดย Yankelevsky และ Reinhardt (29) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจะถูกกำหนดโดยเส้นโค้ง 2 เส้น คือ เส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก (Envelope curve) และ เส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน (Common point curve) ดังแสดงในรูปที่ 2.9

- เส้นโค้งความสัมพันธ์หลักใช้กำหนดขอบเขตตำแหน่งของหน่วยแรงและความเครียดที่ยอมได้ ซึ่งเส้นโค้งของหน่วยแรงและความเครียดจะต้องอยู่ภายในพื้นที่ที่ล้อมรอบโดยเส้นโค้งความสัมพันธ์หลักและแกนความเครียด เส้นโค้งความสัมพันธ์หลักจะแสดงโดยเส้นโค้งหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตภายใต้แรงอัดกระทำทางเดียว

● แต่ละจุดบนเส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน (ε_{cp},σ_{cp}) แสดงจุดรวม (focal point) ของเส้นโค้งรับแรงกระทำใหม่ด้านแรงอัด ซึ่งความเครียดอัดมากที่สุดในครั้งก่อนที่จุดเริ่มต้นของเส้นโค้งรับแรงกระทำใหม่ มีค่าเท่ากับ ε_{cp} เส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน กำหนดโดยสมการที่ (3)

$$\sigma_{cp} = \sigma_n + 0.85\left(\sigma_{oc} \frac{\varepsilon_{cp} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{oc}} e^{1-\frac{\varepsilon_{cp}-\varepsilon_n}{\varepsilon_{oc}}} \right) \tag{3}$$

โดยที่ $(\varepsilon_{cp}, \sigma_{cp})$ คือ ความเครียดและหน่วยแรงบนเส้นโค้ง common point

$(\varepsilon_n, \sigma_n)$ คือ พารามิเตอร์สำหรับแบบจำลองคอนกรีต

$(\varepsilon_{cp}, \sigma_{cp})$ ได้นิยามไว้ในการทำให้อ่อนตัวลงด้านแรงอัด

ข้อกำหนดสำหรับการเพิ่มแรงกระทำและการลดแรงกระทำทางด้านแรงอัดแสดงในรูปที่ 2.10 เส้นโค้งลดแรงกระทำประกอบด้วย 3 ส่วนที่สำคัญ คือ

1. ส่วนลดแรงกระทำเริ่มต้น (The Initial unloading, D-E) คือ เส้นที่มีความชันเท่ากับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต(E_c) โดยที่เส้นโค้งนี้สามารถเริ่มจากจุดใดๆที่อยู่บนหรือต่ำกว่าเส้นโค้งความสัมพันธ์หลักโดยจะสิ้นสุดเมื่อหน่วยแรงอัดมีค่าถึง $0.30f_{cult}$

2. ส่วนลดแรงกระทำที่อ่อนตัว (The Softening unloading, E-F) คือ เส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสิ้นสุดของเส้นโค้งลดแรงกระทำเริ่มต้นและจุด (ε_p,0) บนแกนความเครียด ความเครียด ε_p แสดงความเครียดอัดถาวรในรอบแรงกระทำปัจจุบัน ซึ่งค่า ε_p สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4) และ สมการที่ (5) ที่เสนอโดย Yankelevsky และ Reinhardt (29)

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{ult}\left(1.0 - 0.425 e^{(1-s)}\right)}{1 - \left(s e^{(1-s)}\right)} \tag{4}$$

ถ้า $\varepsilon_p < 0.70 \cdot \varepsilon^c_{max}$

$$\varepsilon_p = 0.70 \cdot \varepsilon^c_{max} \tag{5}$$

เมื่อ $s = \dfrac{\varepsilon^c_{max}}{\varepsilon_{ult}}$

ε_{ult} คือ ความเครียดอัดที่หน่วยแรงอัดประลัยของคอนกรีต (f_{cult})

ε^c_{max} คือ ความเครียดอัดมากที่สุดในครั้งก่อน

3. ส่วนลดแรงกระทำที่หน่วยแรงเท่ากับศูนย์ (The zero-stress unloading, F-G) คือ เส้นโค้งที่เริ่มจากตำแหน่ง (ε_p,0) และจะไปต่อตามแกนความเครียด กรณีที่เส้นนี้ไปถึงจุดเริ่มต้น (origin) ก็จะไปต่อตามเส้นโค้งลดแรงกระทำด้านแรงดึง

เส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่ทางด้านแรงอัดประกอบด้วยส่วนสำคัญ 3 ส่วน คือ

1. ส่วนเพิ่มแรงกระทำใหม่เริ่มต้น (The initial reloading, A-B และ G-H) คือ เส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดเริ่มต้นของเส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่กับจุดที่อยู่บนเส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน ซึ่งมีความเครียดเท่ากับค่าความเครียดอัดมากที่สุดในครั้งก่อน (ε^{c}_{max}) ส่วนนี้จะสิ้นสุดเมื่อตัดกับเส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน

2. ส่วนเพิ่มแรงกระทำใหม่ที่อ่อนตัว (The softening reloading, B-C และ H-I) คือ เส้นที่เริ่มจากจุดสิ้นสุดของเส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่เริ่มต้น และจะมีความชันเท่ากับ $0.10E_c$ ส่วนนี้จะสิ้นสุดเมื่อไปถึงเส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก

3. เส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก (The envelope curve,C-D และ I-J) ส่วนนี้จะไปตามเส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก

เนื่องจากผลการทดลองเกี่ยวกับพฤติกรรมของคอนกรีตด้านแรงอัดแบบเป็นวัฏจักรทั้งหมดเป็นของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก ดังนั้นวิธีที่ใช้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่รับแรงกระทำทางเดียวของคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอก และ เส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำและลดแรงกระทำของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก จะถูกนำมาใช้เพื่อกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดแบบเป็นวัฏจักรสำหรับคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอก

พิจารณารูปที่ 2.11 เส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่ทางด้านแรงอัดของคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอกประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. ส่วนเพิ่มแรงกระทำใหม่เริ่มต้น (The initial reloading, E-F) ส่วนนี้จะเหมือนกับในคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก โดยจะเป็นเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดเริ่มต้นของเส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่กับจุดที่อยู่บนเส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน ซึ่งมีความเครียดเท่ากับค่าความเครียดอัดมากที่สุดในครั้งก่อน (ε^{c}_{max}) ส่วนนี้จะสิ้นสุดเมื่อตัดกับเส้นโค้งตำแหน่งคอมมอน

2. ส่วนเพิ่มแรงกระทำใหม่ที่อ่อนตัว (The softening reloading, F-G) ส่วนนี้จะเหมือนกับในคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก โดยจะเป็นเส้นที่เริ่มจากจุดสิ้นสุดของเส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่เริ่มต้น และจะมีความชันเท่ากับ $0.10E_c$ ส่วนนี้จะสิ้นสุดเมื่อไปถึงเส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก

3. ส่วนที่ถูกอัดแตก (The crush plateau, A-B และ G-H-I) ในส่วนนี้แทนที่จะไปตามเส้นโค้งความสัมพันธ์หลัก เหมือนกับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก แต่เส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่จะเป็นแนวนอนจนกระทั่งเกิดการลดแรงกระทำ (จุด B) หรือความเครียดถึงค่า ε_2 (จุด H)

ถ้าความเครียดอัดมีค่าเกิน ε_2 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจะลดลงเป็นเส้นตรงจาก (ε_2,σ_G) จนถึง ($\varepsilon_{85},0.85\sigma_G$) ($\sigma_G$ คือ หน่วยแรงอัดเมื่อความเครียดอัดมีค่าเทากับ ε_2) และจะยังคงอยู่บนเส้นนี้ไปจนหน่วยแรงอัดมีค่าถึง $0.30f_{cull}$ สำหรับความเครียดอัดสูงๆหน่วยแรงอัดจะมีค่าคงที่เท่ากับ $0.30f_{cull}$ เส้นโค้งเพิ่มแรงกระทำใหม่ช่วงนี้จะเหมือนกับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเมื่อรับ

แรงกระทำทางเดียวของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอกภายหลังจากคอนกรีตถูกอัดแตกแล้ว ดังรูปที่ 2.5

เส้นโค้งลดแรงกระทำสำหรับคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอกจะเหมือนของคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก ซึ่งจะประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. ส่วนลดแรงกระทำเริ่มต้น (The initial unloading, B-C และ I-J) ส่วนนี้จะเริ่มด้วยสติฟเนสสัมผัสมีค่าเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต (E_c)และจะอยู่บนเส้นนี้จนกระทั่งหน่วยแรงอัดมีค่าถึง $0.30f_{cull}$
2. ส่วนลดแรงกระทำที่อ่อนตัว (The Softening unloading, C-D และ J-K) ส่วนนี้จะเป็นเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสิ้นสุดของเส้นโค้งลดแรงกระทำเริ่มต้นและจุด (ε_p,0) (จุด Dและ K)
3. ส่วนลดแรงกระทำที่หน่วยแรงเท่ากับศูนย์ (The zero-stress unloading, D-E) ส่วนนี้จะเริ่มจากจุด (ε_p,0) และจะไปตามแกนความเครียด กรณีที่เส้นนี้ไปถึงจุดเริ่มต้น (Origin) ก็จะไปต่อตามเส้นโค้งลดแรงกระทำด้านแรงดึง

จะเห็นได้ว่าคอนกรีตที่โอบรัดด้วยเหล็กปลอกจะมีความเหนียว (Ductility) มากกว่าคอนกรีตที่ไม่ได้โอบรัดด้วยเหล็กปลอก ซึ่งทำให้มีการกระจายพลังงาน (Energy dissipation) ที่ดีกว่า

พฤติกรรมของกฎเกณฑ์เหล่านี้จะประกอบกันเป็นความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดที่สมบูรณ์ในทิศทางตั้งฉากกับรอยแตก

2.1.3 **ฟังก์ชันของหน่วยแรงเฉือน** (Shear stress function)

ในงานวิจัยของ C.Sittipunt และ S.L.Wood (17,18) ได้ศึกษาและแนะนำให้ใช้พารามิเตอร์ 3 ตัวที่จะใช้ กำหนดฟังก์ชันของหน่วยแรงเฉือนของแบบจำลองรอยแตกแบบกระจาย (Smeared crack model) คือ ความเครียดของรอยแตก, ความเครียดเฉือน และอัตราส่วนเหล็กเสริม

ในแบบจำลองรอยแตกทั่วๆ มีวิธีการอยู่ 2 วิธีที่ใช้แทนสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่แตก คือ
1. การลดสติฟเนสแรงเฉือน
2. การแปรผันของสติฟเนสแรงเฉือนตามฟังก์ชันอื่น

