

### บทที่ 3

#### แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม

แม้ว่าแผนภูมิการควบคุมของชีวฮาร์ตจะมีการนำไปใช้งานอย่างกว้าง แต่ยังคงพบว่าแผนภูมินี้มีข้อบกพร่องอยู่บางประการซึ่งเป็นประเด็นหลักคือจะใช้ข้อมูลตัวสุดท้ายมาพล็อตบนแผนภูมิเท่านั้น ทำให้แผนภูมิการควบคุมของชีวฮาร์ตไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเมื่อกระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมายเพียงเล็กน้อยคือมีค่าไม่เกิน  $2\sigma$  มีการใช้เกณฑ์อื่นๆกับแผนภูมินี้เช่น การทดสอบการ run ของข้อมูล การใช้ warning limit ซึ่งพยายามจะใช้ข้อมูลทั้งหมดในการตัดสินใจ อย่างไรก็ตามการใช้เกณฑ์เหล่านี้จะทำให้ยากต่อการตีความแผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ตทางเลือกอื่นที่มีประสิทธิผลสำหรับกระบวนการที่เลื่อนไปเพียงเล็กน้อย นั่นคือแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม (Cumulative-Sum: Cusum control chart) และ Exponentially weighted moving-average (EWMA) control chart ซึ่งในที่นี้จะกล่าวแต่เพียงแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมเท่านั้น

แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมจะรวมข้อมูลทั้งหมดที่ลำดับกันของข้อมูล ตัวอย่าง โดยการพล็อตค่าผลรวมสะสมของค่าตัวอย่างที่เบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมาย การรวมข้อมูลจากหลายๆตัวอย่างนี้ ทำให้แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมมีประสิทธิผลมากกว่าแผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ตในการหาสภาวะออกนอกการควบคุมเมื่อกระบวนการเลื่อนออกไปเพียงเล็กน้อย ยิ่งไปกว่านั้นแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมนี้จะมีประสิทธิผลเมื่อขนาดตัวอย่าง  $n = 1$  ดังนั้นในอุตสาหกรรมเคมี หรืออุตสาหกรรมอื่นๆที่มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 1 สามารถเลือกใช้แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมได้ดี รวมถึงการผลิตชิ้นส่วนอุตสาหกรรมที่มีการวัดโดยอัตโนมัติขณะปฏิบัติงานและใช้ไมโครคอมพิวเตอร์ในการวัด

#### Traditional Cusum Control Chart

Page (1954) ได้นำเสนอแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมนี้ และมีการศึกษาต่อมาอีกมาก เช่น Ewan (1963) Page (1961) Johnson (1961) Johnson และ Leone (1962 a, 1962b, 1962c) Lucsa (1976) แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมนี้สามารถใช้ได้กับตัวแปรหลายชนิดเช่น ค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (process mean) ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของ

ตัวอย่าง (sample standard deviations) และพิสัย (ranges) ซึ่งนำเสนอโดย Johnson และ Leone (1962a, 1962b, 1962c) และ Page (1963)

Traditional Cusum Control Chart ได้รับการพัฒนาจากแนวความคิดของการทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis testing) โดยการใช้ sequential likelihood ratio สมมติฐานทั้งสองคือ null hypothesis และ alternative hypothesis มีดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= \mu_0 \\ H_1 : \mu &= \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0) \end{aligned} \quad (1)$$

เมื่อ  $\mu$  คือ mean ของ  $X$  และระบุนค่าของ type I errors ( $\alpha$ ) และ type II errors ( $\beta$ ) ไว้ก่อน จากสมมติฐานข้างต้นจะได้รับการยอมรับเมื่อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \text{likelihood ratio for the data} < \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (2)$$

ถ้ามีข้อมูลตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกันและเรียงลำดับตามเวลา  $X_1, X_2, \dots, X_t$  มาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ มีค่าความแปรปรวน (variance)  $\sigma_x^2$  แต่มีค่า mean ไม่แน่นอน สามารถเขียนสมการที่ 2 ได้เป็น

$$\frac{\sigma_x^2}{\Delta_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} < S_t < \frac{\sigma_x^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (3)$$

