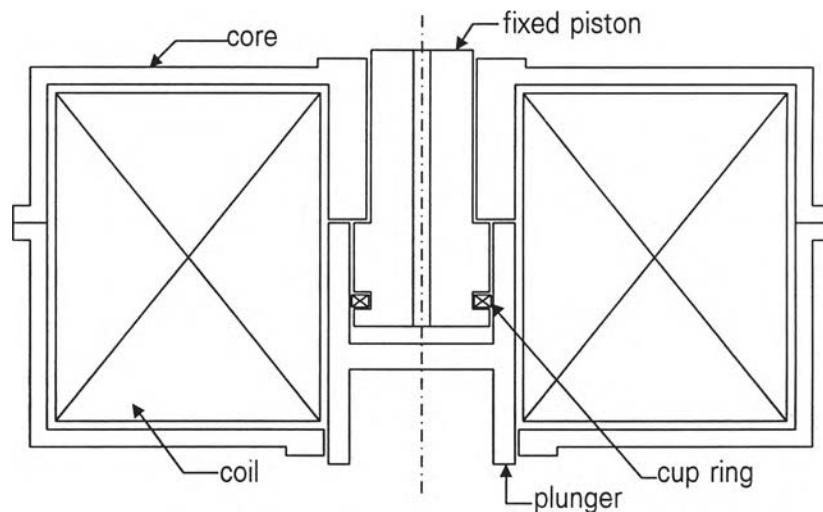




### บทที่ 3

## แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์และลิ้นเข็มเซอร์โว

### ตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์ (solenoid actuator)



รูปที่ 3.1 รูปแบบตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์

เป็นอุปกรณ์สร้างความดัน ซึ่งทำการออกแบบตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์ไว้อย่างละเอียด แสดงไว้ที่ภาคผนวก ข. โดยมีองค์ประกอบ ซึ่งแสดงภาพภายใน ดังในรูป 3.1 มีขดลวด (coil) , ครอบเหล็ก (core) , ลูกสูบเคลื่อนที่ (plunger) , ลูกสูบอยู่กับที่ (fixed piston) และยางกันรั่วแบบรูปถ้วย (cup ring)

### แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์

สมการไฟฟ้าพื้นฐานของรูปแบบตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์ สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d\lambda_A}{dt} + R_A i(t) = v(t) \quad (3.1)$$

- เมื่อ  $\lambda_A$  = ปริมาณฟลักลิงเคค (flux linkage)  
 $R_A$  = ความต้านทานของขดลวด  
 $i(t)$  = กระแสที่ไหลผ่านขดลวด  
 $v(t)$  = ความต่างศักย์ที่ตกคร่อมระหว่างขดลวด

สามารถเขียนปริมาณฟลักลิงเคคในรูปของความเหนี่ยวนำได้ดังนี้

$$\lambda_A = L_A(t)i(t) \quad (3.2)$$

- เมื่อ  $L_A(t)$  = ความเหนี่ยวนำในขดลวด

สมการที่ 3.1 จะสามารถเขียนใหม่เป็น

$$L_A \frac{di}{dt} + i \frac{dL_A}{dt} + R_A i(t) = v(t) \quad (3.3)$$

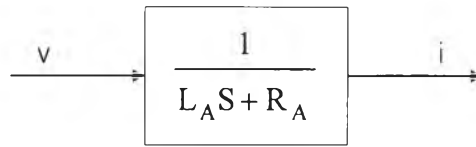
เนื่องจากการเคลื่อนที่ของลูกสูบที่ (plunger) มีระยะเคลื่อนตัวน้อยมาก ทำให้สัดส่วนของการเหนี่ยวนำต่อเวลาที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย จึงละเลยไม่นำมาคิด สมการจึงลดรูปเป็น

$$L_A \frac{di}{dt} + R_A i(t) = v(t) \quad (3.4)$$

ทำการใส่ปลาสรณพอร์มทั้งสองข้าง และจัดใหม่จะได้ว่า

$$\frac{v(S)}{L_A S + R_A} = i(S) \quad (3.5)$$

เขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงบล็อกไดอะแกรม ตัวกระตุ้นแบบไซลินดรีด