การลดสติฟเนสแรงเฉือน ค่าสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่ไม่แตกจะลดลงด้วยแฟคเตอร์ค่าหนึ่งหลังคอนกรีตแตกลงไปจนถึงค่าสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่แตกสามารถรับแรงเฉือนได้ด้วย Aggregate interlock

ค่าสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่แตกร้าวจะถูกสมมุติให้เป็นฟังก์ชันของความเครียดที่ตั้งฉากกับทิศทางของรอยแตก

ในแบบจำลองที่นำเสนอนี้ สติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่แตกถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ

1) G_{ist} = สติฟเนสแรงเฉือนจาก Aggregate interlock
2) G_{dow} = สติฟเนสแรงเฉือนเนื่องจาก Dowel action

โดยที่ สติฟเนสแรงเฉือนทั้งหมด (G) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (6)

$$G = G_{ist} + G_{dow} \tag{6}$$

2.1.3.1 **สติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัส** (Shear stiffness due to Interface Shear transfer)

ผิวของคอนกรีตที่เกิดการแตกร้าวจะมีลักษณะขรุขระซึ่งทำให้ เกิดแรงต้านทานเมื่อพื้นผิวเคลื่อนที่ผ่านกันแสดงได้ดังรูปที่ 2.12 ซึ่งตัวแปรที่มีผลอย่างมากต่อกลไกของการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสของคอนกรีตที่แตก คือ ความกว้างของรอยแตกในตอนแรก ซึ่งสติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสของคอนกรีตที่แตก จะเพิ่มขึ้นเมื่อความกว้างของรอยแตกลดลง สติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสของคอนกรีตที่แตกมีค่าดังสมการที่ (7)

$$G_{ist} = 2.0\left[\frac{1}{G_{ist}^{1}} + \frac{1}{G_{ist}^{2}}\right]^{-1} \tag{7}$$

โดยที่ G_{ist}^{1} เป็นสติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสในทิศทางรอยแตกที่ 1
G_{ist}^{2} เป็นสติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสในทิศทางรอยแตกที่ 2

และ

$$G_{ist}^{i} = \mu_1 \cdot G_{conc} \quad ; \varepsilon_{nn}^{i} < \varepsilon_{cr}$$

$$G_{ist}^{i} = \frac{\mu_1\left[\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{nn}^{i}\right]}{\left[\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{cr}\right]} G_{conc} \quad ; \varepsilon_{cr} \le \varepsilon_{nn}^{i} < \varepsilon_{\min} \tag{8}$$

$$G_{ist}^{i} = G_{\min} \quad ; \varepsilon_{\min} \le \varepsilon_{nn}^{i}$$

โดยที่ μ_1 = พารามิเตอร์ที่ใช้สัมพันธ์ระหว่างสติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสกับสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่ไม่แตก

ε'_{nn} = ความเครียดของรอยแตกร้าวตั้งฉากในทิศทางที่ i

ε_{cr} = ความเครียดด้านแรงดึงเมื่อคอนกรีตแตก

$\varepsilon_{\min}$ = ความเครียดของรอยแตกตั้งฉากเมื่อ $G^{i}_{ist} = G_{\min}$

$G_{\min}$ = ค่าต่ำสุดของ G^{i}_{ist}

G_{conc} = สติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่ไม่แตก $\left(\dfrac{E_c}{2\left[1+\nu\right]}\right)$

E_c = โมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของคอนกรีต

ν = อัตราส่วนปัวส์ซองของคอนกรีตที่ไม่แตก

ดังนั้นจะมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในพฤติกรรมนี้ 3 ตัว คือ μ_1 , $\varepsilon_{\min}$ และ $G_{\min}$ โดยค่า $G_{\min}$ จะใช้เพื่อจำกัดค่าน้อยที่สุดของ G_{ist} โดยจะไม่ให้ค่านี่เท่ากับศูนย์เพื่อป้องกันปัญหาในเชิงตัวเลข

2.1.3.2 **สติฟเนสแรงเฉือนเนื่องจาก** Dowel action (Shear stiffness due to dowel Action)

เหล็กเสริมที่ผ่านรอยแตกจะให้สติฟเนสผ่านทาง Dowel action จากผลรวมของกลไกทั้ง 3 อย่างคือ การโค้งงอ (Flexure) , การเฉือน (Shear) และ การคดงอ (Kinking) ดังแสดงในรูปที่ 2.13 ซึ่งมีพฤติกรรมที่สำคัญดังนี้

- สติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อการเปลี่ยนรูปเฉือน (Shear deformation)มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อการเปลี่ยมรูปเฉือนมีค่าน้อยสติฟเนสแรงเฉือนจะขึ้นกับสติฟเนสแรงเฉือน และสติฟเนสแรงดัดของแท่งเหล็กเป็นอย่างมาก เนื่องจากส่วนของแท่งเหล็กที่ใกล้กับรอยแตกยังไม่ไปดันกับคอนกรีตที่อยู่รอบๆอย่างเต็มที่ แต่เมื่อการเปลี่ยนรูปเฉือนมีค่ามากขึ้นแท่งเหล็กก็จะเริ่มดันคอนกรีตที่อยู่รอบๆ และทำให้สติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action มีค่าเพิ่มขึ้น

แบบจำลองพฤติกรรม Dowel action แสดงได้ดังสมการที่ (9)

$$G_{dow} = 2.0\left[\frac{1}{G^{1}_{dow}} + \frac{1}{G^{2}_{dow}}\right]^{-1} \tag{9}$$

โดยที่ G^{1}_{dow} เป็นสติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action ในทิศทางรอยแตกที่ 1

G^{2}_{dow} เป็นสติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action ในทิศทางรอยแตกที่ 2

แบบจำลองนี้ได้รวมลักษณะสำคัญ 2 ประการ คือ สติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action **เพิ่มขึ้นเมื่อความเครียดเฉือนเพิ่มขึ้น และ ความสัมพันธ์ระหว่างสติฟเนสของ Dowel action และเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริมเป็นเส้นตรง สติฟเนสเนื่องจาก Dowel action ในทิศทางรอยแตกที่ i แสดงโดยสมการที่ (10)**

$$G_{dow}^{i} = G_{\min} \qquad ; |\gamma| < |\gamma_i|$$

$$G_{dow}^{i} = f(\theta_i, \Omega, r_1, r_2)\left|\frac{\gamma - \gamma_i}{\gamma_n}\right|^{n} \qquad ; |\gamma_i| \le |\gamma| < |\gamma_n + \gamma_i| \qquad (10)$$

$$G_{dow}^{i} = f(\theta_i, \Omega, r_1, r_2) \qquad ; |\gamma_n + \gamma_i| \le |\gamma|$$

โดยที่ γ = ความเครียดเฉือน

γ_i = พารามิเตอร์ที่รวมผลของการย้อนกลับของแรงเฉือน ซึ่งจะนิยามในหัวข้อต่อไป (ผลกระทบของแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร)

γ_n , n = ค่าคงที่ที่กำหนด

$f(\theta_i, \Omega, r_1, r_2)$ = ฟังก์ชันที่ใช้แทนผลของเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริมและทิศทางการเสริมเหล็ก

θ_i = มุมของรอยแตกในทิศทาง i

Ω = มุมของเหล็กเสริม

$r_1 = \dfrac{\rho_{s1}}{\phi_{s1}}$ = อัตราส่วนเหล็กเสริมในทิศทาง 1 ต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม (นิ้ว)

$r_2 = \dfrac{\rho_{s2}}{\phi_{s2}}$ = อัตราส่วนเหล็กเสริมในทิศทาง 2 ต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม (นิ้ว)

$f(\theta_i, \Omega, r_1, r_2)$ มีค่าดังสมการที่ (11)

$$f(\theta_i, \Omega, r_1, r_2) = \left(r_1\left|\sin(\Omega - \theta_i)\right| + r_2\left|\cos(\Omega - \theta_i)\right|\right)\mu_2 G_{conc} \qquad (11)$$

โดยที่ μ_2 = พารามิเตอร์ที่ใช้สัมพันธ์ระหว่างสติฟเนสของ Dowel action กับสติฟเนสแรงเฉือนของคอนกรีตที่ไม่แตก

แทนค่าสมการที่ (11) ใน สมการที่ (9) และ สมการที่ (10) สำหรับทิศการแตกทั้งสอง (i=1,2) จะได้

$$G_{dow} = G_{min} \qquad ; |\gamma| < |\gamma_i| \qquad (12)$$

โดยที่
$$G_{dow} = 2 \cdot \left(\frac{\left[r_1^2 + r_2^2\right]sc + r_1 r_2}{(r_1 + r_2)(s + c)} \right) \mu_2 G_{conc} \left| \frac{\gamma - \gamma_i}{\gamma_n} \right|^n \qquad ; |\gamma_i| \le |\gamma| < |\gamma_n + \gamma_i|$$

$$G_{dow} = 2 \cdot \left(\frac{\left[r_1^2 + r_2^2\right]sc + r_1 r_2}{(r_1 + r_2)(s + c)} \right) \mu_2 G_{conc} \qquad ; |\gamma_n + \gamma_i| \le |\gamma|$$

โดยที่
$$s = |\sin(\Omega - \theta_1)|$$
$$c = |\cos(\Omega - \theta_1)|$$

ดังนั้นจะมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในพฤติกรรมนี้ 3 ตัว คือ μ_2, γ_n และ n

2.1.3.3 **ผลของแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร** (Effect of cyclic loading)

แบบจำลองการถ่ายเทแรงเฉือนภายใต้แรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร จะมีพื้นฐานมากจากการสังเกตจากผลการทดลองและจากแบบจำลองที่ได้เสนอโดยผู้วิจัยอื่นๆ พิจารณารูปที่ 2.14 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. ส่วนเพิ่มแรงกระทำ (Loading region, B-C และ E-F) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนขึ้นอยู่กับสติฟเนสแรงเฉือน (G) ณ ปัจจุบัน ซึ่งเป็นผลรวมของสติฟเนสแรงเฉือนจากการถ่ายแรงเฉือนผ่านผิวสัมผัสและสติฟเนสแรงเฉือนจาก Dowel action

2. ส่วนลดแรงกระทำ (Unloading region, C-D และ F-G) ส่วนนี้เป็นเส้นที่เริ่มจากจุดที่ความเครียดเฉือนที่เพิ่มขึ้นเริ่มที่จะกลับทิศ โดยจะมีค่าสติฟเนสแรงเฉือนคงที่เท่ากับ G_{unl} ส่วนลดแรงกระทำจะสิ้นสุดเมื่อตัดกับแกนความเครียด (จุด A, D และ G)