เมื่อ  $\Delta_1 = \mu_1 - \mu_0$  เป็นค่าความแตกต่างระหว่างค่า means ของสมมติฐานหรือเป็นค่าที่กระบวนการเลื่อนไปจากค่า mean ของกระบวนการ  $\mu_0$  และ

$$S_t = \sum_{i=1}^t \left\{ X_i - \left( \mu_0 + \frac{\Delta_1}{2} \right) \right\} \quad (4)$$

เป็นผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมของข้อมูลจากค่าเฉลี่ยของค่า mean 2 ค่า

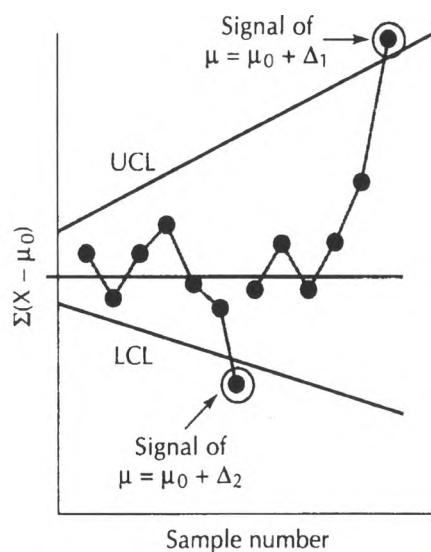
ในการหาค่าการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย  $\mu_0$  ของกระบวนการ ซึ่งสามารถเป็นไปได้ 2 ทิศทางคือ เลื่อนขึ้นหรือลง ถ้าให้ค่าที่เลื่อนไปทั้ง 2 ค่านี้ เป็น  $\mu_1$  และ  $\mu_2$  ซึ่ง  $\mu_1 > \mu_0$  และ  $\mu_2 < \mu_0$  ด้วยค่าโอกาสเกิด type II error เป็น  $\beta_1$  และ  $\beta_2$  และมีค่า type I error เป็น  $2\alpha$

จากสมการที่ 2 และ 3 จะได้ค่าของ upper control limit และ lower control limit จาก ค่าตรงกลางของ cumulative sum  $\Sigma(X_i - \mu_0)$  เป็น

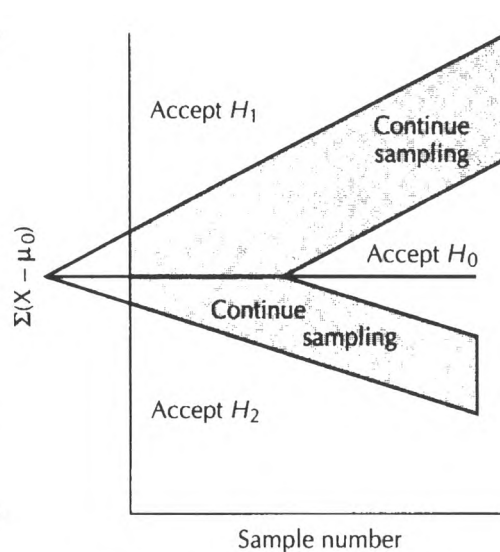
$$UCL = \frac{\sigma_x^2}{\Delta_1} \ln \frac{(1 - \beta_1)}{\alpha} + t \left( \frac{\Delta_1}{2} \right) \quad (5)$$

$$LCL = \frac{\sigma_x^2}{\Delta_2} \ln \frac{(1 - \beta_2)}{\alpha} + t \left( \frac{\Delta_2}{2} \right) \quad (6)$$

