บทที่ ๒

หลักการในการแก้ปัญหา

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของโครงสร้างซึ่งแปรเปลี่ยนไปตามลักษณะของแรงกระทำภายนอกในขณะเวลาใด ๆ นั้น ถ้าเป็นโครงสร้างที่มีจำนวนการเคลื่อนที่อิสระ (Displacement Degree of Freedom) ไม่มากนัก ก็สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้อย่างง่าย ๆ โดยใช้กฎของนิวตันและหาคำตอบโดยตรงโดยไม่ต้องทำการลดรูปอย่างไร แต่สำหรับปัญหาที่พิจารณาในการวิจัยฉบับนี้มุ่งสำหรับปัญหาของโครงสร้างที่สลับซับซ้อนและมีจำนวนการเคลื่อนที่อิสระซึ่งเป็นตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นจำนวนมากจำเป็นจะต้องลดตัวแปรเสียก่อน ทำให้ไม่สะดวกในการหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้กฎของนิวตัน วิธีการแก้ปัญหาที่สะดวกและเหมาะสมวิธีหนึ่งก็คือหาปริมาณพลังงานของระบบโครงสร้างที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วแทนเข้าไปในสมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์ (Lagrange's Equation of Motion) ก็จะได้ระบบของสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างซึ่งลดจำนวนตัวแปรแล้วตามต้องการ

๒.๑ สมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์

ลากรางจ์ ได้พัฒนาวิธีการแก้ปัญหาทางพลศาสตร์โดยอาศัยการพิจารณาพลังงานของระบบจากปริมาณพลังงานความเครียด (Strain Energy) พลังงานจลน์ (Kinetic Energy) และงานที่เกิดขึ้น (Work Done) สำหรับระบบที่พลังงานมีการสูญหาย (Nonconservative System) ซึ่งมีผลของงานเนื่องจากแรงหน่วง (Damping Force) กระทำกับระบบอยู่ สมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์จะเขียนได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial Wd}{\partial \dot{q}_k} = Q(t);\ k = 1,2,3 \ldots n \qquad (1)$$

T เป็นพลังงานจลน์ U เป็นพลังงานความเครียด W_d เป็นงานเนื่องจากแรงหน่วง $\{q\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่จุดข้อต่อ $\{\dot{q}\}$ เป็นเวคเตอร์ของความเร็วที่จุดข้อต่อซึ่งเป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $\{q\}$ $Q(t)$ เป็นแรงกระทำจากภายนอกที่ขณะเวลา t ใด ๆ

n เป็นจำนวนพิกัดทั่วไป (Generalized Coordinate) ของระบบ

พลังงานจลน์ พลังงานความเครียด และงานเนื่องจากแรงหน่วงของระบบให้โดยความสัมพันธ์ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\} \tag{2}$$

$$U = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} \tag{3}$$

$$W_d = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[C]\{\dot{q}\} \tag{4}$$

โดยที่ [M] เป็นเมทริคซ์ของมวล [K] เป็นสติฟเนสเมทริคซ์ และ [C] เป็นเมทริคซ์ของแรงหน่วงของระบบ

๒.๒ พลังงานและงานของระบบที่ประกอบด้วยโครงสร้างย่อย

พลังงานและงานของโครงสร้างทั้งระบบ (รูปที่ ๑.ก) ซึ่งประกอบขึ้นด้วยโครงสร้างย่อยจำนวนหนึ่ง สามารถหาได้จากการรวมพลังงานและงานจากโครงสร้างย่อยแต่ละอัน

พิจารณาโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ (รูปที่ ๑.ก) พลังงานความเครียดของโครงสร้างย่อยที่ i จะอยู่ในรูปของ

$$U_i = \frac{1}{2}\{q\}_i^T[K]_i\{q\}_i \tag{5}$$

สามารถเขียน $\{q\}_i$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่จุดข้อต่อของโครงสร้างย่อยที่ i ได้เป็น

$$\{q\}_i = \begin{Bmatrix} \{q_m\}_i \\ \{q_s\}_i \end{Bmatrix} \tag{6}$$

ในที่นี้อักษรพ่วง m ที่เวคเตอร์เป็นตัวบ่งชี้ว่าเวคเตอร์นั้นเป็นส่วนที่จะคงไว้เป็นพิกัดประธาน (Master Coordinate) และ s บ่งชี้ว่าเป็นเวคเตอร์ส่วนที่จะลดทิ้งไปเรียกว่า พิกัดบริวาร (Slave

Coordinate) โดยทั่ว ๆ ไปพิกัดประธานมักจะเป็นพิกัดที่อยู่บริเวณต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อย ทั้งนี้เพื่อเป็นการรักษาความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยไว้ ส่วนพิกัดบริวารจะเป็นพิกัดส่วนอื่น ๆ ที่เหลือ