3. ส่วนเลื่อนหลุด (Slip region,D-E และ A-B) ส่วนนี้จะเป็นเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดที่ส่วนลดแรงกระทำตัดกับแกนความเครียด และจุด $\left(\beta \cdot \gamma_{max}^{+}, \tau_{slip}\right)$ และ จุด $\left(\beta \cdot \gamma_{max}^{-}, -\tau_{slip}\right)$ ซึ่งจะขึ้นกับทิศทางของแรงกระทำ

โดยที่ γ_{max}^{+} คือ ความเครียดเฉือนมากสุดที่เป็นบวกในครั้งก่อนซึ่งเส้นโค้งลดแรงกระทำในครั้งก่อนตัดกับแกนความเครียด (จุด D)

γ_{max}^{-} คือ ความเครียดเฉือนมากสุดที่เป็นลบในครั้งก่อนซึ่งเส้นโค้งลดแรงกระทำในครั้งก่อนตัดกับแกนความเครียด (จุด A)

จะเห็นว่าพารามิเตอร์ที่ใช้กำหนดผลของแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรมี 2 ตัว คือ β และ τ_{slip} ซึ่งใช้กำหนดจุด $\left(\beta \cdot \gamma_{max}^{+}, \tau_{slip}\right)$ และ จุด $\left(\beta \cdot \gamma_{max}^{-}, -\tau_{slip}\right)$

2.2 แบบจำลองวัสดุของเหล็กเสริม (Material model for reinforcing steel)

2.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำด้านเดียว(Monotonic loading curve)

รูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรมีลักษณะดังรูปที่ 2.15 ซึ่งพบว่าก่อนเกิดการให้แรงกระทำกลับข้าง (Load reversal) ครั้งแรกความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด จะมีลักษณะเหมือนพฤติกรรมรับแรงกระทำทางเดียว (Monotonic curve) ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 3 ส่วนดังแสดงในรูปที่ 2.16 คือ

1. ช่วงความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear region) มีลักษณะเป็นเส้นตรง มีความชันเท่ากับค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of elasticity) โดยเริ่มตั้งแต่ความเครียดเป็นศูนย์ จนกระทั่งถึงความเครียดเมื่อเริ่มมีการครากเกิดขึ้น (ε_y) อันเป็นจุดสิ้นสุดขีดจำกัดยืดหยุ่นของเหล็ก ตำแหน่งนี้หน่วยแรงจะเท่ากับหน่วยแรงคราก
2. ช่วงที่เกิดการคราก (Yield plateau) มีลักษณะเป็นเส้นตรง มีความชันเท่ากับศูนย์ หน่วยแรงเท่ากับหน่วยแรงคราก โดยเริ่มตั้งแต่ตำแหน่งที่เริ่มเกิดการครากไปจนถึงความเครียดเมื่อเริ่มเกิดการแข็งตัวเพิ่มขึ้น (ε_{sh}) ซึ่งปกติมีค่าประมาณ 10-12 เท่าของความเครียดที่จุดคราก
3. ช่วงการแข็งตัวเพิ่มขึ้น (Strain hardening) มีลักษณะเป็นส่วนของเส้นโค้ง หน่วยแรงจะเพิ่มขึ้นจากหน่วยแรงครากจนถึงตำแหน่งสูงสุดที่จุดกำลังประลัย (Ultimate strength, ε_{ult}) ก่อนที่แรงดึงจะลดลงและเหล็กเสริมเกิดคอคอด (Necking) และขาดออกจากกัน

2.2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร

จากรูปที่ 2.15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรภายหลังเกิดการให้แรงกระทำกลับข้าง พบว่าค่าสติฟเนสของเหล็กเมื่อเริ่มให้แรงกระทำลดลง (Unloading) จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในช่วงความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear region) ของเหล็กเสริมหลังจากนั้นพฤติกรรมไม่เชิงเส้น (Nonlenearity) โดยที่หน่วยแรงครากจะไม่ปรากฏชัดเจน และมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ซึ่งพฤติกรรมความไม่เชิงเส้นนี้เรียกว่า Bauschinger efffects

พฤติกรรมการรับแรงแบบเป็นวัฏจักรของเหล็กเสริมในรอบของแรงกระทำต่อๆมา มีลักษณะเดียวกันกับเส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดภายหลังเกิดการให้แรงกระทำกลับข้างครั้งแรกโดยจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมีค่าโมดูลัสเท่ากับโมดูลัสเริ่มต้นของเหล็กเสริม และ ส่วนที่เป็นเส้นโค้ง (Bauschinger effects) ซึ่งพฤติกรรมเหล่านี้จะขึ้นกับความเครียดที่เกิดขึ้นก่อนหน้าอีกด้วย

2.2.3 แบบจำลองวัสดุของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร

แบบจำลองของเหล็กเสริมที่ใช้จะต้องสามารถแทนลักษณะที่สำคัญ 2 ประการของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด ได้แก่ พฤติกรรมเชิงเส้น ซึ่งมีความชันเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม และ พฤติกรรมการแข็งตัวลดลง (Softening) ในช่วงที่ความเครียดเพิ่มขึ้น ซึ่งได้ใช้สมการของ Ramberg-Osgood มาประยุกต์ใช้กับแบบจำลองวัสดุของเหล็กเสริม

2.2.3.1 แบบจำลอง Ramberg-Osgood

เดิมทีเดียว สมการ Ramberg-Osgood ไม่ได้มีจุดประสงค์เพื่อนำมาใช้กับพฤติกรรมการรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรของเหล็กเสริม แต่ด้วยคุณสมบัติของ สมการ Ramberg-Osgood ซึ่งสามารถอธิบายพฤติกรรมเชิงเส้น และ พฤติกรรมการแข็งตัวลดลง(Bauschinger effects)อันเป็นลักษณะสำคัญของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมภายใต้แรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรได้เป็นอย่างดี จึงได้มีการนำสมการนี้มาใช้เป็นแบบจำลองของวัสดุเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรอย่างแพร่หลาย รูปแบบของสมการ Ramberg-Osgood ดังแสดงในสมการที่ (13)

$$\varepsilon - \varepsilon_i = \sigma - \sigma_i \left[1 + \left| \frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_0 - \sigma_i} \right|^{\alpha - 1} \right] \tag{13}$$

โดยที่ ε_i, σ_i คือ ความเครียดและหน่วยแรง ณ ตำแหน่งเริ่มต้น

σ_0, α คือ ตัวแปรซึ่งเป็นตัวกำหนดรูปร่างของสมการ

E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) ของเหล็กเสริม

จากสมการข้างต้นพบว่า ปัจจัยที่มีผลต่อสมการได้แก่ คุณสมบัติเริ่มต้นของเหล็กเสริม (ε_i, σ_i) , σ_0 และ α ซึ่งยังไม่ได้มีการกำหนดค่า แต่เนื่องมาจากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเมื่อรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรนั้นมีผลอันเนื่องมาจากความเครียดที่เกิดขึ้นก่อนหน้า(previous strain history) รวมอยู่ด้วย ดังนั้นการกำหนดค่า σ_0 และ α เพื่อให้สมการ Ramberg-Osgood ให้ผลที่สอดคล้องกับการทดสอบ จึงต้องคำนึงถึงความเครียดที่เกิดขึ้นก่อนหน้าด้วย

จากงานวิจัยของ C.Sittipunt และ S.L.Wood (18,19) ได้มีการเสนอแบบจำลองวัสดุของเหล็กเสริมโดยใช้สมการ Ramberg-Osgood เป็นพื้นฐาน เพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างผนังคอนกรีตเสริมเหล็กรับแรงเฉือน โดยแบ่งแบบจำลองออกเป็นช่วงต่างๆ ซึ่งมีรูปแบบของแบบจำลองดังนี้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเมื่อรับแรงกระทำด้านเดียว (Monotonic curve) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเมื่อรับแรงกระทำด้านเดียว ประกอบด้วย 3 ส่วนหลักๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.16 คือ ช่วงความสัมพันธ์เชิงเส้น (เส้น A-B) ,ช่วงที่เกิดการคราก (เส้น B-C) สองส่วนแรกนี้มีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติกของเหล็กเสริม สามารถแทนได้ด้วยสมการเส้นตรง โดยกำหนดให้ช่วงแรกมีความชันเท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริมจนกระทั่งค่าหน่วยแรงมีค่าเท่ากับหน่วยแรงคราก และในช่วงที่สองกำหนดให้มีความชันเล็กน้อยเท่ากับ $0.0001E_s$ จนกระทั่งความเครียดมีค่าเท่ากับค่าความเครียดเมื่อเริ่มเกิดการแข็งตัวเพิ่มขึ้น (ε_{sh}) ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดในช่วงที่สาม (Strain Hardening Region) จะแสดงได้โดยสมการ Ramberg-Osgood ดังแสดง

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{om}} = \frac{\sigma}{\sigma_{om}} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{om}}\right)^m \tag{14}$$

โดยที่ $\varepsilon_{om} = \dfrac{\sigma_{om}}{E_s}$

σ_{om} ,m คือ ตัวแปรซึ่งเป็นตัวกำหนดรูปร่างของสมการ

E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม

สำหรับค่า σ_{om} และ m สามารถหาได้จากผลการทดสอบของวรพงษ์ จีนช้าง (6)

2. รอบความสัมพันธ์หลัก (Envelope curve) รอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด ซึ่งใช้อธิบายรอบความสัมพันธ์หลัก(Envelope curve) แสดงไว้ในรูปที่ 2.17 ซึ่งในรอบหนึ่งๆ (เส้น A-B-C) จะประกอบไปด้วยครึ่งรอบจากแรงดึง (เส้นA-B) และครึ่งรอบจากแรงอัด (เส้น B-C) ในแต่ละครึ่งรอบของความสัมพันธ์จะเริ่มต้นที่ตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนทิศทางของหน่วยแรงและความเครียดคือ ต่างมีจุดกำเนิดของตนเอง (ε_i,σ_i) ของในแต่ละครึ่งรอบความสัมพันธ์ จากเหตุผลดังกล่าวทำให้วิธีการกำหนดค่า σ_0 และ α สามารถทำได้สองวิธี โดยพิจารณาจากคุณ-สมบัติเริ่มต้น (ε_i,σ_i) ของแต่ละครึ่งรอบความสัมพันธ์เป็นหลัก ดังนี้