เมื่อ  $\Delta_1 = \mu_1 - \mu_0$  และ  $\Delta_2 = \mu_2 - \mu_0$  ดังนั้นสมการที่ (5) และ (6) สำหรับขอบเขตการควบคุมเป็นฟังก์ชันของจำนวนตัวอย่าง  $t$  ค่าขอบเขตการควบคุมบนและขอบเขตการควบคุมล่างเป็นเส้นที่มีแนวโน้มเป็น linear สำหรับแผนภูมิการควบคุม แทนที่จะเป็นเส้นตามแนวนอน ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 3-1 (ก) โดยทั่วไปแล้วค่าการเลื่อนไปจากค่า mean อาจเป็นไปได้ในทางขึ้นหรือลง ( $\Delta_1$  และ  $\Delta_2$ ) แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมอาจใช้สำหรับกระบวนการที่เลื่อนไปจากค่าเป้าหมายทั้ง 2 ด้าน รูปที่ 3-1 (ก) แสดงให้เห็นว่า มี 1 จุดที่เลื่อนลงไปจากค่าเป้าหมายและอีก 1 จุดเลื่อนขึ้นไปทางด้านบน



ก) Two-sided cusum control chart



ข) Sequential acceptance sampling scheme

รูปที่ 3-1 แสดงถึง Two-Sided Sequential Probability Ratios สำหรับ Acceptance Sampling และสำหรับแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม



รูปที่ 3-2 แสดงถึงการใช้ V mask เมื่อพบสภาวะออกนอกการควบคุม ณ ข้อมูลที่  $t$  กระบวนการได้เลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย mean ทางด้านบนซึ่งอาจเกิดขึ้นตั้งแต่ 3 ถึง 7 ช่วงเวลา ก่อนหน้านี้ ดังที่พบในภาพ ข้อมูลของช่วงเวลาที่พบบนแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม ดังนี้ เป็นข้อดีข้อหนึ่งของแผนภูมินี้ ถ้าเวลาที่กระบวนการเลื่อนไปจริงเป็นตัวอย่างที่  $t-m$  สามารถประมาณขนาดของช่วงเวลาที่กระบวนการเลื่อนไปจริง ( $\Delta$ ) นี้ได้จาก

$$\text{ค่าประมาณของ } \Delta = (S_t - S_{t-m}) / m$$

เมื่อ

$$S_t = \sum_{i=1}^t \{X_i - \mu_0\}$$

สามารถสร้าง V mask ได้โดยการกำหนดค่า  $d$  และมุม  $\phi$  ดังแสดงในรูปที่ 3-2 เมื่อค่า  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  ได้จากสูตร

$$d = \frac{2}{\Delta} \left[ \frac{\sigma_x^2}{\Delta} \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha} \right] \quad \text{และ} \quad \tan \phi = \frac{h\Delta}{2}$$

เมื่อ  $h$  เป็นแฟคเตอร์ซึ่ง 1 ช่วงการชักตัวอย่างเท่ากับ  $h$  cusum unit

แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมดั้งเดิมสำหรับ Sample Means

ถ้าเก็บข้อมูลตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกันขนาด  $n$  สามารถหาค่าของ sample means ได้

$$((\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_t))$$

สามารถหาค่า UCL และ LCL ได้จาก

$$UCL = \frac{\sigma_x^2}{n\Delta_1} \ln \frac{(1-\beta_1)}{\alpha} + t \left( \frac{\Delta_1}{2} \right) \quad (7)$$

$$LCL = \frac{\sigma_x^2}{n\Delta_2} \ln \frac{(1-\beta_2)}{\alpha} + t \left( \frac{\Delta_2}{2} \right) \quad (8)$$

$$LCL = \frac{\sigma_x^2}{n\Delta_2} \ln \frac{(1-\beta_2)}{\alpha} + t \left( \frac{\Delta_2}{2} \right) \quad (8)$$

เมื่อ  $\Delta_1 = \mu_1 - \mu_0$  และ  $\Delta_2 = \mu_2 - \mu_0$  และค่าสถิติความเบี่ยงเบนสะสมหาได้จาก

$$S_i = \sum_{i=1}^i \{ \bar{X}_i - \mu_0 \}$$

สูตรในการหาค่า  $d$  และ slope ของขอบเขตการควบคุมสำหรับ V mask เมื่อ  $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$  และ  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  คือ

$$d = \frac{2}{\Delta} \left[ \frac{\sigma_x^2}{n\Delta} \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha} \right] \quad \text{และ} \quad \tan \phi = \frac{h\Delta}{2}$$