สมการการเคลื่อนที่ของตัวลูกสูบเคลื่อนที่โดยอาศัยกฎนิวตัน สามารถเขียนรูปแบบคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$M_A \ddot{y} + B_A \dot{y} + k_A y + P_g A_1 = F(t) \quad (3.6)$$

- เมื่อ
- $M_A$  = มวลของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $B_A$  = สัมประสิทธิ์วิสคอสแดมปีงของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $k_A$  = ค่าคงที่ของสปริง ในที่นี้เป็นน้ำมันไฮดรอลิก
  - $y$  = ระยะการเคลื่อนตัวของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $\dot{y}$  = ความเร็วของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $\ddot{y}$  = ความเร่งของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $P_g$  = ความดันเดิมของน้ำมันไฮดรอลิกที่กระทำกับลูกสูบเคลื่อนที่
  - $A_1$  = พื้นที่ความดันน้ำมันกระทำในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของลูกสูบเคลื่อนที่
  - $F(t)$  = แรงที่กระทำบนลูกสูบเคลื่อนที่โดยการเหนี่ยวนำ

จากคุณสมบัติของน้ำมันไฮดรอลิกจะมีค่าบัลคมอดูลัส (bulk modulus)

$$B = \frac{dP}{dV/V} \quad (3.7)$$

- เมื่อ
- $B$  = บัลคมอดูลัส
  - $dP$  = การเปลี่ยนแปลงความดัน

$dV$  = การเปลี่ยนแปลงปริมาตรภายในระบบปิด

$V$  = ปริมาตรภายในระบบปิด

ในที่นี้  $V$  จะเป็นผลรวมปริมาตรทั้งหมดโดยคิดจากปริมาณน้ำมันที่อยู่ในก้ามปูห้ามล้อ , ปริมาณน้ำมันที่อยู่ในท่อระบบปิด และปริมาณน้ำมันที่อยู่ในตัวกระตุ้น เพื่อหาค่าเป็นหน่วยของระยะทางเทียบเท่า  $T = \frac{V}{A_1}$  โดยปริมาตรทั้งหมดต่อด้วยพื้นที่ที่ความดันน้ำมันกระทำในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของลูกสูบเคลื่อนที่ การเปลี่ยนแปลงปริมาตรภายในระบบปิด  $dV$  จะเป็นผลคูณพื้นที่ความดันน้ำมันกระทำในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของลูกสูบเคลื่อนที่  $A_1$  กับระยะการเคลื่อนตัวของลูกสูบเคลื่อนที่  $y$

การเปลี่ยนแปลงความดัน  $dP$  จะเขียนในรูปของความดัน  $P$  สมการ 3.7 จะสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$P = B \frac{dV}{V} = \frac{BA_1 y}{A_1 T} \quad (3.8)$$

หรือ 
$$P = \frac{By}{T} \quad (3.9)$$

จะสามารถเขียนในรูปของแรง เนื่องจากการยุบตัวของน้ำมันไฮดรอลิกจะได้

$$k_A y = PA_1 \quad (3.10)$$

หรือ 
$$k_A y = \frac{BA_1 y}{T} \quad (3.11)$$

และ 
$$k_A = \frac{BA_1}{T} \quad (3.12)$$

และความดันเดิม  $P_g$  เขียนในรูปของการหยุดตัวของน้ำมันไฮดรอลิกได้

$$P_g A_1 = \frac{B A_1 y_0}{T} \quad (3.13)$$

เมื่อ  $y_0$  = ระยะการเคลื่อนตัวเดิมของลูกสูบเคลื่อนที่

สมการที่ 3.6 จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$M_A \ddot{y} + B_A \dot{y} + \frac{B}{T} A_1 (y + y_0) = F(t) \quad (3.14)$$

หรือ

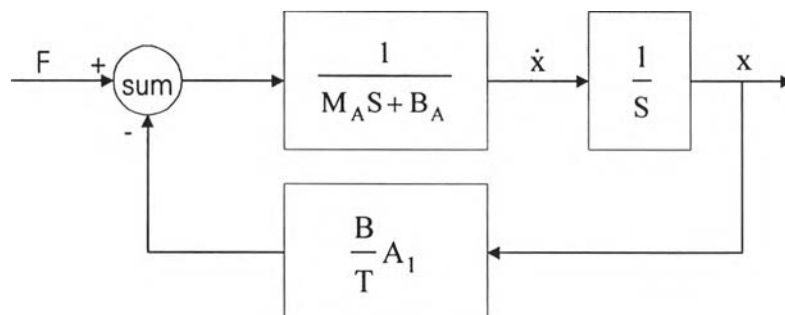
$$M_A \ddot{x} + B_A \dot{x} + \frac{B}{T} A_1 x = F(t) \quad (3.15)$$