- แบบที่1 เมื่อ $|\sigma_i| \geq |\sigma_{\max}|$

เมื่อจุดเริ่มต้นของครึ่งรอบความสัมพันธ์นั้นเกิดขึ้น ณ.ตำแหน่งซึ่งมีค่าหน่วยแรงเริ่มต้นมากกว่าหน่วยแรงดึงสูงสุดที่เคยเกิดขึ้น หรือเกิดขึ้น ณ.ตำแหน่งซึ่งมีค่าหน่วยแรงเริ่มต้นน้อยกว่าหน่วยแรงอัดสูงสุดที่เคยเกิดขึ้น ทั้งนี้จะพิจารณาให้หน่วยแรงดึงมีค่าเป็นบวกและหน่วยแรงอัดมีค่าเป็นลบ ค่า σ_0 และ α หาได้จากสมการที่ (15)

$$\sigma_0 = A \cdot \sigma_y + B\left(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right) \tag{15}$$

สำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์จากด้านรับแรงอัด

กำหนดให้ $\alpha = 6$ $A = 0.7938$ $B = 0.55723$

สำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์จากด้านรับแรงดึง

กำหนดให้ $\alpha = 7$ $A = 0.7735$ $B = 0.47989$

โดยที่ σ_{max} คือ ค่าหน่วยแรงดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นก่อนที่จะถึงจุดเริ่มต้นของครึ่งรอบนั้น

σ_{min} คือ ค่าหน่วยแรงอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นก่อนที่จะถึงจุดเริ่มต้นของครึ่งรอบนั้น

σ_y คือ ค่าหน่วยแรงคราก

สมการและค่าคงที่ข้างต้น Aktan และคณะ(30) ได้เป็นผู้เสนอขึ้นโดยที่ค่าคงที่ A และ B เป็นค่าที่ได้มาจากการวิเคราะห์กำลังสองน้อยสุด (Least square analysis) จากผลการทดสอบเหล็กเสริมรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร วิธีการนี้ใช้สำหรับเหล็กเสริมที่ต้องรับแรงกระทำแบบสมมาตรในแต่ละรอบของความสัมพันธ์ (ความเครียดที่เกิดขึ้นในครึ่งรอบจากแรงดึงมีค่าเท่ากับความเครียดที่เกิดขึ้นในครึ่งรอบจากแรงอัด) ซึ่งพบว่าค่าสูงสุดของหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัด จะค่อยๆเพิ่มขึ้นในแต่ละรอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงอัดและความเครียด

- แบบที่ 2 เมื่อ $|\sigma_i| < |\sigma_{max}|$

กรณีที่รอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเกิดขึ้นอย่างไม่สมมาตร หรือความเครียดที่ใช้ในการย้อนแรงมีค่าน้อยกว่าครึ่งรอบก่อนหน้า การใช้ค่าที่หาได้จากวิธีการแบบที่ 1 ให้ผลที่มีความผิดพลาดมาก ทำให้ต้องหาวิธีการอื่นในการกำหนดค่า σ_c และ α สำหรับกรณีนี้ C.Sittipunt (3)ได้สังเกตจากผลการทดสอบของ Aktan และคณะ (30) จึงได้เสนอวิธีการขึ้นดังนี้

สำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์ซึ่งมีค่าหน่วยแรงเริ่มต้นน้อยกว่าหน่วยแรงสูงสุดที่เคยเกิดขึ้นในทิศทางเดียวกัน เส้นความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดในครึ่งรอบนั้น จะรวมเข้าเป็นเส้นเดียวกันกับเส้นความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของครึ่งรอบก่อนหน้าที่มีทิศทางเดียวกัน

จากข้อสังเกตดังกล่าว ทำให้ได้แนวความคิดเรื่องตำแหน่งคอมมอน (Common point) ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.18a และในรูปที่ 2.18b สำหรับครึ่งรอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจากแรงดึง (เส้น C-E) ตำแหน่งคอมมอนคือจุด D ซึ่งเป็นเป็นตำแหน่งที่เส้นความสัมพันธ์ของครึ่งรอบ (เส้น C-E) รวมเป็นเส้นเดียวกันกับเส้นความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดก่อนหน้า (เส้น A-B) โดยค่าความเครียดที่จุด D กำหนดให้เท่ากับ ε_B-0.01 (เมื่อ ε_B เป็นความเครียดที่จุดจบของครึ่งรอบก่อนหน้า A-B)และในทำนองเดียวกันตำแหน่งคอมมอนสำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดจากแรงอัด (เส้น H-J) คือ จุด I ซึ่งมีค่าความเครียดเท่ากับ ε_G+0.01 (เมื่อ ε_G เป็นความเครียดที่จุดจบของครึ่งรอบก่อนหน้า F-G) ดังแสดงในรูปที่ 2.18 สำหรับความเครียดที่เพิ่มขึ้น ($\pm$ 0.01) ซึ่งใช้ในการกำหนดตำแหน่งคอมมอนนั้น ได้จากผลการทดสอบและการทดลองปรับเปลี่ยนค่าความเครียดจนได้ค่าที่เสนอนี้

จากแนวคิดเรื่องตำแหน่งคอมมอนค่า σ_0 และ α จำเป็นต้องถูกคำนวณขึ้นเพื่อที่จะทำให้เส้นความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของครึ่งรอบที่มีหน่วยแรงเริ่มต้นน้อยกว่าหน่วยแรงสูงสุดที่เคย

เกิดขึ้นในทิศทางเดียวกันที่ตำแหน่งคอมมอน โดยกำหนดให้ตำแหน่งซึ่งเส้นความสัมพันธ์ทั้งสองมารวมกันนี้มีค่าหน่วยแรงและค่าสติฟเนสสัมผัส (tangent stiffness) เท่ากัน

ดังนั้นค่า σ_0 และ α สำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์ที่มีหน่วยแรงเริ่มต้นน้อยกว่าหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นในทิศทางเดียวกัน สามารถหาได้จากสมการที่ (16)

$$\alpha = \left(\frac{E_s}{E_t} - 1\right)\left|\frac{k_2}{k_1 E_s - k_2}\right|$$

$$\sigma_0 = \frac{\left|k_2\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\left|k_1 E_s - k_2\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}} \tag{16}$$

โดยที่ $k_1 = \varepsilon_c - \varepsilon_i$ และ $k_2 = \sigma_c - \sigma_i$

ε_i , σ_i คือ ความเครียดและหน่วยแรงเริ่มต้นของครึ่งรอบความสัมพันธ์ใดๆ

ε_c , σ_c คือ ความเครียดและหน่วยแรงที่ตำแหน่งคอมมอน (Common point)

E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มแรก (Initial Modulus of Elasticity) ของเหล็กเสริม

E_t คือ ค่าสติฟเนสสัมผัส (Tangent Stiffness) ที่ตำแหน่งคอมมอน (Common point)

นอกจากวิธีการทั้งสองแบบ พบว่าบางครั้งค่า σ_0 และ α ที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้ให้ค่าหน่วยแรงมากกว่าค่าหน่วยแรงดึงประลัย หรือ หน่วยแรงอัดประลัยของเหล็กเสริม ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาวิธีการเพื่อปรับลดค่าหน่วยแรงลงให้อยู่ในข้อจำกัดของวิธีทั้งสองแบบ และโดยวิธีการสังเกตและการนำแนวคิดเรื่องตำแหน่งคอมมอนมาใช้ทำให้ได้แนวคิดเรื่องตำแหน่งอัลติเมต (Ultimate point) ดังแสดงในรูปที่ 2.18

รูปที่ 2.18a แสดงตำแหน่งอัลติเมตสำหรับครึ่งรอบความสัมพันธ์จากด้านรับแรงดึง (เส้น C-E) จุด E เป็นตำแหน่งอัลติเมตซึ่งกำหนดให้มีความเครียดเท่ากับ ε_C-0.01 (เมื่อ ε_C เป็นความเครียดเริ่มต้นของครึ่งรอบความสัมพันธ์ C-E) ส่วนตำแหน่งอัลติเมตของครึ่งรอบความสัมพันธ์จากแรงอัด (เส้น H-J) คือจุด J ในรูปที่ 2.18b ซึ่งมีความเครียดเท่ากับ ε_H+0.09 (เมื่อ ε_H เป็นความเครียดเริ่มต้นของครึ่งรอบความสัมพันธ์ H-J) ซึ่งค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น ($\pm$ 0.09) ซึ่งใช้กำหนดตำแหน่งอัลติเมตนั้น ได้จากการทดลองปรับเปลี่ยนค่าความเครียดจนได้ค่าที่ เสนอนี้

ดังนั้นเพื่อที่จะปรับค่าหน่วยแรงที่มากเกินกว่าค่าหน่วยแรงประลัยของเหล็กเสริม โดยนำสมการที่ใช้ในการคำนวณค่า σ_0 และ α ในวิธีการแบบที่ 2 มาประยุกต์ใช้กับกรณีนี้ จึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขที่ตำแหน่งอัลติเมตเพิ่มเติม ได้แก่ ค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งอัลติเมตกำหนดให้เท่ากับหน่วยแรงประลัย และค่าสติฟ

เนสสัมผัสกำหนดให้เท่ากับ 0.0001E_s จากเงื่อนไขดังกล่าวทำให้สามารถหาค่า σ_0 และ α สำหรับกรณีที่หน่วยแรงมีค่าเกินหน่วยแรงประลัยที่ตำแหน่งอัลติเมตได้โดยสมการที่ (17)

$$\alpha = \left(\frac{E_s}{E_t} - 1\right)\left|\frac{k_2}{k_1 E_s - k_2}\right|$$

(17)

$$\sigma_0 = \frac{\left|k_2\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\left|k_1 E_s - k_2\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

โดยที่ $k_1 = \varepsilon_{ult} - \varepsilon_i$ และ $k_2 = \sigma_{ult} - \sigma_i$

ε_i, σ_i คือ ความเครียดและหน่วยแรงเริ่มต้นของครึ่งรอบความสัมพันธ์ใดๆ

$\varepsilon_{ult}, \sigma_{ult}$ คือ ความเครียดและหน่วยแรงที่ตำแหน่งคอมมอน (Common point)

E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มแรก (Initial Modulus of Elasticity) ของเหล็กเสริม

E_t คือ ค่าสติฟเนสสัมผัส (Tangent Stiffness) ที่ตำแหน่งคอมมอน (Common point) เท่ากับ 0.0001E_s

3. รอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นในช่วงที่เกิดการคราก ในกรณีของครึ่งรอบความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นต่อจากครึ่งรอบความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ในช่วงที่เกิดการคราก Popov (31) และ Maและคณะ (32) สังเกตพบในผลการทดสอบ จึงได้ทำการเสนอแบบจำลองวัสดุสำหรับกรณีเช่นนี้ไว้ ดังแสดงในรูปที่ 2.19 รอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่มีจุดเริ่มต้นในช่วงที่เกิดการคราก (Yield Plateau) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ รอบที่มีวงรอบเล็ก (เส้น A-B-C) และรอบที่มีวงรอบลใหญ่ (เส้น D-E-F) สำหรับครึ่งรอบของการย้อนแรงในวงรอบเล็ก(เส้น B-C) พบว่าจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง และมีค่าสติฟเนสเท่ากับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเริ่มต้นของเหล็กเสริม (E_s) และจะกลับไปรวมกับช่วงที่เกิดการคราก (Yield Plateau) และแสดงพฤติกรรมเหมือนเมื่อรับแรงทางเดียวได้ต่อไป สำหรับครึ่งรอบของการย้อนแรงในวงรอบใหญ่ (เส้น E-F) จะแสดงพฤติกรรมBauschinger effect ขึ้น ช่วงที่เกิดการครากจะหายไป จากข้อสังเกตนี้ทำให้มีการเสนอวิธีการสำหรับรอบของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ในช่วงที่เกิดการคราก ดังนี้

- กรณี $\Delta\varepsilon_s^{'} < 0.50 \cdot \left|\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y\right|$

ในรูปที่ 2.20a สำหรับในรอบของความสัมพันธ์ที่มีวงรอบเล็ก (เส้น A-B-C-D) ความกว้างในวงรอบ($\Delta\varepsilon_s^{'}$) น้อยกว่า $0.50 \cdot \left|\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y\right|$ ครึ่งรอบของการย้อนแรง (เส้น B-C-D) จะแสดงพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก เช่นเดียวกับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดเมื่อรับแรงกระทำทางเดียว (Monotonic Curve) และเมื่อแรงกระทำยังคงดำเนินต่อไปเหล็กเสริมจะแสดงพฤติกรรมการแข็งตัวเพิ่มขึ้น (strain hardening)เหมือนกับที่เกิดขึ้นเมื่อเหล็กเสริมรับแรงกระทำเพียงด้านเดียว

- กรณี $\Delta\varepsilon_s^{'} \geq 0.50 \cdot \left|\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y\right|$

ในรูปที่ 2.20b รอบความสัมพันธ์ที่มีวงรอบใหญ่ (เส้น E-F-G) ความกว้างในวงรอบ ($\Delta\varepsilon_s^{'}$) มากกว่า $0.50 \cdot \left|\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y\right|$ (เส้น F-G) จะไม่แสดงพฤติกรรมอิลาสติก-พลาสติกเช่นในกรณีวงรอบเล็ก ค่าสติฟเนสของเหล็กเสริมจะลดลงก่อนที่หน่วยแรงจะถึงจุดคราก โดยที่ครึ่งรอบของการย้อนแรงนี้จะรวมเข้าเป็นเส้นเดียวกับเส้นความสัมพันธ์ในช่วงการแข็งตัวเพิ่มขึ้นใหม่ (เส้นประ E-G) ซึ่งเป็นเส้นแสดงความสัมพันธ์ช่วงการแข็งตัวเพิ่มขึ้นของเหล็กเสริมรับแรงดึงกระทำเพียงด้านเดียว (Monotonic strain-hardening Curve) ที่ย้ายจุดเริ่มต้นเดิม (ε_{sh})มาอยู่ที่ตำแหน่งเริ่มย้อนแรง (จุด E) บนช่วงที่เกิดการคราก สำหรับจุดที่ทั้งสองเส้นความสัมพันธ์จะรวมเป็นเส้นเดียวกันนั้น คือ จุด G ซึ่งเป็นตำแหน่งคอมมอนของรอบความสัมพันธ์ E-F-G และมีค่าความเครียดที่ตำแหน่ง G เท่ากับ ε_E +0.01

ข้อดีของแบบจำลอง Ramberg-Osgood ที่เสนอโดย C.Sittipunt (3) คือสามารถใช้ได้กับเหล็กเสริมโดยทั่วๆไป เนื่องจากค่าคงที่ที่ใช้กับแบบจำลองนี้ (α, σ_0) สามารถหาได้จากการทดสอบเหล็กเสริมรับแรงดึงที่ทำกันโดยทั่วไป

2.3 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (FINITE ELEMENT PROCEDURES)

นอกจากแบบจำลองวัสดุแล้ว ลักษณะต่างๆของวิธีการวิเคราะห์จะมีอิทธิพลต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ลักษณะดังกล่าวประกอบด้วยสูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์, อัลกอลิทึมที่ใช้ในแบบจำลองวัสดุ, แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และ incremental-iterative algorithms ซึ่งจะมีผลต่อความแม่นยำ, เสถียรภาพและการลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง การเลือกวิธีการที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับปัญหาในแต่ละปัญหา ดังนั้นความเข้าใจในลักษณะของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์และธรรมชาติของปัญหาที่จะวิเคราะห์ จะช่วยให้สามารถเลือกวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างๆ ได้เหมาะสมมากขึ้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงลักษณะสำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็กในงานวิจัยนี้ โดยที่สูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรม FINITE จะกล่าวถึงเป็นอันดับแรก หลังจากนั้นจะเป็นอัลกอลิทึมที่สำคัญที่ใช้ในแบบจำลองวัสดุและวิธีการในการออกแบบจำลองของกำแพงคอนกรีตเสริมเหล็ก ในอันดับสุดท้ายจะกล่าวถึง incremental-iterative algorithms ที่ใช้แก้ปัญหาสมการสมดุลแบบไม่เชิงเส้น

2.3.1 สูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการใช้สูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับงานวิศวกรรมที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ขึ้นกับระยะการเคลื่อนตัว สูตรนี้เป็นพื้นฐานเบื้องต้นของการใช้หลักการงานสมมุติ(ระยะการเคลื่อนตัวสมมุติ) และเป็นพื้นฐานเบื้องต้นในการใช้ฟังก์ชันการประมาณของระยะการเคลื่อนตัว กับระยะการ

เคลื่อนตัวของจุดต่อ เพื่อที่จะประมาณระยะการเคลื่อนตัวภายในแต่ละชิ้นส่วน หลักการของสูตรระยะการเคลื่อนตัวสมมุติ คือ เมื่อวัตถุมีระยะการเคลื่อนที่สมมุติใดๆที่เล็กๆ งานสมมุติภายในทั้งหมดจะเท่ากับงานสมมุติภายนอกทั้งหมด ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\int_V \bar{\varepsilon}^T \sigma dV = \int_V \bar{U}_b^T f_b dV + \int_S \bar{U}_s^T f_s dS + \sum_i \bar{U}_i^T F_i \qquad (18)$$

โดยที่ $\bar{U}$ = ระยะการเคลื่อนตัวสมมุติ

$\bar{\varepsilon}$ = ความเครียดสมมุติ

f_b, f_s, f_i = แรงวัตถุ,แรงที่ผิว,แรงกระทำเป็นจุด

$\bar{U}_b, \bar{U}_s, \bar{U}_i$ = ระยะการเคลื่อนตัวสมมุติที่สัมพันธ์กับ f_b, f_s, f_i

σ = หน่วยแรงจริงที่เกิดขึ้นที่สัมพันธ์กับความเครียดจริง ε

ค่าการเคลื่อนตัว $u^{(m)}$ สำหรับวัตถุ m สามารถประมาณจากค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ U โดยการใช้ฟังก์ชันเมตริกซ์ของฟังก์ชันประกอบ $H^{(m)}$ ดังนี้

$$u^{(m)}(x,y,z) = H^{(m)}(x,y,z)U \qquad (19)$$

โดยที่ $u^{(m)}$ = ค่าการเคลื่อนตัวสำหรับวัตถุ m

$H^{(m)}$ = เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณสำหรับวัตถุ m

U = เวกเตอร์ขององค์ประกอบของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้งหมด

ในระบบเชิงเส้น ความเครียดในเอลิเมนต์ $\varepsilon^{(m)}$ หาได้จากค่าการเคลื่อนตัวของจุดต่อโดยใช้เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว $B^{(m)}$ ดังนี้

$$\varepsilon^{(m)} = B^{(m)}U \qquad (20)$$

ความเครียดในวัตถุ $m, \varepsilon^{(m)}$ เกี่ยวข้องกับหน่วยแรงในวัตถุ $\sigma^{(m)}$ โดยอาศัยเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด C ดังนี้

$$\sigma^{(m)} = C^{(m)}\varepsilon^{(m)} \qquad (21)$$

โดยการแทนค่าสมการของค่าการเคลื่อนตัว $u^{(m)}$, ความเครียด $\varepsilon^{(m)}$ และหน่วยแรง $\sigma^{(m)}$ ในสมการของระยะทางการเคลื่อนตัวสมมติจะได้

$$KU = R \tag{22}$$

โดยที่ $R = R_B + R_S + R_I + R_C$

เมตริกซ์ K เป็นเมตริกซ์ของสติฟเนส

$$K = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \tag{23}$$

เวกเตอร์ R_I คือ ค่าของแรงที่จุดต่อที่เท่ากับค่าเนื่องจากแรงวัตถุ

$$R_B = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f_B^{(m)} dV^{(m)} \tag{24}$$

เวกเตอร์ R_S คือ ค่าของแรงที่จุดต่อที่เท่ากับค่าเนื่องจากแรงที่ผิว

$$R_S = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f_B^{s(m)} dS^{(m)} \tag{25}$$

เวกเตอร์ R_I คือ ค่าของแรงที่จุดต่อที่เท่ากับค่าเนื่องจากหน่วยแรงต้น

$$R_I = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \sigma^{I(m)} dV^{(m)} \tag{26}$$

เวกเตอร์ R_C คือ เวกเตอร์ของแรงกระทำเป็นจุด

$$R_C = F \tag{27}$$

สมการ (18) จะเป็นจริงทั้งวัสดุแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น แต่สมการ (22) จะใช้ได้กับปัญหาของวัสดุเชิงเส้นเท่านั้น เนื่องจากสมการนี้สมมุติให้ค่าเมตริกซ์ K ไม่ขึ้นกับค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ โดยที่จะหาได้จากเมตริกซ์ C และเมตริกซ์ B ที่คงที่ ดังสมการ (24) ดังนั้นทำให้ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ U ที่สัมพันธ์กับโหลดเวกเตอร์ R คำนวณได้จากสมการ (22) อย่างไรก็ตามถ้าความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดเป็นแบบไม่เชิงเส้น หรือถ้าวัตถุมีค่าการเคลื่อนตัวหรือความเครียดที่สูง เมตริกซ์ C และเมตริกซ์ B จะไม่คงที่ โดยจะขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ ทำให้เมตริกซ์ K และสมการสมดุลที่เกี่ยวข้องเป็นแบบไม่เชิงเส้น ทำให้ต้องใช้ incremental-iterative algorithms ในการแก้ปัญหาสมการสมดุล

หลักการของสูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น คือ การหาสภาวะสมดุลของวัตถุที่ช่วงเวลา $t+\Delta t$ ที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์ที่กระทำ ${}^{t+\Delta t}R$ (โดยที่สภาวะสมดุลที่ช่วงเวลา t) สภาวะสมดุลที่ช่วงเวลา $t+\Delta t$ จะหาได้เมื่อแรงกระทำที่จุดต่อ ${}^{t+\Delta t}R$ เท่ากับแรงกระทำที่จุดต่อที่สัมพันธ์กับหน่วยแรงของวัตถุ ${}^{t+\Delta t}F$ ดังสมการ

$$ {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \tag{28} $$

โดยที่

$$ {}^{t+\Delta t}F = {}^{t}F + \Delta F \tag{29} $$

$$ {}^{t}F = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} {}^{t}B^{(m)T}\, {}^{t}\sigma^{(m)} dV^{(m)} \tag{30} $$

ΔF เวกเตอร์ของแรงที่จุดต่อที่เพิ่มขึ้นสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงของวัตถุจากเวลา t ถึง $t+\Delta t$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากแรงที่จุดต่อที่เพิ่มขึ้นสัมพันธ์กับหน่วยแรงของวัตถุ ΔF จะขึ้นอยู่กับค่าการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้น ΔU ค่าของ ΔF จะไม่รู้จนกระทั่งถึงสภาวะสมดุลที่ช่วงเวลา $t+\Delta t$ ดังนั้นค่า ΔF สามารถประมาณโดยใช้เมตริกซ์ K ที่เวลา t, t_k ดังนี้

$$ \Delta F \approx {}^{t}K\Delta U \tag{31} $$

แทนค่าในสมการ (29) จะได้

$$ {}^{t+\Delta t}F \approx {}^{t}F + {}^{t}K\Delta U \tag{32} $$

แทนค่าในสมการ (28) จะได้

$$ {}^{t}K\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t}F \tag{33} $$

ค่าการเคลื่อนตัวที่เวลา $t+\Delta t$ ประมาณได้ ดังนี้

$$ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + \Delta U \tag{34} $$

สมการ (33) เป็นสมการพื้นฐานของสมดุลในสูตรทางไฟไนต์เอลิเมนต์และไม่เชิงเส้น อย่างไรก็ตาม เนื่องจากข้อสมมุติฐานที่ใช้ในสมการ (34) ดังนั้นการประมาณค่าการเคลื่อนตัวในสมการ (34) อาจจะมี

ความผิดพลาดขึ้นกับขนาดของระยะเวลาที่ใช้ ซึ่งจะทำให้สมการ (33) ต้องใช้วิธีที่เหมาะสมเพื่อจะได้สมการ (28) ที่ถูกต้องเพียงพอ โดยจะกล่าวไว้ในหัวข้อ 2.3.5

โดยทั่วไปการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นสามารถแยกได้เป็นสามแบบที่ต่างกัน ดังตารางที่ 2.1 และเนื่องจากคอนกรีตไม่สามารถรับการเปลี่ยนรูปที่สูง ทำให้การวิเคราะห์ชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็ก ถูกพิจารณาเพียงความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ อย่างไรก็ตามความไม่เชิงเส้นทางรูปร่างมีผลต่อพฤติกรรมของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กบางประเภท ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเพียงความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ เนื่องจากค่าการเคลื่อนตัวและค่าความเครียดในคอนกรีตและเหล็กเสริมของแบบจำลองกำแพงส่วนมากจะมีค่าน้อยตลอดการให้แรง และการวิเคราะห์ส่วนใหญ่ เป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริมและคอนกรีต

2.3.2 โปรแกรม FINITE

โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ คือ โปรแกรม FINITE โดยใช้ incremental-iterative Newton-Raphson algorithm ในการแก้ปัญหาสมการสมดุลแบบไม่เชิงเส้น

ลักษณะสำคัญประการหนึ่งซึ่งทำให้โปรแกรม FINITE เหมาะสำหรับงานวิจัยนี้ คือ สามารถที่จะติดตั้งแบบจำลองวัสดุและแบบจำลองชิ้นส่วนใหม่ได้ โดยที่จะสามารถแยกออกจากระบบหลัก ซึ่งระบบหลักจะมีหน้าที่เพียงวิเคราะห์เชิงเส้น เช่น การแก้ปัญหาสมการสมดุล, การจัดการหน่วยความจำและข้อมูล, การคำนวณเมตริกซ์ของสติฟเนส และการพิมพ์ผลลัพธ์ วิธีการคำนวณในแต่ละขั้นของแรงกระทำอธิบายได้ดังรูปที่ 2.21 โดยที่ในกรอบเส้นเต็มจะอธิบายถึงระบบหลักและในกรอบเส้นประจะอธิบายถึงในแบบจำลอง

2.3.3 วิธีการที่ใช้ในแบบจำลองวัสดุ

นอกจากความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดที่เหมาะสมแล้ว ลักษณะสำคัญอีกประการของแบบจำลองวัสดุที่มีอิทธิพลต่อความถูกต้องและเสถียรภาพของการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ วิธีการที่จะใช้คำนวณเส้นทางของหน่วยแรงในแต่ละจุดที่อินทิเกรต เมื่อเทียบกับการเพิ่มขึ้นของความเครียดที่คำนวณได้ วิธีการที่ไม่เหมาะสมจะทำให้หน่วยแรงมีเส้นทางที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งจะทำให้ได้ผลที่ไม่ถูกต้องหรือไม่มีเสถียรภาพ ในการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็กซึ่งรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร วิธีการที่ไม่เหมาะสมสามารถทำให้เกิดปัญหา 3 ปัญหา คือ เส้นทางของหน่วยแรงที่ไม่ถูกต้อง การวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้อง หรือการไม่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ในวิธีการหาคำตอบโดยวิธีแทนค่าคำนวณซ้ำ (iterative) ซึ่งจะได้กล่าวดังนี้

2.3.3.1 เส้นทางหน่วยแรงที่ไม่ถูกต้อง

วิธีการหาคำตอบโดยวิธีแทนค่าคำนวณซ้ำ โดยทั่วๆไปเพื่อที่จะหาผลของความสมดุลสำหรับขั้นของแรงกระทำ A-B แสดงดังรูปที่ 2.22 โดยที่ผลของการหาคำตอบโดยวิธีแทนค่าคำนวณซ้ำ คือเส้นทาง A-1-2-3-4-5-B ในขณะที่ผลจริงคือเส้นทาง A-B ผลลัพธ์ในช่วงระหว่าง A-B ที่จุด 1,2,3,4,5 ไม่ถูกต้องเนื่องจากไม่เป็นสมการสมดุลจริง ดังนั้นอาจทำให้มีผลต่อแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งทั้งเหล็กเสริมและคอนกรีตจะมีพฤติกรรมซึ่งขึ้นกับประวัติของการรับแรง

ในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น มีสองวิธีการซึ่งใช้คำนวณความเครียดที่เพิ่มขึ้นและหาหน่วยแรงใหม่ที่แต่ละการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ คือ วิธีการที่ขึ้นกับเส้นทาง และวิธีการที่ไม่ขึ้นกับเส้นทาง ความเครียดที่เพิ่มขึ้นของทั้งสองวิธี สามารถเขียนได้ดังนี้

วิธีการขึ้นกับเส้นทาง $\Delta\varepsilon^{i}_{PD} = \varepsilon^{i}_{n+1} - \varepsilon^{i-1}_{n+1}$ (35)

วิธีการไม่ขึ้นกับเส้นทาง $\Delta\varepsilon^{i}_{PI} = \varepsilon^{i}_{n+1} - \varepsilon_{n}$ (36)

โดยที่ ε_n = ความเครียดที่ลู่เข้าจากขั้นของแรงกระทำสุดท้าย n

ε^{i}_{n+1} = ความเครียดทั้งหมดที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i ของขั้นแรงกระทำ $n+1$

i = การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i

ในวิธีการขั้นกับเส้นทาง หน่วยแรงที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i ถูกคำนวณจากความเครียดที่เพิ่มขึ้นที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i และใช้หน่วยแรงที่ไม่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงและความเครียดที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ i-1 เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น วิธีนี้จะสมมุติให้เส้นทางของผลลัพธ์ (A-1-2-3-4-5-B ดังรูปที่ 2.22) ถูกต้อง ดังนั้นพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นและความเสียหายที่เกิดขึ้นตามเส้นทางจะมีผลกระทบต่อผลลัพธ์ที่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงของขั้นแรงกระทำนั้น

ในวิธีการไม่ขึ้นกับเส้นทาง หน่วยแรงที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i ถูกคำนวณจากการเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมดและใช้หน่วยแรงที่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงและความเครียดจากแรงกระทำขั้นสุดท้ายเป็นเงื่อนไขเริ่มต้น เนื่องจากหน่วยแรงของวิธีการนี้จะถูกคำนวณจากหน่วยแรงที่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงและความเครียดของขั้นแรงกระทำสุดท้าย ดังนั้นผลลัพธ์ที่ลู่เข้าหาผลที่แท้จริงของขั้นแรงกระทำล่าสุดจะไม่มีผลจากเส้นทางที่ไม่ถูกต้อง ดังนั้นจะใช้วิธีการนี้ในงานวิจัยนี้

อย่างไรก็ตาม ในขั้นแรงกระทำที่มีคอนกรีตแตกเกิดขึ้นที่หลายจุดที่อินทิเกรตวิธีการไม่ขึ้นกับเส้นทางจะทำให้เกิดการลู่เข้าหาผลที่แท้จริงช้าหรือบางครั้งอาจจะไม่ลู่เข้าเลย เนื่องจากความจริงที่ว่า เมื่อคอนกรีตที่จุดหนึ่งที่อินทิเกรตเกิดการแตกจะปลดปล่อยพลังงานความเครียดจำนวนมาก ทำให้คอนกรีตที่จุดที่อินทิเกรดซึ่งอยู่ติดกันและแตกระหว่างการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่แล้วนั้น ไม่เกิดการแตกเพราะหน่วยแรงดึงของคอนกรีตเปลี่ยนแปลงทันทีขณะที่มีการเปลี่ยนแปลงสถานะของคอนกรีตจากแตกเป็นไม่