#### Shewhart-Like Cusum Control Charts

การประมาณค่าเป้าหมายของพารามิเตอร์ของกระบวนการและขนาดการเลื่อนของกระบวนการที่ต้องการหาอย่างถูกต้องจะทำให้การใช้งานแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมประสบผลสำเร็จ บ่อยครั้งที่ไม่สามารถประมาณค่าได้อย่างถูกต้องหรือยากต่อการระบุค่าของพารามิเตอร์ ทำให้ไม่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับการใช้แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมแบบดั้งเดิม จึงมีการพิจารณาใช้แผนภูมิการควบคุมแบบอื่น

มีการนำข้อดีของค่าสถิติความเบี่ยงเบนสะสมซึ่งทำให้มีความไวเพิ่มขึ้นมาสร้างแผนภูมิการควบคุมโดยใช้หลักการของแผนภูมิการควบคุมแบบซีวฮาร์ต ดังจะกล่าวต่อไปนี้

#### Shewhart-Like Cusum Control Charts สำหรับ Individual Measurements

แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมสามารถใช้งานกับข้อมูลที่เป็นข้อมูลเดี่ยวอย่างมีประสิทธิภาพ ให้  $X_1, X_2, \dots, X_t$  เป็นข้อมูลการวัดข้อมูลเดี่ยวที่เก็บข้อมูลมาถึงข้อมูลตัวที่  $t$  สามารถแสดงค่าสถิติความเบี่ยงเบนได้เป็น

$$S_t = \sum_{i=1}^t \{ X_i - m \} = S_{t-1} + (X_t - m)$$

และค่าเฉลี่ยของกระบวนการที่ถูกต้องเท่ากับ  $m$  แล้วค่า  $S_i$  จะมีค่าวิ่งอยู่ใกล้กับค่า  $m$  ในแนวนอน โดยไม่มี trend ใดๆ แต่ถ้ากระบวนการมีค่าเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย  $m$  ในทางขึ้นหรือลง ค่าสถิติความเบี่ยงเบนนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นขั้นๆ ถ้ากระบวนการเลื่อนไปเรื่อยๆ trend นี้จะเป็น linear ดังนั้นในการพิจารณาแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม จะต้องมองหาเส้นที่มี trend ของผลรวมติดต่อกัน

ทางเลือกอื่นในการใช้แผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมสำหรับข้อมูลการวัดข้อมูลเดี่ยว ที่สมมติการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายแบบปกติ ซึ่งมีค่า mean =  $\mu_x$  และ standard deviation =  $\sigma_x$  ถ้าข้อมูลตัวอย่างข้อมูลเดี่ยวเหล่านั้นเป็น  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$  แล้ว เราสามารถทำค่าเหล่านั้นให้เป็นมาตรฐานโดย

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_x}{\sigma_x}$$

ในการหาผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมจะรวมค่า  $Z$  แทนค่า  $X$  ซึ่งผลรวมของ  $Z$  จะเป็นการกระจายแบบปกติซึ่งมี mean = 0 และ variance =  $t$  ( variance ของค่า  $Z$  แต่ละตัวจะเป็น 1 ดังนั้น variance ของค่า  $Z$  ที่เป็นอิสระ  $t$  ตัวจะมีค่าเป็น  $(t)(1.0) = t$  ) ดังนั้นสามารถเขียนค่าผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมได้เป็น

$$S_i^* = \frac{\sum_{i=1}^t Z_i}{\sqrt{t}}$$

ซึ่งเป็นไปตาม standard normal distribution หลังจากนั้นก็พล็อตจุด  $S_i^*$  ลงในแผนภูมิที่มีขอบเขตการควบคุมเป็น  $\pm 3$  และมี center line = 0 ดังนั้นสำหรับแผนภูมิการควบคุมอื่นๆที่มีลักษณะคล้ายกับแผนภูมิชีวฮาร์ตสามารถสร้างสำหรับแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสมได้เช่นกัน

การสร้างแผนภูมิการควบคุมความเบี่ยงเบนสะสม (กรณีขนาดตัวอย่างเป็นข้อมูลวัดค่าเดียว)