สมมุติให้ $\{q_s\}_i$ มีความสัมพันธ์โดยประมาณกับ $\{q_m\}_i$ โดยการแปลงเชิงเส้นตรง (Linear Transformation) ดังสมการ

$$\{q_s\}_i = [\Gamma]_i\{q_m\}_i \tag{7}$$

เมื่อ $[\Gamma]_i$ เป็นเมทริคซ์แปลงเชิงเส้นตรงที่ใช้ในการแปลงเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ แทนค่า $\{q_s\}_i$ ลงในสมการ (6) แล้วจัดรูปจะได้

$$\{q\}_i = \begin{bmatrix} [I] \\ [\Gamma]_i \end{bmatrix} \{q_m\}_i = [\phi]_i\{q_m\}_i \tag{8}$$

ในที่นี้ $[I]$ คือเมทริคซ์เอกลักษณ์ และโดยทั่ว ๆ ไปเมทริคซ์แปลง $[\Gamma]_i$ จะสมมุติเช่นเดียวกับในกรรมวิธีการลดตัวแปรสถิตย์ (Static Condensation) ดังจะได้กล่าวโดยละเอียดในภายหลัง

แทนค่า $\{q\}_i$ ลงในสมการ (5) จะได้พลังงานความเครียดของโครงสร้างย่อย i ใด ๆ มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\{q_m\}_i^T[\phi]_i^T[K]_i[\phi]_i\{q_m\}_i \\ &= \frac{1}{2}\{q_m\}_i^T[K^*]_i\{q_m\}_i \end{aligned} \tag{9}$$

เมื่อ $[K^*]_i = [\phi]_i^T[K]_i[\phi]_i$ (10)

และพลังงานความเครียดของโครงสร้างทั้งระบบจะอยู่ในรูปของ

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

ในเมื่อ N เป็นจำนวนโครงสร้างย่อยทั้งหมด โดยวิธีการไดเรคสติฟเนส (Direct Stiffness-

Method) และกำหนดให้ $\{q_m\}$ เป็นเวคเตอร์ซึ่งรวมพิกัดประธานของระบบไว้ทั้งหมด จะได้

$$U = \frac{1}{2}\{q_m\}^T[K^*]\{q_m\} \tag{11}$$

เมื่อ $[K^*]$ เป็นสติฟเนสเมทริคซ์ของโครงสร้างทั้งหมดที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว

ส่วนพลังงานจลน์ของโครงสร้างย่อยที่ i จะอยู่ในรูปของ

$$T_i = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}_i^T[M]_i\{\dot{q}\}_i \tag{12}$$

เช่นเดียวกันกับการแบ่งส่วน $\{q\}_i$ ในสมการ (6) ก็จะแบ่งส่วน $\{\dot{q}\}_i$ ได้เป็น

$$\{\dot{q}\}_i = \begin{Bmatrix}\{\dot{q}_m\}_i \\ \{\dot{q}_s\}_i\end{Bmatrix} \tag{13}$$

โดยการสมมุติอย่างประมาณว่า $\{\dot{q}_s\}_i$ สามารถหาได้จาก $\{\dot{q}_m\}_i$ โดยการแปลงเชิงเส้นตรงดังสมการ

$$\{\dot{q}_s\}_i = [\Omega]_i\{\dot{q}_m\}_i \tag{14}$$

เมื่อ $[\Omega]_i$ เป็นเมทริคซ์แปลงเชิงเส้นตรงที่ใช้ในการแปลงเวคเตอร์ของความเร็ว

ดังนั้น $$\{\dot{q}\}_i = \begin{bmatrix}[I] \\ [\Omega]_i\end{bmatrix}\{\dot{q}_m\}_i = [\eta]_i\{\dot{q}_m\}_i \tag{15}$$

ในกรณีที่ใช้ $[\Omega]_i$ ในสมการ (14) เหมือนกับ $[\Gamma]_i$ ในสมการ (7) ซึ่งเป็นวิธีการที่กระทำกันอยู่โดยทั่วไปเรียกว่าเป็นการแปลงอย่างคงตัวแปลง (Consistent Transformation) แต่ในการวิจัยฉบับนี้จะพิจารณาในแง่มุมที่แตกต่างออกไปซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดในหัวข้อของการพิจารณาเมทริคซ์แปลง แทนค่า $\{\dot{q}\}_i$ จากสมการ (15) ลงในสมการ (12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2}\{\dot{q}_m\}_i^T[\eta]_i^T[M]_i[\eta]_i\{\dot{q}_m\}_i \\ &= \frac{1}{2}\{\dot{q}_m\}_i^T[M^*]_i\{\dot{q}_m\}_i \end{aligned} \tag{16}$$

เมื่อ $[M^*]_i = [\eta]_i^T [M]_i [\eta]_i$ (17)

ดังนั้นพลังงานจลน์ของโครงสร้างทั้งหมดสามารถเขียนได้เป็น

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

ด้วยวิธีการรวมเมทริคซ์ของมวลของโครงสร้างย่อยเข้าด้วยกันโดยวิธีการเดียวกันกับวิธีการไดเรค-สติฟเนสและกำหนดให้ $\{\dot{q}_m\}$ เป็นเวคเตอร์ซึ่งรวมพิกัดประธานของระบบไว้ด้วยกันก็จะได้