เมื่อ  $x(t)$  = ระยะการเคลื่อนตัวใหม่ของลูกสูบเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลรวมของ  $y(t) + y_0$

$\dot{x}$  = ความเร็วใหม่ของลูกสูบเคลื่อนที่ มีค่าเท่ากับ  $\dot{y}$

$\ddot{x}$  = ความเร่งใหม่ของลูกสูบเคลื่อนที่ มีค่าเท่ากับ  $\ddot{y}$

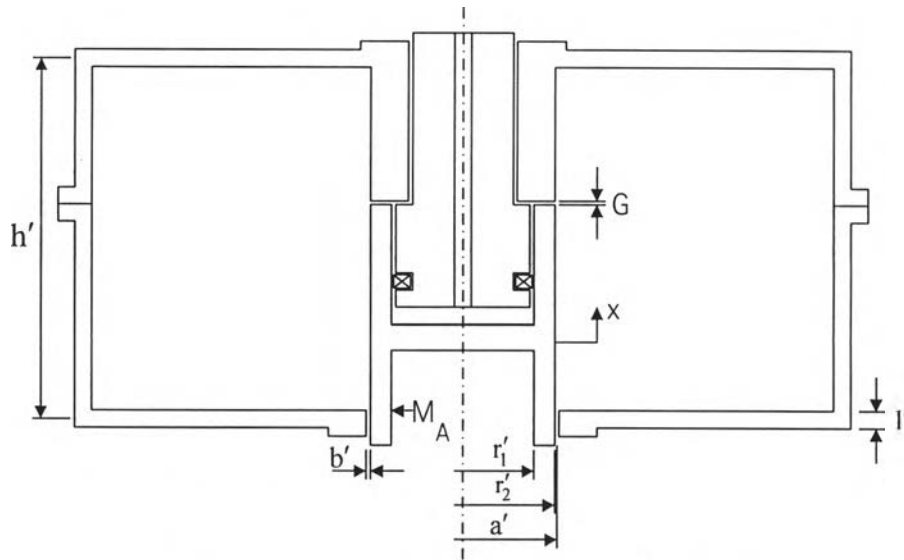
เขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมดังรูป 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงบล็อกไดอะแกรมของลูกสูบเคลื่อนที่

สมการแรงของตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์สามารถเขียนได้เป็น

$$F(t) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_A}{dx} \quad (3.16)$$



รูปที่ 3.4 แสดงขนาดมิติ ตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์

ค่ารีลัคแทนซ์ (reluctance) โดยพิจารณาจากรูป 3.4 จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$R_R = \frac{(G-x)}{\mu_0 \pi (r_2'^2 - r_1'^2)} + \frac{b'}{\mu_0 2\pi a'l'} \quad (3.17)$$

หรือ

$$R_R = \frac{2a'l'(G-x) + b'(r_2'^2 - r_1'^2)}{2\pi\mu_0 a'l'(r_2'^2 - r_1'^2)} \quad (3.18)$$

- เมื่อ  $R_R$  = ค่ารีลัคแทนซ์  
 $G$  = ระยะช่องว่างระหว่างขอบของลูกสูบเคลื่อนที่กับขอบในของกระบอก  
 เสื่อ (core)  
 $\mu_0$  = ความสามารถที่ผ่านช่องว่างได้ (permeability of free space) ( $4\pi \times 10^{-7}$   
 H/m)

- $a'$  = รัศมีโดยเฉลี่ยที่อยู่ระหว่างช่องว่างของลูกสูบเคลื่อนที่กับกระบอกเสื้อ  
 $b'$  = ระยะห่างของลูกสูบเคลื่อนที่กับกระบอกเสื้อ  
 $l'$  = ความหนาของกระบอกเสื้อ  
 $r_1'$  = รัศมีในของลูกสูบเคลื่อนที่  
 $r_2'$  = รัศมีนอกของลูกสูบเคลื่อนที่