1. เก็บข้อมูลอย่างน้อย  $k = 25$  ข้อมูลวัดที่มีขนาดตัวอย่าง  $n = 1$  ตามลำดับเวลา  $X_1, X_2, \dots, X_k$

2. คำนวณค่า  $\bar{X}$  และ  $s_x$  จากข้อมูล ค่าเหล่านี้จะใช้ประมาณค่า mean และค่า standard deviation ที่แท้จริงของข้อมูล X ได้คือ

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k}, \quad s_x = \left[ \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2}{k-1} \right]^{1/2}$$

3. เปลี่ยนค่า X ให้เป็นค่ามาตรฐาน Z ทุกค่า  $i = 1, 2, 3, \dots, k$

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s_x}$$

4. รวมค่าความเบี่ยงเบนสะสมของ Z ทุกค่า  $i = 1, 2, 3, \dots, k$

$$sum_t = \sum_{i=1}^t Z_i$$

5. จะได้ค่ามาตรฐานของค่าความเบี่ยงเบนสะสมสำหรับข้อมูลแต่ละ t เมื่อ  $k = 1, 2, 3, \dots, k$

$$S_t^* = \frac{sum_t}{\sqrt{t}}$$

6. พล็อตค่าของ  $S_t^*$  ลงในแผนภูมิความเบี่ยงเบนสะสมมาตรฐาน เมื่อ

$$\text{center line} = 0$$

$$\text{UCL} = 3$$

$$\text{LCL} = -3$$

7. ตีความหมายของแผนภูมิ โดยเฉพาะ trend ของผลรวม ถ้ามี assignable cause เกิดขึ้นแสดงถึงสภาวะออกนอกการควบคุม จะต้องมีการทบทวนแผนภูมิโดยนำข้อมูลกลุ่มที่อยู่ใน trend ออกไป

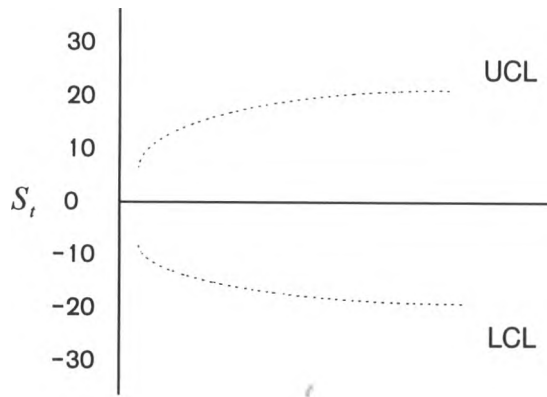
### Shewhart-Like Cusum $\bar{X}$ Control Charts

เราสามารถสร้างแผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ตสำหรับค่าสถิติความเบี่ยงเบนสะสมซึ่งคำนวณจากข้อมูล sample means ที่เป็นอิสระต่อกันเรียงตามลำดับเวลา ถ้ากระบวนการมีตัวแปรคุณภาพ (quality variable) เป็น X ซึ่งมีค่า mean =  $\mu_x$  และมีค่าความเบี่ยงเบนเป็น  $\sigma_x$  ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้จะระบุว่าค่าทั้งสองเป็นค่าที่ทราบได้จากข้อมูลในอดีตดังนั้นสามารถหาค่าผลรวมสะสมของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample means) จากค่า  $\mu_x$  ได้คือ

$$S_t = \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \mu_x) \quad (9)$$

ซึ่งมีค่า mean = 0 และ variance (ความแปรปรวน) =  $(t/n)(\sigma_x^2)$  เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น n แผนภูมิควบคุม 3 sigma แสดงดังรูปที่ 3-3