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}_m\}^T [M^*] \{\dot{q}_m\} \tag{18}$$

เมื่อ $[M^*]$ เป็นเมทริคซ์ของมวลของโครงสร้างทั้งหมดที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว

สำหรับระบบที่มีการหน่วงชนิดวิสคัส (Viscous damping) จะเขียนพลังงานหน่วงของระบบได้เป็น

$$W_d = \frac{1}{2} \{\dot{q}_m\}^T [C^*] \{\dot{q}_m\} \tag{19}$$

เมื่อ $[C^*]$ เป็นเมทริคซ์หน่วง (Damping Matrix) ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว

และเมื่อพิจารณาถึงงานซึ่งเกิดขึ้นจากแรงกระทำที่มาจากภายนอกที่เวลาขณะใด ๆ ของโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ จะได้ว่า

$$W_i = \{q\}_i^T \{Q\}_i \tag{20}$$

โดยที่ $\{q\}_i$ สามารถพิจารณาแยกเป็น $\{q_s\}_i$ และ $\{q_m\}_i$ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วจากความสัมพันธ์ที่ (6) ซึ่งในวิธีการคงตัวแปลงก็จะนำเมทริคซ์แปลง $[\Gamma]_i$ มาใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\{q_s\}_i$ และ $\{q_m\}_i$ อีกเช่นกัน แต่จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า $[\Gamma]_i$ เป็นเพียงเมทริคซ์แปลงโดยประมาณเท่านั้น ดังนั้นโดยการใช้แนวความคิดเดียวกันกับการหาพลังงานจลน์ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว ก็จะสามารถสมมุติให้เมทริคซ์แปลงที่ใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\{q_s\}_i$ และ $\{q_m\}_i$ นั้นเหมือนกับเมทริคซ์แปลงที่ใช้ในการหาความสัมพันธ์ของความเร็วจากสมการที่ (14) เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์

เชิงเส้นตรงของ $\{q_s\}_i$ และ $\{q_m\}_i$ สำหรับการพิจารณางานซึ่งเกิดจากแรงภายนอกจะเขียนอยู่ในรูปของ

$$\{q_s\}_i = [\Omega]_i\{q_m\}_i \tag{21}$$

และ $$\{q\}_i = \begin{bmatrix} [I] \\ [\Omega]_i \end{bmatrix} \{q_m\}_i = [\eta]_i\{q_m\}_i \tag{22}$$

แทนค่า $\{q\}_i$ ลงในสมการ (20) จะได้

$$W_i = \{q_m\}_i^T\{Q^*\}_i \tag{23}$$

โดยที่ $$\{Q^*\}_i = [\eta]_i^T\{Q\}_i \tag{24}$$

และงานซึ่งเกิดจากแรงกระทำจากภายนอกทั้งหมดจะได้เป็น

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

$$= \{q_m\}^T\{Q^*\} \tag{25}$$

๒.๓ สมการการเคลื่อนที่ของระบบซึ่งลดจำนวนตัวแปร

ด้วยการนำพลังงานและงานของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรซึ่งได้พิจารณาในหัวข้อ ๒.๒ ไปแทนลงในสมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์ (1) ในหัวข้อ ๒.๑ ก็จะสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วได้ดังนี้

$$[M^*]\{\ddot{q}_m\}+[C^*]\{\dot{q}_m\}+[K^*]\{q_m\} = \{Q^*\} \tag{26}$$

๒.๔ การพิจารณาหาเมทริคซ์แปลงที่จะนำมาใช้ในการลดขนาดเมทริคซ์

หลังจากได้ทำการหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วโดยอาศัยเมทริคซ์

แปลงโดยประมาณมาทำการลดขนาดเมทริคซ์และเวคเตอร์ต่าง ๆ ของระบบโครงสร้างเดิม ซึ่งได้ละเว้นการพิจารณาถึงเมทริคซ์แปลงโดยประมาณดังกล่าวไว้ ดังนั้นในหัวข้อต่อไปนี้จะได้ทำการพิจาร-ณาเกี่ยวกับลักษณะสมบัติของเมทริคซ์แปลงแต่ละชนิดโดยละเอียด

เนื่องจากงานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะเปรียบเทียบความถูกต้องของผลลัพธ์ซึ่งเป็นผลอันเกิดจากการใช้วิธีการต่าง ๆ ในการหาเมทริคซ์ของมวลของระบบที่ลดรูปแล้ว ดังนั้นจึงละเว้นการพิจารณาผลที่เกิดจากแรงหน่วงซึ่งจะทำให้สามารถหาข้อสรุปตามจุดมุ่งหมายได้อย่างชัดเจน ด้วยการย้ายข้างสมการ (26) โดยตัดส่วนที่เป็นผลจากแรงหน่วงออกจะได้

$$[K^*]\{q_m\} = \{Q^*\}-[M^*]\{\ddot{q}_m\} \tag{27}$$

แทนค่า $[K^*]_i$ จากสมการ (10) $[M^*]_i$ จากสมการ (17) และ $\{Q^*\}_i$ จากสมการ (24) ลงในสมการ (27) จะได้

$$\sum_i[\phi]_i^T[K]_i[\phi]_i\{q_m\}_i = \sum_i[\eta]_i^T\{Q\}_i - \sum_i[\eta]_i^T[M]_i[\eta]_i\{\ddot{q}_m\}_i \tag{28}$$