แตกสลับกันหลายครั้ง ทำให้เกิดการลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้องที่ช้า ดังนั้นจึงใช้วิธีการขึ้นกับเส้นทางกับคอนกรีตที่เกิดการแตก และเพื่อจะป้องกันการแตกที่ไม่ถูกต้องที่เกิดจากเส้นทางที่ไม่ถูกต้อง จึงใช้วิธีแบ่งขนาดของขั้นแรงกระทำในการวิเคราะห์ให้เล็กจนผลลัพธ์ของการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำใกล้กับผลลัพธ์จริง

2.3.3.2 การวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้อง

ในการวิเคราะห์ชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กที่รับแรงแบบเป็นวัฏจักร การวนซ้ำของแรงจะเกิดได้ตลอดประวัติการรับแรงและมีผลกระทบต่อชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็ก สำหรับงานวิจัยนี้แบ่งการวนซ้ำของแรงกระทำเป็นการวนซ้ำของแรงกระทำที่ถูกและการวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้อง การวนซ้ำของแรงกระทำที่ถูกเป็นการวนซ้ำของแรงกระทำที่เกิดขึ้นโดยมีการเพิ่มขึ้นของความเครียดสูง (เมื่อเปรียบเทียบกับการเพิ่มขึ้นของความเครียดที่ขั้นของแรงกระทำครั้งก่อน) และต่อเนื่องหลายขั้นของแรงกระทำ ซึ่งจะมีผลกระทบต่อกำแพงสูง ส่วนการวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้องเป็นการวนซ้ำของแรงกระทำที่เกิดขึ้นโดยมีการเพิ่มขึ้นของคามเครียดต่ำและต่อเนื่องเพียงหนึ่งหรือสองขั้นของแรงกระทำก่อนแรงจะวนซ้ำอีกครั้งสู่ทิศทางเดิม การวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้องจะไม่มีผลกระทบต่อกำแพงมากนักนอกจากเพียงทำให้เกิดการลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงที่ช้า หรืออาจเกิดการไม่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริง กฎเกณฑ์ที่ใช้ป้องกันการวนซ้ำของแรงกระทำที่ไม่ถูกต้องมีดังนี้คือ

การเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมด การเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมด (total strain increments) และ iterative strain increments จะใช้เพื่อคำนวณหาการวนซ้ำของแรงกระทำสำหรับแต่ละองค์ประกอบของความเครียด การย้อนกลับในทิศทางของการเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมดชี้ให้เห็นว่ามีการวนซ้ำของแรงกระทำเกิดขึ้นเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมดถูกคำนวณจากความเครียดที่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงในขั้นของแรงกระทำสุดท้าย ในทางกลับกัน การย้อนกลับในทิศทางของ iterative strain increments ไม่สามารถชี้ได้อย่างถูกต้องถึงการวนซ้ำของแรงกระทำเนื่องจาก iterative strain increments ถูกคำนวณจากความเครียดในการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำครั้งสุดท้ายซึ่งอาจไม่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขของการสมดุล ในแต่ละขั้นของแรงกระทำ iterative strain increments อาจจะเปลี่ยนทิศทางได้หลายครั้งขึ้นอยู่กับการเพิ่มขึ้นของความเครียดสะสมที่แต่ละรอบของการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ แม้แต่เมื่อการแก้ปัญหาอยู่บนเส้นทางของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดก็ตาม

ขนาดของความเครียดวนซ้ำ ในแบบจำลองเหล็กเสริมยอมให้เกิดได้เพียงเมื่อขนาดการเพิ่มขึ้นของความเครียดวนซ้ำล่าสุดมากกว่า 25% ของขนาดการเพิ่มขึ้นของความเครียดทั้งหมดจากขั้นของแรงกระทำครั้งก่อน เนื่องจากการวนซ้ำที่ไม่ถูกต้องจะทำให้เกิดปัญหาเชิงตัวเลขในการคำนวณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชัน Ramberg-Osgood

กฎเกณฑ์ข้างต้นเป็นเพียงพื้นฐานเบื้องต้นที่จะปรับปรุงการลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงและเสถียรภาพของผลลัพธ์ กฎเกณฑ์ดังกล่าวจะต้องขึ้นกับธรรมชาติของปัญหาด้วย ดังนั้นอาจจะปรับปรุงกฎเกณฑ์ดังกล่าวถ้ามีชนิดของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กอื่น หรือเงื่อนไขการรับแรงอื่น

2.3.3.3 **ปัญหาในวิธี** Newton-Raphson

ในการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็ก ปัญหาที่เกิดขึ้นที่เป็นสาเหตุให้ไม่เกิดการลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่แท้จริงในวิธีการของ Newton-Raphson ดังแสดงในรูป 2.23 เกิดเมื่อการเลือกผลลัพธ์ของการหาคำตอบโดยวิธีการหาค่าคำนวณซ้ำ ระหว่างจุด A และ C ไม่ลู่เข้าหาตำแหน่งสมดุลที่จุด E ปัญหานี้จะเกิดเมื่อกราฟระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของแบบจำลองวัสดุมีลักษณะอ่อนลงและแข็งขึ้นอีกครั้ง เช่นในกรณีของการครากแล้วเกิดช่วงการแข็งตัวขึ้นของเหล็กเสริม ถ้าผลลัพธ์ที่เหมาะสมถูกพบระหว่างวิธีการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ เส้นทางของการแก้ปัญหาจะยอมให้ลู่เข้าหาจุด B และจะแก้ปัญหาไปสู่จุด C ในขั้นของแรงกระทำถัดไป แม้ว่าจุด B ไม่ใช่เส้นทางจริงการเลือกของจุด B ระหว่างขั้นของแรงกระทำล่าสุด จะไม่มีผลกระทำที่สำคัญต่อความถูกต้องของการวิเคราะห์แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากการแก้ปัญหาจะถูกต้องในขั้นของแรงกระทำถัดไป

2.3.4 **แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์**

ลักษณะสำคัญอีกประการหนึ่งของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือการจำลองชิ้นส่วนในงานวิจัยนี้ แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องแทนลักษณะรูปร่าง,เงื่อนไขขอบเขต และประวัติการรับแรงของกำแพงภายใต้การศึกษาได้อย่างแท้จริง ลักษณะสำคัญหลายประการของแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับกำแพงประกอบด้วย ชนิดของชิ้นส่วน, ขนาดของชิ้นส่วน, ขนาดของขั้นของแรงกระทำ และวิธีการของแรงกระทำ

2.3.4.1 **ชนิดของชิ้นส่วน**

ในการเลือกชนิดของชิ้นส่วนที่เหมาะสมมีสองวิธีที่ต่างกัน คือ วิธีแรกเป็นการใช้จำนวนชิ้นส่วนน้อยที่มีฟังก์ชันการประมาณภายในที่มีอันดับสูง วิธีที่สองเป็นการใช้จำนวนชิ้นส่วนมากที่มีฟังก์ชันการประมาณภายในเป็นเส้นตรงหรือที่มีอันดับต่ำ

เมื่อกำแพงคอนกรีตเสริมเหล็กรับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักร การแตกจำนวนมากเกิดขึ้นในส่วนฐานของกำแพง ดังนั้นการกระจายความเครียดในคอนกรีตจะมีความไม่ต่อเนื่องสูง เนื่องจากความเครียดของคอนกรีตที่แต่ละจุดจะขึ้นกับการเคลื่อนตัวของคอนกรีตที่อยู่ใกล้กันเท่านั้น และจะไม่มีผลกระทบจากการเคลื่อนตัวของคอนกรีตที่อยู่ห่างออกไป ดังนั้นการใช้ชิ้นส่วนเล็กๆจำนวนมาก ที่มีความเครียดซึ่งคำนวณจากการเคลื่อนตัวจุดต่อ 4 จุดที่ใกล้กันจะเหมาะสมต่อกำแพงที่เกิดการแตกมากกว่าใช้ชิ้นส่วนใหญ่ ในแบบจำลองไฟ

ไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้กับกำแพงในงานวิจัยนี้ ใช้ชิ้นส่วนแบบ 4 จุดต่อชนิดไอโซพาราเมตริกซ์เป็นเส้นตรงซึ่งมีกฎการอินทิเกรต 2x2 และใช้ชิ้นส่วนของแท่ง 2 จุดต่อ ในการแทนคอนกรีตและเหล็กเสริมตามลำดับ

ข้อดีอีกประการหนึ่งของชิ้นส่วนแบบไอโซพาราเมตริกซ์เป็นเส้นตรงซึ่งมีกฎการอินทิเกรต 2x2 คือ ชิ้นส่วนจะยังคงมีเสถียรภาพแม้แต่เมื่อเกิดการแตกที่จุดที่อินติเกรตทั้ง 4 จุดในชิ้นส่วน

ในส่วนของเหล็กเสริมนั้น การเลือกชิ้นส่วนของแท่ง 2 จุดต่อนั้นเนื่องจากการเคลื่อนตัวของชิ้นส่วนนี้สัมพันธ์กับการเคลื่อนตัวตามขอบเขตของชิ้นส่วนแบบเส้นตรง 4 จุดของคอนกรีต และชิ้นส่วนของแท่ง 2 จุดต่อสามารถใช้การแบ่งไฟไนต์เอลิเมนต์เดียวกันกับเอลิเมนต์คอนกรีตโดยไม่ต้องสร้างจุดต่อพิเศษขึ้นมา

2.3.4.2 ขนาดของการแบ่งในไฟไนต์เอลิเมนต์

การแบ่งชิ้นส่วนที่เหมาะสมจะมีผลกระทบต่อการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็ก การแบ่งชิ้นส่วนละเอียดโดยไม่จำเป็นจะทำให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณนานขึ้น ในขณะเดียวกันการแบ่งชิ้นส่วนอย่างหยาบจะไม่สามารถแทนพฤติกรรมของกำแพงได้อย่างถูกต้อง การแบ่งชิ้นส่วนที่เหมาะสมสำหรับชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กขึ้นอยู่กับปัญหาที่จะศึกษานั้นๆ เนื่องจากไม่มีกฎที่ตายตัวในการอธิบาย ในงานวิจัยนี้ตำแหน่งของการแบ่งชิ้นส่วนจะเกี่ยวข้องกับตำแหน่งของเหล็กเสริมด้วย เนื่องจากเหล็กเสริมจะถูกจำลองเป็นชิ้นส่วนแบบแท่ง ตำแหน่งชิ้นส่วนของเหล็กเสริมจะถูกออกแบบให้ใกล้เคียงกับตำแหน่งจริงของเหล็กเสริมในกำแพง รายละเอียดของการแบ่งชิ้นส่วนในแต่ละกำแพงแสดงในรูปที่ 1.2 และ 1.3