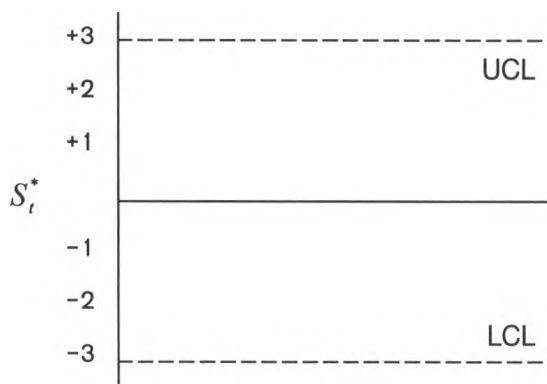


รูปที่ 3-3 แสดงขอบเขตการควบคุมของ Cusum Chart

เมื่อพิจารณาค่าสถิติ cusum ในค่าความเบี่ยงเบนต่อหน่วยจะได้

$$S_t^* = \frac{S_t}{\sigma_x \sqrt{t/n}} \quad (2)$$

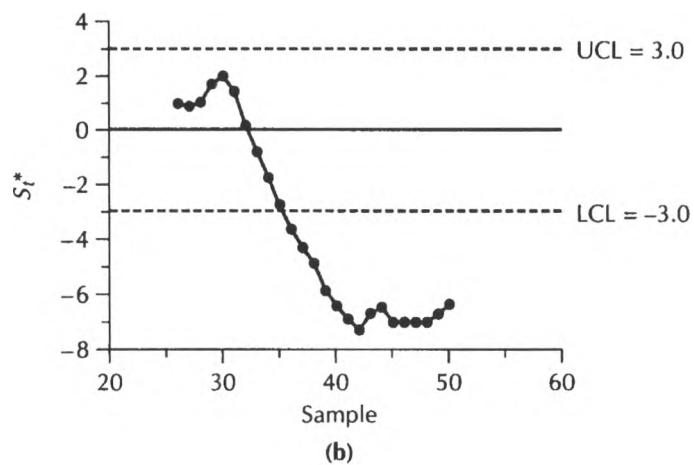
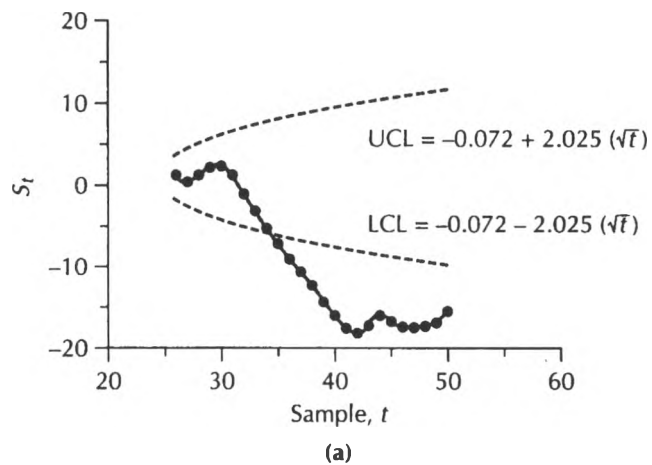
ซึ่งประมาณได้เป็นการกระจายปกติมีค่า mean = 0 และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 หรือ  $N(0,1)$  สำหรับขนาดตัวอย่างเป็น  $n$  สามารถแสดงภาพการควบคุมเมื่อค่าขอบเขตการควบคุม (control limit) เป็น 3 sigma ได้เป็น



รูปที่ 3-4 แสดงขอบเขตการควบคุมเมื่อค่าขอบเขตการควบคุมเป็น 3 sigma

จากการนำข้อมูลจากการทดลอง 25 ข้อมูล สมมติว่าข้อมูลมีการกระจายปกติสำหรับการวัดแต่ละค่า มาสร้างแผนภูมิควบคุม 2 แบบ โดยแบบที่ 1 มีค่าขอบเขตการควบคุมเป็นปกติ และแบบที่ 2 ทำข้อมูลให้เป็นมาตรฐานดังที่กล่าวมาแล้วจึงนำมาพล็อตลงบนแผนภูมิการควบคุมซึ่ง

มีขอบเขตการควบคุมเป็น  $\pm 3$  จะได้ดังภาพที่ 5 พบว่าจากทั้งสองภาพให้ผลเดียวกันข้อมูลตัวอย่างที่ 31 ไปจนถึง 39 มีแนวโน้มลง และแผนภูมิบอกสภาวะออกนอกการควบคุม ณ ข้อมูลที่ 35



รูปที่ 3-5 แสดงถึงการสร้างแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม 2 แบบ