เขียน $[K]_i$, $\{Q\}_i$ และ $[M]_i$ ในรูปแบ่งส่วน ประกอบกับการแทนค่า $[\phi]_i\{q_m\}_i$ จากสมการ (8) และอนุพันธ์ของ $[\eta]_i\{\dot{q}_m\}_i$ จากสมการ (15) ลงในสมการ (28) จะได้

$$\sum_i \left[\ [I]^T\ [\Gamma]_i^T\ \right] \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \{q_m\}_i \\ \{q_s\}_i \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_i \left[\ [I]^T\ [\Omega]_i^T\ \right] \left[\begin{Bmatrix} \{Q_m\}_i \\ \{Q_s\}_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_m\}_i \\ \{\ddot{q}_s\}_i \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \sum_i \left[\ [I]^T\ [\Omega]_i^T\ \right] \begin{bmatrix} \{Q_m\}_i - [M_{mm}]_i\ \{\ddot{q}_m\}_i - [M_{ms}]_i\ \{\ddot{q}_s\}_i \\ \{Q_s\}_i - [M_{sm}]_i\ \{\ddot{q}_m\}_i - [M_{ss}]_i\ \{\ddot{q}_s\}_i \end{bmatrix} \tag{29}$$

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า $\{q_s\}$ นั้นสมมุติให้มีความสัมพันธ์โดยประมาณกับ $\{q_m\}$ ตามวิธีการลดตัวแปรสถิตย์ทั่วไปคือ

$$\{q_s\}_i = - [K_{ss}]_i^{-1} [K_{sm}]_i \{q_m\}_i \tag{30}$$

หรือ $$[\Gamma]_i = - [K_{ss}]_i^{-1} [K_{sm}]_i \tag{31}$$

จะเห็นได้ชัดเจนว่าการแปลงระหว่าง $\{q_m\}_i$ และ $\{q_s\}_i$ ตามความสัมพันธ์ในสมการ (30) จะถูกต้องอย่างแท้จริงก็ต่อเมื่อนิพจน์ล่างด้านขวามือของสมการ (29) มีค่าเป็นศูนย์เท่านั้น แต่พบว่าจะไม่เป็นศูนย์โดยทั่ว ๆ ไปยกเว้นเมื่อ $[M_{sm}]_i$ $[M_{ss}]_i$ และ $\{Q_s\}_i$ มีค่าเป็นศูนย์ ในวิธีการหาผลลัพธ์ไอเกนอย่างประหยัด (Eigenvalue Economization) [3] ใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (30) ทั้งในการหาพลังงานความเครียดและพลังงานจลน์ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วนั่นคือเมทริคซ์แปลง $[\eta]_i$ ที่ใช้จะเหมือนกับ $[\phi]_i$ ดังนั้นจากสมการ (17) แทน $[\eta]_i$ ด้วย $[\phi]_i$ จะได้

$$[M^*]_i = [\phi]_i^T [M]_i [\phi]_i \tag{32}$$

และจากสมการ (24) แทน $[\eta]_i$ ด้วย $[\phi]_i$ ก็จะได้

$$\{Q^*\}_i = [\phi]_i^T \{Q\}_i \tag{33}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่าใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลและเวคเตอร์ของแรงภายนอกที่มากระทำกับโครงสร้างด้วยเมทริคซ์แปลงตัวเดียวกันกับที่ใช้ในการลดขนาดสติฟเนสเมทริคซ์ ดังนั้นจึงเรียกวิธีการนี้ว่าเป็นการลดขนาดเมทริคซ์อย่างคงตัวแปลง (Consistent Transformation Condensation)

จากการค้นคว้าวิจัยซึ่งได้มีผู้ทำกันต่อเนื่องมาพบว่าการเลือกกลุ่มของตัวแปรที่จะคงไว้เป็นพิกัดประธานของระบบมีความสำคัญมากเพราะบางครั้งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้คลาดเคลื่อนไป [3] กล่าวคือการเลือกกลุ่มตัวแปรที่ไม่เหมาะสมจะทำให้รูปแบบ (Mode) สำคัญซึ่งมีความถี่ต่ำ ๆ บางอันหายไปหรือผลลัพธ์ไอเกนจะผิดพลาดไปจากความจริงมาก ซึ่งก็สามารถอธิบายถึงสาเหตุของความ