ค่าความเหนี่ยวนำ (inductance) จะมีความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนรอบของการพันขดลวดกับค่ารีลัคแทนซ์ดังนี้

$$L_A = \frac{N^2}{R_R} \quad (3.19)$$

หรือ

$$L_A = \frac{2\pi\mu_0 a' l' (r_2'^2 - r_1'^2) N^2}{2a' l' (G - x) + b' (r_2'^2 - r_1'^2)} \quad (3.20)$$

- เมื่อ  $L_A$  = ความเหนี่ยวนำในขดลวด  
 $N$  = จำนวนรอบที่พันขดลวด

เขียนสมการที่ 3.20 เป็น

$$L_A = \frac{K_1' N^2}{K_2' (G - x) + K_3'} \quad (3.21)$$

- เมื่อ  $K_1' = 2\pi\mu_0 a' l' (r_2'^2 - r_1'^2)$   
 $K_2' = 2a' l'$   
 $K_3' = b' (r_2'^2 - r_1'^2)$

นำสมการ 3.21 มาอนุพันธ์เทียบระยะ  $x$  และแทนในสมการ 3.16 จะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$F = \frac{1}{2} \frac{i^2 K_1 K_2 N^2}{(K_2(G-x) + K_3)^2} \quad (3.22)$$

สมการ 3.22 จะเห็นได้ว่าตัวแปรคือ  $i$  และ  $x$  และรูปแบบสมการจะเป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear equation) เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ โดยทำเป็นเชิงเส้น (linearization) อาศัยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

การทำเชิงเส้น (linearization) ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นของ  $F(i, x)$  ที่จุด  $\bar{i}, \bar{x}$  โดยอาศัยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) ดังสมการต่อไปนี้

$$F(i, x) = F(\bar{i}, \bar{x}) + \left( \frac{\partial F}{\partial i} (i - \bar{i}) + \frac{\partial F}{\partial x} (x - \bar{x}) \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial i^2} (i - \bar{i})^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial i \partial x} (i - \bar{i})(x - \bar{x}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (x - \bar{x})^2 \right) + \dots \quad (3.23)$$

พิจารณาเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เพื่อทำเป็นเชิงเส้น ส่วนอนุพันธ์อันดับสูงจะไม่นำมาพิจารณา สมการ 3.23 จะเขียนได้ว่า

$$F(i, x) = F(\bar{i}, \bar{x}) + \left. \frac{\partial F}{\partial i} \right|_{i=\bar{i}, x=\bar{x}} (i - \bar{i}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{i=\bar{i}, x=\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad (3.24)$$

หรือ  $F = K_{ix} + K_i i + K_x x \quad (3.25)$

เมื่อ  $K_{ix} = F(\bar{i}, \bar{x}) - K_i \bar{i} - K_x \bar{x}$

$$K_i = \left. \frac{\partial F}{\partial i} \right|_{i=\bar{i}, x=\bar{x}}$$

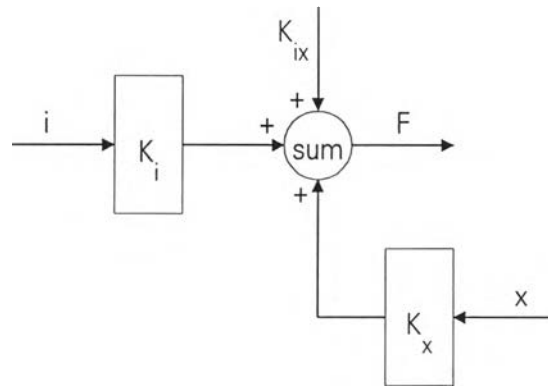
$$K_x = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{i=\bar{i}, x=\bar{x}}$$