2.3.4.3 วิธีการของแรงกระทำ

ในการวิเคราะห์ชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กจะมีวิธีการอยู่ 2 แบบ คือ วิธีการแบบบังคับแรงกระทำ (load-control algorithm) และวิธีการแบบบังคับการเคลื่อนที่ (displacement-control algorithm) ในวิธีการแบบบังคับแรงกระทำนั้น แรงกระทำจะเพิ่มขึ้นในแต่ละขั้นของแรงกระทำ ในขณะที่วิธีการแบบบังคับการเคลื่อนที่ ระยะการเคลื่อนตัวที่จุดต่อที่ให้แรงกระทำจะเพิ่มขึ้นในแต่ละขั้นนของแรงกระทำ Darwin และ Pecknold (34) ได้กล่าวว่า วิธีการแบบบังคับการเคลื่อนที่จะให้ผลการวิเคราะห์สำหรับชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กที่รับแรงกระทำแบบเป็นวัฏจักรที่แม่นยำขึ้น เนื่องจากตำแหน่งที่เริ่มมีพฤติกรรมการอ่อนตัวและความแข็งแรงของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กจะไม่ทราบก่อนการวิเคราะห์ จึงเป็นการยากที่จะกำหนดการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำที่เหมาะสมตลอดการรับแรง ถ้ามีการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำมากอาจทำให้เกินค่าความแข็งแรงของชิ้นส่วนทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่ใกล้เคียง แต่ถ้าการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำมีขนาดเล็กเกินไปจะทำให้สิ้นเปลืองเวลาในการวิเคราะห์ โดยที่วิธีการแบบบังคับการเคลื่อนที่จะให้ผลลัพธ์ที่มีเสถียรภาพมากกว่าวิธีการแบบบังคับแรงกระทำ เนื่องจากระยะการเคลื่อนตัวที่กำหนดจะไม่เกินความสามารถในการเคลื่อนตัวของวัตถุ นอกจากที่ประวัติการรับแรงรอบท้ายๆ ดังนั้นวิธีการแบบบังคับการเคลื่อนที่จะถูกใช้ในงานวิจัยนี้

ในการเลือกขนาดของระยะการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นจะใช้ค่าจากผลการทดสอบของ พิชัย ภัทรรัตนกุล (20) ดังแสดงในรูปที่ 2.24 และ 2.25

ลักษณะที่สำคัญอีกประการหนึ่งของวิธีการของแรงกระทำที่ใช้ในการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็กคือ เทคนิคที่ใช้ในการกำหนดค่าการเคลื่อนตัวเมื่อมีแรงกระทำย้อนกลับ แทนที่จะให้แรงกระทำย้อนกลับทันที จะใช้วิธีการเปลี่ยนแปลงค่าการเคลื่อนตัวทีละน้อยในทิศทางของการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นเมื่อทิศทางของแรงกระทำเปลี่ยน ซึ่งจะทำให้เพิ่มค่าการเคลื่อนตัว 2 ค่าระหว่างขั้นของแรงกระทำที่มีทิศทางของแรงกระทำย้อนกลับ ขนาดของค่าการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นทั้ง 2 นี้จะมีขนาดน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นปกติดังแสดงดังนี้

การย้อนกลับของแรงกระทำ

... +0.05 in. +0.05 in. | +0.00001 in. -0.00001 in. | -0.05 in. -0.05 in. ...

การเพิ่มขึ้นปกติ | การเพิ่มขึ้นที่ใส่เข้าไป | การเพิ่มขึ้นปกติ

จำนวนของการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ใช้ในงานวิจัยนี้ใช้ 30 ครั้ง

2.3.5 วิธีการ Incremental-Iterative

ในการวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็ก เวลาที่ใช้ส่วนมากจะใช้ไปกับการแก้สมการสมดุลแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นการหาวิธีการที่เหมาะสมในการแก้สมการโดยมีเสถียรภาพที่ดีและความแม่นยำเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการแบบ Incremental-Iterative ที่ใช้ในการแก้สมการแบบไม่เชิงเส้นสำหรับงานวิจัยนี้ประกอบด้วย 2 ส่วนหลักคือ วิธีการ Newton-Raphson และกฎเกณฑ์ด้านการลู่เข้าดังจะกล่าวต่อไปนี้

2.3.5.1 วิธีการ Newton-Raphson

ในวิธีการนี้เวกเตอร์การเคลื่อนตัว U ที่สภาวะสมดุล ณ.เวลา $t + \Delta t$ สามารถหาได้จากสูตร

$$ {}^{t+\Delta t}K^{i-1}\,\Delta U^{i} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{i-1} \qquad (37)$$

โดยที่ ${}^{t+\Delta t}K^{i-1}$ = เมตริกซ์ของสติฟเนสสัมผัสที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i-1 ของขั้นของแรงกระทำที่เวลา $t + \Delta t$

ΔU^i = เวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i

${}^{t+\Delta t}R$ = เวกเตอร์ของแรงกระทำภายนอกที่ขึ้นของแรงกระทำ ณ เวลา $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t}F^{i-1}$ = เวกเตอร์ของแรงกระทำที่สัมพันธ์กับหน่วยแรงของชิ้นส่วนที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i-1 ของขึ้นของแรงกระทำ ณ เวลา $t + \Delta t$

ระยะการเคลื่อนตัวทั้งหมดสามารถคำนวณจาก

$$ {}^{t+\Delta t}U^i = {}^{t+\Delta t}U^{i-1} + \Delta U^i \qquad (38) $$

โดยที่ ${}^{t+\Delta t}U^i$ เป็นระยะการเคลื่อนตัวทั้งหมดที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่ i ของขั้นของแรงกระทำ ณ เวลา $t + \Delta t$

เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ 37 และสมการ 38 คือ

$$ {}^{t+\Delta t}U^0 = {}^tU \qquad (39) $$

$$ {}^{t+\Delta t}F^0 = {}^tF \qquad (40) $$

ในวิธีการนี้ใช้แบบ the full N-R iteration (the full Newton-Raphson iteration) เมตริกซ์ของสตีฟเนสของแบบจำลอง (K) จะถูกเปลี่ยนทุกๆการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ ดังสมการที่ 37 ซึ่งจะทำให้ใช้เวลามาก ทำให้เกิดการพัฒนาเป็นแบบ the modified N-R iteration โดยแทนที่จะเปลี่ยนทุกๆการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ เมตริกซ์ของสตีฟเนสใหม่จะถูกเปลี่ยนที่การหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำที่แน่นอน ซึ่งจะทำให้คำนวณเมตริกซ์ของสติฟเนสน้อยกว่าในแบบ the full N-R iteration แม้ว่าแบบ the modified N-R iteration ต้องการการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำในการแก้ปัญหามากกว่าแบบ the full N-R iteration แต่เวลาที่ใช้ทั้งหมดอาจจะน้อยกว่าเนื่องจากมีการเปลี่ยนเมตริกซ์ของสติฟเนสน้อยกว่าดังอธิบายได้ดังรูปที่ 2.26

ในงานวิจัยของ Darwin และ Pecknold (34) ได้รายงานว่าการใช้วิธีการแบบ the full N-R iteraion ดีกว่าการใช้แบบ the modified N-R iteration เนื่องจากพฤติกรรมของคอนกรีตและเหล็กเสริมขึ้นกับเส้นทางอย่างมากและสติฟเนสของคอนกรีตและเหล็กเสริมที่สภาวะต่างกันก็จะต่างกันมาก (ยกตัวอย่างเช่น คอนกรีตที่เกิดการแตกและที่ไม่เกิดการแตก หรือ การครากของเหล็กเสริมและในช่วงเชิงเส้นของเหล็กเสริม) ดังนั้นการแก้สมการสมดุลที่ใช้สติฟเนสสัมผัสที่ไม่สัมพันธ์กับสถานะปัจจุบันของวัสดุอาจทำให้การแก้ปัญหาห่าง

จากเส้นทางแก้ปัญหาจริงและทำให้มีอัตราการลู่เข้าที่ช้าหรือไม่ลู่เข้าเลย ในงานวิจัยนี้จะใช้งานวิจัยของ C. Sittipunt (18) เป็นหลักซึ่งใช้แบบ the full N-R iteration

2.3.5.2 กฎเกณฑ์การลู่เข้า

กฎเกณฑ์การลู่เข้าจะอธิบายถึงเงื่อนไขในการสิ้นสุดของการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ โดยทั่วไปจะมีตัวแปรที่ต่างกันอยู่สามตัวที่ใช้ในกฎเกณฑ์การลู่เข้าคือค่าการเคลื่อนตัว, แรงกระทำคงค้าง และพลังงานภายใน

ในงานวิจัยนี้จะใช้อัตราส่วนของ norm ของเวกเตอร์แรงกระทำคงค้างต่อ norm ของการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำเป็นกฎเกณฑ์สำหรับการสิ้นสุดของการหาคำตอบโดยวิธีการแทนค่าคำนวณซ้ำ การแก้ปัญหาที่ขั้นตอนใดๆจะเกิดการลู่เข้าถ้ามีเงื่อนไขดังนี้

$$\|R\| \leq \|\Delta P\| \times \frac{TOL}{100} \tag{41}$$

โดยที่

$\|x_i\|$ = the Euclidean norm ของเวกเตอร์ $x = \sqrt{\sum x_i^2}$

R = เวกเตอร์ของแรงกระทำคงค้างทั้งหมด

ΔP = การเพิ่มขึ้นของแรงกระทำ

TOL = the convergence tolerance

แรงกระทำคงค้างถูกเลือกในกฎเกณฑ์การลู่เข้าเนื่องจากจะสามารถแทนสภาวะสมดุลล่าสุดของการแก้ปัญหา และจะคำนวณจากแรงกระทำคงค้างทั้งหมดซึ่งจะทำให้ไม่เกิดการสะสมของความผิดพลาดในการแก้ปัญหาระหว่างขั้นของแรงกระทำ เนื่องจากแรงกระทำคงค้างคำนวณจากเงื่อนไขในสภาวะสมดุลทั้งหมด ขั้นของแรงกระทำจะลู่เข้าหาผลที่ถูกต้อง แม้แต่เมื่อขั้นของแรงกระทำครั้งก่อนไม่ลู่เข้า

ในงานวิจัยนี้ใช้ส่วนที่ยอมให้ลู่เข้าได้ (convergence tolerance) 5% ในการวิเคราะห์กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็ก