คลาดเคลื่อนได้ว่าเป็นเพราะใช้การประมาณตามความสัมพันธ์ที่ (30) ดังนั้นวิธีการโครงสร้างย่อยจึงไม่เป็นที่นิยมใช้เพราะไม่อาจเลือกกลุ่มตัวแปรอิสระเพื่อความเหมาะสมได้เนื่องจากจะมีกลุ่มตัวแปรที่สมควรจะต้องถูกลดทิ้งแต่จำเป็นต้องคงไว้เพื่อความต่อเนื่องของแต่ละโครงสร้างย่อย ด้วยเหตุนี้ Leung [4] ได้พยายามขจัดข้อจำกัดนี้โดยการพิจารณาอิทธิพลของสติฟเนสและมวลร่วมเข้าด้วยกันเรียกว่าไดนามิคสติฟเนสจากนั้นก็หาวิธีลดจำนวนตัวแปรด้วยการลดขนาดของไดนามิคสติฟเนสเมทริคซ์ แล้วหาผลลัพธ์ไอเกนโดยวิธีการกระทำซ้ำ (Iterative Method) และสามารถพิสูจน์ได้ว่าผลลัพธ์ไอเกนที่ได้ในการกระทำซ้ำแต่ละครั้งจะมีค่าเข้าใกล้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากขึ้นทุกขณะ

ส่วนวิธีการที่ใช้เป็นหลักในงานวิจัยฉบับนี้เป็นวิธีการสำหรับวิธีโครงสร้างย่อยโดยตรงด้วยแนวความคิดที่ว่า เมื่อพิจารณาโครงสร้างย่อยใด ๆ ซึ่งมีขนาดไม่ใหญ่โตมากนักทำให้สามารถสมมุติให้โครงสร้างย่อยทั้งอันมีคุณสมบัติเป็นชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริค (Isoparametric Element) ได้ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของจุดข้อต่อบริวารกับความเร็วของจุดข้อต่อประธานก็จะหาได้โดยใช้เมทริคซ์ของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) มาเป็นเมทริคซ์แปลงเพื่อใช้ในการหาพลังงานจลน์ของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว ส่วนการหาพลังงานความเครียดของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วนั้นยังคงใช้ความสัมพันธ์ที่ใช้ในวิธีการลดตัวแปรสถิตย์ วิธีการดังกล่าวนี้ Lukkunaprasit และ Alam [10] ได้ใช้ในการแก้ปัญหาทางพลศาสตร์สำหรับโครงสร้างตึกสูงมิติเดียว และงานวิจัยฉบับนี้จะได้ใช้วิธีการพื้นฐานเช่นเดียวกันมาประยุกต์กับโครงสร้างแผ่นบางและโครงสร้างเปลือกบางซึ่งจะได้กล่าวโดยละเอียดในหัวข้อต่อไป

๒.๕ วิธีการที่นำเสนอในการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลสำหรับโครงสร้างแผ่นบางและโครงสร้างเปลือกบาง

ด้วยสมมุติฐานเช่นเดียวกับที่ใช้ในเอกสารอ้างอิงที่ [10] ที่ว่าความเร็วของจุดข้อต่อบริวารหาได้โดยการเทียบส่วนเฉลี่ยโดยตรงกับฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นตรงของความเร็วที่จุดข้อต่อประธานในแต่ละโครงสร้างย่อย แต่สำหรับโครงสร้างแผ่นบางและเปลือกบางนั้นถือว่าเป็นชิ้นส่วนสองมิติ ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างที่ง่ายที่สุดที่จะใช้เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบทวิเชิงเส้น (Bilinear Shape Function)

ในรูปที่ ๑.ข พิจารณาโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ ว่าเป็นชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริคใหญ่อันหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยจุดข้อต่อที่มุมสี่จุด ตำแหน่งใด ๆ (s,t) ในระบบพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinate System) ของชิ้นส่วนโครงสร้างย่อย (ดูรูปที่ ๑.ข) สามารถที่จะแปลงไปให้ทราบตำแหน่ง (x',y') ในระบบพิกัดประจำตัว (Local Coordinate System) ของโครงสร้างย่อยได้ โดยในรูปที่ ๑.ข นั้นแกนหลักของระบบพิกัดประจำตัวสร้างขึ้นโดยที่แกน x' ขนานกับแนวจากจุด 1 ไปยังจุด 2 แกน z' จะตั้งฉากกับระนาบซึ่งเกิดจากจุด 1 จุด 2 และจุด 4 และแกน y' ตั้งฉากกับระนาบซึ่งเกิดจากแกน x' และแกน z' การแปลงดังกล่าวข้างต้นอาศัยฟังก์ชันรูปร่างแบบทวิเชิงเส้นมาเป็นตัวแปลงดังนี้