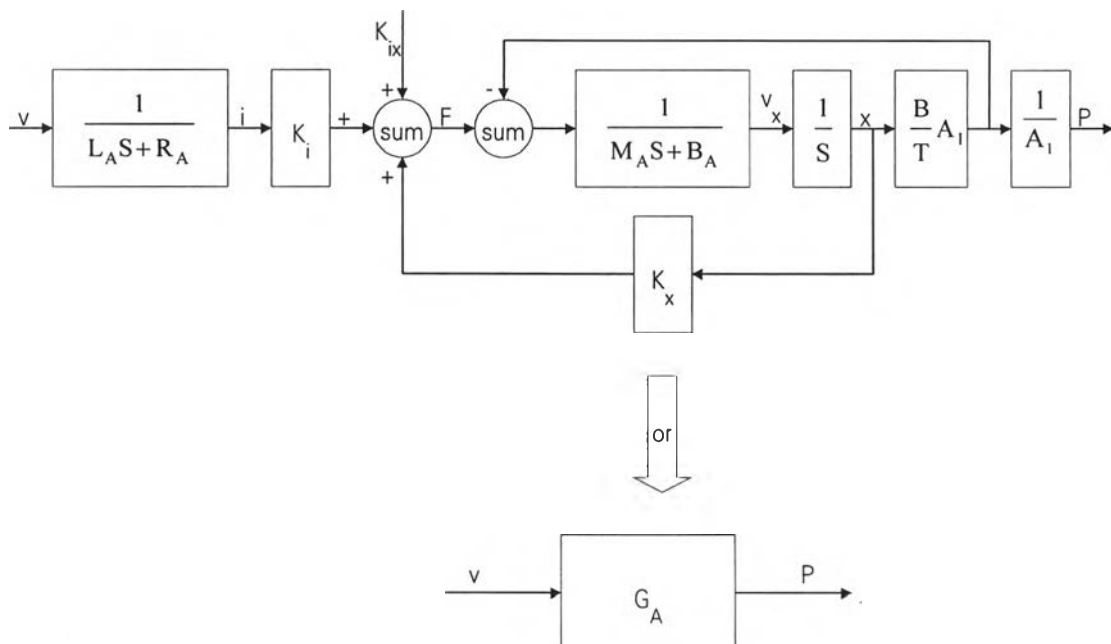
ทำการใส่ลาปลาซทรานฟอร์มทั้งสองข้างและจัดใหม่ได้ว่า

$$K_{ix} + K_i i(s) + K_x x(s) = F(s) \quad (3.26)$$

เขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมดังรูป 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงบล็อกไดอะแกรม แรงกระทำในตัวกระตุ้นแบบไซน์นอยด์