$$x' = \sum_{j=1}^{4} N_j \, (s,t) \; x'_j \qquad (34a)$$

$$y' = \sum_{j=1}^{4} N_j \, (s,t) \; y'_j \qquad (34b)$$

เมื่อ x'_j, y'_j ; j = 1, 2, 3, 4 เป็นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อ j ที่มุมทั้งสี่ของชิ้นส่วนโครงสร้างย่อยในระบบพิกัดประจำตัวของชิ้นส่วนโครงสร้างย่อย x', y' เป็นพิกัดตำแหน่งในระบบพิกัดประจำตัวของชิ้นส่วนโครงสร้างย่อยสำหรับตำแหน่งใด ๆ ที่มีค่าพิกัดเป็น (s,t) ในระบบพิกัดธรรมชาติ ส่วน $N_j(s,t)$; j = 1, 2, 3, 4 นั้นต่างก็เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบทวิเชิงเส้นของชิ้นส่วนโครงสร้างย่อยซึ่งมีค่าเป็น

$$N_1 \, (s,t) = (1-s)(1-t)/4 \qquad (35a)$$

$$N_2 \, (s,t) = (1+s)(1-t)/4 \qquad (35b)$$

$$N_3 \, (s,t) = (1+s)(1+t)/4 \qquad (35c)$$

$$N_4 \, (s,t) = (1-s)(1+t)/4 \qquad (35d)$$

จากสมการที่ (34) ถ้าให้ x'_{mcj}, y'_{mcj}, j = 1, 2, 3, 4 เป็นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อที่มุมทั้งสี่ซึ่งจะคงไว้เป็นจุดข้อต่อประธานหลักของโครงสร้างย่อยและให้ x'_{sp}, y'_{sp} เป็นพิกัดตำแหน่ง

ของจุดข้อต่อบริวารที่จะถูกลดทิ้งลำดับที่ p ซึ่งโดยทั่วไปจะไม่ใช่จุดข้อต่อบริเวณขอบต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อย

$$x'_{sp} = \sum_{j=1}^{4} N_{jp}\, x'_{mcj} \tag{36a}$$

$$y'_{sp} = \sum_{j=1}^{4} N_{jp}\, y'_{mcj} \tag{36b}$$

และเนื่องจากสมมุติให้ใช้แนวคิดของไอโซพาราเมตริค (Isoparametric Concept) ดังนั้นจึงสามารถใช้ความสัมพันธ์เช่นเดียวกันกับสมการ (36) ในการแปลงปริมาณการเคลื่อนที่และปริมาณความเร็วของจุดข้อต่อได้ดังนี้

$$q_{sp} = \sum_{j=1}^{4} N_{jp}\, q_{mcj} \tag{37a}$$

และ $$\dot{q}_{sp} = \sum_{j=1}^{4} N_{jp}\, \dot{q}_{mcj} \tag{37b}$$

ฉะนั้นเวคเตอร์ของความเร็วของจุดข้อต่อทั้งหมดจะแบ่งส่วนได้ดังนี้

$$\{\dot{q}\}_i = \left\{\begin{array}{c} \{\dot{q}_{mc}\}_i \\ \hline \{\dot{q}_{mb}\}_i \\ \hline \{\dot{q}_s\}_i \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} [I] & [0] \\ \hline [0] & [I] \\ \hline [\Omega^*] & [0] \end{array}\right]_i \left\{\begin{array}{c} \{\dot{q}_{mc}\} \\ \hline \{\dot{q}_{mb}\} \end{array}\right\}_i \tag{38}$$

ในเมื่อ

$$\{\dot{q}_{mc}\}_i = \{\ \{\dot{q}_{mc1}\},\{\dot{q}_{mc2}\},\{\dot{q}_{mc3}\},\{\dot{q}_{mc4}\}\ \}_i^T$$

$$\{\dot{q}_{mb}\}_i = \{\ \{\dot{q}_{mb1}\},\{\dot{q}_{mb2}\},\ .\ .\ .,\{\dot{q}_{mbM}\}\ \}_i^T$$

$$\{\dot{q}_{s}\}_i = \{\ \{\dot{q}_{s1}\},\{\dot{q}_{s2}\},\ .\ .\ .,\{\dot{q}_{sp}\},\ .\ .\ .,\{\dot{q}_{sN}\}\ \}_i^T$$

ในที่นี้ $\{\dot{q}_{mc}\}_i$ เป็นเวคเตอร์ของพิกัดความเร็วประจำจุดข้อต่อประธานหลักที่มุมทั้งสี่ของโครงสร้างย่อย ซึ่งแต่ละจุดข้อต่อจะมีจำนวนพิกัดความเร็วครบตามประเภทของโครงสร้างที่ทำการวิเคราะห์ สำหรับโครงสร้างแผ่นบางและโครงสร้างเปลือกบางจะมีพิกัดความเร็วที่จุดข้อต่อแต่ละจุดเป็นหกคือ สามพิกัดในเชิงแนว (Translation) และสามพิกัดในเชิงหมุน (Rotation) ส่วน $\{\dot{q}_{mb}\}_i$ เป็นเวคเตอร์ของพิกัดความเร็วประจำจุดข้อต่อประธานรอง M จุดข้อต่อที่บริเวณขอบต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยยกเว้นที่มุมทั้งสี่ โดยทั่ว ๆ ไปแต่ละจุดข้อต่อนี้จะมีจำนวนพิกัดความเร็วครบตามประเภทของโครงสร้างเช่นกัน และสำหรับการพิจารณาจำนวนพิกัดความเร็วสำหรับจุดข้อต่อบริวารใด ๆ ที่ p ($\{\dot{q}_{sp}\}$) นั้นจะถือว่ามีจำนวนพิกัดความเร็วครบเพื่อให้ง่ายในการอธิบายซึ่งจะมีอยู่ด้วยกันทั้งหมด N จุดข้อต่อ จากข้อกำหนดลักษณะสมบัติของเวคเตอร์ต่าง ๆ เช่นนี้เมทริคซ์แปลง $[\Omega^*]_i$ สำหรับโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ นั้นจะเป็นเมทริคซ์แปลงในลักษณะทวิเชิงเส้นซึ่งจะอยู่ในรูปของ

$$[\Omega^*]_i = \begin{bmatrix} [T_1]_1, & [T_2]_1, & [T_3]_1, & [T_4]_1 \\ [T_1]_2, & [T_2]_2, & [T_3]_2, & [T_4]_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T_1]_p, & [T_2]_p, & [T_3]_p, & [T_4]_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T_1]_N, & [T_2]_N, & [T_3]_N, & [T_4]_N \end{bmatrix} \qquad (39)$$

โดยที่เมทริคซ์ย่อย $[T_j]_p$; j = 1, 2, 3 และ 4 จะเป็น

$$[T_j]_p = \begin{bmatrix} N_{jp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{jp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{jp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{jp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{jp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{jp} \end{bmatrix} \qquad (40)$$

สำหรับในกรณีที่ความอิสระในการเคลื่อนที่ของจุดข้อต่อบริวารบริเวณขอบที่ไม่ต่อเนื่องกับโครงสร้างย่อยอื่น ๆ ถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่ ทำให้มีจำนวนตัวแปรอิสระต่อจุดข้อต่อน้อยกว่าหกนั้น ค่า N_{jp} ที่สอดคล้องในการใช้แปลงพิกัดความเร็วระหว่างพิกัดความเร็วที่ถูกบังคับดังกล่าวกับพิกัดความเร็วประธานจะมีค่าเป็นศูนย์

เมทริคซ์ของมวลของระบบที่ลดจำนวนตัวแปรแล้ว $[M^*]_i$ สำหรับโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ จากสมการ (17) จะเขียนได้เป็น

$$[M^*]_i = \left[\ [I]^T \,\vdots\, [\Omega]^T \right]_i [M]_i \begin{bmatrix} [I] \\ \hdashline [\Omega] \end{bmatrix}_i \qquad (41)$$

โดยที่ $\quad [\Omega]_i = \left[\ [\Omega^*]_i \,\vdots\, [0]\ \right]_i$

จากคุณสมบัติที่แยกอิสระจากกันของเมทริคซ์แปลง $[\Omega]_i$ ทำให้สามารถหาเมทริคซ์ลดขนาดของมวลได้โดยการพิจารณาการแปลงทีละจุดข้อต่อในแต่ละชิ้นส่วนเบื้องต้นได้อย่างง่าย ๆ แล้วใช้วิธีรวมเข้าเป็นเมทริคซ์ของมวลซึ่งลดขนาดแล้วอย่างเชิงเส้นตรง (Superposition) ซึ่งจะประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมากเพราะไม่ต้องใช้เก็บเมทริคซ์แปลงทั้งหมดในขณะเดียวกัน

สำหรับเมทริคซ์ของมวลที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วของโครงสร้างทั้งระบบนั้นหาได้โดยการรวมเมทริคซ์ของมวลที่ลดจำนวนตัวแปรแล้วของแต่ละโครงสร้างย่อย $[M^*]_i$ เข้าด้วยกันโดยวิธีการเดียวกับการรวมสติฟเนสโดยตรงของวิธีการไฟไนท์เอเลเมนท์

๒.๖ การหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดธรรมชาติ เพื่อใช้ในการสร้าง เมทริคซ์แปลงที่ใช้ในการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย

จากการที่ได้บรรยายและพิสูจน์ในหัวข้อที่แล้วมา ทำให้ทราบได้ว่าสามารถที่จะใช้ เมทริคซ์แปลงซึ่งสร้างมาจากฟังก์ชันรูปร่างแบบทวิ เชิง เส้นมา เป็นตัวแปลงในการลดขนาด เมทริคซ์ของมวล แต่การที่จะหาค่าฟังก์ชันรูปร่าง $N_j(s,t)$; j = 1, 2, 3, 4 ในสมการ (35) ออกมา เป็นตัว เลข เพื่อใช้ในการสร้าง เมทริคซ์แปลงดังกล่าวนั้นจำ เป็นจะต้องทราบค่าของพิกัด (s,t) ในระบบพิกัดธรรมชาติของจุดข้อต่อบริวารทุกจุดภายในโครงสร้างย่อย เสียก่อน