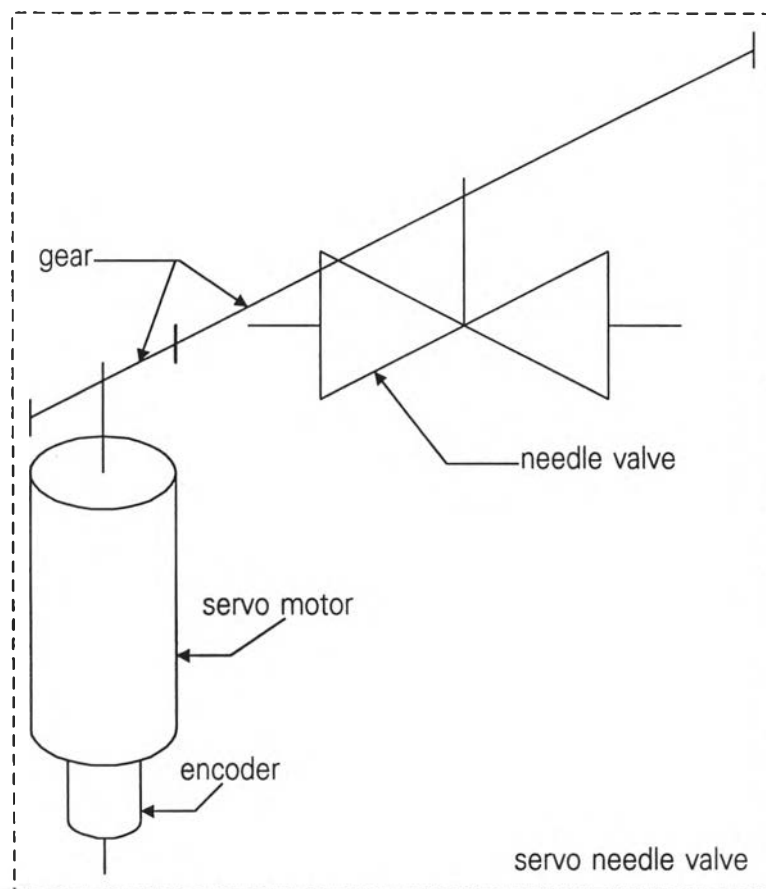


รูปที่ 3.6 แสดงบล็อกไดอะแกรมแบบจำลองคณิตศาสตร์ของตัวกระตุ้นแบบไซน์นอยด์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตัวกระตุ้นแบบโซลินอยด์ นำมาแสดงเป็นบล็อกไดอะแกรมดังรูปที่ 3.6

### ลิ้นเข็มเซอร์โว (servo needle valve)

จะมีองค์ประกอบด้วยกัน 4 ส่วนดังในรูป 3.7 ลิ้นเข็ม (needle valve) , มอเตอร์เซอร์โว , เอนโคดเดอร์ และชุดเฟืองทดเป็นเฟืองตรง ตัวขับจำนวน 20 ฟัน และตัวตามจำนวน 100 ฟัน



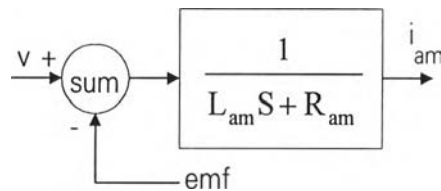
รูปที่ 3.7 รูปแบบลิ้นเข็มเซอร์โวอย่างง่าย

### แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลิ้นเข็มเซอร์โว

สมการไฟฟ้าพื้นฐานของมอเตอร์เซอร์โว สามารถเขียนเป็น

$$L_{am} \frac{di_{am}}{dt} + R_{am} i_{am} + emf = v(t) \quad (3.27)$$

- เมื่อ  $L_{am}$  = อินдукแตนซ์ของอาร์เมเจอร์มอเตอร์  
 $R_{am}$  = ความต้านทานของอาร์เมเจอร์มอเตอร์  
 $emf$  = โวลต์เตจย้อนกลับ  
 $i_{am}$  = กระแสที่ป้อนให้กับอาร์เมเจอร์มอเตอร์

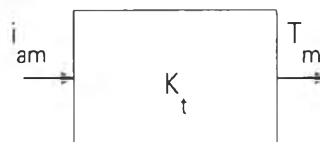


รูปที่ 3.8 แสดงบล็อกไดอะแกรมทางไฟฟ้าของมอเตอร์เซอร์โว

แรงบิดของแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดขึ้นแกโรเตอร์ของมอเตอร์จะเป็นสัดส่วนกับกระแสที่ป้อนให้แก่อาร์เมเจอร์