เนื่องจากในวิธีการไฟไนท์ เอ เล เมนท์นั้นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อทั้งหมดของโครงสร้างย่อยที่พิจารณาจะอยู่ในระบบพิกัดร่วม (Global Coordinate System) ซึ่งสามารถแปลงให้ไปอยู่ในระบบพิกัดประจำตัวของโครงสร้างย่อยโดยการยึดถือจุดข้อต่อที่มุมทั้งสี่ของโครงสร้างย่อยว่า เป็น เสมือนจุดข้อต่อที่มุมทั้งสี่ของชิ้นส่วน เบื้องต้น (Element) (ดูรูปที่ ๑.ข) แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อประธานกับจุดข้อต่อบริวารโดยการแปลงของฟังก์ชันรูปร่างแบบทวิ เชิง เส้นตามความสัมพันธ์ในสมการที่ (36) จากนั้นก็ทำการแก้สมการดังกล่าวหาพิกัดตำแหน่ง (s,t) ของจุดข้อต่อบริวารมาสร้าง เมทริคซ์แปลง เพื่อใช้ในการลดขนาด เมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายได้ดังรายละ เอียดของวิธีการต่อไปนี้

ทำการแปลงพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อในระบบพิกัดร่วมให้อยู่ในระบบพิกัดประจำตัวของโครงสร้างย่อยโดยความสัมพันธ์

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

เมื่อ $\{x \;\; y \;\; z\}^T$ เป็นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อใด ๆ ในระบบพิกัดร่วม $\{x' \;\; y' \;\; z'\}^T$ เป็นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อในระบบพิกัดประจำตัวของโครงสร้างย่อย และ $[\lambda]$ เป็น เมทริคซ์ไดเรคชันโคซายน์ (Direction Cosine) ของมุมซึ่ง เกิดจาก เซทของแกนในระบบทั้งสองซึ่ง

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

เขียนสมการ (36) ใหม่ในรูปของ

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \{x'_m\} \\ \{y'_m\} \end{Bmatrix}_i \qquad (43)$$

โดยที่ N_j ; $j = 1, 2, 3, 4$ นั้นได้นิยามไว้แล้วในสมการ (35) พิจารณาตัวพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในสมการที่ (43) และในฟังก์ชันรูปร่าง N_j พบว่า $\{x'\}$, $\{y'\}$, $\{x'_m\}$ และ $\{y'_m\}$ เป็นพิกัดตำแหน่งของจุดข้อต่อของโครงสร้างย่อยในระบบพิกัดประจำตัวซึ่งทราบค่าแล้วโดยการแปลงมาจากพิกัดตำแหน่งในระบบพิกัดร่วมตามสมการ (42) ส่วน s และ t เป็นพิกัดตำแหน่งในระบบพิกัดธรรมชาติที่ต้องการหาค่า ดังนั้นด้วยการแทนค่า N_i ลงในสมการ (43) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$(1-s-t+st)\,x'_1 + (1+s-t-st)\,x'_2 + (1+s+t+st)\,x'_3 + (1-s+t-st)\,x'_4 = 4\,x' \qquad (44a)$$

$$(1-s-t+st)\,y'_1 + (1+s-t-st)\,y'_2 + (1+s+t+st)\,y'_3 + (1-s+t-st)\,y'_4 = 4\,y' \qquad (44b)$$

หรืออาจเขียนโดยการจัดหมวดหมู่ของตัวแปร s,t และผลคูณของ s กับ t เป็น

$$a_1 s + a_2 t + a_3 st = 4x' - K = a_4 \qquad (45a)$$

$$b_1 s + b_2 t + b_3 st = 4y' - L = b_4 \qquad (45b)$$

โดยที่ $a_1 = (-x'_1+x'_2+x'_3-x'_4)$; $b_1 = (-y'_1+y'_2+y'_3-y'_4)$

$a_2 = (-x'_1-x'_2+x'_3+x'_4)$; $b_2 = (-y'_1-y'_2+y'_3+y'_4)$

$$a_3 = (x_1'-x_2'+x_3'-x_4'); \quad b_3 = (y_1'-y_2'+y_3'-y_4')$$

$$K = (x_1'+x_2'+x_3'+x_4'); \quad L = (y_1'+y_2'+y_3'+y_4')$$

จากสมการ (45a) จะได้ว่า

$$t = \frac{a_4-a_1 s}{a_2+a_3 s} \tag{46}$$

แทนค่า t ลงในสมการ (45b) และหลังจากจัดกลุ่มของตัวแปรแล้วจะได้

$$A s^2 + Bs + C = 0 \tag{47}$$

เมื่อ $A = (a_3 b_1 - a_1 b_3)$

$$B = (a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_4 b_3 - a_3 b_4)$$

$$C = (a_4 b_2 - a_2 b_4)$$

แก้สมการ (47) ในแบบทั่วไปของสมการกำลังสองจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

กรณีที่ 1) ถ้า $A = 0$; $s = -\frac{C}{B}$

กรณีที่ 2) ถ้า $A \neq 0$; $s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$; สำหรับ $|s| \leq 1$

และในทำนองเดียวกันก็สามารถหาค่า t ได้