$$T_m = K_t i_{am} \quad (3.28)$$

- เมื่อ  $K_t$  = ค่าคงที่แรงบิดมอเตอร์  
 $T_m$  = แรงบิดของมอเตอร์

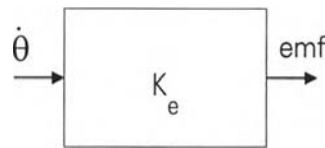


รูปที่ 3.9 แสดงบล็อกไดอะแกรม แรงบิดมอเตอร์

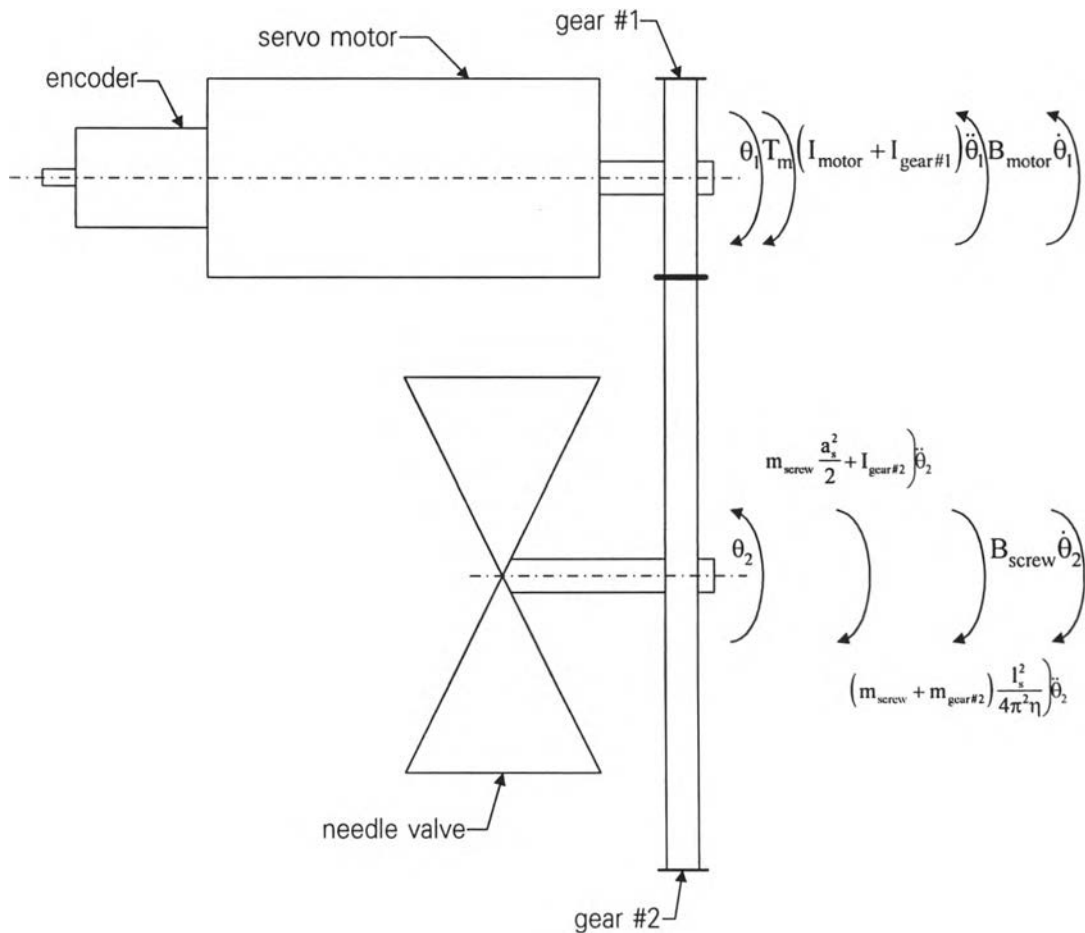
โวลต์เต้จ้ย้อยกลับ จะแปรผันตามความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์

$$emf = K_e \dot{\theta} \tag{3.29}$$

- เมื่อ  $K_e$  = ค่าคงที่ของกระแสฟิลด์  
 $\dot{\theta}$  = ความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์



รูปที่ 3.10 แสดงบล็อกไดอะแกรมโวลต์เต้จ้ย้อยกลับของมอเตอร์



รูปที่ 3.11 แสดงลิ้นเข็มเซอร์โว

จากกฎการเคลื่อนที่ สามารถเขียนเป็นสมการของชุดลิ้นเข้มเซอร์โวดังนี้

$$I_{\text{motor}} + I_{\text{gear\#1}} + \left( m_{\text{screw}} \frac{a_s^2}{2} + I_{\text{gear\#2}} \right) \frac{1}{N_g^2} + \left( m_{\text{screw}} + m_{\text{gear\#2}} \right) \frac{l_s^2}{4\pi^2 \eta N_g^2} \ddot{\theta}_1 + \left( B_{\text{motor}} + B_{\text{screw}} \frac{1}{N_g^2} \right) \dot{\theta}_1 = T_m \quad (3.30)$$

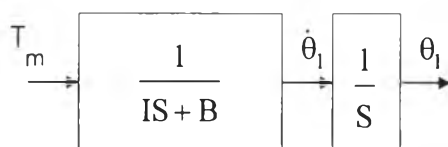
- เมื่อ
- $I_{\text{motor}}$  = โมเมนต์แรงเฉื่อยของมอเตอร์
  - $I_{\text{gear\#1}}$  = โมเมนต์แรงเฉื่อยฟันเฟืองตัวขับ
  - $I_{\text{gear\#2}}$  = โมเมนต์แรงเฉื่อยฟันเฟืองตัวตาม
  - $m_{\text{gear\#2}}$  = มวลภาวะของฟันเฟืองตัวตาม
  - $m_{\text{screw}}$  = มวลภาวะของแกนสกรูลิ้นเข้ม
  - $a_s$  = รัศมีของแกนสกรูลิ้นเข้ม
  - $l_s$  = ระยะเคลื่อนที่ของแกนสกรูลิ้นเข้มต่อการหมุน 1 รอบ (lead)
  - $\eta$  = ประสิทธิภาพการทำงานของแกนสกรูลิ้นเข้ม
  - $N_g$  = อัตราทดของฟันเฟืองจะเท่ากับจำนวนฟันของตัวตามต่อจำนวนฟันของเฟืองตัวขับ
  - $B_{\text{motor}}$  = สัมประสิทธิ์วิสกอสแดมปีงของมอเตอร์
  - $B_{\text{screw}}$  = สัมประสิทธิ์วิสกอสแดมปีงของแกนสกรูลิ้นเข้ม
  - $\theta_1$  = ตำแหน่งเชิงมุมของแกนมอเตอร์
  - $\theta_2$  = ตำแหน่งเชิงมุมของแกนสกรูลิ้นเข้ม
  - $T_m$  = แรงบิดของมอเตอร์

เขียนใหม่เป็น

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_m \quad (3.31)$$

โดย 
$$I = I_{\text{motor}} + I_{\text{gear\#1}} + \left( m_{\text{screw}} \frac{a_s^2}{2} + I_{\text{gear\#2}} \right) \frac{1}{N_g^2} + (m_{\text{screw}} + m_{\text{gear\#2}}) \frac{l_s^2}{4\pi^2 \eta} \frac{1}{N_g^2}$$

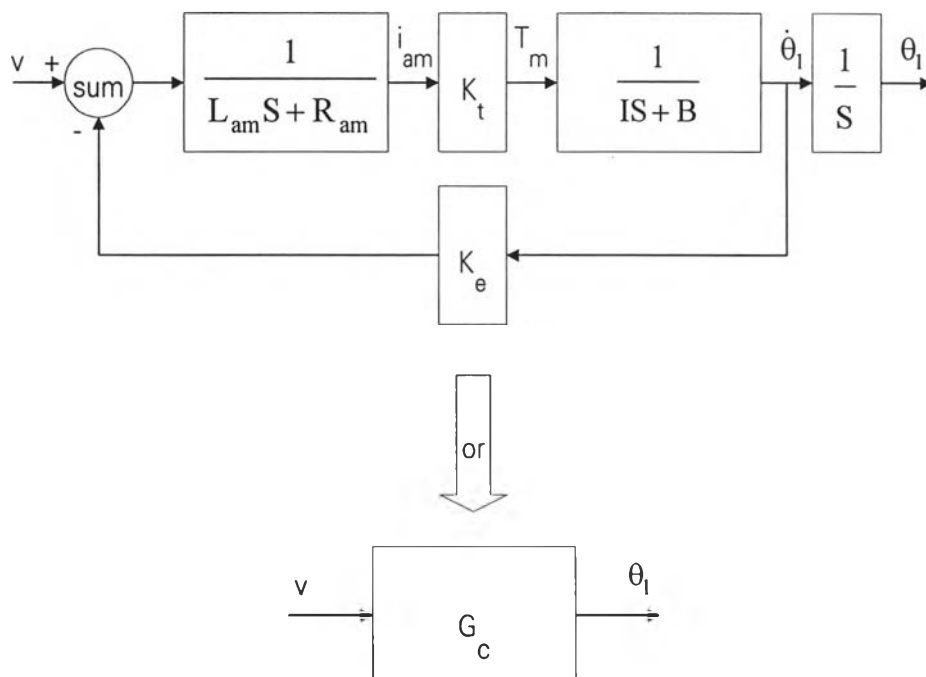
$$B = B_{\text{motor}} + B_{\text{screw}} \frac{1}{N_g^2}$$



รูปที่ 3.12 แสดงบล็อกไดอะแกรมของมอเตอร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลิ้นเข็มเซอร์โว นำมาเป็นบล็อกไดอะแกรมดัง

รูป 3.13



รูปที่ 3.13 แสดงบล็อกไดอะแกรม ลิ้นเข็มเซอร์โว